

算幾不等式的證明

在老師上課教到算幾不等式的單元的時候，

先是證明了課本上的算幾不等式 $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$

接著又證了四個變數的算幾不等式 $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$

接著老師我們一個難題～如果要證明三元的算幾不等式呢？

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

這時全班都陷入一陣沈默，而我也開始努力的想要如何證明，

接著老師說我們可以使用手機上網Google啊！



經過了上網查資料，以及上台用自己理解的方式講述
我和另外一位同學分別用了不同的方法來證明（如下表）

同學甲：
利用代數證明

我：
利用技巧性推導

三元算幾不等式的代數證明

定理：若 x, y, z 皆為非負實數，則恆有

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

[證]：令 $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b, \sqrt[3]{z} = c$ ，則 $x = a^3, y = b^3, z = c^3$ 。考慮 $\frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{xyz}$ ，利用「三元三次轉換式」，則

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{xyz} &= \frac{1}{3}(x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}) \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{y^3} + \sqrt[3]{z^3} - 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}) \\ &= \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c)\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{6}(a+b+c)[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)] \\ &= \frac{1}{6}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

得 $\frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{xyz} \geq 0$ ，即 $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ 。

(證明結束)

3. 多變數算幾不等式

可想而知，用兩次算幾不等式，可得 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 是正確的，當然，等號僅成立於 $a=b=c=d$ 時。以此類推， $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$ 也應該是對的。

不過，事實上要證明多變數也是對的，並不容易。僅僅就 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 就很困難。想想看，可以怎麼作？

把 $\frac{a+b+c}{3}$ 湊成 4 個，即 $\frac{a+b+c+\square}{4}$ ，這樣可以利用上 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ ，問題是 \square

要放誰呢？讓 $\frac{a+b+c+\square}{4} = \frac{a+b+c}{3}$ ， \square 放 $\frac{a+b+c}{3}$ ，呀！這很神來一筆，很難！因此，設 $d = \frac{a+b+c}{3}$ 。

於是利用 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ ，又 $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+b+c}{3} = d$ ，因此 $d \geq \sqrt[4]{abcd}$ ，

兩邊平方的 $d^4 \geq abcd$ ，約去 d ，得 $d^3 \geq abc$ ，得 $d \geq \sqrt[3]{abc}$ ，而 $d = \frac{a+b+c}{3}$ ，所以

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

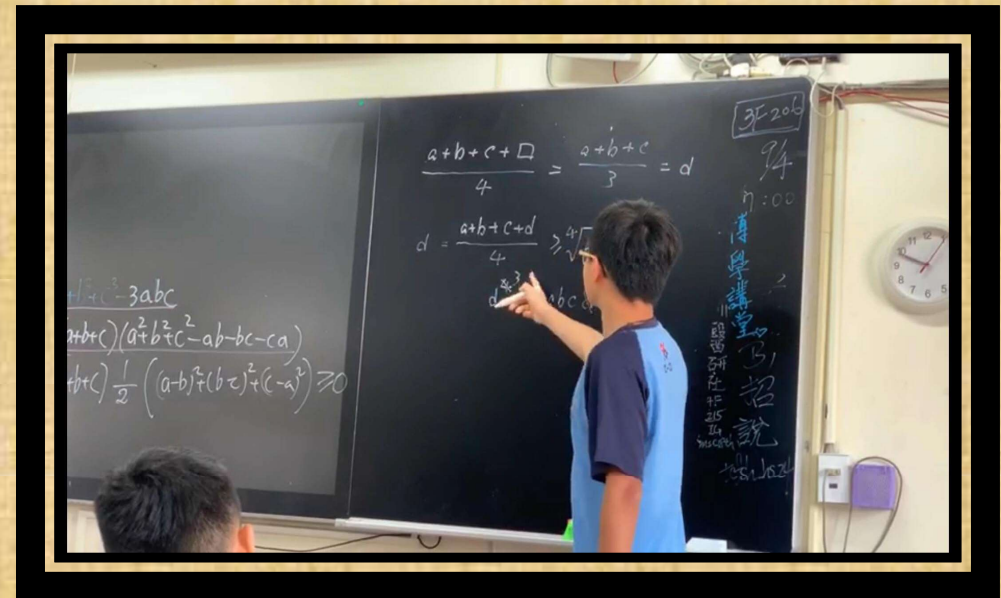
很夢幻的證明，加上 $\frac{a+b+c}{3}$ ，是很神奇的。這樣從 4 個變數降成 3 個，很厲害。

同學投票後都認為這種方式比較好理解

全班開始進入瘋狂討論



我上台講解我發現的方法



結論：

1. 感謝老師給我這個機會讓我有機會站上講台講解，是一件**興奮且緊張的事**
2. 讓我知道到我們應該要**善用手中的工具**，有很多學習資源可以從網路找到，不僅僅侷限於老師教的，要**學著自己動手找答案，不要被動式學習**
3. 老師常常說：「自己看過答案不算懂，要自己說一遍給別人聽」
讓我深刻瞭解，藉由**教會別人才能真正理解，成為自己的東西**