第一讲 矩阵和行列式

讲座要点

借助于一二章的知识，阐述线性代数的学习方法和解题技巧.

(1) 伴随矩阵A^*;

(2) 行列式计算;

(3) 矩阵等式;

(4) 初等变换与初等矩阵;

(5) 矩阵的标准形;

(6) 典型例题选讲

知识点1: 伴随矩阵A^*

(1) 伴随矩阵的定义: $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n} \Rightarrow A^*=\left(A_{ij}\right)^T$

(2) 基本关系式: $A^*A=AA^*=|A|I$

(3) 衍生关系式: $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$ $\qquad \left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$

$$\left(kA\right)^*=k^{n-1}A^* \qquad \left(A^*\right)^T=\left(A^T\right)^* \qquad \left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$$

(4) 秩:

$$R\left(A^*\right)=\begin{cases} n, & R\left(A\right)=n, \\ 1, & R\left(A\right)=n-1, \\ 0, & R\left(A\right)<n-1. \end{cases}$$

【例 1】 设 A 是 3 阶方阵，A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|$ 的值.

【解】 $$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|$$

$$=\frac{|A|\cdot\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|}{|A|}=\frac{\left|A(3A)^{-1}-2AA^{*}\right|}{1/2}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{3}I-2|A|I\right|}{1/2}=\frac{\left|-\frac{2}{3}I\right|}{1/2}=-\frac{16}{27}$$

【例 1】 设 A 是 3 阶方阵, A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$, 求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$ 的值.

填空题的解法: 令 $A=\begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (3A)^{-1}-2A^*=\begin{pmatrix} 2/3 & & \\ & 1/3 & \\ & & 1/3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4/3 & & \\ & -2/3 & \\ & & -2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=-\frac{16}{27}$$

【例 2】设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 满足 $A^*=A^T$，如果 a_{11},a_{12},a_{13} 是 3 个相等的正数，则 a_{11} 为(　　)

$\boxed{\text{(A) } \sqrt{3}/3}$　　(B) 3　　(C) $1/3$　　(D) $\sqrt{3}$

【分析】

$$\left.\begin{array}{l} AA^*=|A|I \\ A^*=A^T \end{array}\right\} \Rightarrow AA^T=|A|I \Rightarrow |A|^2=|A|^3 \Rightarrow |A|=0 \ \ or \ \ 1$$

$$\left.\begin{array}{l} |A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ A^*=A^T \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A_{11}=a_{11},\ A_{12}=a_{12},\ A_{13}=a_{13} \end{array}\right\} \Rightarrow |A|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2$$

$$=3a_{11}^2=1$$

$$\Rightarrow a_{11}=\sqrt{3}/3$$

【例 3】 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}.$$

(1) 计算并化简 PQ． (2) 证明： Q 可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$．

【分析】

$$PQ=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha+|A|b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \end{pmatrix}$$

【例 3】 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数

$$P=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}.$$

(2) 证明： Q 可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.

$$PQ=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \end{pmatrix} \Rightarrow |P|\cdot|Q|=|A|^2\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} |P|=\begin{vmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix}=|A|\neq 0 \quad \Rightarrow |Q|=|A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |A|\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Q可逆$\Leftrightarrow |Q|\neq 0 \Leftrightarrow -\alpha^T A^{-1}\alpha+b\neq 0 \quad \Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$

【例 4】设 A, B 均为 n 阶矩阵，且 $|A| = 2$，$|B| = -3$，则

$$\left|A^{-1}B^{*} - A^{*}B^{-1}\right| = \underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】

$$\left.\begin{aligned}
\boxed{|A| \bullet \left|A^{-1}B^{*} - A^{*}B^{-1}\right| \bullet |B|} &= \left|A\left(A^{-1}B^{*} - A^{*}B^{-1}\right)B\right| \\
&= \big||B|I - |A|I\big| \\
&= |-5I| = \boxed{(-5)^{n}} \\
|A| = 2, &\quad |B| = -3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left|A^{-1}B^{*} - A^{*}B^{-1}\right| = \frac{(-5)^{n}}{-6}$$

【例 5】 设 A,B 均为 2 阶矩阵，若 $\boxed{|A|=2,|B|=3}$，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{(B)} \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}}$ (C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

【分析】$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} I_4 = (-1)^{2\times 2}|A|\cdot|B|I = |A|\cdot|B|I$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = |A|\cdot|B|\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = |A|\cdot|B|\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix}$$

$$AA^* = |A|I \Rightarrow A^* = |A|A^{-1}$$

$$BB^* = |B|I \Rightarrow B^* = |B|B^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$$

知识点2：行列式计算

看到行列式的计算或者证明, 迅速做出如下观察:

(1) 3阶, 4阶数字型: 化为三角形直接计算;

(2) 两条平行线: 直接按第一行(列)展开, 直接求得;

(3) 三条平行线: 直接按第一行(列)或者最后一行(列)展开, 得到递推关系式, 解递推关系式或者用归纳法求得;

(4) “爪” 型行列式:用中间的一条爪运用倍加不变的性质消去另外某条 “爪”；

(5) 计算某行(列)元的(代数)余子式的线性组合, 就是构造一个新的行列式;

知识点2：行列式计算

(6) 抽象行列式 $|A| = |\alpha,\beta,\gamma|$的计算: 用行列式的性质或者将$A$的列取成特殊的向量进行计算;

(7) 范德蒙行列式? 分块三角或者分块斜三角则用Laplace定理计算.

(8) 各行(列)元之和有公因子? 逐列(行)相加提取公因子.

(9) 每一列有一个共同的字母?

将第一行的倍数加到下面的各行, 使得行列式中出现大量的零元; 加边法

(10) 相邻的两行非常“接近相同”:

让相邻的行相减, 先变出大量相同的元.

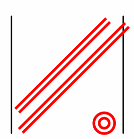
(2) 两条平行线: 直接按第一行(列)展开, 直接求得;

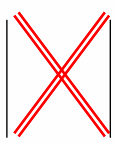
【例 1】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ $\boxed{= a^n + (-1)^{n+1} b^n}$

【分析】 0元多, “双线型”

直接按第一行 (列) 展开，或者按最后一行（列）展开

按第一列展开!





(3) 三条平行线: 直接

按第一行(列)或者最后一行(列)展开，得递推关系式.

【例2】

计算 $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & & & & \\ 2 & 5 & 3 & & O & \\ & 2 & 5 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 3 & \\ & O & & 2 & 5 & \boxed{3} \\ & & & & 2 & \boxed{5} \end{vmatrix}$.

【分析】

0元较多的“三线型”行列式, 按最后一行展开:

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow D_n - 2D_{n-1} = 3\left(D_{n-1} - 2D_{n-2}\right) = \cdots = 3^{n-2}\left(D_2 - 2D_1\right) = 2\bullet 3^{n-1} \\ &\Rightarrow D_n - 3D_{n-1} = 2\left(D_{n-1} - 3D_{n-2}\right) = \cdots = 2^{n-2}\left(D_2 - 3D_1\right) = 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$D_n = 2\bullet 3^n - 2^n \left(n \geq 3\right)$$

直接验证可知 n=1,2 时结论也成立.

(4) “爪” 型(箭型) 行列式:

以中间的“爪”用倍加不变性消去另外某条“爪”;

(5) 计算某行元的余子式的线性组合: 构造新的行列式;

【例 3】设 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$:

【分析】 令 $F_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

两个行列式虽然不相同(最后一行不同),

但是第n行同一个 位置上元的代数余子式相同,

因此只需对F_n 计算 $A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$

【例 3】设 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，计算 $A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}$：

$$F_n=\begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

只需对 F_n 计算 $1A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}$

$$\left.\begin{array}{l} F_n \xlongequal{\text{按最后一行展开}} a_1A_{n1}+a_2A_{n2}+\cdots+a_nA_{nn} \\ \text{令}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=(1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$1A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}=\begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \end{vmatrix}$$

【例 3】设 $D_n=\begin{vmatrix}1 & O & & 1\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$，计算 $A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}$：

$$1A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}=\begin{vmatrix}1 & O & & \boxed{1}\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1 & 2 & \cdots & \boxed{n}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{依次加到第}n\text{行}]{\text{倒数第}i\text{行}\times(-i)(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1 & O & & 1\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1-2-\cdots n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[2-\frac{n(n+1)}{\ }\right.$$

【例 4】已知 $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9$，则 $A_{21} + A_{22} = ($　　$)$

(A) 3.　　(B) 6.　　(C) 9.　　(D) 12.

【分析】 按第2行展开得:

$$\left.\begin{array}{l} 2A_{21} + 2A_{22} + A_{23} + A_{24} = 9 \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A_{21} + A_{22} + 2A_{23} + 2A_{24} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A_{21} + A_{22} = 6$$

【例 4】已知 $|A|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9$，则 $A_{21}+A_{22}=($　　$)$

(A) 3.　(B) 6.　(C) 9.　(D) 12.

【特殊值法】 令 $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow A_{21}+A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$9=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\cdots=-3a_4$$

$$\Rightarrow a_4=-3$$

$$=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6$$

(6) 抽象行列式的计算:

用行列式的性质计算;

或者将A的列取成特殊的向量进行计算;

【例 5】已知 α_1,α_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)$,

$B=(\alpha_1,\alpha_2)$. 若行列式 $|A|=6$，则 $|B|=$_________.

【分析】 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ 6=|A|=|B|\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3|B|\quad \boxed{\Rightarrow |B|=-2}$$

【例 6】设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$ ______.

【分析】$B=(\boxed{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3},\underline{\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3},\underline{\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3})$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$

范德蒙行列式

$$\Rightarrow|B|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(3-2)=2$$

【例 7】已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1),B=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$ 都是 4 阶矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， β_1,β_2 都是 4 维列向量. 若 $|A|=1,|B|=2$，则 $|A-2B|=$ ________.

【分析】

令 $A=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A-2B|=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\-2&0&1\end{vmatrix}=-3(1-8)=21$$

【例 7】已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$, $B=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$

都是 4 阶矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， β_1,β_2 都是 4 维列向

量. 若 $|A|=1,|B|=2$，则 $|A-2B|=$__________.

【标准方法】 利用行列式性质直接计算：

$$A-2B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)-2(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$$

$$=(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,\beta_1-2\beta_2)$$

$$\Rightarrow |A-2B|=|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,\beta_1)|$$

$$+|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,-2\beta_2)|$$

【例 7】已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$, $B=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$

都是 4 阶矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， β_1,β_2 都是 4 维列向

量. 若 $|A|=1, |B|=2$，则 $|A-2B|=$__________.

$$\Rightarrow |A-2B| = \left|(\alpha_1-2\alpha_3, \alpha_2-2\alpha_1, \alpha_3-2\alpha_2, \beta_1)\right|$$

$$+\left|(\alpha_1-2\alpha_3, \alpha_2-2\alpha_1, \alpha_3-2\alpha_2, -2\beta_2)\right|$$

$$= \left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| + \left|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right|$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1),B=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$$

$|A|=1,|B|=2$，则 $|A-2B|=$ ____________.

$$=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right|+\left|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&0&1\\1&-2&0\end{vmatrix}=-(-7)-2\bullet(-7)=21$$

(7) 范德蒙行列式?

分块三角或者分块斜三角? 用Laplace定理计算;

【例 1】计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

【分析】

令 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$$\Rightarrow a_3=(-1)^{4+5}D_4$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\left[x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots\right]$$

【例 2】设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且

$$|A| = a, |B| = b, C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}, \text{则} |C| = \_\_\_\_\_\_\_.$$

$(-1)^{mn}ab$

(8) 各行元各行(列)元之和有公因子?

逐列(行)相加提取公因子;

【例 2】计算 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

【解】

$$D_4=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & -x & z-y & y-z \\ 0 & z-x & -y & x-z \\ 0 & y-x & x-y & -z \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-y & y-z \\ z-x & -y & x-z \\ y-x & x-y & -z \end{vmatrix}=(x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-x-y & y-x-z \\ z-x & z-x-y & 0 \\ y-x & 0 & y-x-z \end{vmatrix}$$

【例 2】计算 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-x-y & y-x-z \\ z-x & z-x-y & 0 \\ y-x & 0 & y-x-z \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)\begin{vmatrix} -y & 1 & 0 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)(x-y-z)$$

(9) 每一列有一个共同的字母?

将第一行的倍数加到下面的各行, 使得行列式中出现大量的零元;

加边法

【例1】计算 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix}$

【分析】将第一行的－1倍依此加到第2行, 第3行, …, 第n行, 得到一个爪形行列式:

$$=\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k} & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

【例1】计算 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix}$

【加边法】

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_n & \\ 0 & & & \end{vmatrix}_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}_{n+1}$$

【例2】计算 $D_n=\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$, $x_1x_2\cdots x_n\neq 0$

【加边法】

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2/x_i\right) & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & x_n \end{vmatrix} \boxed{=\prod_{j=1}^{n}x_j\left[1+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2/x_i\right)\right]}$$

(10) 相邻的两行非常“接近相同”：

让相邻的行相减，先变出大量相同的元.

【例 1】设 $A=(a_{ij}), a_{ij}=|i-j|, i,j=1,\ldots,n$，计算行列式 $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boxed{n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1} \\ \boxed{n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & 2 & 2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$$

知识点3 (矩阵等式)

(1) 常见矩阵等式变形的方法

在矩阵等式两端同时:

左(右)乘一个矩阵;　　　求逆(需先判断可逆性)

取转置　　　　　　　　取行列式(等式两端必需是方阵)

(2) 矩阵方程型: 已知矩阵方程, 求解某矩阵X.

基本原则: 先化简, 后计算

(3) 已知满足某矩阵等式, 证明某矩阵可逆, 进而求逆.

【例 1】 设 $A, B, AB-I$ 都是 n 阶可逆矩阵，则 $\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}$ 等于(　　)

(A) $BAB-I$　　(B) $ABA-I$

(C) $ABA-A$　　(D) $BAB-B$

【分析】 令 $A=2I, B=3I$，则

$$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}=\left[\left(2I-\frac{1}{3}I\right)^{-1}-\frac{1}{2}I\right]^{-1}=10I$$

(A) $17I$　　(B) $11I$　　(C) $10I$　　(D) $15I$

选【C】

【标准做法】

$$\boxed{A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]}=\left(A^{-1}\right)^{-1}\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-I$$

$$=\left[\left(A-B^{-1}\right)A^{-1}\right]^{-1}-I$$

$$\boxed{=\left(I-(AB)^{-1}\right)^{-1}-I}$$

左乘 $I-(AB)^{-1}$：

$$\left(I-(AB)^{-1}\right)A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I-\left(I-(AB)^{-1}\right)=(AB)^{-1}$$

左乘AB：$\Rightarrow AB\left(I-(AB)^{-1}\right)A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I$

$$\Rightarrow \boxed{(ABA-A)}\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I$$

选【C】

【例 2】 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $B=I+AB$，$C=A+CA$，则 $B-C$ 为(　　　)

$\boxed{\text{(A) } I}$　　(B) $-I$　　(C) A.　　(D) $-A$.

【分析】 令$A=2I$

$$\left.\begin{aligned} &B=I+AB \Rightarrow B=I+2B \Rightarrow B=-I \\ &C=A+CA \Rightarrow C=2I+2C \Rightarrow C=-2I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{B-C=I}$$

【标准方法】

$$\left.\begin{aligned} &B=I+AB \Rightarrow B=(I-A)^{-1} \\ &C=A+CA \Rightarrow C=(I-A)^{-1}A \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$B-C=(I-A)^{-1}-(I-A)^{-1}A=(I-A)^{-1}(I-A)=I$$

(2) 矩阵方程型: 已知矩阵方程, 求解某矩阵X.

基本原则: 先化简, 后计算

【例 1】设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$，求矩阵 B.

【分析】 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow AB = B + 3A$

$$\Rightarrow |A|B = A^*B + 3|A|I$$

$$\left.\begin{array}{l} |A^*| = 8 \\ |A^*| = |A|^{n-1} = |A|^3 \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = 2$$

$$\Rightarrow 2B = A^*B + 6I$$

$$\Rightarrow B = 6\left(2I - A^*\right)^{-1}$$

(3) 已知某矩阵等式, 证明某矩阵可逆, 进而求逆.

【例 1】设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$,

(1) 证明 $A-I$ 是可逆矩阵；(2) 证明 $AB=BA$.

【分析】 是对矩阵等式进行变形，凑出

$$(\text{矩阵}1)\cdot(\text{矩阵}2)=kI,\ k\neq 0$$

$$\Rightarrow (\text{矩阵 }1)^{-1}=\frac{1}{k}(\text{矩阵 }2).$$

$A+B=AB\Rightarrow$

$$O=A(B-I)-B$$

$$=(A-I)(B-I)+\boxed{(-1)}I$$

$$\Rightarrow (A-I)(B-I)=I \quad \Rightarrow (A-I)\text{可逆且}(A-I)^{-1}=B-I$$

【例 1】设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$，

(1) 证明 $A-I$ 是可逆矩阵；(2) 证明 $AB=BA$.

$$\Rightarrow (A-I)\text{可逆且}(A-I)^{-1}=B-I$$

(2) $$(A-I)^{-1}=B-I$$

$$\Rightarrow (A-I)(B-I)=(B-I)(A-I)$$

$$\Rightarrow AB-A-B+I=BA-A-B+I$$

$$\Rightarrow AB=BA$$

【例 2】设 A 为 3 阶非零矩阵，若 $A^3 = O$，则(　　).

(A) $I - A$不可逆，$I + A$不可逆.

(B) $I - A$不可逆，$I + A$可逆.

$\boxed{\text{(C) } I - A \text{可逆，} I + A \text{可逆.}}$

(D) $I - A$可逆，$I + A$不可逆.

【分析】

$$O = A^3 = (A+I)(A^2 - A + I) + (-1)I$$

$$\Rightarrow (A+I)(A^2 - A + I) = I \quad \Rightarrow A+I \text{ 可逆}$$

$$O = A^3 = (-A+I)(-A^2 - A - I) + 1 \quad I$$

$$\Rightarrow (I - A)(-A^2 - A - I) = -I \quad \Rightarrow A - I \text{ 可逆}$$

知识点4 (初等矩阵)

对矩阵A做一次初等行变换,

相当于 左乘对应的初等矩阵

对矩阵A做一次初等列变换,

相当于 右乘对应的初等矩阵

初等矩阵的逆, 转置, 伴随矩阵仍为初等矩阵

【例 1】设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $C=P^{-1}AP$；　$\boxed{\text{(B) } C=PAP^{-1};}$　(C) $C=P^{T}AP$；　(D) $C=PAP^{T}$.

【分析】 P 对应的行变换：　第2行加到第1行;

P 对应的列变换：　第1列加到第2列;

P^{-1} 对应的列变换：　第1列的－1倍加到第2列;

将A的第2行加到第1行得B $\Rightarrow B=PA$

将B的第1列的－1倍加到第2列 $\Rightarrow C=BP^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l}B=PA\\C=BP^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{C=PAP^{-1}}$$

【例2】 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ 其中A可逆, 则B^{-1}等于 (　　)

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　$\boxed{\text{(C) } P_1P_2A^{-1}}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

【分析】B是A经由列变换得到的：1, 4列互换, 再2,3列互换;

或者：　2,3列互换, 再1, 4列互换.

P_1: 1, 4列互换　P_2: 2, 3列互换 $\Rightarrow B = AP_1P_2 \text{ or } AP_2P_1$

$\Rightarrow B^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1} \text{ or } P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}$ $\Rightarrow \boxed{B^{-1} = P_2P_1A^{-1} \text{ or } P_1P_2A^{-1}}$

【例 3】设 A 为 $n(n\geq 2)$阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则(　　)

(A)　交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*；

(B)　交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*；

(C)　交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$；

(D)　交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$。

【分析】

令 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$ 表1, 2行互换对应的初等矩阵

交换A的第1行与第2行得矩阵$B \Rightarrow B=PA$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B^* = |B|B^{-1} = -|A|A^{-1}P^{-1} = -A^*P \\ P\text{ 对应的列变换：1, 2列互换} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

【例4】

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，若 $B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$，

则 $B^{-1}=$ ________.

【分析】

$$B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q}$$

$$\Rightarrow B=PAQ \Rightarrow B^{-1}=Q^{-1}A^{-1}P^{-1}=QA^{-1}P=\begin{pmatrix} b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=P, Q^{-1}=Q$$

知识点5 (矩阵的标准形)

基本结论 $R(A_{m\times n})=k$，则存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 与可逆矩阵 $Q_{n\times n}$

使得 $A=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，将 $\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$ 称为矩阵 A 的标准形.

(1) $R(A_{m\times n})=k \Rightarrow \exists\, B_{m\times k}, C_{k\times n}$，$s.t.$ $A=BC$

且 $R(B_{m\times k})=R(C_{k\times n})=k$

(2) $R(A_{m\times n})=m \Rightarrow \exists B_{n\times m}$, $s.t.$ $AB=I_m$

(3) $A_{m\times n}B_{n\times P}=O \Rightarrow R(A)+R(B)\le n$

【例1】 (矩阵的满秩分解) 设 $R(A_{m\times n})=k$，则存在秩为 k 的 $m\times k$ 矩阵 B 与秩为 k 的 $k\times n$ 矩阵 C 使得 $A=BC$.

【分析】 $$\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}_{m\times k} (I_k, O)_{k\times n}$$

$R(A_{m\times n})=k \Rightarrow$ 存在m阶可逆矩阵P与n阶可逆矩阵Q使得:

$$A = P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q = \underbrace{P\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}_{m\times k}}_{B} \underbrace{(I_k, O)_{k\times n} Q}_{C}$$

$\boxed{P\text{可逆}}$

$$R(B) = R\left[P\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}\right] = R\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix} = k \qquad \text{同理 } R(C)=k$$

【例1】 (矩阵的满秩分解) 设 $R(A_{m\times n})=k$，则存在秩为 k 的 $m\times k$ 矩阵 B 与秩为 k 的 $k\times n$ 矩阵 C 使得 $A=BC$.

【特殊情形】

秩1矩阵可以写成非零列矩阵与非零行矩阵之乘积.

【例2】

任一秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵一定可以写成 r 个秩 1 矩阵的和.

【分析】 $$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = E_{11}+E_{22}+\cdots E_{rr}$$

$E_{ii}\left(i=1,\cdots,r\right)$： i行i列元为1, 其它元为0的$m\times n$矩阵

A的秩为$r \Rightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = P\left(E_{11}+E_{22}+\cdots E_{rr}\right)Q$$

$$= PE_{11}Q+PE_{22}Q+\cdots PE_{rr}Q$$

P, Q可逆 $\Rightarrow R\left(PE_{ii}Q\right)=R\left(E_{ii}\right)=1\left(i=1,\cdots,r\right)$

【例3】

$$R\left(A_{m\times n}\right)=m \Rightarrow \text{存在}\, n\times m\, \text{矩阵}\, C\, \text{使得}\, AC=I_m\,.$$

【分析】 $$\left(I_m,\ O\right)_{m\times n}\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=I_m$$

$R\left(A_{m\times n}\right)=m \Rightarrow$存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\left(I_m,\ O\right)_{m\times n} \Rightarrow PAQ\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=\left(I_m,\ O\right)_{m\times n}\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=I_m$$

$$\Rightarrow AQ\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=P^{-1} \Rightarrow A\underbrace{Q\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}P}_{C_{n\times m}}=I_m$$

【例4】 $A_{m\times n}B_{n\times p}=O\Rightarrow R(A)+R(B)\le n.$

【分析】 设 $\boxed{R(A)=k}(\le n)$

$\Rightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

$$\Rightarrow O=AB=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}QB\Rightarrow O=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}QB$$

左乘P^{-1}

令 $QB=\begin{pmatrix} C_{k\times p} \\ D_{(n-k)\times p} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow O=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}\Rightarrow C=O$

$$\Rightarrow QB=\begin{pmatrix} O \\ D_{(n-k)\times p} \end{pmatrix}\Rightarrow n-k\ge R(QB)=R(B)\ \boxed{\Rightarrow R(A)+R(B)\le n}$$

Q可逆

典型例题选讲

【例 1】 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩为 1，

则 a,b 应满足______.

【分析】

$$\left.\begin{array}{l} R\left(A^*\right)=\begin{cases} 3, & R(A)=3, \\ 0, & R(A)<2. \end{cases} \\ R\left(A^*\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A)=2 \Rightarrow |A|=0$$

$$0=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$$

$a+2b=0$ or $a=b$ 　　$a=b$ 时, $R(A)\le 1$, $R\left(A^*\right)=0$ 不合题意!

【例2】设 A, B 都是 n 阶非零矩阵且 $AB = O$，则 A 与 B 的秩(　　).

(A) 必有一个等于零;　　$\boxed{\text{(B) 都小于 } n;}$

(C) 一个小于 n，一个等于 n;　　(D) 都等于 n.

【分析】

$$\left.\begin{array}{r} \text{若 } R(A) = n \Rightarrow A\text{可逆} \\ AB = O \end{array}\right\} \Rightarrow B = O \quad \text{与题设矛盾!}$$

左乘A^{-1}

$$\Rightarrow R(A) < n$$

同理, $R(B) < n$

【例 3】若 n 阶方阵 A 中的元均为整数,

证明：A^{-1} 的元均为整数 $\Leftrightarrow |A| = \pm 1$.

【引理】n 阶方阵 A 中的元均为整数 $\Rightarrow |A|$ 是整数.

$n = 1,2$ 时结论显然成立.

设对$n-1$阶矩阵引理为真. 对n阶矩阵A:

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ \text{由归纳假设}, A\text{的余子式都是整数} \\ \Rightarrow A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n} \text{ 都是整数} \end{array}\right\} \Rightarrow |A| \text{是整数.}$$

由数学归纳法知, 引理恒为真.

【例 3】若 n 阶方阵 A 中的元均为整数,

证明：A^{-1} 的元均为整数 $\Leftrightarrow |A| = \pm 1$.

【引理】n 阶方阵 A 中的元均为整数 $\Rightarrow |A|$ 是整数.

"$\Rightarrow$" 若 A^{-1} 的元均为整数，在 $AA^{-1} = I$ 两端同取行列式，有

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. 根据引理，$|A|$ 与 $|A^{-1}|$ 都是整数，因此 $|A| = \pm 1$.

"$\Leftarrow$" 设 $|A| = \pm 1$，那么由 $AA^* = |A| I = \pm I$ 知 $A^{-1} = \pm A^*$.

A^* 中的元是 A 中元的代数余子式，即元为整数的 $n-1$ 阶余子式带上符号，都是整数，因此 A^{-1} 中的元都是整数.

【例 4】设 α 为 3 维列向量. 若 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$ ___3___.

【分析】 令 $A = \alpha\alpha^T$

$$\Rightarrow A^2 = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T = (\alpha^T\alpha)A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow A^2 = 3A$$

【法2】 令 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 阶行列式游戏

在行列式游戏 **Tic-Tac-Tic** 中，游戏者 **1** 在一个空的 3×3 矩阵中填入一个 **1**，游戏者 **0** 在某一个空位置中填入一个 **0**，游戏如此继续，直到 3×3 矩阵填入了 **5** 个 **1** 和 **4** 个 **0**.

若此行列式值为 **0**，则游戏者 **0** 获胜，否则游戏者 **1** 获胜. 有没有一种策略保证某一个游戏者一定获胜?

锁具计数问题

（1994年全国数学建模竞赛题的一部分）

某厂生产一种弹子锁具, 每个锁具的钥匙有 5 个槽, 每个槽的高度从 {1,2,3,4, 5,6} 6 个数 (单位略) 中任取一数. 由于工艺及其它原因, 制造锁具时对 5个槽的高度还有两个限制: 至少有 3 个不同的数; 相邻两槽高度之差不能为 5. 满足以上条件制造 出来的所有互不相同的锁具称为一批. 问: 每一批锁具有多少个?

谢 谢！