数学基础复习

求极限方法总结

大白菜

2016年10 月

$\varepsilon-\delta$ 定义法

例 1

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明 1

令 $\sqrt[n]{n}=1+y_n, y_n>0(n=2,3,\cdots)$, 应用二项式定理得

$$n=(1+y_n)^n=1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\cdots+y_n^n>1+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2$$

可得到

$$|\sqrt[n]{n}-1|=|y_n|<\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

于是对任意给定的$\epsilon>0$, 取$N=[\frac{2}{\epsilon^2}]$, 当$n>N$ 时, 成立

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n}}<\epsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$ □

另证:夹逼定理

$$0 < |\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0, n \to \infty.$$

另证:洛必达法则

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$$

$$\text{因为对}x^x\text{取对数,}\ \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

推论

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1, k \in \mathbb{N}_+$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1, k \in \mathbb{R}$$

代入法

例 2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} x\tan x - 1$$

例 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\cos x}$$

定理 1

初等函数在其有定义的区间上是连续的.

答案：$\frac{\pi}{4} - 1 \quad 0$

$\infty - \infty$ 类型

例 4

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+1)(x+2)} - x$$

解: $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+1)(x+2)} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{(x+1)(x+2)} + x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})} + 1}$$
$$= \frac{3}{2}$$

同理 $$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{(x+1)(x+2)} - x = +\infty$$

推广

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x$$

式中$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是给定的常数.

$$\text{应用恒等式：} y-z=\frac{y^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+\cdots+z^{k-1}}$$

做代换$y=\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}, z=x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)-x^k}{(\sqrt[k]{\cdots})^{k-1}+x(\sqrt[k]{\cdots})^{k-2}+\cdots+x^{k-1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(a_1+\cdots+a_k)+\frac{a_1a_2+\cdots+a_{k-1}a_k}{x}+\cdots}{\left(\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right)^{k-1}+\cdots+1}\\
&= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}
\end{aligned}$$

分式– 因式分解

例 5

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}, \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}(m,n\in N^+)$$

解答

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}=4$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}(m,n\in N^+)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}=\frac{m}{n}$$

分式– 有理化

例 6

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

解答

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \\
&= \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

例 7

1. $\lim_{n\to\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1} = (-1)^n \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) = (-1)^n \lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+n} = (-1)^n \lim_{n\to\infty} \sin \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} = (-1)^n, \text{极限不存在}$$

例 8

$$\lim_{x\to -8} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}-3}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to -8} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}-3} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$$

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}$$

例 9

$$Q1.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n 1+\sin^n\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}}$$

$$Q2.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin 1+\sin^2\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}}$$

$$Q3.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin^n 1+\sin^n\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}}{n}}$$

$$Q4.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin 1+\sin^2\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}}{n}}$$

$$A1.\ \sqrt[n]{\sin^n 1}<\sqrt[n]{\cdots}<\sqrt[n]{n\sin^n 1}$$

$$A2.\ \sqrt[n]{\sin 1}<\sqrt[n]{\cdots}<\sqrt[n]{n}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\therefore A1.=A3.=\sin 1;\ A2.=A4.=1.$$

等价代换

要点：在求乘除式里，其因子可用等价因子替代，极限不变。最常用的等价关系如:当$x \to 0$时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^b - 1}{b}$$

$$e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^{\ln(1+x)} - 1 \sim \ln(1+x) \Rightarrow \ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^{\ln(1+x)^b} - 1 \sim \ln(1+x)^b \Rightarrow (1+x)^b - 1 \sim bx$$

还有$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,剩下的高阶关系可以由洛必达定理或泰勒公式推出(需要掌握下推导方法，在特定场合下有妙用):

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$$

$$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$$

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$$

$$x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$$

$\tan x, \arctan x$三次项系数确定方法

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \Longrightarrow \tan x = x+o(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{\gamma x^k}=1 \Longrightarrow \tan x = x+\gamma x^k+o(x^k)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{\gamma x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{\gamma k x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\gamma k x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\gamma k x^{k-1}}=1 \Longrightarrow \gamma=\frac{1}{3}, k=3$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \Longrightarrow \arctan x = x+o(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

等价无穷小的代换原则

例 10

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}\ (m,n\in\mathbb{Z})$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to\pi}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

以上解法是否有问题?

正确解法:做代换$t=x-\pi$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}&=\lim_{t\to 0}\frac{\cos m\pi\sin mt}{\cos n\pi\sin nt}\\&=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{mt}{nt}\\&=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}\end{aligned}$$

$(1+\alpha)^{\infty} = e^{(\alpha\times\infty)}$

例 11

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\quad(a,b>0)$$

$$\begin{aligned}
1.\ &\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos\frac{x}{n}-1+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\left(\cos\frac{x}{n}-1+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{2n}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{2}(\frac{x}{n})^2}+\lambda x\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right]=e^{\lambda x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.\ &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}\right)\right]=\exp\left[\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\right]=\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

推论

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}\ (a,b,c>0)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right]^n=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}\ (m\in\mathbb{N}_+,a_i>0\text{下同})$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}{m}\right]^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},(m\in\mathbb{N}_+)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

1.经常考！1.2.3.的证明方法一样。4.5都可以使用夹逼定理来证明，当然也可以看做∞^0类型的极限，取对数提取出ln函数中最大的a_i^x 来求解。

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$,适用条件即等式右边极限都存在

例 12

判断正误

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x}=0?$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1-1=0?$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0?$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\infty-\infty=0?$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0?$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0?$$

当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$ 存在时(显然不能是∞),成立:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}-\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$$

无穷大与无穷小

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}$

要求会大致画出上述函数的图像！特别在0处和∞处！

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(C+\alpha(x))-(C+\beta(x))}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$，适用条件$\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$ 同阶无穷小

例 13

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}\ (m,n\in\mathbb{N}_+)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1-\sqrt[n]{1+\beta x}+1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\\&=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\end{aligned}$$

例 14

练习：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\alpha(x))-f(\beta(x))}{\gamma(x)}$

例 15

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

$$
\begin{aligned}
1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{2x^3}=\frac{1}{12} \\
2.\ \lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}e
\end{aligned}
$$

定理 2

设有限数a, b, A均不为零，证明：$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A$ 的充分必要条件是$\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^{b}}{x-a}=Ae^{b}.$

证明 2

证($\Rightarrow$) 左边极限存在表明:$x\to a$时，$f(x)-b\to 0$,故$e^{f(x)-b}-1\sim f(x)-b$.故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^{b}}{x-a}&=e^{b}\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)-b}-1}{x-a}\\&=e^{b}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=Ae^{b}.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) 右边极限存在表明$x\to a$ 时，$e^{f(x)}\to e^{b}$.由对数函数的连续性知$f(x)-b\to 0$，故有$e^{f(x)-b}-1\sim f(x)-b$.从而

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)-b}-1}{x-a}=e^{-b}\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^{b}}{x-a}=e^{-b}Ae^{b}=A$$

应用

例 16

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4} \qquad 2.\ \lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

解答

$$\begin{aligned}
1.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2-2\cos x}(e^{x^2+2\cos x-2}-1)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\frac{1}{12}\\
2.\ \lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)}{\frac{1}{n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=1
\end{aligned}$$

中值定理法

例 17

$$1.\ \lim_{x\to\infty} f'(x) = k, \text{求} \lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}), (a \neq 0)$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$1.\ f(x+a)-f(x) = af'(\xi), a < \xi < x+a, \lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)] = a\lim_{x\to\infty} f'(\xi) = ak$$

$$2.\ g(x) = \arctan x, g(\frac{a}{n}) - g(\frac{a}{n+1}) = g'(\xi)(\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}), \lim_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}\right)}{\frac{1}{n^2}} = a$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\xi}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

洛必达法则

定理 3

若$f(x),g(x)$满足下列条件：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0;$
2. 在x_0的去心邻域内，$f'(x)$和$g'(x)$存在，且$g'(x)\neq 0;$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$

错在哪？(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{6x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3};$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}=\text{不存在}$

(3) $f'(0)=0,f''(0)$存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}$

(4) $f(x)$在x_0处二阶可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0)$

在使用洛比达法则求极限时,判别是否为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$未定型是使用法则求极限的前提。若法则使用后仍然是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$未定型，则法则可以重复使用。

- 典型错误如(1)(2)。

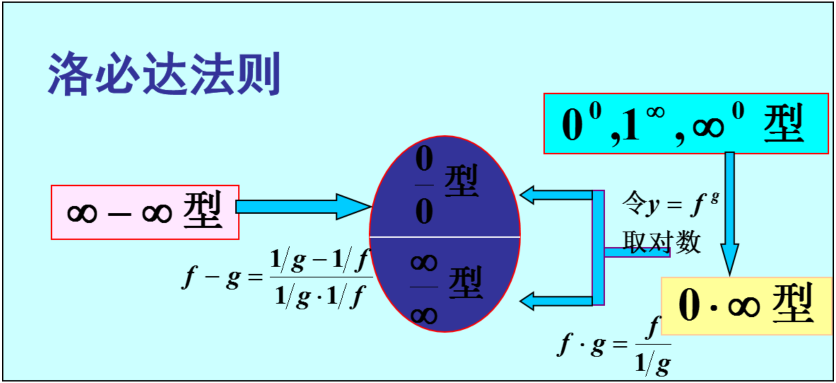
(3)(4)不满足洛必达法则的条件2.$f''(x_0)$存在可以推出$f'(x)$在x_0连续，不能推出$f''(x)$在x_0连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}=f''(x_0)$$

洛必达法则的核心是,如果极限$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(or\infty)$可以推出$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A(or\infty)$(充分非必要)

洛必达法则使用方法



洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\infty - \infty$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$

例子

例 18

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right] &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

Hint:$\infty(\alpha(x)^{\beta(x)}-1)\Rightarrow\infty(e^{\beta(x)\ln\alpha(x)}-1)$再用等价无穷小

例 19

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

例 20

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$(其中函数$f(x)$在点$a$可导，且$f(a)\neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a)+f'(a)\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

$$\text{或原式}=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{f(a)}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}\right)=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$