16/05/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

HER GRUPTAN SADECE 1 (BİR) ADET SORUYU CEVAPLAYINIZ

---

1. $y = xp^2 + p^3$ denkleminin çözümlerini bulunuz. $\left(p = \dfrac{dy}{dx}\right)$

2. $xy' = 2\left(y - \sqrt{xy}\right)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

---

3. $y'' + 4y = \cos ec2x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. Karakteristik denkleminin kökleri $1,1,0,0,2 \mp 3i$ olan homojen olmayan sabit katsayılı denkleme ilişkin $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = x^2e^{2x}\cos 3x$ olarak veriliyor. y_p özel çözümünün nasıl seçilmesi gerektiğini belirtiniz. (Katsayıları bulmaya çalışmayınız.)

---

5. $y'' + y' + xy = 0$ denkleminin $x = 0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

6. $\begin{array}{l} y'' + 2y' + y = 3xe^{-x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{array}$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

---

7. $\begin{array}{l} x' = x - 4y \\ y' = x + y \end{array}$ sistemini yok etme yöntemi yardımıyla çözünüz.

8. $\begin{array}{l} x' + y = e^{2t} \\ y' + x = 0 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{array}$ sisteminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y = xp^2 + p^3$ (Lagrange)

x'e göre türev alalım

$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$$ 5

$$p - p^2 = (2px + 3p^2)\frac{dp}{dx} \qquad p - p^2 \neq 0 \quad \text{ol. ur}$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{3p}{1-p} \quad \text{(lineer)}$$ 5

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2} \\ y = xp^2 + p^3 \end{cases}$$

Parametrik gösterim 10

$p - p^2 = 0 \Rightarrow p = 0, \ p = 1$ olup sırasıyla $y = 0$ ve $y = x + 1$ 5

Aykırı çözümlerdir

---

2) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2\sqrt{x}}{x}y^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Bernoulli)} \qquad y^{\frac{1}{2}} = u \text{ ile}$$ 10

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\sqrt{x}}{x} \quad \text{(lineer)} \qquad \lambda = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$u = 2\sqrt{x} + cx$$ 10 $$\Rightarrow \boxed{y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + cx}$$ 5

3) $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$ $\qquad r^2 + 4 = 0 \qquad r = \mp 2i$ 5

$\boxed{y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}$ 5

$y_p = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x$

$$c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0 \quad 5 \qquad c_1' = -\frac{1}{2}$$

$$-2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x = \operatorname{cosec} 2x \qquad c_2' = \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}x \qquad c_2 = \frac{1}{4}\ln \sin 2x$$

$$y_p = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln \sin 2x \quad 5$$

$$y_g = y_h + y_p \quad 5$$

4) $1, 1, 0, 0, 2 \mp 3i$ $\qquad f(x) = x^2 e^{2x} \cos 3x$

$$y_h = \underbrace{c_1 e^x + c_1 x e^x}_{5} + \underbrace{c_3 + c_4 x}_{5} + \underbrace{e^{2x}\left[c_5 \cos 3x + c_6 \sin 3x\right]}_{5}$$

$$y_p = \underbrace{x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}\cos 3x}_{5} + \underbrace{x(Dx^2 + Ex + F)e^{2x}\sin 3x}_{5}$$

5) $y'' + y' + xy = 0$ $\quad x=0$ adi nokta.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad 5 \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$2a_2 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} \right\} x^n = 0 \quad 10$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1 \qquad a_{n+2} = -\frac{(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_3 = \frac{a_1 - a_0}{6} \qquad a_4 = \frac{a_0 - 3a_1}{24} \quad 5$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{a_1 - a_0}{6} x^3 + \frac{a_0 - 3a_1}{24} x^4 + \cdots$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{24} x^4 + \cdots\right) \quad 5$$

---

6) $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}$ $\qquad y(0) = y'(0) = 0$

$$5 \quad s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 2\left[sY(s) - \cancel{y(0)}\right] + Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$(s^2 + 2s + 1) Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{3}{(s+1)^4}} \quad 10$$

$$y(x) = L^{-1}\left\{ \frac{3}{(s+1)^4} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{2} x^3 e^{-x}} \quad 10$$

7) $(D-1)x + 4y = 0$

$(D-1) / \; (D-1)y - x = 0$

$4y + (D-1)^2 y = 0 \Rightarrow \quad y'' - 2y' + 5y = 0$ 5

$r^2 - 2r + 5 = 0 \qquad (r-1)^2 = -4 \qquad r - 1 = \mp 2i$ 5

$r = 1 \mp 2i$

$$\boxed{y = e^{t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)}$$ 5

$$\boxed{x = y' - y = e^{t}\left[-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t\right]}$$ 10

8) $x' + y = e^{2t} \qquad x(0) = y(0) = 0$

$y' + x = 0$

$sX(s) - x(0) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$ 5

$sY(s) - y(0) + X(s) = 0$

$sX(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$

$X(s) + sY(s) = 0$

$$\boxed{X(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)(s-2)}}$$ 5

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-2}$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}}$$ 5

$$y = e^{2t} - x' = e^{2t} - \left[-\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}\right]$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}}$$ 10