2.4 克拉默法则

一、 逆矩阵的简明表达式

二、 AX=b解的简明表达式

一、逆矩阵的简明表达式

引理1 设$A=(a_{ij})_{n,n}$，则

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det A, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

证

$$设i\neq j: \ a_{i1}A_{j1}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{array}{|ccc|l}a_{11} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} & i行\\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} & j行\\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \end{array}=0$$

返回

设A为n阶矩阵，

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det A, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

??

$$=\mathrm{diag}(\det A, \det A, \ldots, \det A)=(\det A)I$$

返回

引理2 设A为n阶矩阵，则 $AA^* = A^*A = (\det A)I$，其中：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

（A的伴随矩阵）

定理 1 方阵A可逆的充要条件为$|A|\neq 0$。当A可逆时，

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

返回

定理 1 方阵A可逆的充要条件为$|A|\neq 0$。当A可逆时，

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}.$$

证 A可逆的充要条件为$|A|\neq 0$。（前面已证）

当A可逆时， $|A|\neq 0$：

$$AA^{*}=(\det A)I,$$

$$A\left(\frac{1}{\det A}A^{*}\right)=I,$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}.$$

求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 1 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$是否可逆？若可逆则求$A^{-1}$.

解

$\det A = 196 \neq 0$, 所以A可逆。

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{196}\begin{pmatrix} 29 & 55 & -19 \\ 5 & 23 & 17 \\ 26 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

例2 设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求$(A^*)^{-1}$.

解 $AA^*=(\det A)I$，　A^{-1}存在，所以$\det A\neq0$，

$$\left(\frac{1}{\det A}A\right)A^*=I,\qquad (A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A.$$

$$\frac{1}{\det A}=\det A^{-1}=2.$$

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{\det A^{-1}}(A^{-1})^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A=2A=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

二、AX=b的解的简明表达式

已有定理： 方阵A可逆的充要条件为$AX=b$有唯一解.

设A可逆，则$AX=b$的唯一解为：

$$X=A^{-1}b=\frac{1}{\det A}A^{*}b$$

$$A^{*}b=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_j=\frac{b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}}{\det A}.$$

返回

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}}{\det A}.$$

$$b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \ (j = 1, \ldots, n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} = \det A_j$$

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}}{\det A} = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

返 回

克拉默法则. 设A可逆，则$AX=b$的唯一解为：

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \ (j = 1, ..., n)$$

$\det A_j$是用b代替$\det A$中的第j列得到的行列式.

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

例3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + a^2 x_3 = 1 \\ x_1 + b x_2 + b^2 x_3 = 1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-1)(a-1)$$

若 $b \neq a$, $b \neq 1$, $a \neq 1$, 则 $|A| \neq 0$.

$$|A_1| = |A|,$$

返回

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1\,, \quad x_2 = x_3 = 0\,.$$

例4 求一个二次多项式$f(x)$，使

$$f(1)=0,\quad f(2)=3,\quad f(-3)=28.$$

解 设所求的二次多项式为

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

得一个关于未知数 a,b,c 的线性方程组，

$$f(1)=a+b+c=0,$$

$$f(2)=4a+2b+c=3,$$

$$f(-3)=9a-3b+c=28,$$

又 $D=-20\neq 0,\ \ D_1=-40, D_2=60, D_3=-20.$

得 $a=D_1/D=2, b=D_2/D=-3,\ \ c=D_3/D=1$

故所求多项式为

$$f(x)=2x^2-3x+1.$$

注意： 解方程组一般不用Gramer法则，计算量非常大，不具有实际计算意义，主要是理论上的意义（如，给出了解的表达式）。