Penyelesaian Masalah Strum-Liouville dengan FEM dan FD

Proyek III : MA5173 Topik dalam Matematika Terapan

Kelvin Lois (20118005)
Program Studi Magister Matematika
Institut Teknologi Bandung

1 Juni 2021

PENGANTAR

Formulasi Masalah

Solusi FEM dan FD

- Masalah $\text{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}\}$, dengan $p(x) = 1$
- Masalah $\text{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}\}$, dengan $p(x) = 1 + x$
- Masalah $\text{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}^*\}$, dengan $p(x) = 1$
- Masalah $\text{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}^*\}$, dengan $p(x) = 1 + x$

Kesimpulan

FORMULASI MASALAH

Diberikan fungsional Sturm-Liouville

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^L \left[p(x)(\partial_x u(x))^2 + u^2 - 2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)u\right]dx,$$

dan ruang Affine

$$\mathcal{M} = \left\{u \in C^2([0,L]) \mid u(0) = u(L) = 0\right\},$$

$$\mathcal{M}^* = \left\{u \in C^2([0,L]) \mid u(0) = u_x(L) = 0\right\}.$$

(a) $\mathrm{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}\}$, dengan $p(x) = 1$.

(b) $\mathrm{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}\}$, dengan $p(x) = 1 + x$.

(c) $\mathrm{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}^*\}$, dengan $p(x) = 1$.

(d) $\mathrm{crit}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}^*\}$, dengan $p(x) = 1 + x$.

MASALAH CRIT$_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}\}$, DENGAN $p(x) = 1$

Dengan metode beda hingga (FD), kita hampiri $-u_{xx} + u = f$ pada titik-titik grid

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_i = ih < \cdots < x_{n-1} < x_n = L.$$

Dengan

$$u_{xx}(x) \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2};\ h = \frac{L}{n}.$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan $AU = F$, dengan

$$U = [U_1 \ \cdots \ U_{n-1}]^T,\ U_i = U(x_i)$$

dan

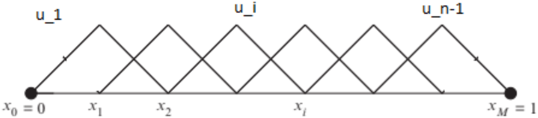
$$F = [sin(\pi x_1/L) \ \cdots \ sin(\pi x_{n-1}/L)]^T$$

dan matrix A adalah

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 \end{bmatrix}$$

SOLUSI FEM UNTUK CRIT$_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}\}$, DENGAN $p(x) = 1$

Bentuk lemah $-u_{xx} + u = f$ adalah $\int_0^L u'v' + uvdx = \int_0^L fvdx$. Dengan pemilihan partisi dan fungsi basis berikut



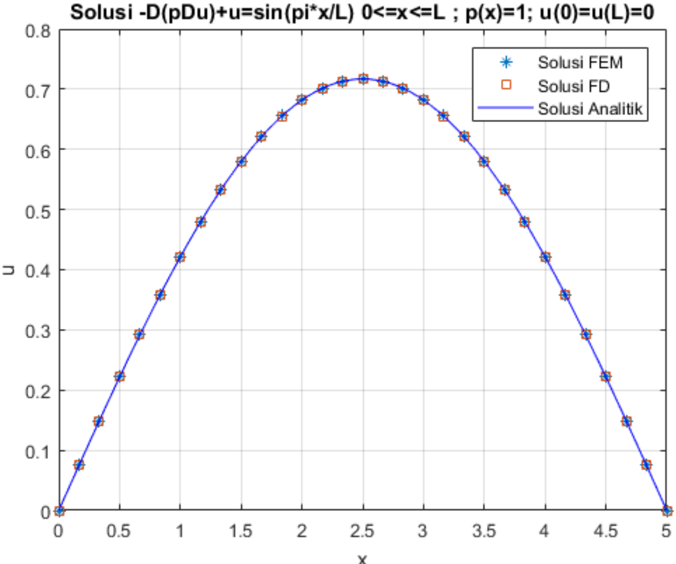
Kita hampiri $u(x)$ dengan $u_h = \sum_1^{n-1} C_i u_i$. Dari bentuk lemah peroleh sistem persamaan $AC = F$, dengan $C = [C_1 \ \cdots \ C_{n-1}]^T$, dan

$$F = [F_1 \ \cdots \ F_{n-1}],\ F_i = \int_0^L f u_i dx$$

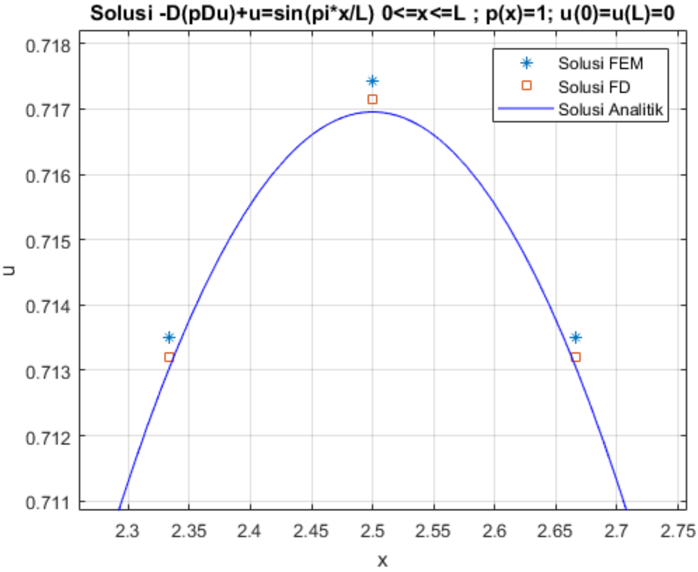
dan bentuk eksplisit matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h \end{bmatrix}$$

Hasil plot solusi FEM dan FD bersamaan dengan solusi analitiknya (Parameter : $L = 5$ dan $n = 30$)



Kurva Solusi Numerik (a)

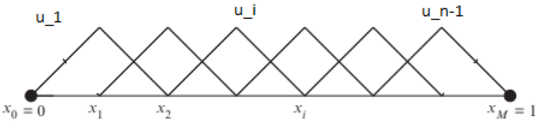


MASALAH $\text{CRIT}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}\}, p(x) = 1 + x$

Persamaan Euler-Lagrangenya dan bentuk lemahnya adalah

$$-\partial_x(p(x)\partial_x u) + u = f \Rightarrow \int_0^L (pu'v' + uv)dx = \int_0^L fv dx.$$

Dengan pemilihan partisi dan fungsi basis berikut



Kita hampiri solusi analitik dengan $\sum_0^{n-1} C_i u_i$. Sehingga diperoleh sistem persamaan $AC = F$ dengan

$$A_{ij} = \int_0^L (pu_i'u_j' + u_i u_j)dx.$$

Dengan aturan trapesium,

$$A_{ii} = \int_0^L (pu_i'u_i' + u_iu_i)dx \approx \frac{p(x_{i+1}) + p(x_{i-1}}{h} + \frac{2}{3}h$$

$$A_{i(i+1)} \approx -\frac{p(x_i) + p(x_{i+1})}{2h} + \frac{h}{6},$$

dan $A_{ij} = 0$ untuk $|i - j| \geq 2$.
Dengan $p(x) = 1 + x$, kita peroleh bentuk eksplisit A sebagai

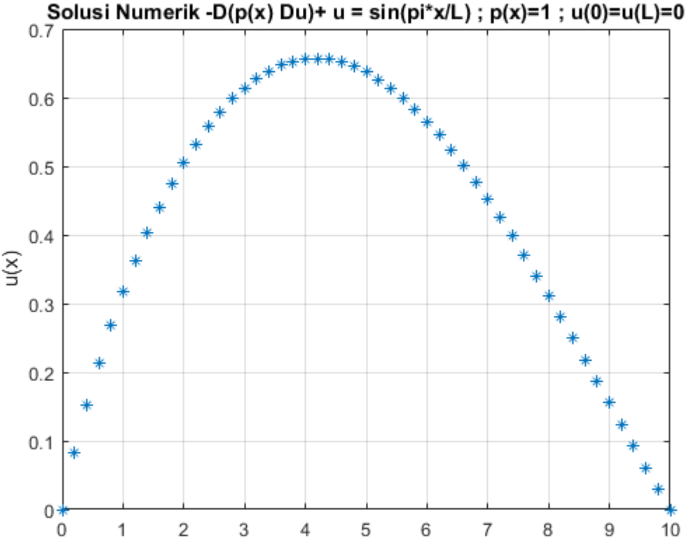
$$A_{ii} = \frac{2}{3}h + \frac{2}{h} + 2i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$A_{i(i+1)} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} - \frac{2i+1}{2}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Berikut merupakan hasil plot solusi FEM pada titik-titik grid.

KURVA SOLUSI FD (B)

Parameter : $L = 10$ dan $n = 50$



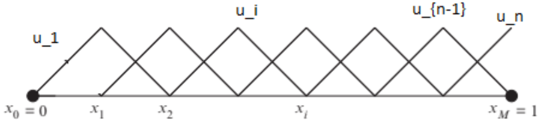
MASALAH $\text{CRIT}_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}^*\}, p(x) = 1$

Persamaan Euler-Lagrange : $-\partial_x(p\partial_x u) + u = f \Rightarrow -u'' + u = f$.

- Solusi Metode Elemen Hingga (FEM) Bentuk lemah persamaan diatas

$$\int_0^L (u'v' + uv)dx = \int_0^L fvdx.$$

Dengan pemilihan partisi $h = L/n$ dan fungsi basis sebagai berikut



hampiran solusi $u(x)$ adalah $\sum_0^n C_i u_i$. Sehingga dari bentuk lemah kita peroleh sistem persamaan $AC = F$ dengan

$$C = [C_1 \cdots C_n]^T, \quad F = [F_1 \cdots F_n]^T; F_i = \int_0^L fu_i dx.$$

Bentuk eksplisit matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2}{3}h & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{1}{h}+\frac{1}{3}h \end{bmatrix}$$

- Solusi Numerik dengan Metode Beda Hingga (FD)
  Sama seperti sebelumnya, kita partisikan $[0, L]$ menjadi

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L, \quad x_i = ih.$$

Kemudian hampiri $u_{xx}(x) \approx \frac{u(x-h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2}$. Tetapi karena ruang Afin yang digunakan adalah $\mathcal{M}^*$, maka $U_n = u(x_n) \neq 0$ seperti sebelumnya. Dengan **Ghost point method**,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L < x_{n+1} = L + h.$$

Diperoleh persamaan tambahan $-u''(x_n) + u(x_n) = f(x_n)$

$$-\frac{U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1}}{h^2} + U_n = f_n$$

dan

$$u'(x_n) = u'(L) = 0 \approx \frac{U_{n+1} - U_n}{h} = 0$$

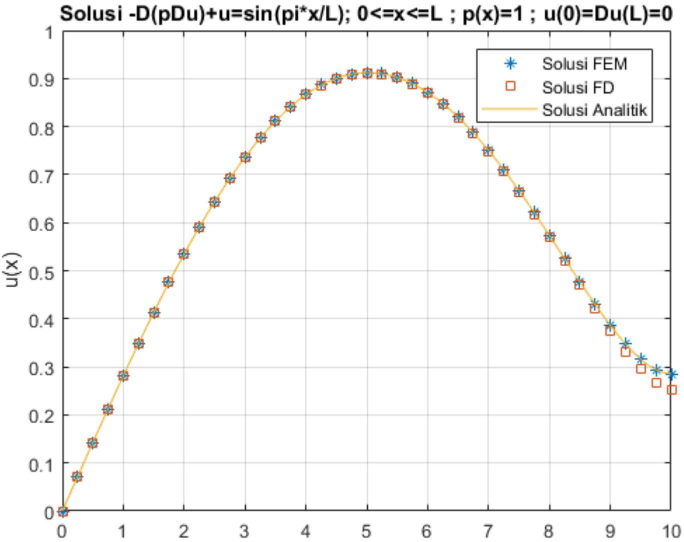
Diperoleh persamaan $AU = F$ dengan $U = [U_1 \cdots U_n]^T$ dan $F = [f(x_1), \cdots f(x_n)]^T$, dan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & {\color{red}\frac{1}{h^2}+1} \end{bmatrix}$$

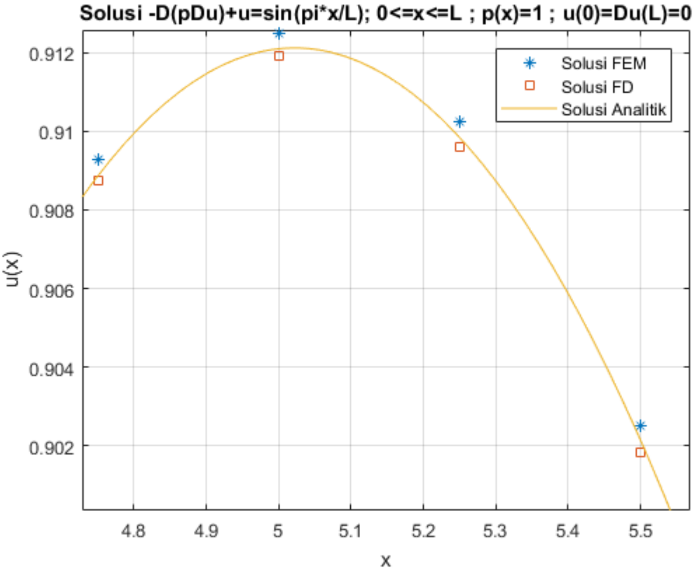
Berikut merupakan hasil plot solusi FEM dan FD bersamaan dengan solusi analitiknya.

Kurva Solusi FEM dan FD (c)

Parameter : $L = 10, n = 40$



KURVA SOLUSI FEM DAN FD (C)

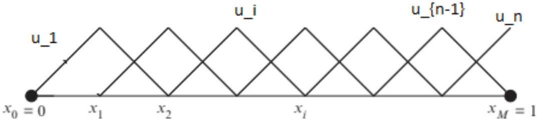


MASALAH CRIT$_u = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in \mathcal{M}^*\}, p(x) = 1 + x$

Persamaan Euler-Lagrange dan bentuk lemahnya adalah

$$-\partial_x(p(x)\partial_x u) + u = f \Rightarrow \int_0^L (pu'v' + uv)dx = \int_0^L fv dx.$$

Dengan pemilihan partisi dan fungsi basis berikut



Kita hampiri solusi analitik dengan $\sum_0^n C_i u_i$. Sehingga diperoleh sistem persamaan $AC = F$ dengan

$$A_{ij} = \int_0^L (pu_i'u_j' + u_i u_j)dx, \quad F_i = \int_0^L f u_i dx, \quad C = [C_i]$$

Dengan aturan trapesium,

$$A_{ii} = \int_0^L (pu_i'u_i' + u_iu_i)dx \approx \frac{p(x_{i+1}) + p(x_{i-1}}{h} + \frac{2}{3}h,\ i = 1, \ldots, n-1$$

$$A_{i(i+1)} \approx -\frac{p(x_i) + p(x_{i+1})}{2h} + \frac{h}{6},\ i = 1, \ldots, n-1$$

$$A_{nn} = \int_0^L pu_n'u_n' + u_nu_ndx \approx \frac{1}{h} + \frac{h}{3} + \frac{2n-1}{2}$$

dan $A_{ij} = 0$ untuk $|i-j| \geq 2$.
Dengan $p(x) = 1 + x$, kita peroleh bentuk eksplisit A sebagai

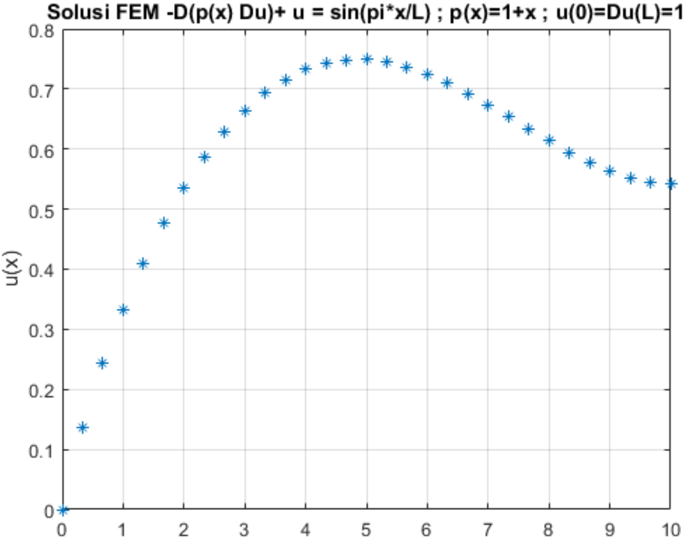
$$A_{ii} = \frac{2}{3}h + \frac{2}{h} + 2i, \quad A_{nn} = \frac{1}{h} + \frac{h}{3} + \frac{2n-1}{2}$$

$$A_{i(i+1)} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} - \frac{2i+1}{2}.$$

Berikut merupakan hasil plot solusi FEM pada titik-titik grid.

Kurva Solusi Numerik FEM (d)

Parameter : $L = 10$ dan $n = 30$.



KESIMPULAN

- Untuk kedua masalah yang diselesaikan dengan FEM dan FD, kita simpulkan solusi FD menghampiri solusi analitik dengan lebih baik.
- Solusi numerik dengan FEM maupun FD untuk masalah Sturm-Loiuville menghampiri solusi analitik dengan cukup baik.

Terima Kasih