第七章　萬有引力定律

7-1 克卜勒行星運動定律

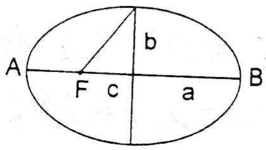
(1) 第一定律（軌道定律）（1609）：太陽系各行星，各於以太陽為焦點之一的橢圓軌道運行。

(a) 長度關係 $b^2+c^2=a^2$

① 半長軸 a

② 半短軸 b

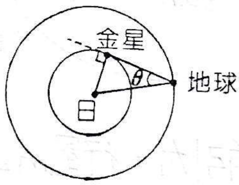
③ 焦點到中心的距離 c



(b) 太陽系中，水星和冥王星的橢圓較扁，其餘的行星軌道接近圓形。

(c) 對地球而言，A 點為近日點，時間一月四日；B 點為遠日點，時間七月十四日。

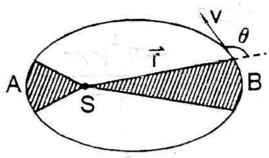
(d) 位於地球外側軌道的火星，其視運動有逆行現象。
位於地球內側軌道的金星、水星，其最大視角受到限制。



(2) 第二定律（等面積定律）（1609）：太陽與行星的連線在相同的時間間隔內掃過相等的面積，即面積速率為定值。

(a) $\dfrac{\Delta A}{\Delta t}=\dfrac{1}{2}rV\sin\theta=\dfrac{1}{2}r^2\omega$ ＝定值

θ：指 $\vec{r}$ 與 $\vec{V}$ 方向的夾角



(b) 任意兩點上 $\dfrac{V_1\cdot\sin\theta_1}{V_2\cdot\sin\theta_2}=\dfrac{r_2}{r_1}$

A、B 為近日點與遠日點，θ 均為 90°，故 $r_AV_A=r_BV_B$

(c) 近日點的距離最小、速度最大，地球連續兩次正對太陽的時間（太陽日）最長。

(d) 不同行星之面積速率並不相同。

(3) 第三定律（週期定律）：同一恆星的所有行星的 $\dfrac{r^3}{T^2}$ 為定值。

(a) T：繞恆星所需時間，即公轉週期。

＊ 範圍：7-1

面積速率相同($\frac{\Delta A}{\Delta t}$為定值)

1、某行星在以太陽為焦點之橢圓形軌道上運動，則其與太陽之連線在相等之時間間隔內掃過相等的 (A)軌道長度 (B)圓心角 (C)面積 (D)位置 (E)位移。 Ans: C

$\frac{1}{2}r^2\omega$為定值 $\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\omega_1 : \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\omega_2 = 1:1$

2、一衛星環繞一行星做橢圓軌道之運動，設此衛星至行星最遠距離與最近距離之比為 2：1，則相對應的角速度之比為 (A) 1：4 (B) 4：1 (C) 1：$\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$ ：1 Ans: A

$\omega_1 : \omega_2 = 1:4$

$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}rV\sin\theta$ (定值)

3、某行星繞太陽運行之面積速度為 x，若近日點的速率為 v，則近日點的距離為多少？ (A) $\frac{x}{v}$ (B) $\frac{x}{2v}$ (C) $\frac{2x}{v}$ (D) $\sqrt{xv}$。 Ans: C

$\begin{cases}\theta = 90^\circ \\ \sin 90^\circ = 1 \\ V = v\end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}rV \Leftrightarrow r = \frac{2x}{V}$

4、一質量為 m 之行星，繞質量為 M 之太陽作半徑為 r 的圓軌道運行，則其繞日之面積掃掠速率為________。 Ans: $\frac{1}{2}\sqrt{GMr}$

$\because \frac{\Delta A}{\Delta t}$為定值 $\therefore \frac{1}{2}r_1^2\omega_1 = \frac{1}{2}r_2^2\omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 : \omega_2 = r_2^2 : r_1^2 = 25:16$

5、某一星球繞恆星運轉，其與恆星之最近距離與最遠距離比為 4：5，則此星球在該兩處繞恆星的角速度之比為<u>25:16</u>、切線速度大小之比為<u>5:4</u>。 Ans: 25：16、5：4

$\therefore \frac{1}{2}r_1V_1\sin 90^\circ = \frac{1}{2}r_2V_2\sin 90^\circ \Leftrightarrow r_1V_1 = r_2V_2$，$V_1 : V_2 = r_2 : r_1 = 5:4$

6、海爾-波普彗星的週期約為 2500 年，則其與太陽的平均距離，約為地球與太陽平均距離的多少倍？ (A) 2500 (B) 1665 (C) 185 (D) 50 Ans: C

$\because$ 定義地球 $\begin{cases} r = 1AU \\ T = 1年\end{cases}$ $\therefore r = T^{\frac{2}{3}}$ $2500^{\frac{2}{3}} = 184.2015749\cdots \doteqdot 185$

7、繞太陽的某彗星之公轉週期為 64 年，則該彗星與太陽的平均距離(或橢圓公轉軌道的半長軸)，約為地球與太陽平均距離的多少倍？ (A) 64 (B) 16 (C) 512 (D) 256 Ans: B

將地球作為基準值(設為1)，則比值 $r : 1 = T^{\frac{2}{3}}$ $64^{\frac{2}{3}} = 16$

8、甲、乙兩衛星分別環繞地球做等速率圓周運動，已知兩者的週期比值為=8，則兩者的速率比值為 (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{4}$ Ans: D

令 $T_甲 = 8T$、$T_乙 = T$

$\frac{r_甲^3}{(8T)^2} = \frac{r_乙^3}{T^2}$ $r_甲^3 = (4r_乙)^3$ $r_甲 : r_乙 = 4:1$

又 $\because \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{V_甲}{V_乙} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

9、假設行星繞日軌道皆為圓形，已知地球與火星之公轉半徑比為 2：3，則地球與火星之面積速率之比為<u>$\sqrt{6}:3$</u>。 Ans: $\sqrt{6}$ ：3

$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A}{T\times 1}$ $\because$ 圓面積 $\div$ (年/次 $\times$ 1次) $= \frac{圓面積}{年}$

$\frac{1^3}{1^2} = \frac{(\frac{3}{2})^3}{T_火^2}$ $T_火 = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}} = \frac{3}{4}\sqrt{6}$ $\frac{2^2\pi}{1} : \frac{3^2\pi}{\frac{3}{4}\sqrt{6}} = \sqrt{6}:3$

$\boxed{\text{托勒密}}$：地球為宇宙中心（地心說）

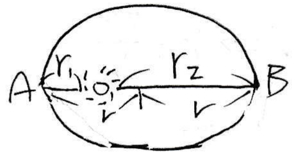
$\boxed{\text{哥白尼}}$：太陽為宇宙中心（日心說）⇒ 精簡諧調的模型

↳ 金木水火土及地球均以圓形軌道運行

$\boxed{\text{第谷}}$ → $\boxed{\text{克卜勒}}$ 累積大量資料，歸納並計算得出克卜勒行星三大運動定律

↳ 觀察
- 第一定律：橢圓軌道定律 ⇒ 太陽位於其中的一點焦點上
- 第二定律：等面積定律
- 第三定律：週期定律 → 推出萬有引力定律（牛頓）

△ 第一定律



- A：近日點 → r_1
- B：遠日點 → r_2

平均軌道半徑 $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$

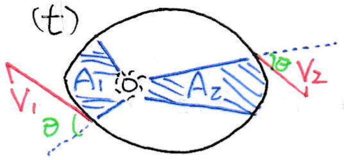
註：地球 $r_1 : r_2 \approx 0.98 : 1.02$（接近圓）

△ 第二定律

．定義：行星到太陽連線在相同時間掃過等面積

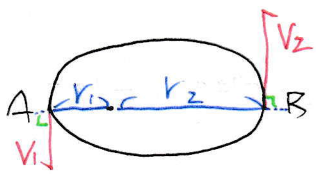
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v \sin\theta = \frac{1}{2} r^2 \omega \text{（為定值）}$$

↳ ω 被稱為"角速度"



若在 t_1 秒掃過 A_1、t_2 秒掃過 A_2，則

$A_1 : A_2 = t_1 : t_2$



∵ $\theta = 90°$ 在近日點和遠日點位置

$\sin 90° = 1$

∴ $r_1 V_1 = r_2 V_2$ ⇒
- ∵ r_1 最小 ∴ V_1 最大
- ∵ r_2 最大 ∴ V_2 最小

△ 第三定律（以圓形軌道討論）

．定義：太陽系中（繞太陽）的行星其 $\frac{r^3}{T^2}$ 為定值

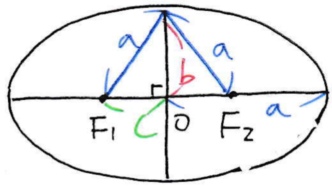
若規定地球 $\begin{cases} r = 1\ (\text{A.U.}) \\ T = 1\ (\text{y}) \end{cases}$ 則，

1. $\frac{r_1^3}{T_1^3} = \frac{r_2^3}{T_2^3} \Leftrightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^3}{T_2^3} \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}$

代入

2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(\frac{2\pi r_1}{T_1}\right)}{\left(\frac{2\pi r_2}{T_2}\right)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}$

△橢圓

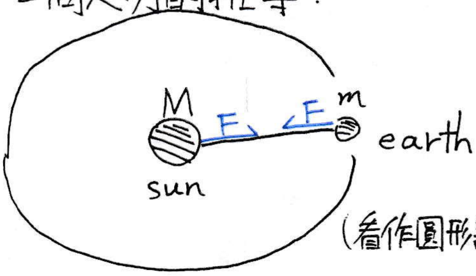


1. 橢圓兩個焦點 F_1、F_2

2. 橢圓長軸為 $2a$，半長軸為 a
   短軸為 $2b$，半短軸為 b $\Rightarrow a^2=b^2+c^2$
   焦點到中心點O距離為 c

3. 橢圓任一點P到兩焦點距離和為定值，即
   $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=$ 長軸長

△向心力的推導：



(看作圓形討論)

F萬有引力＝行星m運轉的向心力

∵克卜勒第三定律（$\frac{r^3}{T^2}$ 為定值）

令定值 $k=\frac{r^3}{T^2}$

向心力公式：$F=\frac{4\pi^2 rm}{T^2}$

∴牛頓認為

向心力：$F=\frac{4\pi^2 rm}{T^2}=\frac{4\pi^2 rm}{\left(\frac{r^3}{k}\right)}=\frac{4\pi^2 km}{r^2}\propto\frac{m}{r^2}$ $\Big] \rightarrow F=\frac{GMm}{r^2}$

太陽受力 $F'=\frac{4\pi^2 km}{r^2}$