餘你何干？我幫你算！

~ 多項式的除法原理學習與運用 ~

高一的期末考範圍教到了多項式的除法原理，令我十分頭痛。
而題型變化多端，常常前一題還沒懂，又遇到另一個弔詭的題目，
導致到最後演變成 " 完全跟不上老師講解速度 " 的局面。
不過**按照自己的步調慢慢探索**後，很多題目都能輕鬆解決。

$$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$$

在做習題的過程中，我**觀察**到題目所求的答案都大同小異，也就代表求解的方式其實都很相似。從這個出發點去看，其實多變的題型也沒什麼大不了了！

多項式的除法原理中的基礎技能便是「**寫出 $f(x)=g(x)Q(x)+r$**」
在不同的場合中，**用不同角度去思考**，使用最適合的方法做變化，
就能事半功倍！

當遇到 " 求值 " 的題目時，就能夠嘗試以下幾種做法來解解看！

基礎：暴力解法"四元一次方程式"

入門：偷懶寫法"牛頓插值法"

進階：直接求值"拉格朗日插值法"

$f(x)$ 為一三次多項式，$f(0)=-4$．$f(1)=1$．$f(2)=4$．$f(3)=11$
則 $f(4)=?$

Ⅰ.四元一次方程式：最簡單的方式，常伴隨著**大量運算，出錯率可能偏高！**
相對的**操作上較沒有難度**，很適合當基本款！

解1：設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

→ 分別代入 0.1.2.3 解方程式．

→先**做出假設**

$$\begin{cases} f(0)=d=-4 \cdots ① \\ f(1)=a+b+c+d=1 \cdots ② \\ f(2)=8a+4b+2c+d=4 \cdots ③ \\ f(3)=27a+9b+3c+d=11 \cdots ④ \end{cases}$$

→代入數字（**小心運算！**）

③－② 得 $3a+b=-1$

④－② 得 $4a+b=0$

→加減消去法

$\therefore a=1$．$b=-4$．$c=8$

$\therefore f(x)=\underline{\underline{x^3-4x^2}}+8x-4$

↳消除 $(x=4)$

$\therefore f(4)=32-4$

$=28$ #

→代入題目所求

使用一元四次多項式求值很容易，而且非常萬用。但**缺點就是運算太麻煩**了！有沒有什麼方法能**減少運算量**且準確求值的呢？

$f(x)$ 為一三次多項式，$f(0)=-4$．$f(1)=1$．$f(2)=4$．$f(3)=11$
則 $f(4)=?$

ＩＩ牛頓插值法：一層一層往上追加條件，將原本的多項式「**保留且擴充**」！簡化了不少運算量！

較**適合掌握除法原則後的快速假設**！

解 2：設 $f(x)=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$ →**逐步擴充進行假設**

→ 分別代入 0.1.2.3 解方程式

$$
\begin{cases}
f(0)=\underline{d=-4} \\
f(1)=c+d \longrightarrow c-4=1,\ \underline{c=5} \\
f(2)=2b+2c+d \longrightarrow 2b+10-4=4,\ \underline{b=-1} \\
f(3)=6a+6b+3c+d \longrightarrow 6a-6+15-4=11,\ \underline{a=1}
\end{cases}
$$

→分別代入數字一一解開

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-2)-x(x-1)+5x-4$

$\therefore f(4)=4\cdot3\cdot2-4\cdot3+5\cdot4-4$

$=28$ #

→代入題目所求

有了牛頓插值法，成功的解決四元一次方程式的問題——運算麻煩。

但這個方法也需要算出未知數ａｂｃｄ後，再回到假設的多項式才能求解。

所以，有沒有方法是**不需要求出未知數就能夠直接算出答案**的呢？

$f(x)$為一三次多項式，$f(0)=-4$. $f(1)=1$. $f(2)=4$. $f(3)=11$

則 $f(4)=?$

ＩＩＩ利用拉格朗日求解：不需要運算未知數，直接求值。

是最適合拿來「**單純求值**」的方法！

解3：$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}\cdot -4+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}\cdot 4+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}\cdot 11$$

→ 代入4求值即可.

$$f(x)=-4\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+\frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+4\,\frac{x(x-1)(x-2)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+11\,\frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(4)&=-4\cdot(-1)+1\cdot 4+4\cdot(-6)+11\cdot 4\\&=8-24+44\\&=28_{\#}\end{aligned}$$

此種方法**不需要算未知數**，但在假設的過程中相對耗時、麻煩，

需要大量練習方能更加熟練。

以上每種方法都各有優缺點，評估題目之後在選擇最適合的方式即可！

學習新的知識可能會受挫，但**不要氣餒，找到自己的節奏**後，

仔細觀察其中的規則，**轉換思考的層次，化繁為簡。**

切記題目沒有一定，方法沒有絕對。**懂得變換才是關鍵！**