三門問題—延伸探討

一. 問題背景：

在趣味數學的課堂上, 老師提出了下列的問題:

參賽者會看見三扇關閉了的門，其中一扇的後面有一輛汽車或者是獎品，選中後面有車的那扇門就可以贏得該汽車或獎品，而另外兩扇門後面則各藏有一隻山羊。當參賽者選定了一扇門，但未去開啟它的時候，知道門後情形的節目主持人會開啟剩下兩扇門的其中一扇，露出其中一隻山羊。主持人其後會問參賽者要不要換另一扇仍然關上的門。問題是：換另一扇門會否增加參賽者贏得汽車的機率？

而課堂上討論出的答案是: 如果選擇不換, 中獎率是 1/3, 如果換門, 中獎率是 2/3.

二. 問題發想：

在經過課堂上的討論. 我對這個問題產生了興趣. 並產生了「如果門不固定是 3 個的情況」會產生甚麼效果的疑問. 並在接下來的周末進行了下列討論.

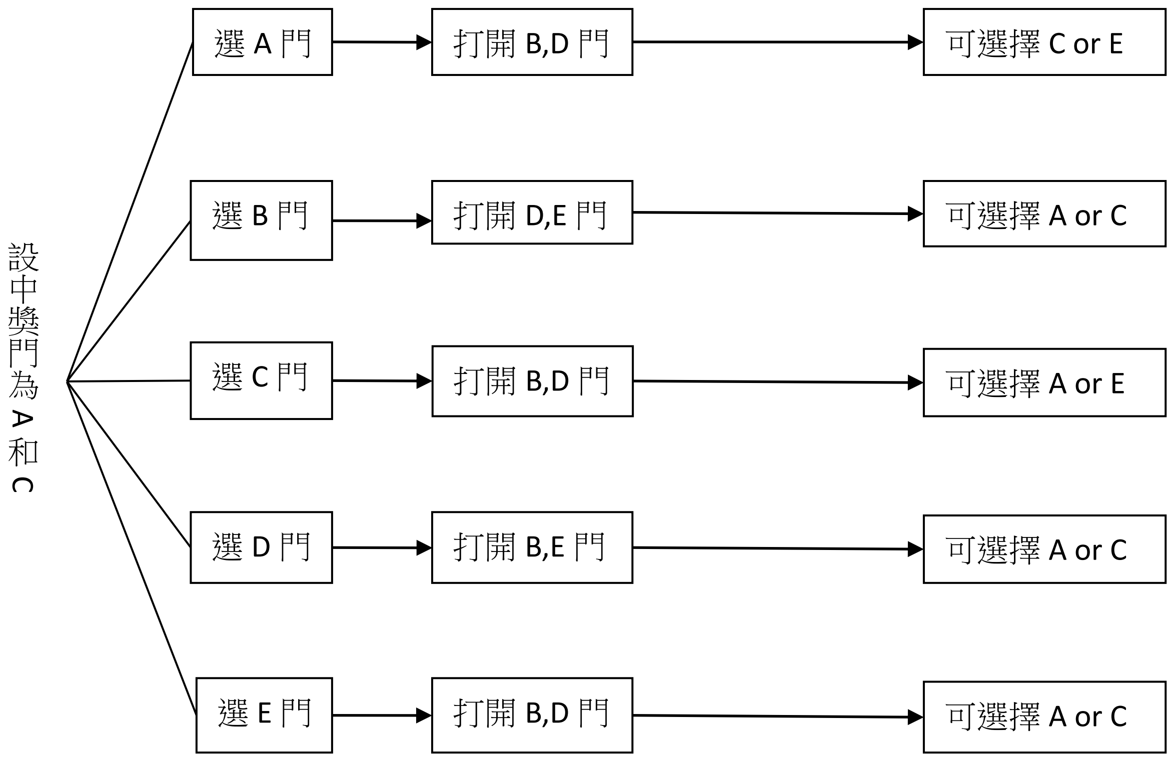
三. 問題假設:

假設總共有 a 個門, b 個門後有獎品, 而主持人打開 c 個門.
且滿足下列條件：
(1) $a \geq 3$,（門個數大於等於 3 個）
(2) $a - b \geq 2$,（至少有兩個沒中獎的門, 在打開一個沒中獎的門後才能繼續進行選擇）
(3) $a - c \geq -2$,（在主持人打開門之後, 至少要留兩個門進行選擇）
(4) $a - b - c \geq 1$, （在主持人打開門之後, 至少要有一個沒中獎的門）

四. 討論過程：

(1)不換門時：中獎機率為$\frac{\text{有獎品的門數}}{\text{總門數}}$ 即 $\frac{b}{a}$.

(2)換門時：
設有 5 個門, 2 個後面有獎品, 且主持人會打開 2 個門. 可以下列樹狀圖解釋：



＊打開的門只要是沒有獎品的門即可，對最終結果沒有影響

最終選擇會有 10 種可能，為 5×2 得來．其中 5 為門數．2 為（門數−打開門數−原本選擇門）
將 a, b, c 帶入可得$a \times (a - c - 1)$ 即$a \times (a - (c + 1))$

當一開始選到沒中獎的門時，不管打開多少個門，都有可能換到中獎的門．且所有中獎的門都有可能被換到

當一開始選到中獎的門時，不管打開多少個門，也有可能換到中獎的門．但只可能換到（中獎門數−1）個中獎門（其中 1 是一開始選的中獎門）

所以當總門數為 a，中獎門數為 b 時．在所有換門可能中換到中獎門的個數為$(a - b) \times b + b \times (b - 1)$
化簡後得$b \times (a - 1)$

最終得換門後中獎機率為$\frac{b(a-1)}{a(a-(c+1))}$.

且$\frac{b(a-1)}{a(a-(c+1))}$ 恆大於 $\frac{b}{a}$

其證明：

設$\frac{b(a-1)}{a(a-(c+1))}-\frac{b}{a}>0$（且因上述(1)-(4)之條件, a, b, c 均大於 0. 沒有乘除負數變號的問題）

經不等式右邊擴分得：$\frac{b(a-1)}{a(a-(c+1))}-\frac{b(a-(c+1))}{a(a-(c+1))}>0$

同乘$a(a-(c+1))$得：$b(a-1)-b(a-(c+1))>0$

同除b得：$(a-1)-[a-(c+1)]>0$

同減a得：$-1-[-(c+1)]>0$

同乘-1 得：$1-(c+1)<0$

兩邊同減1得：$-c<0$ 得證：不論 a, b, c 為何(a, b, c 均為正整數), $\frac{b(a-1)}{a(a-(c+1))}$ 恆大於 $\frac{b}{a}$

五. 討論結果：

在總共有 a 個門, b 個門後有獎品, 而主持人打開 c 個門時. 如果按照上述遊戲背景進行遊戲, 會得到下列結果：

不換門中獎機率：$\frac{b}{a}$

換門中獎機率：$\frac{b(a-1)}{a(a-(c+1))}$

且換門的得獎機率恆大於不換門的得獎機率

六. 反思

這次的討論, 完全是心血來潮做的一件事. 也做了很多的推算與思考. 但這次的展現還不夠嚴謹. 也還有改進和繼續研究的空間. 也意識到了, 算數學, 不需要理由.

106 24 洪光佑