4.2　向量组的线性相关性

一、向量组的线性组合

二、向量组的线性相关性

向量组：同维的向量所组成的集合.

$\alpha_1=(0,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$

两个3维向量组成的向量组

$$v_1=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}\quad v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

返回

向量组与矩阵：

例如 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 有n个m维列向量

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & & a_j & & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$称为矩阵A的列向量组.

类似地,矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$又有m个n维行向量

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \cdots \quad\quad \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \cdots \quad\quad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \\ \alpha_i^{\mathrm{T}} \\ \\ \alpha_m^{\mathrm{T}} \end{matrix}$$

向量组 $\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \alpha_m^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵A的行向量组.

反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.

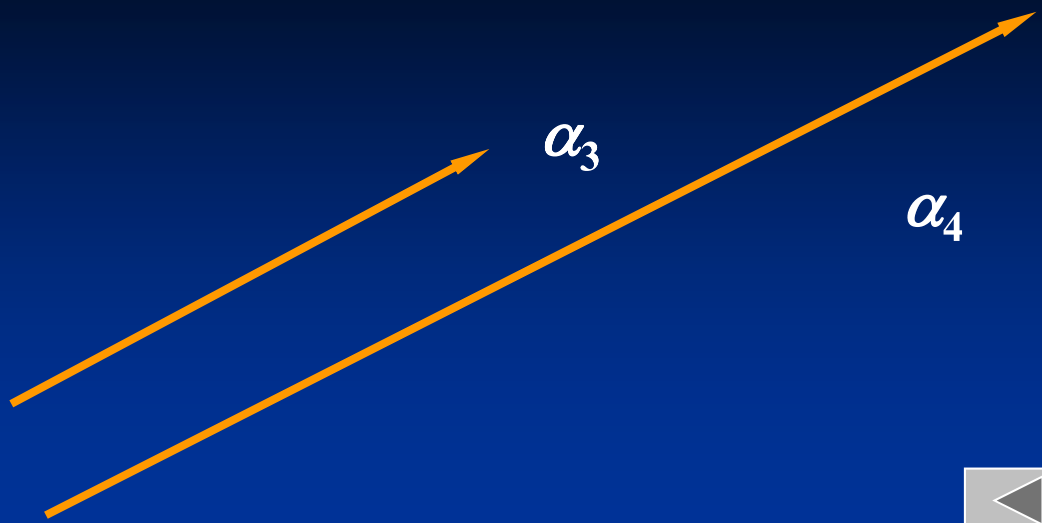
一、向量组的线性组合

$\alpha_4=2\alpha_3$， α_4可由α_3表示出来，而且表示关系是线性的，因此叫做

α_4可由α_3线性表示，

α_4是α_3的线性组合.

$L(\alpha_1)$: α_1线性组合的全体. 由α_1生成的子空间.

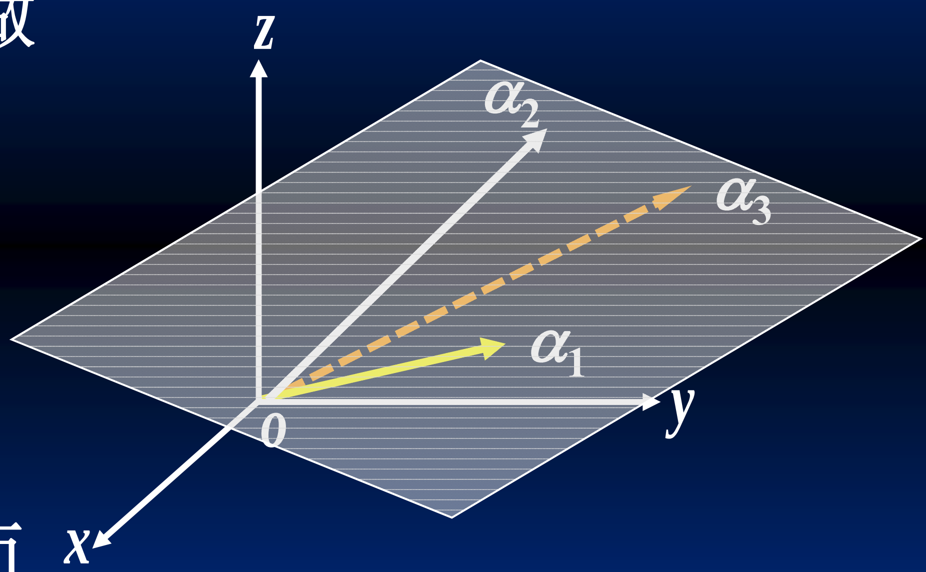


返回

一、向量组的线性组合

$\alpha_3 = k\alpha_1 + s\alpha_2$，$\alpha_3$ 可由另两个向量表示出来，而且表示关系是线性的，因此叫做

α_3 可由 α_1 和 α_2 线性表示.
α_3 是 α_1 和 α_2 的线性组合.



$\Leftrightarrow$ 在 R^3 中，α_1, α_2，α_3 共面

$L(\alpha_1,\alpha_2)$: α_1, α_2 线性组合的全体.

由 α_1, α_2, 生成的子空间.

一、向量组的线性组合

定义1 若存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

则称向量β为向量组α_1，α_2，…，α_m的线性组合，或称β可由α_1，α_2，…，α_m线性表出.

$L(\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性组合的全体.

由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$生成的子空间.

$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性组合的全体.

由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 生成的子空间.

$m=1$, $k_1\alpha_1$ 直线.

$m=2$, $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 平面.

$m=3$, $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 体.

例1 零向量是任一向量组的线性组合.

$$\mathbf{0} = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m .$$

例2 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$中任一向量都可由这个向量组线性表出.

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_m .$$

例3 $\mathbf{R}^3 = L(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$

因为 $(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$

$\mathbf{R}^2 = L(\vec{i}, \vec{j}),$

$$\mathbf{R}^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n),$$

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即，任一n维向量均可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

例 将$b=(1,0,-4)^T$用$\alpha_1=(0,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$, $\alpha_3=(1,1,0)^T$线性表出.

解 $$b=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3.$$

即 $$x_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},$$ 求方程组的解

$$\overline{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{5}{2}\\0&1&0&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{5}{2}\end{array}\right)$$

所以，$b=-\dfrac{5}{2}\alpha_1-\dfrac{3}{2}\alpha_2+\dfrac{5}{2}\alpha_3.$

例 将$b=(1,0,-4)^T$用$\alpha_1=(0,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$, $\alpha_3=(1,1,0)^T$ 线性表出.

$$b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3.$$

5° $b \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$;

1° b能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示出来;

2° 能找到x_1, x_2, x_3;

3° $AX = b$ 有解; $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

4° $R(\overline{A}) = R(A)$.

返回

定理1 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价：

1° $b\in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$;

2° $AX=b$有解； $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)X=b$有解

3° $R(\overline{A})=R(A)$.

向量个数 = 向量维数：

推论1 设有n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价：

1º $b \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$;

2º $AX = b$有解；　$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) X = b$有解

3º $\det A \neq 0$

4º $R(A) = n$.

例 $b=(1,0,-4)^T$ 是不是 $\alpha_1=(0,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$, 的线性组合？即能否由它们线性表出？

解 $$b=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2.$$

即 $$x_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}=(\alpha_1,\alpha_2,b)=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&1\\1&0&0\\1&1&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-5\end{array}\right)$$

方程组无解，不能由它们线性表出。

例 $b = (1,0,-4)^T$ 是不是 $\alpha_1 = (0,1,1)^T$, $\alpha_2 = (0,0,1)^T$, $\alpha_3 = (0,1,0)^T$ 的线性组合？即能否由它们线性表出？

解 $$b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3.$$

即 $$x_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},$$

$$\overline{A} = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

方程组无解，不能由它们线性表出。

返回

问b能否用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示出来;

$AX=b$ 是否有解; A=($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)

$R(\overline{A})=R(A)$.

将b具体用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示出来;

$AX=b$ 求解; A=($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)

后面向量能否用前面的向量线性表示出来?

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4\\3\\14\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4\\3\\14\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4\\3\\14\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4\\3\\14\end{pmatrix}$$

返回

特殊情形:

(1) 两个向量:

α_1可由α_2线性表示 $\Leftrightarrow$ 它们的对应分量成比例.

$\Leftrightarrow \alpha_1 // \alpha_2$ (或共线)

(2) 三个向量 :

α_3可由α_1, α_2线性表示 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$共面.

返回

定义2 $(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$,

$(\mathrm{II}): \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$,

若组(Ⅰ) 中每一个向量都可由(Ⅱ)中的向量线性表出，则称 组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出.

若组(Ⅰ)与组(Ⅱ)可以互相线性表出，则称 组(Ⅰ)与组(Ⅱ)等价.

等价关系有性质：

(1) 反身性：每一向量组都与自身等价；

(2) 对称性：(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，则(Ⅱ)与(Ⅰ)等价；

(3) 传递性：(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，(Ⅱ)与(Ⅲ)等价,则 (Ⅰ)与(Ⅲ)等价.

返回

二、向量组的线性相关性

(1) 两个向量：

$$\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

α_1=kα_2 则称α_1依赖于α_2，
称α_1和α_2相关，而且是线性相关；

存在不全为零的数1,-*k*,使得

$$1\alpha_1\text{-}k\alpha_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

线性无关.

$$x_1\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=0$$

只有当所有的系数x_1=x_2都为0才成立。

返回

二、向量组的线性相关性

(1) 两个向量：

$$\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$ 线性无关. $$x_1\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=0$$

只有当所有的系数$x_1=x_2$都为0才成立。

反之，如果有某个系数x_1不为0，则

$$\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}=\frac{x_2}{x_1}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

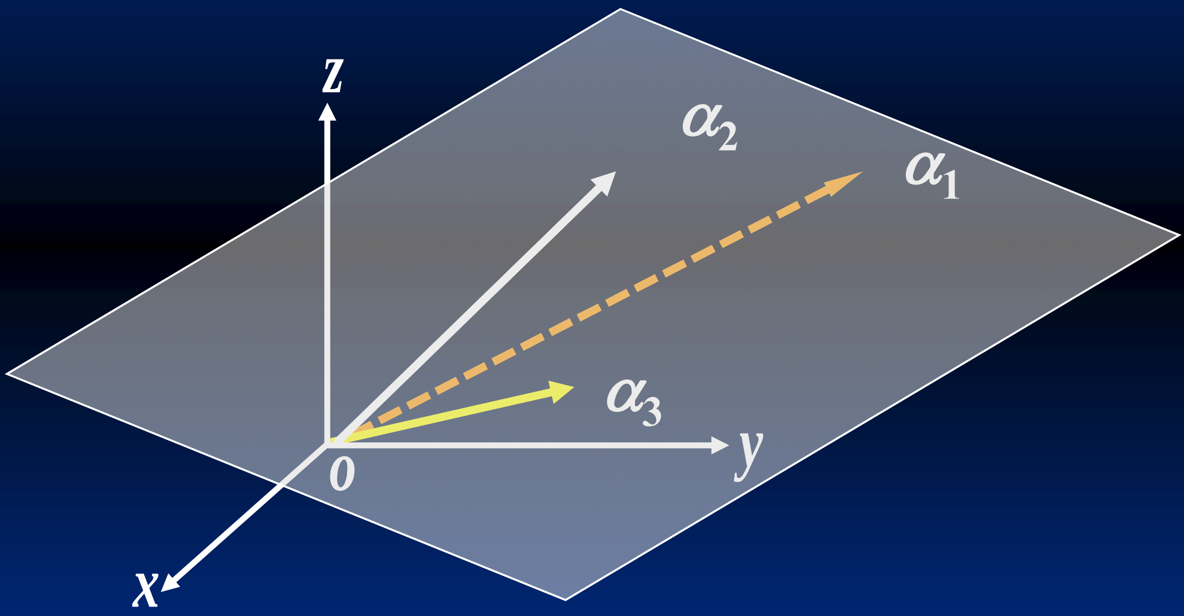
线性相关.

矛盾

(2) 三个向量：

$\alpha_1 = k\alpha_2 + s\alpha_3$　　则称 α_1 依赖于 α_2, α_3

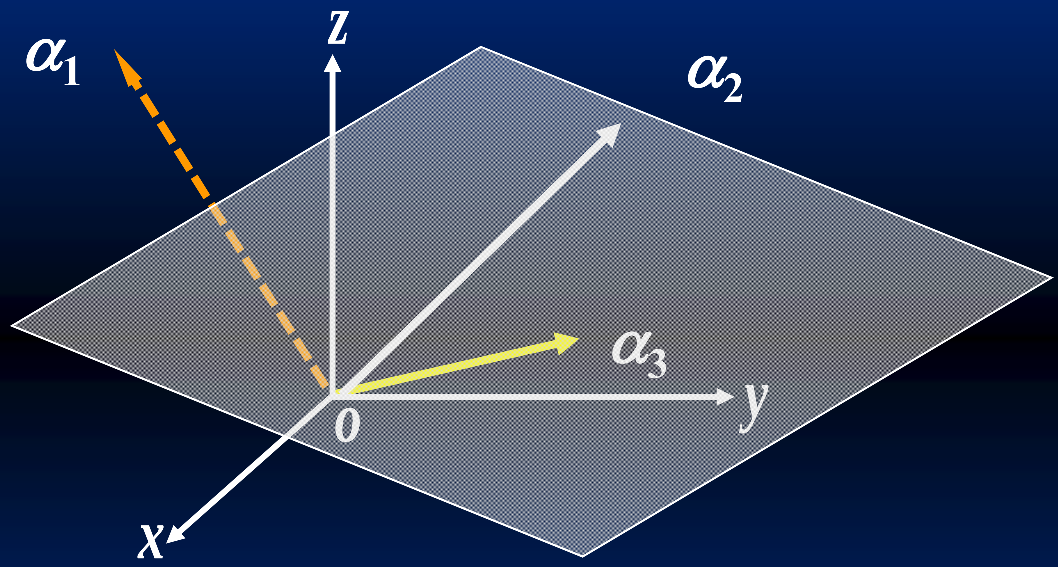
称 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关；



⇔存在不全为零的数k，s，-1, 使得

$$k\alpha_1 + s\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$\alpha_1 \neq k\alpha_2 + s\alpha_3$ 则称$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关;



$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$只有当所有的系数都为0才成立，

系数不为0的组合得不到0向量。

定义 若存在不全为零的数$x_1, x_2, \ldots, x_m$使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = 0 \qquad (*)$$

则　　称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关;

否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关.

对一组向量，如果能找到一个系数不为0的线性组合，使得和向量为0，则这组向量相关，

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = 0$只有当所有的系数都为0才成立，称为无关。

或系数不为0的组合得不到0向量。

◀ ▶ 返回

例 判断向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

特殊情形：

(1) 两个向量：

α_1, α_2线性相关 $\Leftrightarrow$ 它们的对应分量成比例.

$\Leftrightarrow \alpha_1 // \alpha_2$ (或共线)

(2) 三个向量：

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面.

(3) 一个向量α:

α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$ ；

特殊情形：

(1) 两个向量：

α_1, α_2线性无关 $\Leftrightarrow$ 它们的对应分量不成比例.

$\Leftrightarrow$ 不平行（不共线)

(2) 三个向量：

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不共面.

(3) 一个向量α:

α线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 0$；

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$ 设$k_1 \neq 0$

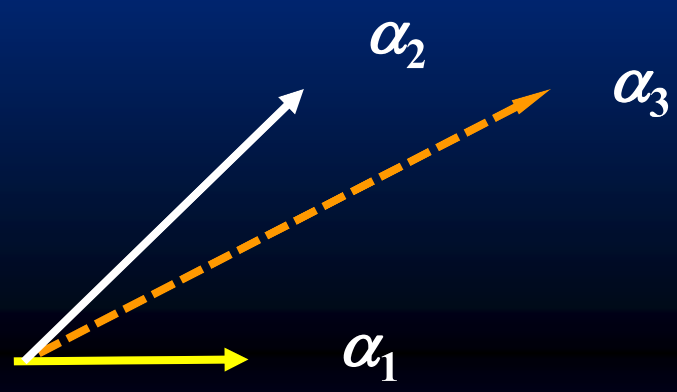
有$\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$

所以α_1各分量和α_2的各分量成比例

$\Leftarrow$若$\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = k$,则$\alpha_1 - k\alpha_2 = 0$

所以两者线性相关。

在 R^3 中，α_1, α_2，α_3 共面⇔其中至少有一个向量可由另两个向量线性表示.



$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ ⇔存在不全为零的数，使得

$$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

例1 n维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关.

证 考察 $x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = 0,$

$$\Leftrightarrow \quad x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

即只有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$

例2 含有零向量的向量组线性相关.

证 $1\,0 + 0\alpha_1 + \ldots + 0\alpha_m = 0$

例 判断向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

返回

例 判断向量组的线性相关性：

$\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$

解 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

即 $x_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，求方程组的解

$$\overline{A}=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}},0)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

只有零解，所以，线性无关。

判别m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$相关性，

$\alpha_1 = (0,1,1)^T, \alpha_2 = (1,0,1)^T, \alpha_3 = (1,1,0)^T$

第一步： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

第二步： $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 构成方程组 $AX = 0$

第三步： 求解方程组 $AX = 0$

1^o $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关;

2^o $AX = 0$只有零解;

3^o $R(A) = n$.

返回

判别m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$相关性，

第一步： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

第二步： $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 构成方程组 $AX = 0$

第三步： 求解方程组 $AX = 0$

1^o $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关;

2^o $AX = 0$只有零解;

3^o $R(A) = n.$

1^o $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关;

2^o $AX = 0$有非零解;

3^o $R(A) < n.$

定理2 设有m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价：

1^o $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关；

2^o $AX=0$有非零解；

3^o $R(A)<n$.

定理2 设有m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价：

1° $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关;

2° $AX = 0$只有零解;

3° $R(A) = n$.

向量个数 = 向量维数：

推论1 设有n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$s是方阵，则下列命题等价：

1° $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关（无关）；

2° $AX = 0$有非零解（只有零解）；

3° $\det A = 0$（$\neq 0$）.

例3 判断向量组$\alpha_1=(0,1,1)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(1,1,0)$的线性相关性：

解1

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

解2

$$A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$, 所以，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

例 判断向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$$

向量个数 >向量维数

$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\quad R(A) \le 3 < 4 = n$,

所以 线性相关.

◀ ▶ 返回

推论2 向量个数 >向量维数 的向量组必线性相关.

证 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{m\times n}$, $n>m$, 则

$$R(A)\le m<n,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关.

在$\mathbf{R}^n$中，任 $n+1$个向量必线性相关.

◀ ▶ 返回

例 判断向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}$$

例4 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，证 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$线性无关.

证 设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$,

即 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0.$

即 $(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0.$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以只有

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases} \quad (*) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以(*)只有零解. 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例4 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，讨论 $\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3+\alpha_4$, $\beta_4 = \alpha_4+\alpha_1$的线性相关性.

证 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 = 0$,

即 $x_1(\alpha_1+\alpha_2) + x_2(\alpha_2+\alpha_3) + x_3(\alpha_3+\alpha_1) + x_4(\alpha_4+\alpha_1) = 0$.

即 $(x_1+x_4)\alpha_1 + (x_1+x_2)\alpha_2 + (x_2+x_3)\alpha_3 + (x_3+x_4)\alpha_4 = 0$.

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，所以只有

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{1+4} = 0$$

有非零解. 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$线性相关.

例4.5 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关，讨论 $\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2+\alpha_3, \ldots, \beta_s = \alpha_s+\alpha_1$的线性相关性.

证 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \ldots + x_s\beta_s = 0$,

即 $x_1(\alpha_1+\alpha_2) + x_2(\alpha_2+\alpha_3) + \ldots + x_s(\alpha_s+\alpha_1) = 0.$

即 $(x_1+x_4)\alpha_1 + (x_1+x_2)\alpha_2 + \ldots + (x_{s-1}+x_s)\alpha_s = 0.$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关，所以只有

$$\begin{cases} x_1 + x_s = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{s-1} + x_s = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{1+s} = \begin{cases} 2 \neq 0, s\text{为奇数} \\ 0, s\text{为偶数} \end{cases}$$

当s为奇数时，方程组只有零解，故 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性无关；
当s为偶数时，方程组有非零解，故 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性相关.

线性相关性的基本定理

定理3 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$线性相关.

证 由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，知有不全为零的数$x_1, x_2, \ldots, x_n$使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = 0.$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m + 0\alpha_{m+1} + \ldots + 0\alpha_n = 0.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0$不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关.

“部分相关，则整体相关.”

返回

线性相关性的基本定理

定理3' 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关.

证 反证法，设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，知有不全为零的数$x_1, x_2, \ldots, x_n$使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = 0.$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m + 0\alpha_{m+1} + \ldots + 0\alpha_n = 0.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0$不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关，与已知矛盾，所以，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关。

"整体无关，则部分无关."

定理3 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$线性相关.

定理3' 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关.

若一群人中有人互相认识，则不论再向人群中加入多少人，还是有人互相认识。

若一群人中没有人互相认识，则不论从中挑出多少人，还是没有人互相认识。

定理4 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\,(m\geq 2)$线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出.

证 充分性 不妨设α_1可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出,

即有数 $x_2, \ldots, x_m$ 使得 $\alpha_1 = x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$,

$$(-1)\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0,$$

因 $-1, x_2, \ldots, x_m$不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关.

必要性 有不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0.$$

因 $k_1, k_2, \ldots, k_m$不全为零，不妨设 $k_1\neq 0$，则

$$\alpha_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\alpha_m,$$

α_1可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出.

定理4 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m\geq 2)$线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出.

即“$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m\geq 2)$线性无关 $\Leftrightarrow$ 其中任一向量都不能由其余向量线性表出.”

即$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m\geq 2)$之间没有线性关系。

即$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m\geq 2)$之间谁也表示不了谁。

线性无关也叫线性独立。（**linear independent**）

定理5 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关， $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出，且表式唯一.

证 有不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m, k$使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m + k\beta = 0.$$

若$k = 0$，则

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0.$$

而$k_1, k_2, \ldots, k_m$不全为零,与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关矛盾.

所以$k \neq 0$， $\beta = (-\frac{k_1}{k})\alpha_1 + (-\frac{k_2}{k})\alpha_2 + \cdots + (-\frac{k_m}{k})\alpha_m$,

定理5 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关， $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出，且表式唯一.

下证β由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出的表式惟一：

设 $$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m,$$

所以 $$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0,$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，所以

$$k_1 - l_1 = k_2 - l_2 = \cdots = k_m - l_m = 0,$$

即 $k_1 = l_1, \ \cdots, \ k_m = l_m$. 故表式唯一.

定理6

若r维向量组I 为： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,$

s维向量组II 为： $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m,$

r+s维向量组III为： $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m,$ 其中

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, m$$

（1）若向量组I和II中有一个线性无关，则 III也线性无关。

（2）若向量组III线性相关，则向量组I和II也线性相关.

矮无关，则高无关；高相关，则矮相关。

返回

矮无关，则高无关；高相关，则矮相关。

若一群人中没有人互相认识，则每个人都踩上高跷或戴上帽子之后，还是没有人互相认识。

若踩着高跷或戴着帽子的一群人中有人互相认识，则卸下高跷或是摘下帽子之后，还是有人互相认识。

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{rm}\end{pmatrix},$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{s1}\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{s2}\end{pmatrix},\cdots,\beta_m=\begin{pmatrix}b_{1m}\\b_{2m}\\\vdots\\b_{sm}\end{pmatrix},$$

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{r1}\\b_{11}\\\vdots\\b_{s1}\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{r2}\\b_{12}\\\vdots\\b_{s2}\end{pmatrix},\cdots,\gamma_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\\vdots\\a_{rm}\\b_{1m}\\\vdots\\b_{sm}\end{pmatrix},$$

反证，设γ_1，$\gamma_2,\cdots\gamma_m$线性相关，则

存在不全为零的数k_1，$k_2,\cdots k_m$，使得$k_1\gamma_1+k_2\gamma+\cdots+k_m\gamma_m=0.$

这些不全为零的数k_1，$k_2,\cdots k_m$，也使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0.$

所以α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性相关，β_1，$\beta_2,\cdots\beta_m$线性相关.

矛盾，所以γ_1，$\gamma_2,\cdots\gamma_m$线性无关.

$$
\text{即}\begin{cases}
a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m = 0, \\
a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m = 0, \\
\cdots \\
a_{r1}k_1 + a_{r2}k_2 + \cdots + a_{rm}k_m = 0, \\
b_{11}k_1 + b_{12}k_2 + \cdots + b_{1m}k_m = 0, \\
\cdots \\
b_{s1}k_1 + b_{s2}k_2 + \cdots + b_{sm}k_m = 0
\end{cases}
$$

有非零解.

上面的方程组包含了下面的所有方程。

也就是说下面的方程组有非零解.

$$
\begin{cases}
a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m = 0, \\
\cdots \\
a_{r1}k_1 + a_{r2}k_2 + \cdots + a_{rm}k_m = 0,
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
b_{11}k_1 + b_{12}k_2 + \cdots + b_{1m}k_m = 0, \\
\cdots \\
b_{s1}k_1 + b_{s2}k_2 + \cdots + b_{sm}k_m = 0
\end{cases}
$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{rm}\end{pmatrix},\qquad R(I)=m$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{s1}\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{s2}\end{pmatrix},\cdots,\beta_m=\begin{pmatrix}b_{1m}\\b_{2m}\\\vdots\\b_{sm}\end{pmatrix},\qquad R(II)=m$$

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{r1}\\b_{11}\\\vdots\\b_{s1}\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{r2}\\b_{12}\\\vdots\\b_{s2}\end{pmatrix},\cdots,\gamma_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\\vdots\\a_{rm}\\b_{1m}\\\vdots\\b_{sm}\end{pmatrix},$$

$$R(III)\geq m$$

$$R(III)\leq m$$

$$\Downarrow$$

$$R(III)=m$$