微分中值定理的应用与技巧

基本概念、内容、定理、公式

中值定理
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式
- 柯西中值定理

应用
- 研究函数性质及曲线性态
- 利用导数解决实际问题

中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

二、拉格朗日中值定理

三、柯西(Cauchy)中值定理

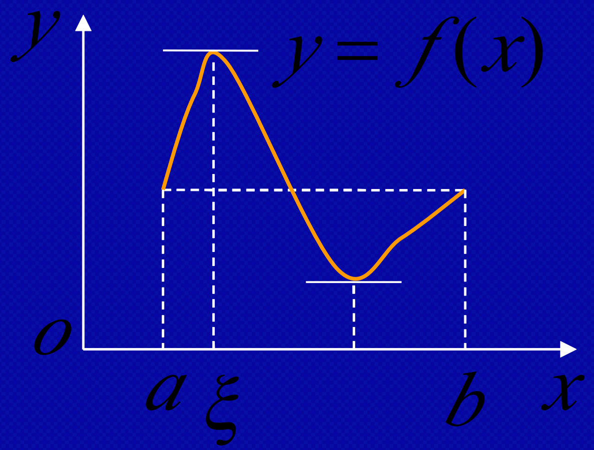
一、罗尔(Rolle)定理

$y=f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导

(3) $f(a)=f(b)$



$\Longrightarrow$ 在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

证: 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故在 $[a, b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

若 $M=m$, 则 $f(x)\equiv M$, $x\in[a, b]$,

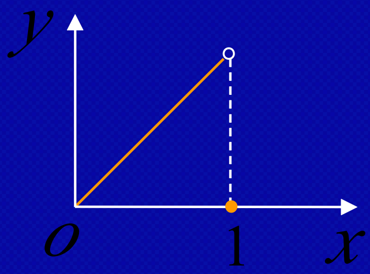
因此 $\forall\xi\in(a, b)$, $f'(\xi)=0$.

若 $M > m$, 则 M 和 m 中至少有一个与端点值不等, 不妨设 $M \neq f(a)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = M$, 则由费马引理得 $f'(\xi) = 0$.

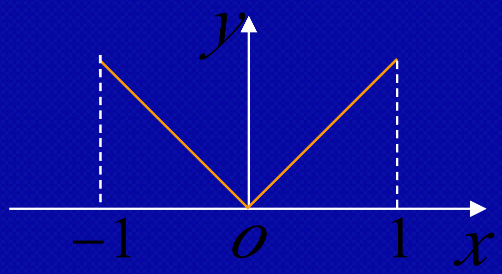
注意:

1) 定理条件条件不全具备, 结论不一定成立. 例如,

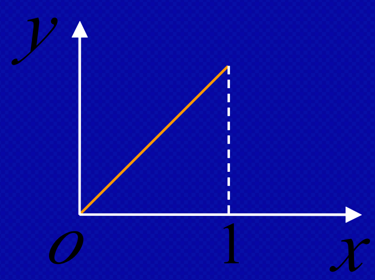
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$



$f(x) = |x|$
$x \in [-1,1]$



$f(x) = x$
$x \in [0,1]$



2) 定理条件只是充分的. 本定理可推广为

$y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且

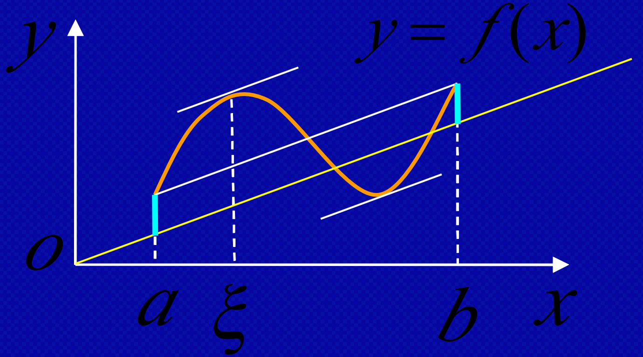
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)$$

$\Longrightarrow$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

证明提示: 设 $F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ f(b^-), & x=b \end{cases}$

证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理 .

二、拉格朗日中值定理



$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} x$

显然, $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$\varphi(a) = \dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a} = \varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点

$\xi \in (a,b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即定理结论成立 . 证毕

三、柯西(Cauchy)中值定理


柯西, A.-L.

$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[\,a\,,\,b\,]$ 上连续

(2) 在开区间 $(\,a\,,\,b\,)$ 内可导

(3)在开区间 $(\,a\,,\,b\,)$ 内 $F'(x)\neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析: $F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)\neq 0 \qquad a<\eta<b$

要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)}=0 \qquad \varphi'(\xi)$

$$\Longrightarrow \varphi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$$

证: 作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$, 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗？

$$\because f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

两个 ξ 不一定相同

上面两式相比即得结论. **错!**

几个中值定理的关系

罗尔定理

$f(a)=f(b)$

拉格朗日中值定理

$f'(\xi)=0$

$F(x)=x$

$f(a)=f(b)$

$F(x)=x$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$n=0$

柯西中值定理

泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

证明中值定理的方法

辅助函数法 $\begin{cases} \text{直观分析} \\ \text{逆向分析} \end{cases}$

例如, 证明拉格朗日定理 : $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

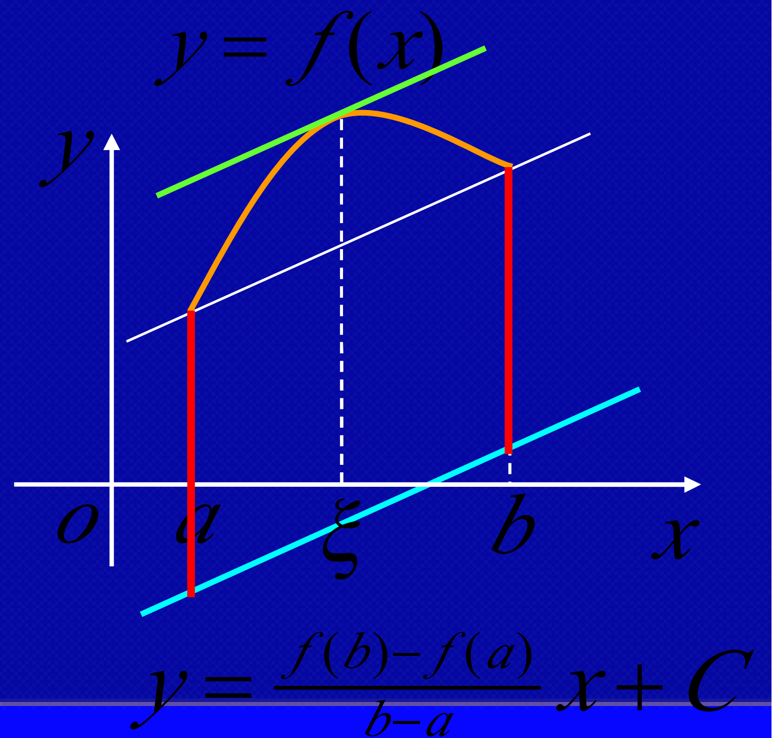
要构造满足罗尔定理条件的辅助函数 .

方法1. 直观分析

由图可知 , 设辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-C$$

(C 为任意常数)



方法2. 逆向分析

要证 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

即证 $$\underbrace{f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{F'(\xi)}=0$$

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Big\downarrow \text{原函数法}$$

$$\underbrace{F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x}_{\text{辅助函数}}$$

同样，柯西中值定理要证

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in(a,b)$$

即证 $\boxed{f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)}=0$

设 $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

$\Big\downarrow$ 原函数法

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$$

*** 中值定理的条件是充分的，但非必要.** 因此可适当减弱.

例如，设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f(a+0)=f(b-0)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

证: 设辅助函数

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ f(b-0), & x=b \end{cases}$$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由罗尔定理可知，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=0$.

* 中值定理的统一表达式

设 $f(x), g(x), h(x)$ 都在 $[a,b]$上连续，且在 (a,b) 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

证: 按三阶行列式展开法有

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g(a) & g(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} f'(\xi)$$

$$-\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} g'(\xi) + \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} h'(\xi)$$

利用逆向思维设辅助函数

$$F(x)=\begin{vmatrix} g(a) & g(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} f(x)-\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} g(x)$$

$$+\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} h(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix}$$

显然 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，因此，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0$$

设 $f(x), g(x), h(x)$ 都在 (a,b) 上连续，且在$[a,b]$内可导，证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

说明

若取 $h(x) \equiv 1, g(x) = x, f(a) = f(b)$，即为罗尔定理；

若取 $h(x) \equiv 1, g(x) = x$，即为拉格朗日中值定理；

若取 $h(x) \equiv 1, g'(x) \neq 0$，即为柯西中值定理；

（自己验证）

中值定理的主要应用与解题方法

$$\text{中值定理}\begin{cases}\text{原函数的性质}\\ \quad\text{反映}\ \downarrow\uparrow\ \text{反映}\\ \text{导函数的性质}\end{cases}$$

中值定理的主要应用

(1) 利用中值定理求极限

(2) 研究函数或导数的性质

(3) 证明恒等式

(4) 判定方程根的存在性和唯一性

(5) 证明有关中值问题的结论

(6) 证明不等式

注：（1） 几个中值定理中最重要、最常用的是： 罗尔中值定理。

（2） 应用中值定理的关键为：

如何构造合适的辅助函数？（难点、 重点）

解题方法：

从结论入手，利用逆向分析法，选择有关中值定理及适当设辅助函数．

(1) 证明**含一个中值的等式**或证**根的存在**，常用罗尔定理，此时可用原函数法设辅助函数.

(2) 若结论中涉及到含**一个中值**的**两个不同函数**，可考虑用柯西中值定理．

HIGH EDUCATION PRESS

(3) 若结论中含**两个**或**两个以上中值**，必须多次使用中值定理 .

(4) 若已知条件或结论中**含高阶导数**，多考虑用**泰勒公式**， 有时也可考虑**对导数用中值定理** .

(5) 若结论为恒等式，先证变式导数为 0，再利用特殊点定常数 .

(6) 若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧.

构造辅助函数的方法

(1)不定积分求积分常数法**.**

构造辅助函数 的步骤如下**:**

- 将欲证结论中的 改写为 ;
- 通过恒等变形将结论化为易消除导数符号的形式**.(**即易积分形式**)**;
- 利用观察法或不定积分法，方程两边同时积分；（或解微分方程）
- 解出积分常数 **,**则 即为所求的辅助函数。

以拉格朗日及柯西中值定理为例，说明辅助函数　　　的构造作法：.

拉格朗日中值定理的结论：

将　改写为

方程两边同时积分

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C=f(x)$$

解出积分常数　，则

令辅助函数

柯西中值定理的结论：

将　改写为

直接积分消不去导数，故变形为

方程两边同时积分

解出积分常数　，则

令辅助函数

(2)常数变易法

此法适用于常数已分离出来的命题，构造辅助函数的步骤如下：

● 将常数部分设为

- 恒等变形，将等式一端变为由 及 构成的代数式，另一端为由 及 构成的代数式.
- 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式，若是,只要把端点 改成 ， 改成 ，则换变量后的端点表达式为辅助函数.

5.2 .例题选讲

例1. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1 的正实根 .

判别方程根的存在性与唯一性

证: 1) 存在性 .

设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(1)=-3$. 由介值定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$, 即方程有小于 1 的正根 x_0.

2) 唯一性 .

假设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$, $\because f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件 , $\therefore$ 在 x_0, x_1 之间至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0,\ x\in(0,1)$, 矛盾, 故假设不真!

例2.

讨论中值的存在性

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$，求证存在 $\xi\in(0,1)$，使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证： 设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

辅助函数如何想出来的？

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，

1
2
3

因此至少存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

例3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $|f'(x)| \le M$, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

研究函数或导数的性质

证: 取点 $x_0 \in (a,b)$, 再取异于 x_0 的点 $x \in (a,b)$, 对 $f(x)$ 在以 x_0, x 为端点的区间上用拉氏中值定理得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

(ξ 界于 x_0 与 x 之间)

$$\therefore \ |f(x)| = |f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)|$$

$$\le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x - x_0| \le |f(x_0)| + M(b-a)$$

令 $K = |f(x_0)| + M(b-a)$, 则对任意 $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le K$, 即 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

例4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, 但当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$, 求证对任意自然数 n, 必有 $\xi\in(0,1)$, 使 $\dfrac{n f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

证: 设辅助函数 $F(x)=f^n(x)f(1-x)$

不定积分
求积分常数法!

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件, 因此必有 $\boxed{\xi\in(0,1)}$, 使 $F'(\xi)=0$, 即

$$n f^{n-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^n(\xi)f'(1-\xi)=0$$

因 $f^n(\xi)f(1-\xi)\neq 0$, 所以 $\dfrac{n f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

例5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

不定积分求积分常数法!

证: 设辅助函数 $F(x)=(1-x)^2 f'(x)$

因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件, 所以存在 $\eta\in(0,1)$, 使 $f'(\eta)=0$. 因此 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上满足罗尔定理条件, 故必存在 $\xi\in(\eta,1)$, 使 $F'(\xi)=0$

即有

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi},\ \xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$$

例6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}$$

证: 方法1 . 因为所证结论左边为

$$\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{b-a}$$

设辅助函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$

由于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏中值定理条件, 且

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},$$ 易推出所证结论成立 .

方法2. 令 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=k$ 　　常数变易法

$$\longrightarrow \quad af(b)-bf(a)=kab(b-a)$$

$$\longrightarrow \quad af(b)-kab^2=bf(a)-ka^2b$$

$$\longrightarrow \quad \frac{f(b)-kb^2}{b}=\frac{f(a)-ka^2}{a}$$

因此可考虑设辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)-kx^2}{x}$

由于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，由此可推得

$$k=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\Bigg|_{x=\xi}$$

$$\boxed{\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}$$

故所证结论成立.

***例7.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$$

证: 转化为证 $\boxed{e^{\eta}f(\eta)+e^{\eta}f'(\eta)}=e^{\xi}$

即证 $[e^{x}f(x)]'\big|_{x=\eta}=(e^{x})'\big|_{x=\xi}$

设辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$, 由于它在 $[a,b]$ 满足拉氏中值定理条件, 因此存在 $\eta\in(a,b)$, 使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta) \longrightarrow \frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=\boxed{e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]}$$

转化为证 $\boxed{e^{\eta} f(\eta) + e^{\eta} f'(\eta)} = e^{\xi}$

$$\boxed{\frac{e^b - e^a}{b-a}} = \boxed{e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)]} \quad \eta \in (a, b),$$

再对 $\varphi(x) = e^x$ 在 $[a,b]$ 上用拉氏中值定理，

则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\boxed{\frac{e^b - e^a}{b-a}} = e^{\xi}$$

因此 $e^{\eta} f(\eta) + e^{\eta} f'(\eta) = e^{\xi} \quad \xi, \eta \in (a, b)$

***例8.** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\boxed{f(0)=0,\ f(1)=1}$, 试证对任意给定的正数 a,b, 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

证: 转化为证 $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\dfrac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=1$

因 $0<\dfrac{a}{a+b}<1$, 即 $f(0)<\dfrac{a}{a+b}<f(1)$

由连续函数定理可知, 存在 $\tau\in(0,1)$, 使

$$f(\tau)=\frac{a}{a+b},\quad \text{因此}\ \frac{b}{a+b}=1-f(\tau)$$

对 $f(x)$ 分别在 $[0,\tau],[\tau,1]$ 上用拉氏中值定理，得

$$\boxed{f(\tau)-f(0)=f'(\xi)\tau,}\quad \xi\in(0,\tau)$$

$$\boxed{f(1)-f(\tau)=f'(\eta)(1-\tau)},\quad \eta\in(\tau,1)$$

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(\tau)=\frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{a+b}=f'(\xi)\tau,\qquad \frac{b}{a+b}=f'(\eta)(1-\tau)$$

$$\therefore\quad \frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=\tau+(1-\tau)=1$$

即 $$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b,\qquad \xi,\eta\in(0,1)$$

例10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

设 $F(x)=x^2$, 则 $f(x)$, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$$

例11. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

证：法1 用柯西中值定理 . 令

$$f(x) = \sin \ln x, \quad F(x) = \ln x$$

则 $f(x)$, $F(x)$ 在 $[\,1\,,\,e\,]$ 上满足柯西中值定理条件,

因此
$$\frac{f(e) - f(1)}{F(e) - F(1)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \xi \in (1, e)$$

即
$$\sin 1 = \frac{\frac{1}{\xi} \cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \cos \ln \xi$$

分析:

$$\sin 1 = \cos \ln \xi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sin \ln e - \sin \ln 1}{\ln e - \ln 1} = \frac{\frac{1}{\xi} \cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}}$$

例11. 试证至少存在一点 $\xi\in(1,e)$ 使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

法2 令 $f(x)=\sin\ln x-\sin 1\cdot\ln x$

则 $f(x)$ 在 $[\,1\,,\,e\,]$ 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi\in(1,e)$, 使

$$f'(\xi)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\cos\ln x-\sin 1\cdot\frac{1}{x}$$

$$\sin 1=\cos\ln\xi$$

讨论中值的存在性

例12. 当 $x \geq 0$ 时, 试证

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}\right)$$

证: 设 $f(t)=\sqrt{t}$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(t)$ 在 $[x, x+1]$ 上满足拉氏中值定理条件, 因此有

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

$$(0 \leq \theta(x) \leq 1)$$

解出 $\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)$, 则 $x>0$ 时

$$\theta'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}-1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}-1\right]>0$$

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x),\quad \theta'(x)>0$$

又因 $\theta(0)=\dfrac{1}{4}$

$$\theta(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)\right]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}=\frac{1}{2}$$

及 $\theta(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，于是 $\dfrac{1}{4}\le\theta(x)\le\dfrac{1}{2}.$

说明: 中值定理只告诉位于区间内的中值存在，一般不能确定其值，此例也只给出一个最好的上下界.

构造的辅助函数方法举例.

迫切问题:

上面例子中构造的辅助函数如何想出来的?

作业: 将上面例子中所构造的辅助函数自己全部练习构造一遍!

思考与练习

1. 填空题

1) 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 [1, 2] 上满足拉格朗日定理条件，则中值 $\xi = \underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$.

$$\boxed{\frac{2^4-1^4}{2-1}=4\xi^3}$$

2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，方程 $f'(x)=0$ 有 $\underline{\ 3\ }$ 个根，它们分别在区间 $\underline{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)}$ 上.

2. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$, 且在 $(0,\pi)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

提示: 由结论可知, 只需证

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$$

即 $$\left[f(x)\sin x\right]'\Big|_{x=\xi}=0$$

设 $$F(x)=f(x)\sin x$$

验证 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理条件.

3. 若 $f(x)$ 可导, 试证在其两个零点间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

提示: 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2,$

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

只要证 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

亦即 $[e^x f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

作辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$, 验证 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理条件.