

## 108 學年度高一多元選修「數學建模」：從影集談數學模型

### 一、影片欣賞之學習單

#### 【定義問題】

1. 當警探的哥哥(唐 Don)為案情膠著感到沮喪，這時候他偵察的方向為…  
找出犯罪車輛、如何讓被害人說出實話
2. 而弟弟(查理 Charlie)看到灑水器後，靈光乍現，他提議偵察方向應該為…  
推算所有落地點的共性，找出兇手的住處

#### 【設定參數、搜資相關資訊、建立模型】

3. Charlie 和 Don 開始討論起犯罪相關理論，根據哥哥的專業理論，可知犯案地點與哪些事情有關？是呈正比還是反比？  
反比
    1. 連環犯罪者會頻繁出現在交通不擁擠的地方，等待獵物被孤立的那一刻，隔離區就是襲擊的高發區。
    2. 連環犯罪者很少在家附近犯案，而且犯案範圍大
    3. 距離衰減：隨著犯案手段逐漸成熟，緩衝區的大小會趨向穩定
    4. 攻擊者犯案慾望越強，案發點就會越遠。根據受害者被傷害的程度以及誘拐的時間長短來定位慾望強烈。
  4. Charlie 用什麼方法說明，其實沒有所謂的隨機殺人？  
讓警員們在一定範圍之內隨意站立(任意分佈)，會發現每個人所佔的位置差不多都是等間隔的，而真正的隨意分佈應該要有密集區，也就是說很難有意識地挑選一個隨機序列，最後還是會均勻的分佈。
  5. 你覺得這個模型會用哪些你學過的數學符號？  
加減乘除 等於 機率 交集聯集 集合 空集合 子集
- #### 【驗證模型並做修正】
6. Charlie 將現有的犯罪資料(13 起犯案)，代入模型後發現，所有的資料都符合，可能機率都在 80%以上，但只有最後一起機率非常低。Charlie 和 Don 做了什麼推論？  
他們推斷有人謊報自己的受害地點

7. 修正第 13 起犯案資料後，Charlie 用模型跑出犯罪者可能居住的地點後，Don 請探員不眠不休地搜集所有可能的嫌疑犯之後，還是沒有找到犯案人。沮喪之際，Don 發現如果將模型套用在自己身上會得到什麼結論？所以又將模型做了怎麼樣的修正？  
不要局限於他住在哪，也有可能是工作區域，建立一個等式，計算出兩個高發區

## 二、由犯罪熱區淺談數學建模

### (一) 問題的形成：

案件：美國的泰德·邦迪連續殺人案

我們先上網搜尋泰德·邦迪，紀錄所有犯案的精準位置，利用 My maps 將每一個點標示並座標化，透過羅斯姆公式找出連續犯罪者的可能居住地。

### (二) 假設與簡化：

因為此案件涉及範圍太廣大，所以我們取出犯案密集度較高的美國西半部作為主要計算地區，並將每一個座標移至最近的整數點，如果有兩點距離非常靠近就只取一個，整理出最終的計算地區，包含我們取的所有座標點且為計算數量最少的。

我們將緩衝半徑和控制特徵函數的前後兩項作用數字帶入 1

### (三) 建立數學模型：

犯罪學中有一門稱為地理分析 (Geographic Profiling) 的技術，其中有一條「羅斯姆公式 (Rossmo's Formula)」是利用數學公式找尋連續犯案者居住的可能地點。Rossmo's Formula

將地圖分割成  $i \times j$  個網格 (正方形方格)， $p_{ij}$  代表第  $i$  列、第  $j$  行網格為犯案者居住地的可能性，

$$p_{ij} = k \sum_{n=1}^c \left[ \underbrace{\frac{\varphi_{ij}}{(|X_i - x_n| + |Y_j - y_n|)^f}}_{1^{st} \text{ term}} + \underbrace{\frac{(1 - \varphi_{ij})(B^{g-f})}{(2B - |X_i - x_n| - |Y_j - y_n|)^g}}_{2^{nd} \text{ term}} \right],$$

$$\text{其中 } \varphi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (|X_i - x_n| + |Y_j - y_n|) > B \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$B$  即為緩衝區半徑，

$(X_i, Y_j)$  代表第  $i$  列、第  $j$  行網格中心點坐標，

$(x_n, y_n)$  代表第  $n$  起犯案地點，

$\varphi_{ij}$  為特徵函數控制前後兩項的作用，

當  $|X_i - x_n| + |Y_j - y_n| > B$ ，即網格中心到第  $n$  起犯案地點距離大於緩衝區半徑時，

公式前項（1<sup>st</sup> term）起作用；

若距離小於緩衝區半徑，則後項（2<sup>nd</sup> term）起作用，我們可以觀察到，當

$|X_i - x_n| + |Y_j - y_n| = B$  時，若不考慮  $\varphi_{ij}$ ，前後兩項相等。

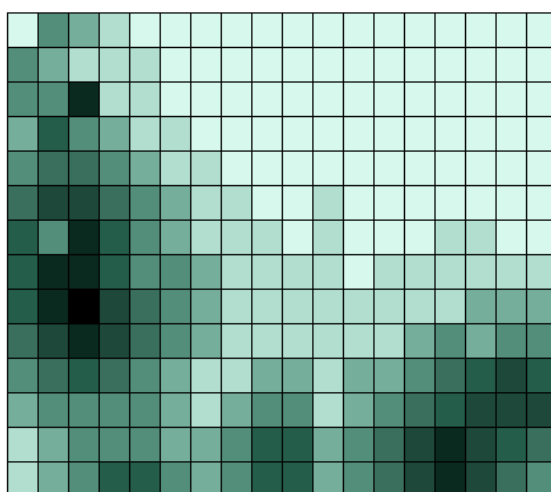
公式中的  $k, f, g, B$  則必須從過往蒐集的已知經驗（其他連續犯案者案例），找出最適合係數。因為這個牽扯到犯罪案件的真實資料，我們比較無法取得的資料，所以用假設值代入  $k=1, b=1, f=2, g=2$ 。

（四）模型求解：

0.12	0.41	0.23	0.16	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.06	0.07	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04
0.41	0.25	0.22	0.17	0.13	0.11	0.09	0.07	0.07	0.06	0.08	0.05	0.05	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05
0.49	0.49	0.27	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.07	0.07	0.08	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05
0.25	1.32	0.38	0.26	0.19	0.15	0.12	0.10	0.08	0.08	0.10	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.06
0.33	0.54	0.61	0.36	0.25	0.18	0.14	0.11	0.10	0.09	0.12	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.08
0.65	1.57	1.57	0.60	0.34	0.23	0.18	0.13	0.11	0.11	0.14	0.09	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.09
0.82	0.50	2.54	0.85	0.45	0.29	0.21	0.15	0.13	0.12	0.17	0.10	0.10	0.12	0.13	0.13	0.12	0.12
0.87	2.68	2.81	1.03	0.52	0.33	0.23	0.16	0.15	0.14	0.19	0.12	0.13	0.15	0.16	0.18	0.17	0.16
0.85	2.68	3.43	1.75	0.65	0.37	0.26	0.18	0.17	0.17	0.20	0.15	0.15	0.19	0.22	0.26	0.25	0.24
0.64	1.61	2.50	1.55	0.58	0.34	0.25	0.19	0.20	0.20	0.20	0.18	0.20	0.25	0.33	0.45	0.47	0.44
0.37	0.56	0.80	0.60	0.38	0.27	0.22	0.20	0.25	0.26	0.20	0.23	0.25	0.39	0.59	1.33	1.38	1.35
0.26	0.41	0.46	0.42	0.33	0.25	0.21	0.25	0.40	0.41	0.21	0.31	0.36	0.59	0.87	1.51	1.46	1.39
0.21	0.30	0.37	0.47	0.43	0.28	0.24	0.40	1.15	1.19	0.26	0.51	0.57	1.43	2.22	1.61	0.76	0.57
0.20	0.28	0.43	1.17	1.15	0.40	0.27	0.40	1.15	1.18	0.27	0.49	0.55	1.40	2.16	1.45	0.57	0.38



0.03	0.12	0.07	0.05	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.12	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01
0.14	0.14	0.79	0.06	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01
0.07	0.38	0.11	0.08	0.06	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.10	0.16	0.18	0.10	0.07	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.02
0.19	0.46	0.46	0.17	0.10	0.07	0.05	0.04	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.24	0.15	0.74	0.25	0.13	0.08	0.06	0.04	0.04	0.03	0.05	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.03	0.03
0.25	0.78	0.82	0.30	0.15	0.10	0.07	0.05	0.04	0.04	0.06	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05
0.25	0.78	1.00	0.51	0.19	0.10	0.08	0.05	0.05	0.05	0.06	0.04	0.04	0.06	0.06	0.08	0.07	0.07
0.19	0.47	0.73	0.45	0.17	0.10	0.07	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.06	0.07	0.10	0.07	0.14	0.13
0.11	0.16	0.23	0.17	0.11	0.08	0.06	0.06	0.07	0.08	0.06	0.07	0.07	0.11	0.17	0.39	0.40	0.39
0.08	0.12	0.13	0.12	0.10	0.07	0.06	0.07	0.12	0.12	0.06	0.09	0.10	0.17	0.25	0.44	0.43	0.40
0.06	0.09	0.10	0.14	0.12	0.08	0.07	0.12	0.34	0.36	0.08	0.15	0.17	0.42	0.65	0.47	0.22	0.17
0.06	0.08	1.12	0.34	0.34	0.12	0.08	0.12	0.34	0.34	0.08	0.14	0.16	0.41	0.63	0.42	0.17	0.11



### (五) 模型的評估與改進：

這個案件最後並沒有紀錄泰德·邦迪的居住地，因此我們沒有辦法評估最後犯罪熱區的精準度。

我們一開始因為案件數量太多又分布太廣，所以我們只選取其中一部份進行探討，但是在過程中我們改用 excel 作為計算工具，縮減了很多計算的時間，如果未來還有機會改進，我們會從一開始就使用 excel 計算，並且將探討範圍擴大至全部犯案地點，最後得出更精準的犯案者可能居住地。

(六) 個人心得：

透過這一次的作業，讓我更深刻感受到數學和我們的生活緊緊相連，數學可以當作一個工具讓我們解決不同的問題。在建模的過程中，因為我們選的連續殺人案案件較多，分佈範圍也較廣，礙於時間限制，我們曾經考慮過刪除部分案件，只挑選其中一部分計算嫌犯居住地熱區，但是後來我們運用 excel 將羅斯姆公式帶入，只需要輸入中心座標並確認是否在緩衝半徑內就可以快速計算出對應的機率。有了這次的經驗，讓我在面對重複的計算時，可以用更快速且精準的方法，也讓我重新定義了數學這項科目，希望在未來能有更多機會運用數學建模，讓建模成為我解決問題的工具之一。

### 三、參考資料

蔡天鉞 (2010), 淺談數學與數學建模, HPM 通訊, 第十三卷第十二期。

Keith Devlin、Gary Lorden (2016), 案發現場 (蘇俊鴻、蘇惠玉等...譯), 新北市, 八旗文化出版社。

Rossmo's Formula，2018 年 5 月 8 日取自維基百科

[https://en.wikipedia.org/wiki/Rossmo%27s\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Rossmo%27s_formula)

龍騰數亦優 2018 年期刊

#### 四、計算過程

已經和老師共用

[illegible]

