Riccati Diferensiyel Denklemi

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

şeklindeki dif. denkleme "Riccati Dif. Denk." denir.

$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ x in fonk.larıdır. $P \neq 0$ dır.

1) Riccati denkleminin bir özel çözümü bilinirse denklemin çözümü bulunabilir.

$y = y_1 + \frac{1}{u}$ dönüşümü ile Riccati denklemi lineer forma dönüşür.

2) Riccati denkleminin iki özel çözümü biliniyorsa genel çözüm bir integralle bulunabilir.

$y' + Py^2 + Qy + R = 0$ y_1 özel çözüm old.dan

$y_1' + Py_1^2 + Qy_1 + R = 0$

$$y' - y_1' + P(y^2 - y_1^2) + Q(y - y_1) = 0$$

$$\frac{(y-y_1)'}{y-y_1} + P(y+y_1) + Q = 0 \quad -(1)$$

y_2 özel çöz old.dan

$$\frac{(y-y_2)'}{y-y_2} + P(y+y_2) + Q = 0 \quad -(2)$$

(1) den (2) yi çıkaralım.

$$\frac{(y-y_1)'}{y-y_1} - \frac{(y-y_2)'}{y-y_2} + P(y_1-y_2) = 0 \quad -(3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln \frac{y-y_1}{y-y_2} = -\int P(y_1-y_2)\,dx + c}$$

3) Üç özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümü doğrudan yazılabilir. y_1, y_2, y_3 üç özel çözüm olsun.

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} = c \exp \int -P(y_1-y_2)\,dx$$

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = c_1 \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

Buradan $\boxed{\dfrac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)} = c}$

4) Dört özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümlerinin çifte oranı sabittir.

$$\frac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)} = c \Rightarrow \frac{(y_4-y_1)}{(y_4-y_2)} : \frac{(y_3-y_1)}{(y_3-y_2)} = c$$

5) y_1, y_2, y_3 gibi üç özel çözüm biliniyorsa

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

$$y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$$

$$y_2' = P(x)y_2^2 + Q(x)y_2 + R(x)$$

$$y_3' = P(x)y_3^2 + Q(x)y_3 + R(x)$$

yazılabilir. Bu dört denklem arasından $P(x), Q(x) R(x)$ yok edilirse Riccati denk. teşkil edilmiş olur

$$\begin{vmatrix} y' & y^2 & y & 1 \\ y_1' & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2' & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3' & y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

determinantı ile bu işlem kolaylıkla yapılır.

6) Katsayıları sabit olan bir Riccati dif. denkleminin çözümü kolaylıkla bulunabilir.

$y' + ay^2 + by + c = 0$ a, b, c sabit.

$ak^2 + bk + c = 0$, k_1, k_2 gibi iki kök varsa Riccati dif. denkleminin iki özel çözümü vardır. Bir kök varsa bir özel çözüm vardır.

7) Eğer özel çözüm verilmemişse

$y=a$, $y=ax+b$, $y=ax^2+bx+c$, $y=e^{ax}$, $y=x^n$, $y=ax^n+b$

$y=\sin ax$, $y=\cos ax$ gibi çözümler aranır.

Soru: Aş. dif. denklemlerin çözümlerini bulunuz.

1) $y'+y^2-y-2=0$

2) $(1-x^3)y'-y^2+x^2y+2x=0$

3) $(1-\sin x\cos x)y'+(\cos x)y^2-y+\sin x=0$ $y=\cos x$ özel çözüm

4) $y'-x^2y^2-2xy=0$

Çözüm: 1) $y'+y^2-y-2=0$ $y=a$ bir bir çöz arayalım

$y=a \Rightarrow y'=0$

$0+a^2-a-2=0$ $a_1=-1$ $a_2=2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y_1=-1$ $y_2=2$ iki özel çözüm var

$$\ln\frac{y+1}{y-2}=\int 1(3)\,dx+\ln c$$

$$\ln\frac{y+1}{y-2}=3x+\ln c \Rightarrow \frac{y+1}{c(y-2)}=e^{3x}$$

+2) $(1-x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0$

$$y' - \frac{1}{1-x^3}y^2 + \frac{x^2}{1-x^3}y + \frac{2x}{1-x^3} = 0$$

$y = ax^2$ biç. bir çöz arayalım

$y' = 2ax \qquad (1-x^3)(2ax) - a^2x^4 + x^2ax^2 + 2x = 0$

$$(-2a - a^2 + a)x^4 + (2a+2)x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -2a - a^2 + a = 0 \Rightarrow a = 0, -1 \\ 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{array}\right\} a = -1$$

$y_1 = -x^2$ bir özel çözümdür

$y = -x^2 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -2x - \frac{u'}{u^2}$ (denklemde yerine koyalım)

$u' + \frac{3x^2}{x^3-1}u = \frac{1}{x^3-1}$ (lineer)

$u = \frac{x+c}{x^3-1}$. dolayısıyla

$\boxed{y = -x^2 + \frac{x^3-1}{x+c}}$ denklemin genel çözümüdür.

3) $(1-\sin x\cos x)y' + (\cos x)y^2 - y + \sin x = 0$; $y = \cos x$

$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = \cos x + \frac{1}{u}$ dönüşümünü yapalım.

$y' = -\sin x - \frac{u'}{u^2}$ Denklemde yerine koyalım

$$u' + \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x\cos x - 1} u = -\frac{\cos x}{\sin x\cos x - 1} \quad (\text{lineer})$$

Buradan $u = \frac{-\sin x + c}{\sin x\cos x - 1} \Rightarrow \boxed{y = \cos x + \frac{\sin x\cos x - 1}{-\sin x} + c}$

+ 4) $y' - x^2 - y^2 - 2xy = 0$

$y' = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow y' = (x+y)^2$

$x + y = z$

$1 + y' = z'$

$\Rightarrow y' = z' - 1$

$z' - 1 = z^2 \Rightarrow z' = z^2 + 1$

$\Rightarrow \frac{dz}{1+z^2} = dx \Rightarrow \arctan z = x + c$

$\Rightarrow \boxed{\arctan(x+y) = x + c}$

+ **Soru:** $y' + y^2 + \frac{1}{x} y - \frac{4}{x^2} = 0$ dif. denkleminin

bir özel çözümü $y_1 = \frac{2}{x}$ ise genel çöz. bulunuz

Çözüm: $y = y_1 + \frac{1}{u}$ dönüşümünü uygulayalım

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$ değerini denklemde yerine yazalım

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow u' - \frac{5}{x} u - 1 = 0$$ (lineer) denklemini elde ederiz

$$\lambda = e^{-\int \frac{5}{x} dx} = \frac{1}{x^5}$$

$$\frac{1}{x^5} u = \int \frac{1}{x^5} dx + c \Rightarrow \frac{u}{x^5} = \frac{1}{4x^4} + c$$

$$\Rightarrow u = \frac{x}{4} + cx^5$$

$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$ da $u = \frac{x}{4} + cx^5$ yazılırsa

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{x}{4} + cx^5} = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 4cx^5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x + 8cx^5 + 4x}{x(x + 4cx^5)} = \frac{6x + c_1 x^5}{x^2 + c_2 x^6}$$

genel çözümü bulunur

Soru: $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$, $y_1 = x$ özel çözümü bilindiğine genel çözümü bulunuz

Çözüm: $y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = x + \frac{1}{u}$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - 2x\left(x + \frac{1}{u}\right) + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2x}{u}} + \frac{1}{u^2} - 2\cancel{x^2} - \cancel{\frac{2x}{u}} + \cancel{x^2} + 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = \frac{1 + u^2}{u^2} \Rightarrow \cancel{u^2} - u' = \cancel{u^2} + 1$$

$$\Rightarrow u' = -1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1$$

$$\Rightarrow u = -x + c$$

$$y = x + \frac{1}{c - x} = \frac{cx - x^2 + 1}{c - x}$$

olup $\boxed{y = \frac{1 - x^2 + cx}{c - x}}$

genel çözümü bulunur.