2.2　行列式的性质与计算

一、行列式的性质

二、行列式的计算

三、方阵乘积的行列式

一、行列式的性质

性质1 行列式按任一行展开，其值相等，即

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij}为划去A的第i行第j列后所得的$n-1$阶行列式，A_{ij}称为a_{ij}的代数余子式。

M_{ij}称为a_{ij}的余子式。

例1

$$D=\begin{vmatrix}4&0&0&1\\2&-1&3&1\\0&0&0&2\\7&4&3&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}4&0&0\\2&-1&3\\7&4&3\end{vmatrix}=-2\times4\begin{vmatrix}-1&3\\4&3\end{vmatrix}$$

$$=-2\times4\times(-15)$$

返回

例2 计算
$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解
$$D_n = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn} a_{n-1,n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

返回

同理 $D_n = \begin{vmatrix} & * & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$

推论 若行列式的某一行全为零，则行列式等于零.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

性质2 n阶行列式某两行对应元全相等，则行列式为零. 即当 $a_{ik} = a_{jk}$， $i \neq j, k=1,\ldots, n$时，$\det A = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

性质3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左 $\overset{\text{按第}i\text{行展开}}{=} (b_{i1}+c_{i1})A_{i1}+\cdots+(b_{in}+c_{in})A_{in}$

$$=(b_{i1}A_{i1}+\cdots+b_{in}A_{in})+(c_{i1}A_{i1}+\cdots+c_{in}A_{in})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1+4 & 2+5 & 3+6 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

观察：与矩阵加法的区别？

性质4（行列式的初等变换）若把行初等变换施于n阶矩阵A上：

(1) 将A的某一行乘以数k得到A_1，则

$$\det A_1 = k(\det A);$$

(2) 将A的某一行的$k(\neq 0)$倍加到另一行得到A_2,则

$$\det A_2 = \det A;$$

(3) 交换A的两行得到A_3, 则 $\det A_3 = -\det A$.

(1) 将$\boldsymbol{A}$的某一行乘以数$\boldsymbol{k}$得到$\boldsymbol{A}_1$，则

$$\det \boldsymbol{A}_1 = k(\det \boldsymbol{A});$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

推论 若行列式某两行对应元成比例，则行列式的值为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质2 某两行对应元全相等，则行列式为零.

应用:

1. 设A为n阶矩阵，则 $\det(kA)=k^n(\det A)$.

返回

例4 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ $2|A|=|2A|$?

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-3\\0&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-3\\0&0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1$$

$$2|A|=\begin{vmatrix}2&4&6\\2&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=\cdots=2$$

$$|2A|=\begin{vmatrix}2&4&6\\4&4&6\\2&2&2\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=8$$

返回

$$2|A| \neq |2A|$$

一般，

$$|kA| = k^n |A| \neq k|A|.$$

应 用:

2. 初等矩阵的行列式:

$$\det(E_{ij}) = \det(E_{ij}I) = -\det I = -1$$

$$\det E_i(c) = c \neq 0;$$

$$\det E_{ij}(c) = 1.$$

初等矩阵的行列式不等于0

返回

方阵乘积的行列式

定理2 设A, B为n阶方阵，则

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

返回

推论1 设$A_i\,(i=1,\ldots,t)$为n阶矩阵，则

$$\det(A_1A_2\cdots A_t)=(\det A_1)\cdots(\det A_t).$$

返回

性质5 设A为n阶矩阵，则 $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det A.$

此性质表明，行列式中**行与列的地位相同**。无本质区别，凡是对行成立的性质，对列也成立。

以上性质1---性质4 （及推论）对列也成立。

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij}为划去A的第i行第j列后所得的$n-1$阶行列式，A_{ij}称为a_{ij}的代数余子式。

由性质5，

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1,\ldots,n$$

例5 奇数阶反对称阵的行列式必为零.

证 $A_{n\times n}$ (n为奇数)满足:

$$A^{\mathrm{T}} = -A,$$

于是，$\det A = \det A^{\mathrm{T}} = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A,$

$$\therefore \det A = 0.$$

例6 计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

（已知 $abcd=1$）

返回

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

(已知 $abcd=1$)

$$=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$=0.$$

行列式性质小结：5性质 2推论

一、按行展开：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

二、三类初等变换：

1. 换行(反号)， 2. 倍乘 ， 3. 倍加(不变) .

三、三种为零：

1. 有一行全为零 ，

2. 有两行相同 ，

3. 有两行成比例 .

四、 一种分解.

五、乘积，$D^{\mathrm{T}} = D$.

思考题

1.设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$,则

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = (\ )$$

(A)a,(B)$2a$,　(C)$-2a$,　(D)$-3a$

返回

$$2.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1，则$$

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{nn-1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{in} & b_{in-1} & \cdots & b_{i1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$$

(A)1,（B）-1，（C）$(-1)^n$，（D）2

$$3.\text{设}D=\begin{vmatrix}4&0&1\\2&2&3\\0&1&1\end{vmatrix}\qquad \text{求}A_{21}+A_{22}+A_{23}$$

此题即求第二行各元素的代数余子式之和:

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}=\begin{vmatrix}4&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}$$

元素的余子式、代数余子式只于该元的位置有关，而与元素的值无关。

4.求解矩阵方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0.$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 能被18整除吗?

矩阵的行初等变换与行列式的初等变换之区别:

（1）矩阵是数表，行初等变换后的矩阵与原矩阵保持等价关系。$\longrightarrow$

（2）行列式是数，初等变换后的行列式与原行列式保持等值关系。===

行列式的计算

三角化法

返回

例7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\det A$.

解.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & -2 & 23 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{196}{10} \end{vmatrix}=196$$

返回

降阶法

（按0多的行或列展开）

返回

例8 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix} -7 & 0 & -17 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -7 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=10$$

加边法（升阶法）

例12 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i
$$

（考虑：至少有三种解法？）

（再考虑例9？）

例12 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 0 & 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ -x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x_2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ -x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1-x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1-x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将第2行的（-1）倍加到第i行（i=3,…,n+1)

当$\mathrm{n}\ge 3,\ D_n=0.$

$$D_n=\begin{cases} 1+x_1y_1 & n=1 \\ (x_1-x_2)(y_1-y_2) & n=2 \\ 0 & n\ge 3 \end{cases}.$$

其他方法

返回

箭形（爪形）行列式

返回

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & & \cdots & a_n \end{vmatrix},\text{其中} a_i \neq 0(i = 2,3,\cdots n).$$

$$\xlongequal{-\frac{b_2}{a_2}C_2 + C_1} \begin{vmatrix} a_1 - \dfrac{b_2}{a_2}c_2 & c_2 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & a_2 & & \cdots & \\ b_3 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{-\frac{b_3}{a_3}C_3+C_1}}\begin{vmatrix} a_1-\frac{b_2}{a_2}c_2-\frac{b_3}{a_3}c_3 & c_2 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & a_2 & & \cdots & \\ 0 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{a_i}c_i\right)a_2a_3\cdots a_n$$

$$\underline{\underline{-\frac{b_2}{a_2}C_2+C_1}}\begin{vmatrix} a_1-\frac{b_2}{a_2}c_2 & c_2 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & a_2 & & \cdots & \\ b_3 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

返回

例12 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$b = 1 + a_1 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\right)$$

赶鸭子法

行列式特征：各行（列）总和相等

例11 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

$$D_4=\begin{vmatrix}0&a&b&c\\a&0&c&b\\b&c&0&a\\c&b&a&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+c&a&b&c\\a+b+c&0&c&b\\a+b+c&c&0&a\\a+b+c&b&a&0\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&a&b&c\\1&0&c&b\\1&c&0&a\\1&b&a&0\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&a&b&c\\0&-a&c-b&b-c\\0&c-a&-b&a-c\\0&b-a&a-b&-c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}-a&c-b&b-c\\c-a&-b&a-c\\b-a&a-b&-c\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}c-a-b&c-b&b-c\\c-a-b&-b&a-c\\0&a-b&-c\end{vmatrix}$$

返回

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} -a & c-b & b-c \\ c-a & -b & a-c \\ b-a & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} c-a-b & c-b & b-c \\ c-a-b & -b & a-c \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} c-a-b & c-b & b-c \\ 0 & -c & a-b \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(c-a-b)\left[c^2-(a-b)^2\right]$$

返回

范德蒙行列式

范德蒙行列式($n \geq 2$)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j),$$

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1)][(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_2)]$$

$$\ldots [(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})][(x_n - x_{n-1})]$$

例10

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = abcd\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\,(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

递推法

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解：按第一行展开

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

返回

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, D_1 = 2$$

$$D_n - D_{n-1} = 1 \quad D_n = D_{n-1} + 1$$ **(递推公式)**

$$\therefore D_n = n+1$$

递推法的基本思路：

1.降阶（降阶时注意保持“原形”）；

2. 得到递推公式： $D_n = f(D_{n-1})$或$D_n = f(D_{n-2})$

或$D_n = f(D_{n-1}) + g(D_{n-2})$

3. 求出行列式 D_n.

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1)\end{vmatrix}$$

解：按第n列展开

$$D_n=n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1\end{vmatrix}-(n-1)D_{n-1}$$

$$D_n=n(-1)^{1+n}(n-1)!-(n-1)D_{n-1}=(-1)^{1+n}n!-(n-1)D_{n-1}$$

解法2

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$D_n=n(-1)^{1+n}(n-1)!-(n-1)D_{n-1}=(-1)^{1+n}n!-(n-1)D_{n-1}$$

数学归纳法

返回

分解法

证明
$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

按第1列分解

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

第一项按第3列分解，第二项按第2列分解

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

例12 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ x_2 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$= \dots$

返回

思考题

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & & a+b \\ a-b & a & a+b & & a+b \\ a-b & a-b & a & & a+b \\ & & & \ddots & \\ a-b & a-b & a-b & & a \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 0$$

返回

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & & a+b \\ a-b & a & a+b & & a+b \\ a-b & a-b & a & & a+b \\ & & & \ddots & \\ a-b & a-b & a-b & & a \end{vmatrix} \xlongequal{-r_2+r_1} \begin{vmatrix} b & b & 0 & & 0 \\ a-b & a & a+b & & a+b \\ a-b & a-b & a & & a+b \\ & & & \ddots & \\ a-b & a-b & a-b & & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-c_1+c_2} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & & 0 \\ a-b & b & a+b & & a+b \\ a-b & 0 & a & & a+b \\ & & & \ddots & \\ a-b & 0 & a-b & & a \end{vmatrix} = b^2 D_{n-2} \qquad D_n = b^2 D_{n-2} \quad D_1 = a; D_2 = b^2$$

n为偶数时，$D_n = b^n$

n为奇数时，$D_n = ab^{n-1}$

返回

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$$

三、方阵乘积的行列式

定理2 设A, B为n阶方阵，则

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

返 回

推论1 设$A_i\ (i=1, \ldots, t)$为n阶矩阵，则

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_t) = (\det A_1)\cdots(\det A_t).$$

返回

定理1 方阵A可逆的充要条件为$\det A \neq 0$.

证 设 $A \xrightarrow{\text{行初等变换}} R$（简化行阶梯形）

即存在初等矩阵 $E_1, \dots, E_t$使得 $A = E_1 \cdots E_t R$

$\Leftarrow$:已知 $\det A \neq 0$. 若A不可逆,

则R的最后一行的元全为零,所以 $\det R = 0$.

$\det A = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det R) = 0$, 矛盾.

$\Rightarrow$: 若A可逆, 则$R=I$,

$\det A = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det I) \neq 0$.

推论2 设A, B为n阶矩阵，且$AB=I$ (或$BA=I$), 则$B=A^{-1}$.

证 $\det(AB)=(\det A)(\det B)=\det I=1.$

所以 $\det A\neq 0.$ A可逆

$$A^{-1}AB=A^{-1}I=A^{-1}$$

$$B=A^{-1}$$

应用： $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$

例 12 设 $AA^{\mathrm{T}}=I$ 且 $|A|=-1$,

证明: $|-I-A|=0$.

证 $|-I-A|=|-AA^{\mathrm{T}}-A|$

$$=|A(-A^{\mathrm{T}}-I)|$$

$$=|A||(-A-I)^{\mathrm{T}}|$$

$$=-|-A-I|$$

$$=-|-I-A|$$

$\therefore\ |-I-A|=0$.

例13 设 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n-1 \end{pmatrix}$， $P^{-1}BP = \Lambda$，

求：$|I+B|$.

解 $B = P\Lambda P^{-1}$,

$$|I+B| = |I+P\Lambda P^{-1}| = |PIP^{-1}+P\Lambda P^{-1}|$$

$$= |P(I+\Lambda)P^{-1}| = |P||I+\Lambda||P^{-1}|$$

$$= |P||P^{-1}||I+\Lambda| = |I+\Lambda|$$

$$= n!$$

设n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和:

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

解 第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$