微分中值定理

证明选讲

主讲人：大白菜

2016年10月29日

微分中值定理

1、微分中值定理及其相互关系

罗尔定理

$f(a)=f(b)$

拉格朗日中值定理

$f'(\xi)=0$

$g(x)=x$

$f(a)=f(b)$

$g(x)=x$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$n=0$

柯西中值定理

泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+\cdots+\tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$
$$+\tfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

基础定理：

定理：(Fermat定理)若x_0是函数f的极值点，且存在导数$f'(x_0)$，则一定有$f'(x_0)=0$

定理：(罗尔(Rolle)中值定理) 函数$f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,且$f(a)=f(b)$,
则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$

定理：(拉格朗日(Lagrange)中值定理)函数$f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,则$\exists\xi\in(a,b)$,
使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

定理：(柯西(Cauchy)中值定理)函数$f,g\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,且满足则$g(b)-g(a)\neq 0$,
和$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

辅助函数的一般构造方法——原函数法

要证明的结论若写成$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$,则$\left(f(x)g(x)\right)'\Big|_{x=\xi}=0$

或$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}\Rightarrow\int\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi=-\int\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}d\xi\Rightarrow\ln f(\xi)=-\ln g(\xi)+C_1$

$\Rightarrow f(\xi)g(\xi)=C\Rightarrow$ 构造$\varphi(x)=f(x)g(x)$

或者$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{g'(x)}{g(x)}\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]'=\left[-\ln g(x)\right]'$

$\Leftrightarrow\left[\ln\left(f(x)g(x)\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left(f(x)g(x)\right)'=0$，所以构造$\varphi(x)=f(x)g(x)$

注意$\Leftrightarrow$并不表示等价关系，只是用在分析辅助函数的构造过程，解题中并不需要过程，直接给出辅助函数即可！！

(拉格朗日中值定理) 函数$f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(Lagrange中值定理) 证明技巧：要证明$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即$\left(f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right)'\Bigg|_{x=\xi}=0$,

或$\int f'(x)dx=\int\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}dx\Rightarrow f(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C$

构造函数$g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.或者$g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

定理：（柯西(Cauchy)中值定理）函数$f,g\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,且满足则$g(b)-g(a)\neq 0$,和$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

(Cauchy中值定理)证明技巧：$\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，我们的目的是要证明$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0$，则构造辅助函数$F(x)=f(x)-\lambda g(x)$或者$F(x)=f(x)-f(a)-\lambda\big(g(x)-g(a)\big)$

例题：函数$f,g\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

例题：函数$f,g\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

$$\varphi(x) \triangleq \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix} = f(a)g(x)-g(a)f(x)$$，显然$\varphi(a)=0$

$$\varphi'(x) = f(a)g'(x)-g(a)f'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}$$

要证明的结论为$\varphi(b)=(b-a)\varphi'(\xi)$

由积分法知,$\int(b-a)\varphi'(x)dx=\int\varphi(b)dx$,即$(b-a)\varphi(x)-\varphi(b)x=C$

故构造$\gamma(x)=(b-a)\varphi(x)-\varphi(b)x$,$\gamma(a)=-a\varphi(b)=\gamma(b)$,由罗尔定理知,

则$\exists\xi\in(a,b)$,使得$\gamma'(\xi)=0\Rightarrow\varphi(b)=(b-a)\varphi'(\xi)$

一个更好的构造方法是

$\lambda(x)=(b-a)\varphi(x)-(x-a)\varphi(b)$

相比$\gamma(x)$，只增加了常数项，但形式更加优美

1、设$f(x)\in C[0,\ \pi]\bigcap D(0,\pi)$,求证：$\exists\xi\in(0,\pi)$,使得$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$

辅助函数的构造方法一般可通过结论倒推，如：要使$f'(x)\sin x+f(x)\cos x=0$

只要$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{\cos x}{\sin x}\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]'=\left[-\ln\sin x\right]'\Leftrightarrow\left[\ln\left(f(x)\sin(x)\right)\right]'=0$

$\Leftrightarrow\left[f(x)\sin(x)\right]'=0$，故构造函数$\varphi(x)=f(x)\sin(x)$

2、设$f(x)\in C[0,\ 1]\bigcap D(0,1)$,且$f(1)=0$求证：$\exists\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

$$f'(x)=-\frac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x}\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]'=\left[-2\ln\frac{1}{x}\right]'\Leftrightarrow\left[\ln\left(x^2f(x)\right)\right]'=0$$

$\Leftrightarrow$ 故构造函数$\varphi(x)=x^2f(x)$

3、设$f(x)\in C[0,\ 1]\bigcap D(0,1)$,且$f(1)=0$求证：$\exists\xi\in(0,1)$,使得$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

$$f'(x)=-\frac{nf(x)}{x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{n}{x}\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]'=\left[-n\ln\frac{1}{x}\right]'\Leftrightarrow\left[\ln\left(x^nf(x)\right)\right]'=0$$

$\Leftrightarrow$ 故构造函数$\varphi(x)=x^nf(x)$

4、设$f(x)\in C[0,\ 1]\bigcap D(0,1)$,且$f(0)$=$f(1)$=0求证：$\exists \xi \in (0,1)$,使得$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda f(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\lambda \Leftrightarrow [\ln f(x)]'=[-\lambda x]' \Leftrightarrow \left[\ln\left(e^{\lambda x} f(x)\right)\right]'=0 \\ \Leftrightarrow \text{故构造函数}\varphi(x)=e^{\lambda x} f(x)\end{array}}$$

5、设$f,g\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,且$f(a)$=$f(b)$=0求证：$\exists \xi \in (a,b)$,使得$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$

$$\boxed{\begin{array}{l}f'(x)+g'(x)f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-g'(x) \Leftrightarrow [\ln f(x)]'=[-g(x)]' \Leftrightarrow \left[\ln\left(e^{g(x)} f(x)\right)\right]'=0 \\ \Leftrightarrow \text{故构造函数}\varphi(x)=e^{g(x)} f(x)\end{array}}$$

6、设$f,g\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$,且$g'(x)\neq 0$求证：$\exists \xi \in (a,b)$,使得$\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{f(a)-f(x)}{g(x)-g(b)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(a)-f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)-g(b)} \Leftrightarrow \left[-\ln\left(f(a)-f(x)\right)\right]'=\left[\ln\left(g(x)-g(b)\right)\right]' \\ \Leftrightarrow \left[\ln\left(f(a)-f(x)\right)\left(g(x)-g(b)\right)\right]'=0 \Leftrightarrow \text{故构造函数}\varphi(x)=\left(f(a)-f(x)\right)\left(g(x)-g(b)\right)\end{array}}$$

例17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在$(0,1)$内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$$

证: 问题转化为证 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

设辅助函数 $\varphi(x)=xf(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件, 故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

即有 $$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$$

例17*. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

证: 问题转化为证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0.$

设辅助函数 $\varphi(x)=x^2 f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件, 故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$$

即有 $$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

例17**. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$,

求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

证: 设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$ 上满足罗尔定理条件,

因此至少存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即 $$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

8、设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$.证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$

令$F(x)=f(x)-g(x)$，则$F(x)$在上连续，在(a,b)内具有二阶导数且$F(a)=F(b)=0$.

（1）若$f(x)$，$g(x)$在(a,b)内同一点c取得最大值，

则$f(c)=g(c)\Rightarrow F(c)=0$，

于是由罗尔定理可得，

存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，

使得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

再利用罗尔定理，可得，

存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，

使得$F''(\xi)=0$，即$f''(\xi)=g''(\xi)$.

（2）若$f(x)$，$g(x)$在(a,b)内不同点c_1，c_2取得最大值，

则$f(c_1)=g(c_2)=M$，

于是$F(c_1)=f(c_1)-g(c_1)>0$，$F(c_2)=f(c_2)-g(c_2)<0$，

于是由零值定理可得，存在$c_3\in(c_1,c_2)$，使得$F(c_3)=0$

于是由罗尔定理可得，存在$\xi_1\in(a,c_3)$，$\xi_2\in(c_3,b)$，使得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

再利用罗尔定理，可得，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得$F''(\xi)=0$，即$f''(\xi)=g''(\xi)$.

16.设$f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

证明:1) $\exists\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi)=\xi$.

2)$\exists\eta\in(0,\xi)$,使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

如果上一题第（2）改为对任意实数$\lambda,\exists\eta\in(0,\xi),f'(\eta)=\lambda\left(f(\eta)-\eta\right)-1$

1.介值定理:显然构造：$g(x)=f(x)-x$

2.观察得:$\left(f(x)-x\right)'=f(x)-x\Leftrightarrow\frac{\left(f(x)-x\right)'}{f(x)-x}=1\Leftrightarrow\left[\ln\left(f(x)-x\right)\right]'=x'$

$\Leftrightarrow\left[\ln e^{-x}\left(f(x)-x\right)\right]'=0$故构造函数$\varphi(x)=e^{-x}\left(f(x)-x\right)$

2(扩展).观察得:$\left(f(x)-x\right)'=\lambda\left(f(x)-x\right)\Leftrightarrow\frac{\left(f(x)-x\right)'}{f(x)-x}=\lambda\Leftrightarrow\left[\ln\left(f(x)-x\right)\right]'=(\lambda x)'$

$\Leftrightarrow\left[\ln e^{-\lambda x}\left(f(x)-x\right)\right]'=0$故构造函数$\varphi(x)=e^{-\lambda x}\left(f(x)-x\right)$

10、设$f(x)\in C[0,1]\bigcap D(0,1), f(0)=0, f(1)=1$,证明：在$(0,1)$存在不同的$\xi$，$\eta$,使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

分析：为保证$\xi\neq\eta$，故考虑不同的区间$[0,c],[c,1]$，使用拉格朗日中值定理有

$$\exists\xi\in(0,c),\eta\in(c,1), f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}, f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-f(c)}{1-c}$$

要使$f'(\xi)f'(\eta)=\dfrac{f(c)}{c}\dfrac{1-f(c)}{1-c}=1$

可使$f(c)=c$或$f(c)=1-c$

经检验，$f(c)=1-c$满足

构造函数$g(x)=f(x)+x-1$,容易得到$g(0)g(1)<0$,

由介值定理知$\exists c\in(0,1), g(c)=0$,证毕！

同类例题1：设$f(x)\in C[0,2]\bigcap D(0,2), f(0)=0, f(2)=2$,证明：

$\exists\eta_1,\eta_2\in(0,2),\eta_1\neq\eta_2$,使得$f'(\eta_1)+f'(\eta_2)=\eta_1+\eta_2$

同类例题2：设$f(x)\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$,证明：

$$\exists \xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta,\text{使得}\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$$

同类例题3：设$f(x)\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$,证明：

对任意给定的正数a, b

$$\exists \xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta,\text{使得}\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

同类例题4：设$f(x)\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$,

$k_1,k_2,\cdots,k_n$为n个正数，证明：在区间$[0,1]$内存在一组互不相等的数$x_1,x_2,\cdots,x_n$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$

例22 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，试证：在 $(0,1)$ 内存在两点 ξ,η

使 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2.$

分析 设 x 是 $(0,1)$ 中的任一点，对 $f(x)$ 在 $[0,x]$，$[x,1]$ 上分别用拉格朗日中值 定理，

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x} \qquad \xi\in(0,x)$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{1-f(x)}{1-x} \qquad \eta\in(x,1)$$

要使 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2.$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

只要 $\dfrac{x}{f(x)}+\dfrac{1-x}{1-f(x)}=2$. 即 $(1-2f(x))(x-f(x))=0$

即只需求 $x\in(0,1)$,使 $f(x)=\dfrac{1}{2}$

证明 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 , $f(0)=0$, $f(1)=1$,

由介值定理，存在 $x\in(0,1)$, 使 $f(x)=\dfrac{1}{2}$

对 $f(x)$ 在 $[0,x]$, $[x,1]$ 上分别用拉格朗日中值 定理 ,

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2x} \qquad \xi\in(0,x)$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{1-f(x)}{1-x}=\frac{1}{2(1-x)} \qquad \eta\in(0,x)$$

则 $$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$$

例23 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，试证：对任意给定的正数 a,b 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η 使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$

证 $\because a$ 与 b 均为正数， $\therefore 0<\dfrac{a}{a+b}<1$

又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， 由介值定理，

存在 $\tau\in(0,1)$，使得 $f(\tau)=\dfrac{a}{a+b}$，

$f(x)$ 在 $[0,\tau],[\tau,1]$ 上分别用 $Lagrange$ 中值定理，有

$$f(\tau)-f(0)=(\tau-0)f'(\xi),\quad \xi\in(0,\tau) \tag{1}$$

$$f(1)-f(\tau)=(1-\tau)f'(\eta),\quad \eta\in(\tau,1) \tag{2}$$

注意到 $f(0)=0, f(1)=1,$ 由(1), (2)有

$$\tau=\frac{f(\tau)}{f'(\xi)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} \quad (3) \qquad 1-\tau=\frac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} \quad (4)$$

(3)+ (4),得 $\quad 1=\dfrac{a}{f'(\xi)(a+b)}+\dfrac{b}{f'(\eta)(a+b)}$

$$\therefore \frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

例题 7.1.8 设 $f \in C[0,1]$, 在 $(0,1)$ 上可微, 并且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 又设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是满足 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 的 n 个正数. 证明: 在 $(0,1)$ 中存在 n 个互不相同的数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得

$$\frac{k_1}{f'(t_1)}+\frac{k_2}{f'(t_2)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(t_n)}=1. \tag{7.17}$$

证 由介值定理知可以在 $(0,1)$ 中插入 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 使得

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1,$$

同时满足

$$f(x_1)=k_1, f(x_2)=k_1+k_2, \cdots, f(x_{n-1})=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}.$$

在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上用 Lagrange 中值定理, 有 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得

$$k_i=f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(t_i)(x_i-x_{i-1}), i=1,2,\cdots,n.$$

这样就有

$$\frac{k_1}{f'(t_1)}+\frac{k_2}{f'(t_2)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(t_n)}=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=1. \qquad \square$$

求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$, 其中$a\neq 0$为常数

解法1: 由等价无穷小$\tan x\sim x$, 有$\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\sim\tan\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty} n^2\tan\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}{1+\frac{a}{n}\frac{a}{n+1}}=a$$

解法2: 由$Lagrange$中值定理, $\dfrac{\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$, 其中$\xi$位于$\frac{a}{n}$与$\frac{a}{n+1}$之间.

当$n\to\infty$时, $\dfrac{1}{1+\xi^2}$趋于1，所以

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+a}\frac{\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na}{n+a}\frac{1}{1+\xi^2}\right)=a$$

解法3:由泰勒公式，令$f(x)=\arctan x$,则$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o\left(x^2\right)=x+o\left(x^2\right)$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}n^2\left\{\left[\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[\frac{a}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{o\left(1/n^2\right)}{1/n^2}\right]=a$$

同类例题: $\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1}\right)$

解法4:利用洛必达法则

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}}{1/x^2}\left(令t=\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan at-\arctan\frac{at}{t+1}}{t^2}=\cdots=a$$

例：设$f(x)$具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f(1)=0$, 证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)=0$

证明：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 即$f(0)=0$.由罗尔定理知，$\exists x_1\in(0,1)$, 使$f'(x_1)=0$

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$,由罗尔定理知，$\exists\xi\in(0,x_1)$使$f''(\xi)=0$

设$f(x)$可导，证明：在$f(x)$的两个零点之间一定存在$f(x)+f'(x)$的零点

$$f(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-1\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]'=(-x)'\Leftrightarrow\left[\ln e^x f(x)\right]'=0$$

$\Leftrightarrow\left(e^x f(x)\right)'=0$，构造函数$g(x)=e^x f(x)$

7．设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$，证明

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$。

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left[f(x)+f'(x)\right]}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{e^x}=k$$

选择题：若$f(x)$在(a,b)上可导且$f(a)=f(b)$，则下述命题正确的个数为( )

(1)至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$

(2)一定不存在点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$

(3)恰存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$

(4)对任意的$\xi\in(a,b)$，不一定能使$f'(\xi)=0$

$A.1$ $B.2$ $C.3$ $D.4$

A

设函数$y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，则

B

(A)当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$时，必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

(B)当$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

(C)当$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$存在时，必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0.$

(D)当$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0.$

【例 11】（2001 年数学一）设 $f(0)=0$，讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件：

A. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在

【提示及点评】利用导数定义及可导的充要条件.

【解析】由题设已知 $f(0)=0$，则由导数定义，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的充要条件是

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在且有限，设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$，$f'(0)\in R$. 关于选项 A，因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cosh}{h^2}\cdot\frac{f(1-\cosh)}{1-\cosh}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)$$

只能确定 $f'(0+0)$ 存在，无法确定 $f'(0-0)$ 存在，因而 A 不一定成立.

关于选项 B，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-e^h}{h}\cdot\frac{f(1-e^h)}{1-e^h}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 因而 B 正确.

【例 11】（2001 年数学一）设 $f(0)=0$，讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件：

A. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在

关于选项 C, 由 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}\cdot\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 存在不能确定 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 是否存在，因此 C 也被排除掉.

关于选项 D，由 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在不能肯定 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ 存在，所以也就无法推出 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ 存在. 综上，选 B.

17.设$f(x)$在点$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$均不为0. 证明:∃唯一的一组实数k_1, k_2, k_3,使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

解　由条件 $0=\lim\limits_{h\to 0}\left[k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)\right]=(k_1+k_2+k_3-1)f(0)$，

因 $f(0)\neq 0$，所以 $k_1+k_2+k_3-1=0$；

又　$0=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}[k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)]$

$=(k_1+2k_2+3k_3)f'(0)$，

因 $f'(0)\neq 0$，所以 $k_1+2k_2+3k_3=0$；

再由 $0=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[k_1 f''(h)+4k_2 f''(2h)+9k_3 f''(3h)\right]=\frac{1}{2}\left[k_1+4k_2+9k_3\right]f''(0),$$

因 $f''(0)\neq 0$，所以 $k_1+4k_2+9k_3=0$。因此 k_1， k_2， k_3 应满足线性方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3-1=0 \\ k_1+2k_2+3k_3=0 \\ k_1+4k_2+9k_3=0 \end{cases},$$

因其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=2\neq 0$，所以存在唯一一组实数 k_1， k_2， k_3， 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0。$$

24.设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数,且$\exists c\in(a,b)$,使得$f'(c)=0$,证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

(2) 作辅助函数 $F(x)=[f(x)-f(a)]e^{-x/(b-a)}$,则 $F(a)=0$. 由 $f'(c)=0$ 可知 $F'(c)=-F(c)/(b-a)$.

(i) 若 $F(c)\neq0$,则存在 $\xi'\in(a,c)$,使得

$$F'(\xi')=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=\frac{F(c)}{c-a},$$

$$F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}=-\frac{c-a}{b-a}F'(\xi').$$

由此知 $F'(c)$与 $F'(\xi')$反号,故根据连续性可知,存在 $\xi\in(\xi',c)$,使得 $F'(\xi)=0$. 即 $f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]/(b-a)=0$.

(ii) 若 $F(c)=0$,则存在 $\xi\in(a,c)$,使得

$$F'(\xi)=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=0.$$

即得所证.