Introduction to Smooth Manifolds by John M. Lee

Penyelesaian Soal

Kelvin Lois

5 April 2020

Daftar Isi

1 Vektor Singgung **1**
1.1 Soal Latihan 1

2 Grup Lie **2**
2.1 Soal Latihan 2

3 Medan Vektor **12**
3.1 Soal Latihan 12

4 Kurva Integral dan Aliran **20**
4.1 Soal Latihan 20

5 Metrik Riemann **20**
5.1 Soal Latihan 20

6 Pemetaan Eksponensial **21**

7 Manifold Kuosien **21**
7.1 Soal Latihan 21

Ringkasan

Kumpulan penyelesaian beberapa soal pada buku *Introduction to Smooth Manifolds* karangan John M. Lee. Bagian teks yang berada di dalam kotak adalah latar belakang atau motivasi dari solusi dan dapat dilewati pembaca tanpa mempengaruhi pemahaman alur bukti.

1 Vektor Singgung

1.1 Soal Latihan

Soal (Problem 3-1)**.** Misalkan M dan N adalah manifold-manifold mulus berbatas ataupun tidak berbatas, dan $F : M \to N$ adalah pemetaan mulus. Tunjukan bahwa $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ adalah pemetaan nol untuk setiap $p \in M$ jika dan hanya jika F konstan di setiap komponen dari M.

Solusi.

Soal (Problem 3-2)**.** Buktikan Proposisi 3.14 (ruang singgung dari manifold produk).

Solusi.

Soal (Problem 3-3)**.** Buktikan bahwa jika M dan N adalah manifold-manifold mulus, maka $T(M \times N)$ diffeomorfik dengan $TM \times TN$.

Solusi.

Soal (Problem 3-4)**.** Tunjukan bahwa $T\mathbb{S}^1$ diffeomorfik dengan $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Solusi.

2 Grup Lie

2.1 Soal Latihan

Soal (Problem 7-1)**.** Tunjukan bahwa untuk sebarang Lie group G, perkalian $m : G \times G \to G$ adalah sebuah submersi mulus. [Petunjuk : Gunakan penampang lokal (*local section*).]

Solusi. Berdasarkan Teorema Penampang Lokal (*Theorem 4.26*), kita cukup menunjukan bahwa setiap titik di $G \times G$ termuat di dalam peta dari suatu penampang lokal dari $m : G \times G \to G$.

Kita lihat dahulu sifat apa yang dimiliki suatu penampang lokal dari m. Misalkan $\sigma : U \to G \times G$ adalah suatu penampang lokal dari m. Untuk suatu $g \in U$, misalkan $\sigma(g) = (g_1, g_2)$, sehingga

$$g = (m \circ \sigma)(g) = g_1 g_2 \Rightarrow g_1 = g g_2^{-1}.$$

Jadi $g \mapsto (g g_2^{-1}, g_2)$ oleh σ. Tetapi σ belum tentu memetakan elemen G yang lain dengan bentuk seperti di atas, karena g_2 pada peta $(g g_2^{-1}, g_2)$ bergantung pada g, yaitu $g_2 = \mathrm{pr}_2 \circ \sigma(g)$. Jadi bentuk umum penampang lokal σ dari m tidak diketahui. Tetapi yang menarik adalah untuk setiap $g_0 \in G$, pemetaan $\sigma_{g_0} : G \to G \times G$ yang didefinisikan sebagai $h \mapsto (h g_0^{-1}, g_0)$ merupakan penampang (global) dari m. Peta dari penampang global yang berbentuk seperti ini mudah dikendalikan, karena kita dapat dengan bebas memilih g_0. Jadi investigasi kita terhadap penampang lokal dari m menginspirasi konstruksi penampang lokal yang kita inginkan.

Untuk setiap $g_0 \in G$, pemetaan $\sigma_{g_0} : G \to G \times G$ yang didefinisikan sebagai $\sigma_{g_0}(g) = (g g_0^{-1}, g_0)$ merupakan suatu penampang (global) mulus untuk $m : G \times G \to G$. Misalkan diberikan $(g_1, g_2) \in G \times G$, maka $\sigma_{g_2}(g_1 g_2) = (g_1 g_2 g_2^{-1}, g_2) = (g_1, g_2)$. I.e., $(g_1, g_2) \in \mathrm{Im}\ \sigma_{g_2}$. Dengan demikian setiap titik di $G \times G$ termuat di dalam peta suatu penampang dari m. Jadi m adalah submersi. ■

Soal (Problem 7-2)**.** Misalkan G adalah grup Lie.

(a) Misalkan $m : G \times G \to G$ adalah perkalian di G. Dengan menggunakan Proposisi 3.14 untuk mengidentifikasi $T_{(e,e)}(G \times G)$ dengan $T_eG \oplus T_eG$, tunjukan bahwa differensial $dm_{(e,e)} : T_eG \oplus T_eG \to T_eG$ diberikan oleh

$$dm_{(e,e)}(X, Y) = X + Y.$$

[Petunjuk : hitung $dm_{(e,e)}(X, 0)$ dan $dm_{(e,e)}(0, Y)$ secara terpisah.]

(b) Misalkan $i : G \to G$ menyatakan pemetaan invers di G. Tunjukan bahwa $di_e : T_eG \to T_eG$ diberikan oleh $di_e(X) = -X$.

Solusi. (a). Dari Proposisi 3.14 kita memiliki isomorfisma $\alpha : T_{(e,e)(G\times G)} \to T_eG \oplus T_eG$ yang diberikan oleh

$$\alpha(v) = \Big(d(\pi_1)_{(e,e)}(v), d(\pi_2)_{(e,e)}(v)\Big),$$

dengan $\pi_1, \pi_2 : G \times G \to G$ adalah proyeksi kanonik $\pi(g,h) = g$, $\pi_2(g,h) = h$. Misalkan $\mathtt{i}, \mathtt{j} : G \hookrightarrow G \times G$ adalah embeding $\mathtt{i}(g) = (g, e)$, $\mathtt{j}(g) = (e, g)$. Maka invers dari α adalah $\beta : T_eG \oplus T_eG \to T_{(e,e)}(G \times G)$ yang diberikan oleh

$$\beta(X, Y) = d\mathtt{i}_e(X) + d\mathtt{j}_e(Y).$$

Notasi $dm_{(e,e)}$ yang diberikan di soal adalah komposisi dari $dm_{(e,e)} : T_{(e,e)}(G \times G) \to T_eG$ dengan isomorfisma β. Kita notasikan $\gamma := dm_{(e,e)} \circ \beta$.

$$\gamma : T_eG \oplus T_eG \xrightarrow{\beta} T_{(e,e)}(G \times G) \xrightarrow{dm_{(e,e)}} T_eG.$$

Dengan notasi ini, yang harus kita tunjukan adalah $\gamma(X, Y) = X + Y$. Perhatikan bahwa $m \circ \mathtt{i} = \mathrm{Id}_G$ dan $m \circ \mathtt{j} = \mathrm{Id}_G$ sehingga

$$\begin{aligned}
\gamma(X, Y) &= dm_{(e,e)} \circ \beta(X, Y) \\
&= dm_{(e,e)}(d\mathtt{i}_e(X) + d\mathtt{j}_e(Y)) \\
&= dm_{(e,e)}(d\mathtt{i}_e(X)) + dm_{(e,e)}(d\mathtt{j}_e(Y)) \\
&= d(m \circ \mathtt{i})_e(X) + d(m \circ \mathtt{j})_e(Y) \\
&= X + Y.
\end{aligned}$$

Untuk (b), kita manfaatkan hasil dari (a). Perhatikan pemetaan trivial $E : g \mapsto e \in G$. Kita dapat mendekomposisi E sebagai $g \mapsto (g, g^{-1}) \mapsto gg^{-1}$. Definisikan $\mathtt{I}(g) := (g, g^{-1})$. Sehingga

$$E : G \xrightarrow{\mathtt{I}} G \times G \xrightarrow{m} G.$$

Juga jelas bahwa $\pi_1 \circ \mathtt{I} = \mathrm{Id}_G$ dan $\pi_2 \circ \mathtt{I} = i$. Karena differensial dari E adalah pemetaan nol dan differensial dari m diketahui, maka kita dapat mencari differensial dari i. Perhatikan diagram komutatif berikut.

$$\begin{tikzcd}
T_eG \arrow[r, "d\mathtt{I}_e"] \arrow[dr, "\alpha\circ d\mathtt{I}_e"'] & T_{(e,e)}(G \times G) \arrow[r, "dm_{(e,e)}"] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] & T_eG \\
& T_eG \oplus T_eG \arrow[u, shift right, "\beta"'] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Jadi untuk sebarang $X \in TeG$,

$$\begin{aligned}
dE_e(X) &= (dm_{(e,e)} \circ d\mathtt{I}_e)(X) \\
&= (dm_{(e,e)} \circ \mathrm{Id} \circ d\mathtt{I})(X) \\
&= (dm_{(e,e)} \circ \beta \circ \alpha \circ d\mathtt{I})(X) \\
&= (dm_{(e,e)} \circ \beta) \circ (\alpha \circ d\mathtt{I}_e)(X) \\
&= \gamma \circ \big(\alpha \circ d\mathtt{I}_e(X)\big) \\
&= \gamma\big(d\pi_1 \circ d\mathtt{I}_e(X), d\pi_2 \circ d\mathtt{I}_e(X)\big) \\
&= \gamma\big(d\mathrm{Id}_G(X), di_e(X)\big) \\
&= d\mathrm{Id}_G(X) + di_e(X) \\
&= X + di_e(X).
\end{aligned}$$

Karena $dE_e = 0$ maka $di_e(X) = -X$. ■

Soal (Problem 7-3)**.** Definisi Lie group yang kita gunakan mensyaratkan bahwa pemetaan perkalian dan pemetaan invers adalah pemetaan mulus. Tunjukan bahwa kemulusan dari pemetaan invers adalah syarat berlebih : jika G adalah manifold mulus dengan struktur grup sedemikian sehingga perkalian $m : G \times G \to G$ mulus, maka G adalah grup Lie. [Petunjuk : tunjukan bahwa pemetaan $F : G \times G \to G \times G$ yang didefinisikan sebagai $F(g,h) = (g, gh)$ adalah diffeomorfisma lokal yang bijektif.]

Solusi. Kita akan menunjukan bahwa bila G manifold mulus dengan dengan asumsi seperti di atas, maka $i : G \to G$ mulus.

Idenya adalah menyatakan $i(g) = g^{-1}$ sebagai komposisi dari pemetaan-pemetaan mulus. Anda mungkin sudah menebak bahwa pemetaan $F(g,h) = (g, gh)$ adalah kunci dari strategi ini. Invers dari F adalah $F^{-1}(g,x) = (g, g^{-1}x)$. Secara kasar, dekomposisi yang akan dibentuk adalah sebagai berikut :

$$i : g \overset{\iota}{\mapsto} (g,e) \xmapsto{F^{-1}} (g, g^{-1}e) \xmapsto{pr_2} g^{-1},$$

dengan $\iota : G \to G \times G$ adalah inklusi $g \mapsto (g,e)$ dan $pr_2 : G \times G \to G$ adalah projeksi $(g,h) \mapsto h$. Bila kita dapat menunjukan bahwa F^{-1} mulus (setidaknya secara lokal) maka $i(g) = g^{-1}$ adalah pemetaan mulus.

Misalkan $F : G \times G \to G \times G$ adalah pemetaan $(g,h) \mapsto (g, gh)$. Mudah melihat bahwa F bijektif. Untuk menunjukan bahwa F adalah diffeomorfisma lokal, cukup ditunjukan bahwa untuk setiap $(g,h) \in G \times G$ pemetaan linear $dF_{(g,h)}$ bijektif. Misalkan $(g,h) \in G \times G$. Dengan isomorfisma kanonik $\tau : T_{(g,h)}(G \times G) \to T_gG \oplus T_hG$ dan $\sigma : T_{(g,gh)}(G \times G) \to T_gG \oplus T_{gh}G$, tinjau komposisi pemetaan berikut

$$T_gG \oplus T_hG \xrightarrow{\tau^{-1}} T_{(g,h)}(G \times G) \xrightarrow{dF_{(g,h)}} T_{(g,gh)}(G \times G) \xrightarrow{\sigma} T_gG \oplus T_{gh}G.$$

Misalkan $\mathtt{I} : G \to G \times G$ adalah iklusi $x \mapsto (x,h)$ dan $\mathtt{J} : G \to G \times G$ adalah inklusi $x \mapsto (g,x)$. Maka untuk sebarang $(v,w) \in T_g(G) \oplus T_hG$

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ dF_{(g,h)} \circ \tau^{-1})(v,w) &= (\sigma \circ dF_{(g,h)})\big(d\mathtt{I}_g(v) + d\mathtt{J}_h(w)\big) \\
&= \sigma\big(d(F \circ \mathtt{I})_g(v) + d(F \circ \mathtt{J})_h(w)\big) \\
&= \sigma \circ d(F \circ \mathtt{I})_g(v) + \sigma \circ d(F \circ \mathtt{J})_h(w) \\
&= \Big(d(pr_1 \circ F \circ \mathtt{I})_g(v), d(pr_2 \circ F \circ \mathtt{I})_g(v)\Big) + \\
&\quad \Big(d(pr_1 \circ F \circ \mathtt{J})_h(w), d(pr_2 \circ F \circ \mathtt{J})_h(w)\Big).
\end{aligned}$$

Karena $pr_1 \circ F \circ \mathtt{I}(x) = x$, $pr_2 \circ F \circ \mathtt{I}(x) = xh = R_h(x)$ dan $pr_1 \circ F \circ J(x) = g$, $pr_2 \circ F \circ \mathtt{J}(x) = gx = L_g(x)$, maka

$$(\sigma \circ dF_{(g,h)} \circ \tau^{-1})(v,w) = \big(v, d(R_h)_g(v) + d(L_g)_h(w)\big).$$

Kita tahu bahwa setiap translasi kiri dan kanan adalah diffeomorfisma. Dengan fakta ini mudah menunjukan bahwa pemetaan di atas adalah satu-satu dan pada. Sehingga $dF_{(g,h)}$ adalah isomorfisma. Dari Teorema Fungsi Invers, fungsi bijektif F adalah diffeomorfisma lokal.

Sekarang akan ditunjukan bahwa $i(g) = g^{-1}$ adalah pemetaan mulus. Misalkan $g \in G$ sebarang. Pilih lingkungan $U \ni g$ dan $V \ni e$ sehingga $F^{-1}|_{U \times V}$ adalah diffeomorfisma ke $F^{-1}(U \times V)$. Misalkan $\iota : G \to G \times G$ adalah pemetaan inklusi $g \mapsto (g,e)$. Maka $i|_U = (pr_2 \circ F^{-1} \circ \iota)|_U$ merupakan komposisi dari pemetaan-pemetaan mulus. Jadi i_U mulus. Karena i mulus secara lokal di setiap titik di G, maka $i : G \to G$ mulus. ■

Soal (Problem 7-4)**.** Misalkan $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ adalah fungsi determinan. Gunakan Akibat 3.25 untuk menghitung differensial dari det, sebagai berikut.

(a) Untuk sebarang $A \in \mathrm{M}(,\mathbb{R})$, tunjukan bahwa

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(I_n + tA) = \mathrm{tr} A,$$

dengan $\mathrm{tr}(A^i_j) = \sum_i A^i_i$ adalah trace dari A. [Petunjuk : persamaan (B.3) mengekspresikan $\det(I_n + tA)$ sebagai sebuah polinom dalam t. Apa suku linearnya ?]

(b) Untuk $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ dan $B \in T_X\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, tunjukan bahwa

$$d(\det)_X(B) = (\det X)\mathrm{tr}(X^{-1}B).$$

[Petunjuk : $\det(X + tB) = \det(X)\det(I_n + tX^{-1}B)$.]

Solusi. (a) Dari persamaan B.3, determinan dari sebarang matriks $C = (C^i_j) \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ adalah

$$\det C = \sum_{\sigma \in S_\sigma} (\mathrm{sgn}\ \sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_n^{\sigma(n)},$$

dengan S_σ adalah himpunan permutasi dari $\{1,\ldots,n\}$. Sehingga determinan matriks $I_n + tA$ adalah

$$\begin{aligned}\det(I_n + tA) &= \sum_{\sigma \in S_\sigma} (\mathrm{sgn}\ \sigma)(\delta_1^{\sigma(1)} + tA_1^{\sigma(1)}) \cdots (\delta_n^{\sigma(n)} + tA_n^{\sigma(n)}) \\ &= (1 + tA^1_1)\cdots(1 + tA^n_n) + E(t),\end{aligned}$$

dimana $E(t)$ adalah suku sisa. Dengan sedikit renungan kita menyadari bahwa $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} E(t) = 0$. Sehingga

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(I_n + tA) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (1 + tA^1_1)\cdots(1 + tA^n_n) = \mathrm{tr}\ A.$$

(b) Dari kekontinuan fungsi determinan, ada $\epsilon > 0$ cukup kecil sehingga $\gamma(t) := X + tB$ adalah suatu kurva $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Kurva $\gamma(t)$ adalah kurva mulus dengan $\gamma(0) = X$ dan $\gamma'(0) = B$. Sehingga $d(\det)_X(B) = d(\det)_X(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \det \circ \gamma(t)$. Jadi

$$d(\det)_X(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(X + tB) = \det(X)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(I_n + tX^{-1}B) = \det(X)\mathrm{tr}(X^{-1}B). \quad \blacksquare$$

Soal (Problem 7-6)**.** Misalkan G adalah grup Lie dan U adalah sebarang lingkungan dari identitas. Tunjukan bahwa ada sebuah lingkungan V dari identitas yang memenuhi $V \subseteq U$ dan $gh^{-1} \in U$ untuk setiap $g, h \in V$.

Solusi. Misalkan $F : G \times G \to G$ adalah fungsi mulus $F(g,h) = gh^{-1}$ dan U adalah suatu lingkungan dari identitas $e \in G$. Dari kekontinuan F, prapeta $F^{-1}(U) \subseteq G \times G$ adalah himpunan buka yang memuat (e,e). Pilih lingkungan V_1 dan V_2 dari e sehingga $V_1 \times V_2 \subseteq F^{-1}(U)$. Notasikan V sebagai

$$(V_1 \cap V_2) \cap U.$$

Sehingga $V \times V \subseteq F^{-1}(U)$ berarti $F(V \times V) \subseteq U$. Dengan kata lain $\forall g, h \in V$, kita punya $F(g,h) = gh^{-1} \in U$. $\blacksquare$

Soal (Problem 7-7)**.** Buktikan Proposisi 7.15 : Misalkan G adalah grup Lie dan G_0 adalah komponen identitasnya. Maka G_0 adalah subgrup normal dari G, dan satu-satunya subgrup buka terhubung. Setiap komponen terhubung dari G diffeomorfik dengan G_0.

Solusi.

Soal (Problem 7-9)**.** Tunjukan bahwa formula

$$A \cdot [x] = [Ax],$$

mendefinisikan aksi kiri transitif mulus dari $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ pada $\mathbb{RP}^n$.

Solusi. Misalkan $\theta : \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R}) \times \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ menyatakan pengaitan $\theta(A,[x]) \equiv A \cdot [x] = [Ax]$. Pengaitan ini adalah pemetaan karena formula $A \cdot [x] = [Ax]$ tidak bergantung terhadap representasi dari $[x]$: untuk $(A,[x]) = (B,[y])$ berarti $A = B$ dan $[x] = [y] \in \mathbb{RP}^n$ (i.e. $x = \lambda y$ dengan $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), sehingga

$$\theta(A,[x]) = [Ax] = [A(\lambda y)] = [\lambda Ay] = [Ay] = [By] = \theta(B,[y]).$$

Pemetaan θ adalah aksi dari $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ pada $\mathbb{RP}^n$ karena $\forall A, B \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$, $[x] \in \mathbb{RP}^n$ berlaku $I_{n+1} \cdot [x] = [I_{n+1}x] = [x]$ dan $A \cdot (B \cdot [x]) = A \cdot [Bx] = [ABx] = AB \cdot [x]$. Aksi ini transitif karena setiap vektor di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dapat dipetakan ke vektor tak-nol manapun di $\mathbb{R}^n$ dengan pemilihan transformasi linear bijektif yang sesuai. Kemulusan aksi di atas dapat dengan mudah diperiksa secara lokal. ■

Soal (Problem 7-12)**.** Gunakan teorema rank ekivarian untuk memberikan bukti lain dari Teorema 7.5 dengan menunjukan bahwa setiap homomorfisma grup Lie $F : G \to H$ ekivarian terhadap aksi-G mulus yang cocok pada G dan H.

Solusi. Kita tahu bahwa $\forall g_1, g_2 \in G$, berlaku $F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$. Kita ingin mencari aksi transitif $\theta : G \times G \to G$ dan aksi $\varphi : G \times H \to H$ yang memenuhi

$$F \circ \theta_{g_0} = \varphi_{g_0} \circ F, \qquad \forall g_0 \in G.$$

Dari sifat homomorfisma F, terlihat bahwa aksi-aksi yang diinginkan adalah

$$\theta := m_G \quad \text{dan} \quad \varphi := m_H \circ (F \times \mathrm{Id}_H),$$

dengan m_G dan m_H adalah perkalian pada G dan H beturut-turut. Mudah memeriksa bahwa θ dan φ adalah aksi-G pada G dan H. Dari definisi, aksi θ adalah aksi mulus dan transitif dan φ adalah aksi mulus karena merupakan komposisi fungsi-sungsi mulus. Karena F ekivarian dengan θ dan φ, maka dari Teorema Rank Ekivarian, rank F konstan. ■

Soal (Problem 7-13)**.** Untuk setiap $n \geqslant 1$, buktikan bahwa $\mathrm{U}(n)$ adalah subgrup Lie berdimensi n^2 dari $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ yang terembed secara proper.

Solusi. Menurut definisi, $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid A^*A = I_n\}$. Definisikan pemetaan mulus $\Phi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ sebagai $\Phi(A) = A^*A$. Maka $\mathrm{U}(n) = \Phi^{-1}(I_n)$. Jadi $\mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ adalah submanifold yang terembed secara proper apabila rank Φ konstan. Untuk menunjukan ini, kita cukup tunjukan bahwa Φ adalah pemetaan ekivarian.

Misalkan $\theta : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ dan $\varphi : \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ adalah pemetaan yang didefinisikan sebagai

$$\theta(A,B) \equiv \theta_B(A) = AB, \quad \varphi(X,B) \equiv \varphi_B(X) = B^*XB$$

untuk sebarang $A, B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ dan $X \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$. Mudah melihat bahwa θ adalah aksi kanan mulus yang transitif dan φ adalah aksi kanan mulus. Pemetaan Φ ekivarian terhadap aksi-aksi θ dan φ karena untuk sebarang $A, B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$,

$$\Phi \circ \theta_A(B) = \Phi(BA) = (BA)^*(BA) = A^*(B^*B)A = \varphi_A(B^*B) = \varphi_A \circ \Phi(B).$$

Menurut Teorema Rank Konstan, $\Phi^{-1}(I_n) = \mathrm{U}(n)$ adalah submanifold dari $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ yang terembed secara proper berdimensi $\dim(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})) - \text{rank } \Phi = 2n^2 - \text{rank } \Phi$. Karena rank Φ konstan kita cukup mencari rank $d\Phi_{I_n} : T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to T_{I_n}\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$.

Untuk sebarang $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) = T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, dapat dipilih kurva $\gamma(t) := I_n + tA$ di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ untuk $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ dengan ϵ cukup kecil, sehingga

$$d\Phi_{I_n}(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi(I_n + tA) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(I_n + tA)^*(I_n + tA) = A^* + A.$$

Dengan demikian, $\mathrm{Im}\, d\Phi_{I_n} \subseteq \mathrm{H} := \{B \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid B^* = B\}$. Tetapi untuk sebarang $B \in H$, $d\Phi_{I_n}(\frac{1}{2}B) = (B^* + B)/2 = B$. Sehingga nyatanya peta dari $d\Phi_{I_n}$ adalah subruang linear matriks-matriks Hermitian H. Dimensi H adalah

$$n + 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) = n^2.$$

Jadi $\dim \mathrm{U}(n) = 2n^2 - \text{rank } d\Phi_{I_n} = 2n^2 - \dim \mathrm{H} = n^2$. ■

Soal (Problem 7-14)**.** Untuk setiap $n \geqslant 1$, buktikan bahwa $\mathrm{SU}(n)$ adalah subgrup Lie berdimensi $(n^2 - 1)$ dari $\mathrm{U}(n)$ yang terembed secara proper.

Solusi. Fungsi determinan $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ adalah homomorfisma grup Lie. Karena $\mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ dan $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ adalah Lie subgroup, maka fungsi restriksi

$$D \equiv \det|_{\mathrm{U}(n)} : \mathrm{U}(n) \to \mathbb{S}^1,$$

juga merupakan fungsi mulus. Lebih jauh D juga homomorfisma grup Lie. Sehingga rank D konstan. Fungsi D surjektif karena untuk sebarang $z \in \mathbb{S}^1$, determinan matriks $Z = \mathrm{diag}(z, 1, \cdots, 1) \in \mathrm{U}(n)$ adalah z. Dari Teorema Rank Global, D adalah submersi. Sehingga

$$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = D^{-1}(1),$$

adalah submanifold yang terembed secara proper di $\mathrm{U}(n)$ berdimensi $\dim \mathrm{U}(n) - 1 = n^2 - \text{rank } D = n^2 - 1$. Karena $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n)$ juga merupakan subgrup, maka $\mathrm{SU}(n)$ adalah subgrup Lie. ■

Soal (Problem 7-15)**.** Tunjukan bahwa $\mathrm{SO}(2)$, $\mathrm{U}(1)$ dan $\mathbb{S}^1$ semuanya adalah grup Lie yang isomorfik.

Solusi. Jelas bahwa $\mathrm{U}(1) = \mathbb{S}^1$. Definisikan pemetaan $R : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{SO}(2)$ sebagai

$$R(z) = \begin{pmatrix} Re(z) & Im(z) \\ -Im(z) & Re(z) \end{pmatrix}.$$

Dengan koordinat lokal $\mathbb{S}^1$, mudah melihat bahwa pemetaan ini adalah isomorfisma grup Lie. ■

Soal (Problem 7-16)**.** Buktikan bahwa $\mathrm{SU}(2)$ diffeomorfik dengan $\mathbb{S}^3$.

Solusi. Dari definisi, $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{U}(2) \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Dapat diperlihatkan bahwa dari definisi di atas, i.e. $A \in \mathrm{SU}(2)$ j.h.j. $A^*A = I$ dan $\det A = 1$, kita peroleh

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \text{ dan } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Misalkan (x, y, u, v) adalah koordinat standar untuk $\mathbb{R}^4$, maka definisikan pemetaan mulus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathrm{M}(2, \mathbb{C})$ sebagai

$$f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x + iy & -(u - iv) \\ u + iv & x - iy \end{pmatrix}.$$

Karena $\mathbb{S}^3 := \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\}$ adalah submanifold terembed, maka $f|_{\mathbb{S}^3}$ mulus dan $f(\mathbb{S}^3) = \mathrm{SU}(2)$. Mudah melihat bahwa $f|_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ adalah diffeomorfisma. ■

Soal (Problem 7-17)**.** Tentukan grup Lie mana saja yang kompak dari grup-grup Lie berikut :

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}),\ \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}),\ \mathrm{U}(n),\ \mathrm{SU}(n).$$

Solusi.

Soal (Problem 7-18)**.** Buktikan Teorema 7.35 (**karakterisasi hasil kali semi langsung**) : Misalkan G adalah grup Lie, dan $N, H \subseteq G$ adalah subgrup-subgrup Lie tutup dari G dimana N normal, $N \cap H = \{e\}$ dan $NH = G$. Maka pemetaan $(n, h) \mapsto nh$ adalah isomorfisma grup Lie antara $N \rtimes_\theta H$ dan G, dimana $\theta : H \times N \to N$ adalah aksi oleh konjugasi $\theta_h(n) = hnh^{-1}$.

Solusi. Misalkan $N, H \subseteq G$ adalah subgrup-subgrup Lie tutup yang memenuhi hipotesis di atas, dan misalkan $m : G \times G \to G$ dan $i : G \to G$ adalah pemetaan perkalian dan invers pada grup Lie G berturut-turut. Karena N normal maka $hnh^{-1} \in N$ untuk sebarang $(h, n) \in H \times N$. Sehingga pemetaan $\theta : H \times N \to N$ terdefinisi. Pemetaan θ dapat didekomposisi sebagai

$$(h, n) \mapsto (hn, h^{-1}) \mapsto hnh^{-1}.$$

Karena H dan N masing-masing adalah submanifold terembed tutup di G maka tiap pemetaan di atas mulus. Sehingga θ juga mulus. Mudah memeriksa bahwa θ adalah aksi kiri dari H ke N dan untuk setiap $h \in H$, θ_h adalah automorfisma di N. Dengan demikian θ adalah aksi kiri mulus oleh automorfisma dan $N \rtimes_\theta H$ terdefinisi.

Pemetaan $F : N \rtimes_\theta H \to G$ yang didefinisikan sebagai $F(n, h) = nh$ adalah pemetaan mulus karena F hanyalah restriksi dari perkalian $m : G \times G \to G$ ke submanifold terembed $N \times H \subseteq G \times G$. Pemetaan F adalah homomorfisma grup Lie karena untuk sebarang $(n, h), (n', h') \in N \rtimes_\theta H$,

$$F\Big((n, h)(n', h')\Big) = F\big(n\theta_h(n'), hh'\big) = F(nhn'h^{-1}, hh') = nhn'h' = F(n, h)F(n', h').$$

Dengan hipotesis $NH = G$ dan $N \cap H = \{e\}$, mudah menunjukan bahwa F bijektif. Dengan demikian F adalah isomorfima grup Lie. ■

Soal (Problem 7-19)**.** Misalkan G, N dan H adalah grup-grup Lie. Buktikan bahwa G isomorfik dengan suatu hasil kali semi langsung $N \rtimes H$ jika dan hanya jika ada homorfisma grup Lie $\varphi : G \to H$ dan $\psi : H \to G$ sehingga $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$ dan $\mathrm{Ker}\ \varphi \cong N$.

Solusi. Misalkan $G \cong N \rtimes H$ lewat isomorfisma $F : G \to N \rtimes H$. Bila ada homomorfisma grup Lie $\varphi : G \to H$ dan $\psi : H \to G$ sehingga $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$ maka φ adalah pemetaan pada dan ψ injektif. Pemetaan pada yang dapat dibangun dari G ke H yang natural adalah

$$G \xrightarrow{F} N \rtimes H \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} H,$$

dengan $\mathrm{pr}_2(n,h) = h$. Sedangkan pemetaan injektif $H \to G$ yang natural adalah

$$H \xrightarrow{\iota_H} N \rtimes H \xrightarrow{F^{-1}} G$$

dengan $\iota_H(h) = (e, H)$. Akan ditunjukan bahwa kedua pemetaan diatas adalah homomorfisma grup Lie yang diinginkan. Definisikan $\varphi := \mathrm{pr}_2 \circ F$ dan $\psi := F^{-1} \circ \iota_H$. Jelas bahwa keduanya adalah homomorfisma grup Lie yang memenuhi $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$. Dari Proposisi 7.33, $N \cong N \times \{e\}$. Sehingga untuk menunjukan $\mathrm{Ker}\ \varphi \cong N$ cukup ditunjukan $\mathrm{Ker}\ \varphi \cong N \times \{e\}$. Untuk sebarang $g \in \mathrm{Ker}\ \varphi$ berarti $\varphi(g) = \mathrm{pr}_2 \circ F(g) = \mathrm{pr}_2(n,h) = h = e$. Maka $F(g) = (n,e)$. Jadi $F(\mathrm{Ker}\ \varphi) \subseteq N \times \{e\}$. Sebaliknya, bila $g \in F^{-1}(N \times \{e\})$ maka $\varphi(g) = \mathrm{pr}_2 \circ F(g) = \mathrm{pr}_2(n,e) = e$. I.e., $\mathrm{Ker}\ \varphi \supseteq F^{-1}(N \times \{e\})$. Karena F isomorfisma grup Lie maka $\mathrm{Ker}\ \varphi \cong N \times \{e\}$.

Untuk konversnya, misalkan ada isomorfisma grup Lie $\varphi : G \to H$ dan $\varphi : H \to G$ sehingga $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$ dan $\mathrm{Ker}\ \varphi \cong N$. Kita ingin menunjukan bahwa $G \cong N \rtimes H$. Kita tahu bahwa φ surjektif dan ψ injektif, jadi $\mathrm{Im}\ \psi, \mathrm{Ker}\ \varphi \subseteq G$ adalah subgrup Lie tutup dari G. Kita tunjukan dahulu bahwa $G \cong \mathrm{Ker}\ \varphi \rtimes \mathrm{Im}\ \psi$ dengan bantuan Teorema 7.35. Subgrup $\mathrm{Ker}\ \varphi$ normal karena : untuk sebarang $g \in G$ dan $a \in \mathrm{Ker}\ \varphi$,

$$\varphi(gag^{-1}) = \varphi(g)\varphi(a)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = e \implies g(\mathrm{Ker}\ \varphi)g^{-1} \subseteq \mathrm{Ker}\ \varphi,$$

dan $a = g(g^{-1}ag)g^{-1} \implies g(\mathrm{Ker}\ \varphi)g^{-1} \supseteq \mathrm{Ker}\ \varphi$. Misalkan $g \in \mathrm{Ker}\ \varphi \cap \mathrm{Im}\ \psi$, maka $e = \varphi(g) = \varphi(\psi(h)) = \mathrm{Id}_H(h) = h$. Jadi $g = \psi(h) = e$. Dengan demikian $\mathrm{Ker}\ \varphi \cap \mathrm{Im}\ \psi = \{e\}$. Sekarang akan ditunjukan bahwa $(\mathrm{Ker}\ \varphi)(\mathrm{Im}\ \psi) = G$. Jelas bahwa $(\mathrm{Ker}\ \varphi)(\mathrm{Im}\ \psi) \subseteq G$. Misalkan $g \in G$. Bila $h = \varphi(g)$, maka g dapat ditulis sebagai $g = \psi(h)\big(\psi(h)^{-1}g\big)$. Elemen $\psi(h)^{-1}g \in \mathrm{Ker}\ \varphi$ karena $\varphi\big(\psi(h)^{-1}g\big) = \varphi\big(\psi(h^{-1})\big)\varphi(g) = h^{-1}h = e$. Jadi $(\mathrm{Ker}\ \varphi)(\mathrm{Im}\ \psi) = G$. Sehingga dari Teorema 7.35,

$$G \cong \mathrm{Ker}\ \varphi \rtimes_\theta \mathrm{Im}\ \psi,$$

dengan $\theta : \mathrm{Im}\ \psi \times \mathrm{Ker}\ \varphi \to \mathrm{Ker}\ \varphi$ adalah aksi kiri mulus oleh konjugasi $\theta_b(a) = bab^{-1}$. Sekarang akan ditunjukan bahwa $\mathrm{Ker}\ \varphi \rtimes_\theta \mathrm{Im}\ \psi \cong N \rtimes H$. Kita tahu bahwa $N \cong \mathrm{Ker}\ \varphi$ dan $H \cong \mathrm{Im}\ \psi$. Misalkan $\imath : H \to \mathrm{Im}\ \psi$ dan $\jmath : N \to \mathrm{Ker}\ \varphi$ adalah isomorfisma. Kita ingin mencari aksi kiri oleh automorfisma $\hat{\theta} : H \times N \to N$ sehingga

$$N \rtimes_{\hat{\theta}} H \cong \mathrm{Ker}\ \varphi \rtimes_\theta \mathrm{Im}\ \psi.$$

Konstruksi natural yang mungkin adalah

$$\hat{\theta} : H \times N \xrightarrow{\imath \times \jmath} \mathrm{Im}\ \psi \times \mathrm{Ker}\ \varphi \xrightarrow{\theta} \mathrm{Ker}\ \varphi \xrightarrow{\jmath^{-1}} N.$$

Pemetaan $\hat{\theta}$ adalah pemetaan mulus yang memenuhi : untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ dan $n \in N$,

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{h_2} \circ \hat{\theta}_{h_1}(n) &= \hat{\theta}_{h_2}\Big(\jmath^{-1} \circ \theta\big(\imath(h_1), \jmath(n)\big)\Big) \\
&= \hat{\theta}_{h_2}\Big(\jmath^{-1} \circ \theta_{\imath(h_1)}(\jmath(n))\Big) \\
&= \jmath^{-1} \circ \theta_{\imath(h_2)}\Big(\jmath \circ \jmath^{-1} \circ \theta_{\imath(h_1)}(\jmath(n))\Big) \\
&= \jmath^{-1} \circ \theta_{\imath(h_2)} \circ \theta_{\imath(h_1)}(\jmath(n)) \\
&= \jmath^{-1} \circ \theta_{\imath(h_2 h_1)}(\jmath(n)) \\
&= \jmath^{-1} \circ \theta\Big(\imath(h_2 h_1), \jmath(n)\Big) \\
&= \hat{\theta}_{h_2 h_1}(n),
\end{aligned}$$

dan untuk sebarang $n \in N$,

$$\hat{\theta}_e(n) = \jmath^{-1} \circ \theta_{\imath(e)}(\jmath(n)) = \jmath^{-1} \circ \jmath(n) = n.$$

Untuk setiap $h \in H$, $\hat{\theta}_h = \jmath^{-1} \circ \theta_{\imath(h)} \circ \jmath$ adalah automorfisma grup. Dengan demikian $\hat{\theta}$ adalah aksi kiri mulus oleh automorfisma. Sekarang akan dibuktikan bahwa $\kappa \equiv \jmath \times \imath : N \rtimes_{\hat{\theta}} H \to \mathrm{Ker}\ \varphi \rtimes_\theta \mathrm{Im}\ \psi$ adalah isomorfisma grup Lie. Jelas pemetaan $(\jmath \times \imath)(n, h) = (\jmath(n), \imath(h))$ mulus dan bijektif. Pemetaan κ adalah homomorfisma grup karena : untuk sebarang $(n, h), (n', h') \in N \rtimes_{\hat{\theta}} H$ berlaku

$$\begin{aligned}
\kappa\big((n,h)(n',h')\big) &= (\jmath \times \imath)\big(n\hat{\theta}_h(n'), hh'\big) \\
&= \Big(\jmath\big(n\hat{\theta}_h(n')\big), \imath(hh')\Big) \\
&= \Big(\jmath(n)\jmath\big(\hat{\theta}_h(n')\big), \imath(h)\imath(h')\Big) \\
&= \Big(\jmath(n)\theta\big(\imath(h), \jmath(n')\big), \imath(h)\imath(h')\Big) \\
&= \Big(\jmath(n)\theta_{\imath(h)}\big(\jmath(n')\big), \imath(h)\imath(h')\Big) \\
&= \big(\jmath(n), \imath(h)\big)\big(\jmath(n'), \imath(h')\big) \\
&= \kappa(n,h)\,\kappa(n',h').
\end{aligned}$$

Jadi $\kappa : N \rtimes_{\hat{\theta}} H \to \mathrm{Ker}\ \varphi \rtimes_\theta \mathrm{Im}\ \psi$ adalah isomorfisma grup Lie. Dengan demikian $G \cong N \rtimes_{\hat{\theta}} H$. ■

Soal (Problem 7-20)**.** Buktikan bahwa grup-grup Lie dibawah ini isomorfik dengan hasil kali semi langsung yang ditunjukan. [Petunjuk : Gunakan hasil pada Problem 7-19.]

(a) $\mathrm{O}(n) \cong \mathrm{SO}(n) \rtimes \mathrm{O}(1)$.

(b) $\mathrm{U}(n) \cong \mathrm{SU}(n) \rtimes \mathrm{U}(1)$.

(c) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$.

(d) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{C}^*$.

Solusi. Untuk setiap subsoal $(a)-(d)$, kita pilih $\varphi(A) := \det A$ dan $\psi(z) := \mathrm{diag}(z, 1, \cdots, 1)$. Untuk setiap subsoal φ dan ψ adalah homomorfisma grup Lie dengan $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$. Hubungan isomorfisma adalah akibat dari hasil Problem 7-19. ■

Soal (Problem 7-21)**.** Buktikan bahwa grup-grup di Problem 7-20 isomorfik dengan hasil kali langsung dari grup-grup yang bersangkutan pada kasus (a) dan (c) jika dan hanya jika n ganjil, dan pada kasus (b) dan (d) jika dan hanya jika $n = 1$.

Solusi.

Soal (Problem 7-22)**.** Misalkan $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (dipandang sebagai ruang vektor atas $\mathbb{R}$), dan definisikan hasil kali bilinear $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sebagai

$$(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb), \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Dengan hasil kali ini, $\mathbb{H}$ adalah sebuah aljabar atas $\mathbb{R}$ berdimensi 4, disebut aljabar **kuarternion** (*quarternions*). Untuk setiap $p = (a, b) \in \mathbb{H}$, definisikan $p^* = (\bar{a}, -b)$. Basis dari $\mathbb{H}$ adalah $(\mathbb{1}, \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k})$ dengan

$$\mathbb{1} = (1, 0), \quad \mathbb{i} = (i, 0), \quad \mathbb{j} = (0, 1), \quad \mathbb{k} = (0, -i).$$

Dapat dengan mudah diperiksa bahwa basis ini memenuhi

$$\begin{array}{llll} \mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = -\mathbb{1}, & \mathbb{1}q = q\mathbb{1} = q & \text{untuk semua } q \in \mathbb{H}, & \\ \mathbb{i}\mathbb{j} = -\mathbb{j}\mathbb{i} = \mathbb{k}, & \mathbb{j}\mathbb{k} = -\mathbb{k}\mathbb{j} = \mathbb{i}, & \mathbb{k}\mathbb{i} = -\mathbb{i}\mathbb{k} = \mathbb{j}, & \\ \mathbb{1}^* = \mathbb{1}, & \mathbb{i}^* = -\mathbb{i}, & \mathbb{j}^* = -\mathbb{j}, & \mathbb{k}^* = -\mathbb{k}. \end{array}$$

Sebuah kuarternion p dikatakan *real* jika $p^* = p$, dan *imajiner* jika $p^* = -p$. Kuarternion-kuarternion real dapat diidentifikasikan dengan bilangan real lewat korespondensi $x \leftrightarrow x\mathbb{1}$.

(a) Tunjukan bahwa perkalian antar kuarternion yang didefinisikan di atas asosiatif tetapi tidak komutatif.

(b) Tunjukan bahwa $(pq)^* = q^*p^*$ untuk semua $p, q \in \mathbb{H}$.

(c) Tunjukan bahwa $\langle p, q \rangle = \frac{1}{2}(p^*q + q^*p)$ adalah suatu hasil kali dalam pada $\mathbb{H}$, dengan norma dihasilkan memenuhi $|pq| = |p|\,|q|$.

(d) Tunjukan bahwa setiap kuarternion taknol memiliki inverse perkalian dua sisi yang diberikan sebagai $p^{-1} = |p|^{-2}\, p^*$.

(e) Tunjukan bahwa himpunan semua kuarternion taknol $\mathbb{H}^*$ adalah suatu grup Lie terhadap perkalian kuarternion yang didefinisikan di atas.

Solusi. Bukti rutin. ■

Soal (Problem 7-23)**.** Misalkan $\mathbb{H}^*$ adalah grup Lie dari kuarternion-kuarternion taknol (Soal 7-22), dan $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{H}^*$ adalah himpunan semua kuarternion-kuarternion satuan. Tunjukan bahwa $\mathcal{S}$ adalah subgrup Lie dari $\mathbb{H}^*$ yang terembed secara proper, isomorfik dengan $\mathrm{SU}(2)$.

Solusi. Dari definisi $\mathcal{S} = \{q \in \mathbb{H}^* \mid |q|^2 = 1\}$. Definisikan fungsi mulus $F : \mathbb{H}^* \to \mathbb{R}^*$ sebagai

$$F(q) \equiv |q|^2 = \langle q, q \rangle = q^*q = |a|^2 + |b|^2, \quad q = (a, b) \in \mathbb{H}^*,$$

dengan identifikasi $\mathbb{R}$ di $\mathbb{H}$ sebagai $x \leftrightarrow x\mathbb{1}$. Dengan koordinat standar pada $\mathbb{H}^*$ dan $\mathbb{R}^*$, F memenuhi

$$F(pq) = F\big((a, b)(c, d)\big) = (|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) = F(p)F(q),$$

untuk sebarang $p = (a, b), q = (c, d) \in \mathbb{H}^*$. Dengan kata lain F adalah homomorfisma grup Lie. Akan ditunjukan bahwa F memiliki rank konstan dengan menunjukan bahwa F pemetaan ekivarian. Pandang perkalian grup Lie $\theta : \mathbb{H}^* \times \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*$ sebagai aksi kiri dan misalkan $\varphi : \mathbb{H}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ adalah aksi kiri mulus $\varphi(q, x) = |q|^2 x$. Maka untuk sebarang $p, q \in \mathbb{H}^*$,

$$(F \circ \theta_p)(q) = F(pq) = F(p)F(q) = |p|^2|q|^2 = \theta_p(|q|^2) = (\theta_p \circ F)(q).$$

Jadi F ekivarian terhadap aksi transitif kiri θ dan aksi φ. Akibatnya rank F konstan dan $\mathcal{S} = F^{-1}(1)$ adalah subgrup Lie dari $\mathbb{H}^*$ yang terembed secara proper.

Dari Soal 7-16, SU(2) adalah

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \text{ dan } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Mudah memeriksa bahwa pemetaan mulus $\mathcal{S} \to \mathrm{SU}(2)$ yang didefinisikan sebagai

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix},$$

adalah isomorfisma grup Lie. ■

Catatan. Satu hal yang saya sadari setelah bukti di atas ditulis adalah bahwa homomorfisma grup Lie sudah pasti memiliki rank konstan karena homomorfisma grup Lie adalah pemetaan ekivarian terhadap aksi-aksi kiri yang kanonik. Misal $F : G \to N$ adalah pemetaan mulus antar grup Lie, maka F homomorfisma grup Lie j.h.j. F ekivarian terhadap aksi perkalian kiri $m_G : G \times G \to G$ dan aksi

$$\varphi : G \times N \xrightarrow{F \times \mathrm{Id}} N \times N \xrightarrow{m_N} N,$$

i.e., untuk setiap $g \in G$, diagram berikut komutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{F} & N \\ {\scriptstyle L_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_{F(g)}} \\ G & \xrightarrow[F]{} & N \end{array}$$

Jadi bukti di atas sepertinya berlebihan dan tidak efisien. Tetapi saya tetap membiarkannya karena membantu saya menyadari bahwa homomorfisma grup Lie adalah salah satu contoh pemetaan ekivarian.

3 Medan Vektor

3.1 Soal Latihan

Soal (Problem 8-1)**.** Buktikan Lema 8.6 (lema ekstensi medan vektor).

Solusi.

Soal (Problem 8-2)**.** TEOREMA FUNGSI HOMOGEN EULER : Misalkan c adalah bilangan real dan $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi mulus yang bersifat homogen positif berderajat c, yang berarti $f(\lambda x) = \lambda^c f(x)$ untuk semua $\lambda > 0$ dan $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Buktikan bahwa $Vf = cf$, dimana V adalah medan vektor Euler yang didefinisikan pada Contoh 8.3.

Solusi. Misalkan $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sebarang. Karena medan vektor Euler V di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ didefinisikan sebagai $V = \sum x^i \partial_{x^i}$, maka $V_x = \gamma'(0)$ dengan $\gamma(t) = x + tx$. Sehingga

$$(Vf)_x = V_x f = \gamma'(0) f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + tx) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (1+t)^c f(x) = cf(x).$$

Jadi $Vf = cf$. ■

Soal (Problem 8-3)**.** Misalkan M adalah manifold mulus dengan atau tanpa batas tak kosong berdimensi positif. Tunjukan bahwa $\mathfrak{X}(M)$ berdimensi tak-hingga.

Solusi.

Soal (Problem 8-4)**.** Misalkan M adalah manifold mulus dengan batas. Tunjukan bahwa ada medan vektor mulus global di M yang restriksinya pada ∂M menunjuk-kedalam (*inward-pointing*) dimana-mana. Tunjukan hal serupa untuk kasus menunjuk-keluar (*outward-pointing*) dimana-mana pada ∂M.

Solusi.

Soal (Problem 8-5)**.** Buktikan Proposisi 8.11 (pelengkapan kerangka lokal).

Solusi.

Soal (Problem 8-14)**.** Misalkan M adalah manifold mulus dengan atau tanpa batas, N adalah manifold mulus, dan $f : M \to N$ adalah fungsi mulus. Definisikan $F : M \to M \times N$ sebagai $F(x) = (x, f(x))$. Tunjukan bahwa untuk setiap $X \in \mathfrak{X}(M)$ ada medan vektor mulus di $M \times N$ yang terkait-F ke X.

Solusi. Apabila ada medan vektor mulus $Y \in \mathfrak{X}(M \times N)$ yang terkait-F ke X maka untuk setiap $p \in X$,

$$dF_p(X_p) = \alpha^{-1} \circ \alpha \circ dF_P(X_p) = \alpha^{-1}\big(X_p, df_p(X_p)\big) = Y_{(p,f(p))},$$

dengan $\alpha : T_{(p,f(q))}(M \times N) \to T_pM \oplus T_{f(p)}N$ adalah isomorfisma $\alpha(v) = (d\pi_M(v), d\pi_N(v))$. Jadi kita harus mencari $Y \in \mathfrak{X}(M \times N)$ sehingga nilainya pada $\Gamma_f = \{(p,q) \in M \times N \mid p \in M, q = f(p)\}$ memenuhi relasi di atas. Kita jelas dapat mendefinisikan medan vektor kontinu $Y : \Gamma_f \to T(M \times N)$ sebagai

$$\widetilde{Y}_{(p,f(p))} = dF_p(X_p).$$

Sekarang kita tinggal memperluas Y ke seluruh $M \times N$.

Kita tahu bahwa $\Gamma_f = F(M)$ adalah submanifold dari $M \times N$ yang terembed secara proper (dapat diperiksa bahwa F adalah embedding mulus yang proper), khususnya $\Gamma_f \subseteq M \times N$ adalah himpunan tutup. Karena Γ_f tutup, maka berdasarkan Lema 8.6, kita cukup menunjukan bahwa untuk setiap $(p, f(p)) \in \Gamma_f$ ada lingkungan W untuk $(p, f(p))$ dan medan vektor mulus $\widetilde{Y}$ di W sehingga $\widetilde{Y}|_{W \cap \Gamma_f} = Y|_{W \cap \Gamma_f}$.

Misalkan $(p, f(p)) \in \Gamma_f$ sebarang. Pilih chart (batas) mulus (U, x^i) memuat p dan (V, y^i) memuat $f(p)$ dengan $f(U) \subseteq V$. Maka $(U \times V, (x^i, y^j))$ adalah chart mulus untuk $M \times N$ yang memuat $(p, f(p))$. Bila $X = X^i \partial_{x^i}$ pada U maka

$$\begin{aligned} Y_{(p,f(p))} &= dF_p(X_p) = \alpha^{-1}\big(X_p, df_p(X_p)\big) = d\iota_M(X_p) + d\iota_N(df_p(X_p)) \\ &= X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,f(p))} + X^i(p) \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(p,f(p))}, \end{aligned}$$

dengan $\iota_M : M \hookrightarrow M \times N$ dan $\iota_N : N \hookrightarrow M \times N$ masing-masing adalah inklusi $x \mapsto (x, f(p))$ dan $x \mapsto (p, x)$ berturut-turut. Dengan bentuk ini, jelas bahwa medan vektor $\widetilde{Y} : U \times V \to T(M \times N)$ yang diinginkan adalah

$$\widetilde{Y}_{(x,y)} := X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(x,y)} + X^i(x)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(x,y)}, \quad \forall (x,y) \in U \times V.$$

Sehingga menurut Lema 8.6 ada medan vektor mulus $Y \in \mathfrak{X}(M \times N)$ yang terkait-F dengan X. ■

Soal (Problem 8-17)**.** Misalkan M dan N adalah manifold-manifold mulus. Diberikan medan-medan vektor $X \in \mathfrak{X}(M)$ dan $Y \in \mathfrak{X}(N)$, kita dapat mendefinisikan medan vektor $X \oplus Y$ di $M \times N$ sebagai

$$(X \oplus Y)_{(p,q)} = (X_p, Y_q),$$

dimana ruas kanan adalah anggota di $T_pM \oplus T_qN$, yang secara natural diidentifikasi dengan $T_{(p,q)}(M \times N)$ seperti pada Proposisi 3.14. Buktikan bahwa $X \oplus Y$ mulus jika X dan Y juga mulus, dan $[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2] = [X_1, X_2] \oplus [Y_1, Y_2]$.

Solusi. Misalkan $X \in \mathfrak{X}(M)$ dan $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Definisikan pemetaan $X \oplus Y : M \times N \to T(M \times N)$ sebagai

$$(X \oplus Y)_{(p,q)} = \alpha^{-1} \circ \alpha \circ (X \oplus Y)_{(p,q)} = \alpha^{-1}\big((X_p, Y_q)\big),$$

dimana $\alpha : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \oplus T_qN$ adalah isomorfisma $v \mapsto (d\pi_M(v), d\pi_N(v))$. Misalkan $(p,q) \in M \times N$ sebarang. Pilih chart (U, x^i) di M yang memuat p dan (V, y^j) di N yang memuat q. Maka chart $(U \times V, x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$ adalah chart di $M \times N$ yang memuat (p,q). Misalkan $X = X^i \partial/\partial x^i$ di U dan $Y = Y^j \partial/\partial y^j$ di V, maka untuk $(x,y) \in U \times V$,

$$\begin{aligned}(X \oplus Y)_{(x,y)} &= \alpha^{-1}\Big(X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, Y^j(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_y\Big) = X^i(x)\, d\iota_M\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\Big) + Y^j(y)\, d\iota_N\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_y\Big) \\ &= X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(x,y)} + Y^j(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{(x,y)}.\end{aligned}$$

Karena fungsi-fungsi komponen dari $X \oplus Y$ terhadap chart $(U \times V, x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$ mulus maka $(X \oplus Y)|_{U \times V}$ mulus. Jadi $X \oplus Y$ mulus secara lokal. Akibatnta $X \oplus Y$ adalah medan vektor mulus di $M \times N$. Dengan argumen serupa, konvers pernyataan ini juga berlaku.

Selanjutnya kesamaan $[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2] = [X_1, X_2] \oplus [Y_1, Y_2]$ akan dibuktikan secara lokal. Untuk sebarang $(p,q) \in M \times N$ pilih chart $(U \times V, x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$ yang memuat (p,q). Bila $X_1 = X_1^i \partial_{x^i}$, $X_2 = X_2^k \partial_{x^k}$ pada U dan $Y_1 = Y_1^j \partial_{y^j}$, $Y_2 = Y_2^l \partial_{y^l}$ pada V, maka dari perhitungan sebelumnya, bila $W_1 = X_1 \oplus Y_1$ dan $W_2 = X_2 \oplus Y_2$, kita peroleh bentuk W_1 dan W_2 pada $U \times V$ sebagai

$$W_1 = W_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} + W_1^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{dan} \quad W_2 = W_2^k \frac{\partial}{\partial x^k} + W_2^l \frac{\partial}{\partial y^l},$$

dengan

$$\begin{aligned} W_1^i(x,y) &= X_1^i(x) \quad 1 \leqslant i \leqslant m \quad \text{dan} \quad W_1^j(x,y) = Y_1^j(y) \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \\ W_2^k(x,y) &= X_2^k(x) \quad 1 \leqslant k \leqslant m \quad \text{dan} \quad W_2^l(x,y) = Y_2^l(y) \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \end{aligned}$$

untuk setiap $(x,y) \in U \times V$. Dari formula untuk bracket Lie (persamaan (8.9)),

$$\begin{aligned}[W_1, W_2]_{(p,q)} = {} & (W_1 W_2^k)_{(p,q)} \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)} + (W_1 W_2^l)_{(p,q)} \frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_{(p,q)} \\ & - (W_2 W_1^i)_{(p,q)} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)} - (W_2 W_1^j)_{(p,q)} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(p,q)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Suku pertama pada (1) dievaluasi sebagai

$$
\begin{aligned}
(W_1W_2^k)_{(p,q)}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)} &= \left(W_1^i(p,q)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)}W_2^k + W_1^j(p,q)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(p,q)}W_2^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)} \\
&= \left(X_1^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p X_2^k + Y_1^j(q)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q X_2^k(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)} \\
&= (X_1X_2^k)_p\,\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)},
\end{aligned}
$$

dimana kesamaan kedua dan ketiga persamaan di atas adalah hasil dari observasi bahwa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)}W_2^k &= d\iota_U\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)W_2^k = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p W_2^k\circ\iota_U = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p X_2^k, \quad \text{dan} \\
\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(p,q)}W_2^k &= d\iota_V\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p\right)W_2^k = \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q W_2^k\circ\iota_V = \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q X_2^k(p) = 0.
\end{aligned}
$$

Suku ketiga pada (1) adalah

$$
\begin{aligned}
(W_2W_1^i)_{(p,q)}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)} &= \left(W_2^k(p,q)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)}W_1^i + W_2^l(p,q)\frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_{(p,q)}W_1^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)}, \\
&= \left(X_2^k(p)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p X_1^i + Y_2^l(q)\frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_q X_1^i(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)}, \\
&= (X_2X_1^i)_p\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)},
\end{aligned}
$$

dengan kesamaan diperoleh lewat observasi yang serupa seperti sebelumnya bahwa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)}W_1^i &= d\iota_U\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p\right)W_1^i = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p W_1^i\circ\iota_U = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p X_1^i, \quad \text{dan} \\
\frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_{(p,q)}W_1^i &= d\iota_V\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_p\right)W_1^i = \frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_q W_1^i\circ\iota_V = \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q X_1^i(p) = 0.
\end{aligned}
$$

Dengan cara serupa dapat dihitung suku ketiga dan keempat persamaan (1). Sehingga (1) menjadi

$$
\begin{aligned}
[X_1\oplus Y_1, X_2\oplus Y_2]_{(p,q)} &= (X_1X_2^k)_p\,\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{(p,q)} + (Y_1Y_2^l)_q\frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_{(p,q)} - (X_2X_1^i)_p\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)} - (Y_2Y_1^j)_q\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(p,q)}, \\
&= [X_1,X_2]_p^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(p,q)} + [Y_1,Y_2]_q^j\,\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(p,q)}, \\
&= \big([X_1,X_2]\oplus[Y_1,Y_2]\big)_{(p,q)}.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $[X_1\oplus Y_1, X_2\oplus Y_2] = [X_1,X_2]\oplus[Y_1,Y_2]$. ∎

Soal (Problem 8-18)**.** Misalkan $F : M \to N$ adalah submersi mulus, dimana M dan N adalah manifold-manifold mulus berdimensi positif. Diberikan $X \in \mathfrak{X}(M)$ dan $Y \in \mathfrak{X}(N)$, kita katakan bahwa X adalah suatu **lift** dari Y jika Y terkait-F dengan X. Suatu medan vektor $V \in \mathfrak{X}(M)$ dikatakan **vertikal** jika V menyinggung serat-serat (*fibers*) dari F dimana-mana (atau, secara ekivalen, jika V terkait-F dengan medan vektor nol di N).

(a) Tunjukan bahwa jika $\dim M = \dim N$, maka setiap medan vektor mulus di N memiliki lift yang tunggal.

(b) Tunjukan bahwa jika $\dim M \neq \dim N$, maka setiap medan vektor mulus di N memiliki lift yang tidak tunggal.

(c) Asumsikan F surjektif. Diberikan $X \in \mathfrak{X}(M)$, tunjukan bahwa X adalah lift dari suatu medan vektor mulus di N jika dan hanya jika $dF_p(X_p) = dF_q(X_q)$ untuk setiap $p, q \in M$ yang memenuhi $F(p) = F(q)$. Tunjukan bahwa bila ini terjadi, maka X adalah lift dari suatu medan vektor mulus yang tunggal.

(d) Asumsikan bahwa F surjektif dengan serat terhubung. Tunjukan bahwa suatu medan vektor $X \in \mathfrak{X}(M)$ adalah lift dari suatu medan vektor mulus di N jika dan hanya jika $[V, X]$ vertikal untuk setiap $V \in \mathfrak{X}(M)$ yang vertikal.

Solusi. (a) Misalkan $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Bila $\dim M = \dim N$ maka dF_p invertible di setiap titik. Definisikan $X : M \to TM$ sebagai $X_p = (dF_p)^{-1}(Y_{F(p)})$. Karena F diffeomorfisma lokal, maka untuk setiap titik $p \in M$ ada lingkungan buka $U \ni p$ dan $V \ni F(p)$ sehingga $F : U \to V$ dan $dF|_{TU} : TU \to TV$ diffeomorfisma. Dari definisi, $X|_U = (dF|_{TU})^{-1} \circ Y|_V \circ F|_U$ sehingga X adalah medan vektor mulus di M. Medan vektor ini tunggal dan terkait-F ke Y dari pendefinisiannya.

(b) Misalkan $m = \dim M \neq \dim N = n$ dan $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Untuk setiap $p \in M$ ada chart (U_p, x^i) yang berpusat di p dan $(V_{F(p)}, y^j)$ yang berpusat di $F(p)$ sehingga representasi $F : M \to N$ adalah

$$\hat{F}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n).$$

Bila ada medan vektor mulus X yang terkait-F ke Y, maka untuk sebarang $x \in U$ berlaku

$$Y_{F(x)} = Y^j(F(x)) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(x)} = dF_x(X_x) = X^i(x) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(x)} = X^i(x)\, \delta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(x)}.$$

Sehingga n komponen pertama dari X pada (U_p, x^i) harus memenuhi $X^i = Y^i \circ F|_{U_p}$. Komponen-komponen sisa dari X dapat dipilih sembarang. Sehingga kita dapat mendefinisikan medan vektor lokal $X_p : U_p \to TM$ yang terkait-F ke Y sebagai $X_p = X_p^i \partial/\partial x^i$ dengan $X_p^i = Y^i \circ F|_{U_p}$ untuk $i = 1, \ldots, n$. Karena konstruksi ini dapat dilakukan untuk setiap titik di M, kita tinggal memadukan medan-medan vektor lokal ini menggunakan partisi kesatuan (*partition of unity*) untuk mendapatkan medan vektor global X, yang diharapkan masih terkait-F ke Y. Misalkan $(\psi_p)_{p \in M}$ adalah partisi kesatuan terhadap selimut buka $\{U_p\}_{p \in M}$, definisikan medan vektor mulus $X = \sum_p \psi_p X_p$, dimana $\psi_p X_p$ diinterpretasikan sebagai ekstensi medan vektor lokal $\psi_p|_{U_p} X_p$ ke M yang nilainya nol di luar $\operatorname{supp} \psi_p \subseteq U_p$. Medan vektor ini terkait-F ke Y karena

$$\begin{aligned} dF_x(X|_x) &= dF_x\Big(\sum_p (\psi_p X_p)(x) \Big) \\ &= dF_x\Big(\sum_{i=1}^{N} \psi_{p_i}(x) X_{p_i}|_x \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \psi_{p_i}(x)\, dF_x(X_{p_i}|_x) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \psi_{p_i}(x)\, Y_{F(x)} \\ &= Y_{F(x)}. \end{aligned}$$

Jadi X adalah lift dari Y. Lift untuk Y tidak tunggal karena konstruksinya bergantung pada pemilihan partisi kesatuan dan pemilihan komponen bentuk lokal $X_p = X_p^i \partial/\partial x^i$.

(c) Misalkan $F : M \to N$ adalah submersi surjektif.

Soal (Problem 8-19)**.** Tunjukan bahwa $\mathbb{R}^3$ dengan perkalian silang adalah suatu aljabar Lie.

Solusi.

Soal (Problem 8-20)**.** Misalkan $A \subseteq \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ adalah subruang yang dibangun oleh $\{X, Y, Z\}$, dimana

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Tunjukan bahwa A adalah suatu aljabar Lie dari $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, yang isomorfik dengan $\mathbb{R}^3$ dengan perkalian silang.

Solusi.

Soal (Problem 8-23)**.** (a) Diberikan dua aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dan $\mathfrak{h}$, tunjukan bahwa tambah langsung $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ adalah suatu aljabar Lie dengan perkalian yang didefinisikan sebagai

$$\big[(X,Y),(X',Y')\big] = \big([X,X'],[Y,Y']\big).$$

(b) Misalkan G dan H adalah grup-grup Lie. Buktikan bahwa $\mathrm{Lie}(G \times H)$ isomorfik dengan $\mathrm{Lie}(G) \oplus \mathrm{Lie}(H)$.

Solusi. (a) Bukti rutin. Untuk (b), kita ingin mencari isomorfisma $\phi : \mathrm{Lie}(G) \oplus \mathrm{Lie}(H) \to \mathrm{Lie}(G \times H)$. Dugaan awal kita adalah pemetaan $\widetilde{\phi} : \mathfrak{X}(G) \oplus \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(G \times H)$ yang didefinisikan sebagai $\widetilde{\phi}(X,Y) = X \oplus Y$. Dari soal 8-17, pemetaan ini terdefinisi dan mudah melihat bahwa $\widetilde{\phi}$ adalah pemetaan linear. Dari 8-17 pemetaan ini juga mengawetkan perkalian Lie, dengan perkalian Lie pada $\mathfrak{X}(G) \oplus \mathfrak{X}(H)$ adalah seperti pada (a) : untuk sebarang $(X,Y),(X',Y') \in \mathfrak{X}(G) \oplus \mathfrak{X}(H)$ berlaku

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}\big[(X,Y),(X',Y')\big] &= \widetilde{\phi}\big([X,X'],[Y,Y']\big) \\ &= [X,X'] \oplus [Y,Y'] \\ &= [X \oplus Y, X' \oplus Y'] \\ &= [\widetilde{\phi}(X,Y), \widetilde{\phi}(X',Y')]. \end{aligned}$$

Jadi $\widetilde{\phi}$ adalah homomorfisma aljabar Lie. Sekarang tinggal kita buktikan bahwa pemetaan restriksi $\phi : \mathrm{Lie}(G) \oplus \mathrm{Lie}(H) \to \mathrm{Lie}(G \times H)$ terdefinisi dan invertible. Bila ini terdefinsi maka ϕ isomorfisma grup Lie karena $\widetilde{\phi}$ jelas satu-satu dan domain dan codomain ϕ berdimensi sama.

Sekarang kita ingin menunjukan bahwa ϕ terdefinisi, yaitu bahwa untuk sebarang $X \in \mathrm{Lie}(G)$ dan $Y \in \mathrm{Lie}(H)$, $X \oplus Y$ adalah medan vektor invarian kiri. Misalkan $X \in \mathrm{Lie}(G)$, $Y \in \mathrm{Lie}(H)$ dan $(g,h) \in G \times H$ sebarang. Notasikan $\alpha : T_{(g,h)}(G \times H) \to T_gG \oplus T_hH$ sebagai isomorfisma $\alpha(v) = (d\pi_G(v), d\pi_H(v))$. Translasi kiri $L_{(g,h)} : G \times H \to G \times H$ adalah $L_{(g,h)}(g',h') = (gg',hh') = (L_g \times L_h)(g',h')$. Untuk sebarang $(g',h') \in G \times H$, notasikan $\beta : T_{(gg',hh')}(G \times H) \to T_{gg'}G \oplus T_{hh'}H$ sebagai isomorfisma $\alpha'(v) = (d\pi_G(v), d\pi_H(v))$, maka

$$\begin{aligned} d(L_g \times L_h)_{(g',h')}(X \oplus Y)_{(g',h')} &= \beta^{-1} \circ \beta \circ d(L_g \times L_h)_{(g',h')} \circ \alpha^{-1}(X_{g'}, Y_{h'}) \\ &= \beta^{-1}\Big(d(L_g)_{g'}(X_{g'}), d(L_h)_{h'}(Y_{h'})\Big) \\ &= \beta^{-1}\big(X_{gg'}, Y_{hh'}\big) \\ &= (X \oplus Y)_{(gg',hh')}. \end{aligned}$$

Dengan demikian $X \oplus Y \in \mathrm{Lie}(G \times H)$, dan pemetaan $\phi : \mathrm{Lie}(G) \oplus \mathrm{Lie}(H) \to \mathrm{Lie}(G \times H)$ yang didefinisikan sebagai $\phi(X,Y) = X \oplus Y$ adalah isomorfisma grup Lie. ■

Soal (Problem 8-24)**.** Misalkan G adalah grup Lie dan $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lienya. Suatu medan vektor $X \in \mathfrak{X}(G)$ dikatakan **invarian-kanan** (*right-invariant*) jika X invarian terhadap semua translasi kanan.

(a) Tunjukan bahwa himpunan semua medan vektor invarian-kanan $\bar{\mathfrak{g}}$ pada G adalah suatu subaljabar Lie dari $\mathfrak{X}(G)$.

(b) Misalkan $i : G \to G$ adalah pemetaan invers $i(g) = g^{-1}$. Tunjukan bahwa restriksi differensial $i_* : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$ adalah isomorfisma aljabar Lie dari $\mathfrak{g}$ ke $\bar{\mathfrak{g}}$.

Solusi. Untuk (a) mudah melihat bahwa $\bar{g}$ adalah subruang vektor dari $\mathfrak{X}(G)$. Kita tinggal menunjukan bahwa $\bar{\mathfrak{g}}$ tertutup terhadap $[\cdot,\cdot]$. Misalkan $X, Y \in \bar{\mathfrak{g}}$ sebarang. Karena untuk setiap $g \in G$, R_g adalah diffeomorfisma, maka dari Corollary 8.31,

$$(R_g)_*[X,Y] = [(R_g)_*X, (R_g)_*Y] = [X,Y].$$

Jadi $[X,Y]$ invarian terhadap semua translasi kanan.

Untuk (b), jelas bahwa $i_* : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$ adalah pemetaan linear yang mengawetkan $[\cdot,\cdot]$. Kita tunjukan dahulu bahwa $i_*(\mathfrak{g}) \subseteq \bar{\mathfrak{g}}$. Misalkan $X \in \mathfrak{g}$ dan $g \in G$ sebarang, maka $\forall h \in G$,

$$\begin{aligned}
\big((R_g)_*(i_*X)\big)_h &= d(R_g)_{R_g^{-1}(h)}(i_*X)_{R_g^{-1}(h)} \\
&= d(R_g)_{hg^{-1}}(i_*X)_{hg^{-1}} \\
&= d(R_g)_{hg^{-1}} \circ di_{gh^{-1}}(X_{gh^{-1}}) \\
&= d(R_g \circ i)_{gh^{-1}} X_{gh^{-1}} \\
&= d(R_g \circ i)_{gh^{-1}} \circ d(L_g)_{h^{-1}}(X_{h^{-1}}) \\
&= d(R_g \circ i \circ L_g)_{h^{-1}}(X_{h^{-1}}) \\
&= di_{h^{-1}}(X_{h^{-1}}) \\
&= (i_*X)_h.
\end{aligned}$$

Jadi $(R_g)_*(i_*X) = i_*X$. I.e., $i_*X \in \bar{\mathfrak{g}}$. Ini berarti pemetaan linear $i_* : \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ terdefinisi, yaitu suatu homomorfisma aljabar Lie dari $\mathfrak{g}$ ke $\bar{\mathfrak{g}}$. Dapat diperiksa bahwa $i \circ i = \mathrm{Id}_G$ mengakibatkan

$$i_*(i_*X)|_g = di_{g^{-1}}(i_*X)_{g^{-1}} = di_{g^{-1}} \circ di_g(X_g) = d(\mathrm{Id}_G)_g(X_g) = X_g,$$

untuk sebarang $X \in \mathfrak{g}$ dan $g \in G$. Dengan kata lain

$$\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} = i_* \circ i_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Jadi $i_* : \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ invertibel dengan inversnya adalah dirinya sendiri. Dengan demikian i_* adalah isomorfisma aljabar Lie dari $\mathfrak{g}$ ke $\bar{\mathfrak{g}}$. ■

Soal (Problem 8-25)**.** Buktikan bahwa jika G adalah grup Lie abelian, maka $\mathrm{Lie}(G)$ juga abelian. [Petunjuk : tunjukan bahwa pemetaan invers $i : G \to G$ adalah homomorfisma grup, dan gunakan Problem 7-2.]

Solusi. Bila G abelian, maka $i(gh) - h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = i(g)i(h)$, dengan kata lain i adalah homomorfisma grup Lie. Dari Teorema 8.44, $i_* : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ adalah homomorfisma aljabar Lie dimana untuk setiap $X \in \mathrm{Lie}(G)$, $i_*X \in \mathrm{Lie}(G)$ adalah medan vektor yang terkait-i dengan X. Dengan bantuan Problem 7-2, untuk setiap $X \in \mathrm{Lie}(G)$,

$$i_*X|_g = (di_e(X_e))^{\mathrm{L}}|_g = d(L_g)_e(-X_e) = -X_g \implies i_*X = -X.$$

Sehingga untuk sebarang $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$,

$$-[X,Y] = i_*[X,Y] = [i_*X, i_*Y] = [-X,-Y] = [X,Y] \implies [X,Y] = 0. \quad ■$$

Soal (Problem 8-26)**.** Misalkan $F : G \to H$ adalah suatu homomorfisma grup Lie. Tunjukan bahwa kernel dari $F_* : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ adalah aljabar Lie dari Ker F (dengan melakukan identifikasi seperti yang dipaparkan pada Teorema 8.46).

Solusi. Dari Teorema 8.46, $K \equiv \mathrm{Ker}\ F \subseteq G$ adalah subgrup Lie dengan aljabar Lie, $\mathrm{Lie}(K)$, yang isomorfik dengan peta

$$\iota_*\big(\mathrm{Lie}(K)\big) = \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid X_e \in T_eK\}$$

dimana $\iota_* : \mathrm{Lie}(K) \to \mathrm{Lie}(G)$ adalah homomorfisma aljabar Lie yang diinduksi oleh pemetaan inklusi $\iota : K \hookrightarrow G$. Kita ingin menunjukan bahwa

$$\mathrm{Ker}\ F_* = \iota_*(\mathrm{Lie}(K)) = \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid X_e \in T_eK\}.$$

Tetapi karena $K \equiv \mathrm{Ker}\ F = F^{-1}(e)$ dan dari definisi $F_*(X) = \big(dF_e(X_e)\big)^{\mathrm{L}}$, maka

$$\begin{aligned}
\iota_*\big(\mathrm{Lie}(K)\big) &= \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid X_e = T_eK\} \\
&= \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid X_e \in T_eF^{-1}(e)\} \\
&= \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid X_e \in \mathrm{Ker}\ dF_e\} \\
&= \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid dF_e(X_e) = 0\} \\
&= \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid \big(dF_e(X_e)\big)^{\mathrm{L}} = 0\} \\
&= \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid F_*(X) = 0\} \\
&= \mathrm{Ker}\ F_*.
\end{aligned}$$

Jadi $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\ F) \cong \mathrm{Ker}\ F_*$. ■

Soal (Problem 8-27)**.** Misalakan G dan H adalah grup-grup Lie, dan misalkan $F : G \to H$ adalah suatu homomorfisma grup Lie yang juga merupakan diffeomorfisma lokal. Tunjukan bahwa homomorfisma $F_* : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ adalah suatu isomorfisma aljabar Lie.

Solusi. Karena F diffeomorfisma lokal, maka $\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim \mathrm{Lie}(H)$ sehingga kita hanya perlu menunjukan bahwa homomorfisma aljabar Lie F_* satu-satu atau pada. Misalkan $X \in \mathrm{Lie}(G)$ sehingga $F_*X = 0$. Ini berarti

$$F_*X|_e = (dF_e(X_e))^{\mathrm{L}}|_e = dF_e(X_e) = 0 \implies X_e = 0,$$

karena dF_e bijektif. Dengan demikian $X = (X_e)^{\mathrm{L}} = 0$. Jadi F_* isomorfisma aljabar Lie. ■

Soal (Problem 8-28)**.** Dengan meninjau pemetaan $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ sebagai homomorfisma grup Lie, tunjukan bahwa homomorfisma aljabar Lie yang diinduksi adalah $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. [Petunjuk : lihat Problem 7-4.]

Solusi. Dengan identifikasi $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \leftrightarrow T_{I_n}\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \leftrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$ seperti pada Proposisi 8.41, yaitu

$$(A^i_j) \leftrightarrow A \equiv A^i_j \frac{\partial}{\partial X^i_j}\Big|_{I_n} \leftrightarrow A^{\mathrm{L}},$$

maka untuk sebarang $A^{\mathrm{L}} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$, Problem 7-4(b) memberikan

$$\det{}_*(A^{\mathrm{L}})|_1 = d(\det)_{I_n}(A) = \det(I_n)\mathrm{tr}(I_n^{-1}(A^i_j)) = \mathrm{tr}(A^i_j).$$

Dengan kata lain $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) \xrightarrow{\det_*} \mathrm{Lie}(\mathbb{R}^*) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{R}$. ■

Soal (Problem 8-31)**.** Misalkan $\mathfrak{g}$ adalah suatu aljabar Lie. Suatu subruang linear $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ disebut suatu **ideal di** $\mathfrak{g}$ jika $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ untuk setiap $X \in \mathfrak{h}$ dan $Y \in \mathfrak{g}$.

(a) Tunjukan bahwa jika $\mathfrak{h}$ adalah suatu ideal di $\mathfrak{g}$, maka ruang kuosien $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ memiliki struktur aljabar Lie yang tunggal sehingga proyeksi $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ adalah homomorfisma aljabar Lie.

(b) Tunjukan bahwa subruang $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ adalah suatu ideal jika dan hanya jika $\mathfrak{h}$ adalah kernel dari suatu homomorfisma aljabar Lie.

Solusi.

4 Kurva Integral dan Aliran

4.1 Soal Latihan

Soal (Problem 9-6)**.** Buktikan Lema 9.19 (*Escape Lemma*) : Misalkan M adalah manifold mulus dan $V \in \mathfrak{X}(M)$. Jika $\gamma : J \to M$ adalah kurva integral maksimal dari V dimana domain J memiliki batas atas terkecil yang berhingga b, maka untuk setiap $t_0 \in J$, $\gamma\big([t_0, b)\big)$ tidak termuat di setiap subset kompak dari M.

Solusi. Sketsa : Misalkan sebaliknya, maka γ dapat diperluas, berkontradiksi dengan hipotesis bahwa γ maksimal.

5 Metrik Riemann

5.1 Soal Latihan

Soal (Problem 13-21)**.** Misalkan (M, g) adalah manifold Riemann, $f \in C^\infty(M)$, dan $p \in M$ adalah titik regular dari f.

(a) Tunjukan bahwa diantara semua vektor-vektor satuan $v \in T_pM$, turunan berarah vf bernilai paling besar ketika v memiliki arah yang sama dengan grad $f|_p$, dan panjang grad $f|_p$ sama dengan nilai turunan berarah pada arah tersebut.

(b) Tunjukan bahwa grad $f|_p$ normal terhadap himpunan tingkatan (*level set*) dari f yang melalui p.

Solusi. (a) Dari definisi, grad $f = \widehat{g}^{-1}(df) \in \mathfrak{X}(M)$ sehingga untuk sebarang $v \in T_pM$

$$\langle \text{grad } f|_p, v \rangle_g = df_p(v) = vf.$$

Dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz kita peroleh

$$|vf|^2 = \big|\langle \text{grad } f|_p, v \rangle_g\big|^2 \leqslant \big|\text{grad } f|_p\big|^2 \big|v\big|^2 = \big|\text{grad } f|_p\big|^2.$$

Jadi vf maksimum ketika $vf = \big|\text{grad } f|_p\big|$. Karena

$$\text{grad } f|_p(f) = \langle \text{grad } f|_p, \text{grad } f|_p \rangle_g = \big|\text{grad } f|_p\big|^2 = \big|\text{grad } f|_p\big| \cdot vf,$$

maka

$$vf = \frac{\text{grad } f|_p}{\big|\text{grad } f|_p\big|} f.$$

Untuk (b), misalkan $S \subseteq M$ adalah himpunan tingkatan yang melalui p, yaitu $S = f^{-1}(f(p))$. Karena $T_pS = \text{Ker } df_p$, maka untuk sebarang $v \in T_pS$

$$\langle \text{grad } f|_p, v \rangle_g = vf = df_p(v) = 0.$$

Dengan demikian grad $f|_p$ normal terhadap T_pS. ■

6 Pemetaan Eksponensial

7 Manifold Kuosien

7.1 Soal Latihan

Soal (Problem 21-1)**.** Misalkan grup Lie G beraksi secara kontinu pada manifold M. Tunjukan bahwa jika pemetaan $\theta : G \times M \to M$ yang mendefinisikan aksi ini adalah pemetaan proper, maka aksi ini proper. Berikan contoh penyangkal untuk menunjukan bahwa konvers pernyataan di atas tidak benar.

Solusi. Misalkan $\theta : G \times M \to M$ adalah pemetaan proper dan $\Phi : G \times M \to M \times M$ adalah pemetaan $\Phi(g,p) = \big(\theta(g,p), p\big)$. Akan ditunjukan bahwa Φ adalah pemetaan proper. Perhatikan bahwa $\pi_1 \circ \Phi = \theta$ dengan $\pi_1 : M \times M \to M$ adalah proyeksi $\pi_1(x,y) = x$. Untuk sebarang subset kompak $K \subseteq M \times M$, berlaku $\pi_1^{-1}\big(\pi_1(K)\big) \supseteq K$ sehingga

$$\theta^{-1}\big(\pi_1(K)\big) = (\pi_1 \circ \Phi)^{-1}\big(\pi_1(K)\big) = \Phi^{-1} \circ \pi_1^{-1}\big(\pi_1(K)\big) \supseteq \Phi^{-1}(K).$$

Karena K kompak dan θ adalah pemetaan proper, maka $\theta^{-1}\big(\pi_1(K)\big) \subseteq G \times M$ kompak. Lebih jauh K dan $\Phi^{-1}(K)$ tutup karena K adalah subset kompak dari ruang Hausdorff $M \times M$ dan kerena Φ kontinu. Sehingga subset tutup $\Phi^{-1}(K)$ dari subset kompak $\theta^{-1}\big(\pi_1(K)\big)$ haruslah kompak. Jadi Φ adalah pemetaan proper.

Untuk contoh penyangkal, perhatikan aksi $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan seperti pada contoh 21.2 (b), yaitu

$$v \cdot (x,y) := (v + x, y).$$

Aksi T bukan pemetaan proper karena $T^{-1}(0,0) = \{(-\lambda, (\lambda, 0)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ tidak kompak. Tetapi pemetaan $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai

$$\big(v, (x,y)\big) \mapsto \big((v + x, y), (x,y)\big)$$

proper. Untuk melihatnya, misalkan $K \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ kompak dan $\Psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ didefinisikan sebagai $\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_3, x_4)$ adalah invers kiri dari Φ. Maka dari $\Phi \circ \Phi^{-1}(K) \subseteq K$ kita punya

$$\Phi^{-1}(K) = (\Psi \circ \Phi)\big(\Phi^{-1}(K)\big) \subseteq \Psi(K).$$

Karena K kompak, $\Psi(K)$ kompak dan $\Phi^{-1}(K)$ tutup. Akibatnya $\Phi^{-1}(K)$ kompak. Jadi Φ pemetaan proper. ∎