

**Sakarya Üniversitesi**  
**Bilgisayar Mühendisliği**  
BSM307 İşaretler ve Sistemler  
Örnek Ara Sınav Soruları

1.  $a(n) = (0, 2)^n u(n)$  ve  $b(n) = (0, 4)^n u(n)$  işaretleri için,  $c(n) = a(n) * b(n)$  konvolüsyon toplamını bulunuz.

$$\rightarrow c(n) = 2(0, 4)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) u(n)$$

2. Birim darbe cevabı  $h(n) = u(n)$  olarak verilen sistemin  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$  işaretine olan cevabı  $y(n)$ 'yi konvolüsyon ile bulunuz.

$$\rightarrow y(n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u(n-1)$$

3. Birim darbe cevabı  $h(n) = (-1)^n u(n)$  şeklinde verilen doğrusal zamanla değişmeyen sistemin  $x(n) = u(n) - u(n-3)$  işaretine cevabı  $y(n)$ 'yi hesaplayınız.

4.  $n \geq 0$  için fark denklemi  $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$  olarak verilen sistemin  $y(-1) = 1$  ve  $y(-2) = 0$  başlangıç koşulları ile  $x(n) = u(n)$  işaretine olan toplam çözümünü bulun.

$$\rightarrow y_t(n) = \left(3 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right) u(n)$$

5.  $n \geq 0$  için fark denklemi  $y(n) = y(n-1) + x(n)$  olarak verilen sistemin  $y(-1) = 1$  başlangıç koşulu ile  $x(n) = u(n)$  işaretine olan toplam çözümünü bulunuz.

$$\rightarrow y_t(n) = (2 + n)u(n)$$

6. Fark denklemi  $y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n)$  olarak verilen sistemin  $y(-1) = y(-2) = 0$  başlangıç koşulları ile  $x(n) = u(n)$  işaretine cevabın

a. Doğal çözümünü

$$\rightarrow y_d(n) = 0$$

b. Zorlanmış çözümünü bulunuz.

$$\rightarrow y_z(n) = (n2^{n+1} + 1) u(n)$$

c. Toplam çözümünü bulunuz.

$$\rightarrow y_t(n) = y_d(n) + y_z(n) = (n2^{n+1} + 1) u(n)$$

7. Fark denklemi  $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n) + x(n-1)$  olarak verilen ikinci derece sistemin birim darbe cevabı  $h(n)$ 'yi bulunuz.

$$\rightarrow h(n) = (1 + 2n)u(n)$$

8.  $n \geq 0$  için  $y(n) - 4y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-2)$  fark denklemi ile ifade edilen sistemin birim darbe cevabı  $h(n)$ 'yi bulunuz.

9.  $n \geq 0$  için  $y(n) - y(n-2) = x(n-1)$  fark denklemi ile ifade edilen sistemin durum denklemlerini bulunuz.

10.  $x(n) = \begin{cases} n & , 0 \leq n \leq N-1 \\ N & , N \leq n \end{cases}$  olarak veriliyorsa  $X(z)$ 'yi bulun.  
 $\rightarrow X(z) = \frac{z^{-1}(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2}$  ve  $|z| > 1$

11.  $x(n) = (-1)^n(2)^{-n}u(n)$  işaretinin  $z$ -dönüşümünü bulun.

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \text{ ve } |z| > \frac{1}{2}$$

12.  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n+1)$  işaretinin  $z$ -dönüşümünü yakınsama bölgesi ile birlikte bulunuz.

13. Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin  $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + (2)^n u(-n-1)$  işaretine olan cevabı  $y(n) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$  olduğu veriliyorsa.

a. Sistemin transfer fonksiyonu  $H(z)$ 'yi yakınsama bölgesi ile bulun.

$$\rightarrow H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \text{ ve } |z| > \frac{2}{3}$$

b. Sistemin birim darbe cevabı  $h(n)$ 'yi yazın.

$$\rightarrow h(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (u(n) - 3u(n-1))$$

c. Sistemin fark denklemi olarak ifadesini yazın.

$$\rightarrow y(n) - \frac{2}{3}y(n-1) = x(n) - 2x(n-1)$$

14. Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin  $x(n) = u(n)$  işaretine olan cevabı  $y(n) = nu(n)$  olduğu veriliyorsa

a. Sistemin transfer fonksiyonu  $H(z)$ 'yi yakınsama bölgesi ile bulunuz.

$$\rightarrow H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} |z| > 1$$

b. Sistemin birim darbe cevabı  $h(n)$ 'yi yazınız.

$$\rightarrow h(n) = u(n-1)$$

c. Sistemin fark denklemi olarak ifadesini yazınız.

$$\rightarrow y(n) - y(n-1) = x(n-1)$$

d. Sistemin kararlı olup olmadığını nedeniyle birlikte açıklayınız.

$$\rightarrow \sum_n h(n) = \sum_n u(n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \text{ olduğu için kararsızdır.}$$

e. Sistemin nedensel olup olmadığını nedeniyle birlikte açıklayınız.

$$\rightarrow n < 0 \text{ iken } h(n) = 0 \text{ olduğundan nedensel.}$$

15.  $y(n) = ay(n-1) + bx(n-1)$  fark denkleminin  $\sum_n h(n) = 1$  eşitliğini sağlaması için  $b$ 'nin

a cinsinden karşılığını yazınız.

$$\rightarrow b = 1 - a$$

16.  $x(n) = (n+1)a^n u(n-1)$  ayrık zaman işaretin  $z$ -dönüşümünü yakınsama bölgesi ile birlikte bulunuz.

$$\rightarrow X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} + \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}} = \frac{az^{-1}(2-az^{-1})}{(1-az^{-1})^2} \text{ ve } |z| > |a|$$

17. Soruda verilen sistemin transfer fonksiyonu  $H(z)$ 'yi ve yakınsama bölgesini bulunuz.

$$\rightarrow H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \text{ ve } |z| > 1$$

18. Giriş işaretinin  $z$  dönüşümü  $\frac{1}{5} < |z| < 3$  yakınsama bölgesi ile  $X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{5}z^{-1})(1+3z^{-1})}$  ve sistemin transfer fonksiyonu  $|z| > \frac{1}{3}$  yakınsama bölgesi ile  $H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$  olarak veriliyorsa. Çıkış işaretinin  $z$  dönüşümünü  $Y(z)$  yakınsama bölgesi ile birlikte belirleyin.

$$\rightarrow Y(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{5}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} \text{ ve } |z| > \frac{1}{3}$$

19. Birim impuls cevabı  $h(n) = (0,5)^n u(n)$  olarak verilen sistemin  $x(n) = \delta(n-3)$  işaretine olan cevabı  $y(n)$ 'i  $z$  dönüşümü kullanarak bulunuz.

$$\rightarrow y(n) = (0,5)^{n-3} u(n-3)$$

20.  $X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}$  ifadesinin ters  $z$ -dönüşümünü aşağıda verilen yakınsama bölgeleri için bulunuz.

a.  $1 < |z| < 2$

$$\rightarrow x(n) = \frac{1}{3} (u(n) + (-2)^n u(-n-1))$$

b.  $|z| > 2$

$$\rightarrow x(n) = \frac{1}{3} (1 - (-2)^n) u(n)$$

21. Yakınsama bölgesi  $1/2 < |z| < 2$  ile  $z$ -dönüşümü  $X(z) = \frac{\frac{3}{4}}{(1-\frac{1}{2}z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$  olarak verilen  $x(n)$  dizisini bulunuz.

$$\rightarrow x(n) = (2)^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

22.  $z$ -dönüşümü  $X(z) = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$  şeklinde verilen işaretin  $|z| \neq 0$  yakınsama bölgesi ile ters  $z$  dönüşümü olan  $x(n)$  ifadesini bulunuz.

$$\rightarrow x(n) = u(n) - u(n-5)$$

## Bazı Soruların Cevapları

1.  $a(n) = (0, 2)^n u(n)$

$$b(n) = (0, 4)^n u(n)$$

$$c(n) = a(n) * b(n) = ?$$

$$a(n) * b(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) \cdot b(n-k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (0, 2)^k \cdot (0, 4)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (0, 2)^k \cdot (0, 4)^n \cdot (0, 4)^{-k} = \sum_{k=0}^n (0, 2/0, 4)^k \cdot (0, 4)^n = (0, 4)^n \sum_{k=0}^n (0, 5)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \Rightarrow (0, 4)^n \sum_{k=0}^{\infty} (0, 5)^k = (0, 4)^n \frac{1-(0,5)^{n+1}}{1-0,5} = (0, 4)^n 2 (1 - (0, 5)^{n+1})$$

$$n < 0 \Rightarrow 0$$

$$n \geq 0 \Rightarrow (0, 4)^n 2 (1 - (0, 5)^{n+1}) \Rightarrow c(n) = 2(0, 4)^n (1 - (0, 5)^{n+1}) u(n)$$

6. a)

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) \quad y(-1) = y(-2) = 0 \quad x(n) = u(n)$$

$$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2} (\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$y_d = (c_1 + nc_2) \lambda^n = (c_1 + nc_2) 2^n$$

$$n = 0 \Rightarrow y(0) - 4y(-1) + 4y(-2) = 0 = (c_1 + 0.c_2) 2^0 = c_1$$

$$n = 1 \Rightarrow y(1) - 4y(0) + 4y(-1) = 0 \Rightarrow y(1) = 4y(0) = 0 = (c_1 + 1.c_2) 2^1 = 2(c_1 + c_2) = 2c_2$$

$$y_d = 0$$

b)

$$y_z = (c_3 + nc_4) 2^n + y_{\ddot{0}}$$

$$x(n) = u(n) \Rightarrow y_{\ddot{0}} = K \cdot u(n) \Rightarrow$$

$$Ku(n) - 4Ku(n-1) + 4Ku(n-2) = u(n) \Rightarrow K - 4K + 4K = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y_{\ddot{0}} = u(n)$$

$$y_z = (c_3 + nc_4) 2^n + u(n)$$

$$n = 0 \Rightarrow y(0) - 4y(-1) + 4y(-2) = x(0) = 1 = (c_3 + 0.c_4) 2^0 + u(0) = c_3 + 1 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$n = 1 \Rightarrow y(1) - 4y(0) + 4y(-1) = x(1) \Rightarrow y(1) = 4y(0) + x(1) = 4 + 1 = 5 = (c_3 + 1.c_4) 2^1 + u(1)$$

$$2(c_3 + c_4) + 1 \Rightarrow c_4 = 2$$

$$n < 0 \Rightarrow 0$$

$$n \geq 0 \Rightarrow n \cdot 2 \cdot 2^n + u(n) \Rightarrow y_z = n2^{n+1}u(n) + u(n) = (n2^{n+1} + 1) u(n)$$

7.  $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n) + x(n-1) \quad h(n) = ?$

$$y(n) = h(n) \Rightarrow x(n) = \delta(n) \Rightarrow$$

$$h(n) - 2h(n-1) + h(n-2) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2} (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$h(n) = (c_1 + nc_2) \lambda^n = c_1 + nc_2$$

$$n = 0 \Rightarrow h(0) - 2h(-1) + h(-2) = \delta(0) + \delta(-1) = 1 = c_1 + 0 \cdot c_2 = c_1 (n < 0 \Rightarrow h(n) = 0 \text{ ve } n \neq 0 \Rightarrow \delta(n) = 0)$$

$$n = 1 \Rightarrow h(1) - 2h(0) + h(-1) = \delta(1) + \delta(0) \Rightarrow h(1) = 2h(0) + \delta(0) = 2 + 1 = 3 = c_1 + 1 \cdot c_2 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2$$

$$n < 0 \Rightarrow 0$$

$$n \geq 0 \Rightarrow 1 + 2n \Rightarrow h(n) = (1 + 2n)u(n)$$

$$16. \quad x(n) = (n+1)a^n u(n-1) \quad X(Z) = ?$$

$$x(n) = na^n u(n-1) + a^n u(n-1)$$

$$x_1(n) = a^n u(n) \Rightarrow X_1(Z) = \frac{1}{1-aZ^{-1}}$$

$$x_2(n) = a^{n-1} u(n-1) \Rightarrow X_2(Z) = Z^{-1} X_1(Z) = \frac{Z^{-1}}{1-aZ^{-1}}$$

$$x_3(n) = a^n u(n-1) \Rightarrow X_3(Z) = aX_2(Z) = \frac{aZ^{-1}}{1-aZ^{-1}}$$

$$x_4(n) = nx_3(n) \Rightarrow -Z \frac{d}{dZ} X_3(Z) = -Z \frac{d}{dZ} \left( \frac{aZ^{-1}}{1-aZ^{-1}} \right) = -aZ \left( \frac{-Z^{-2}(1-aZ^{-1}) - aZ^{-2}Z^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2} \right)$$

$$= a \left( \frac{Z^{-1}(1-aZ^{-1}) + aZ^{-2}}{(1-aZ^{-1})^2} \right) = a \left( \frac{Z^{-1} - aZ^{-2} + aZ^{-2}}{(1-aZ^{-1})^2} \right) = \left( \frac{aZ^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2} \right)$$

$$X(Z) = \frac{aZ^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2} + \frac{aZ^{-1}}{1-aZ^{-1}}$$

$$|z| > |a|$$

$$17. \quad y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n) + x(n-1) \Rightarrow H(Z) = ?$$

$$Y(Z) = X(Z)H(Z) \Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \Rightarrow$$

$$Y(Z) - 2Z^{-1}Y(Z) + Z^{-2}Y(Z) = X(Z) + Z^{-1}X(Z)$$

$$Y(Z) (1 - 2Z^{-1} + Z^{-2}) = X(Z) (1 + Z^{-1}) \Rightarrow H(Z) = \frac{1+Z^{-1}}{1-2Z^{-1}+Z^{-2}} = \frac{1+Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$$

$$19. \quad h(n) = (0, 5)^n u(n)$$

$$x(n) = \delta(n-3)$$

$$y(n) = ?$$

$$Y(Z) = X(Z) \cdot H(Z)$$

$$X(Z) = Z^{-3} \quad H(Z) = \frac{1}{1-0,5Z^{-1}}$$

$$Y(Z) = Z^{-3} \frac{1}{1-0,5Z^{-1}} \Rightarrow y(n) = (0, 5)^{n-3} u(n-3)$$

$$20. \quad h(n) = (0, 5)^n u(n)$$

$$x(n) = \delta(n-3)$$

$$y(n) = ?$$

$$Y(Z) = X(Z) \cdot H(Z)$$

$$X(Z) = Z^{-3} \quad H(Z) = \frac{1}{1-0,5Z^{-1}}$$

$$Y(Z) = Z^{-3} \frac{1}{1-0,5Z^{-1}} \Rightarrow y(n) = (0,5)^{n-3} u(n-3)$$

$$\text{a) } 1 < |Z| < 2 \Rightarrow x(n) = \frac{1}{3} (u(n) + (-2)^n u(-n-1))$$

$$\text{b) } |z| > 2 \Rightarrow x(n) = \frac{1}{3} (u(n) - (-2)^n u(n))$$

$$\begin{aligned} 21. \quad \frac{1}{2} < |Z| < 2 \quad X(Z) &= \frac{Z^{\frac{3}{4}}}{(1-0,5Z)(1-0,5Z^{-1})} = \frac{Z^{\frac{3}{4}}}{-0,5Z(1-2Z^{-1})(1-0,5Z^{-1})} \\ &= -\frac{\frac{3}{2}Z^{-1}}{(1-2Z^{-1})(1-0,5Z^{-1})} = \frac{A}{1-2Z^{-1}} + \frac{B}{1-0,5Z^{-1}} \Rightarrow A+B=0 \text{ ve } 0,5A+2B=\frac{3}{2} \Rightarrow \\ B=1 \text{ ve } A=-1 &\Rightarrow X(Z) = -\frac{1}{1-2Z^{-1}} + \frac{1}{1-0,5Z^{-1}} \Rightarrow \\ x(n) &= 2^n u(-n-1) + (0,5)^n u(n) \end{aligned}$$

$$22. \quad X(Z) = \frac{1-Z^{-5}}{1-Z^{-1}} \quad |Z| > 1$$

$$X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} - \frac{Z^{-5}}{1-Z^{-1}} \Rightarrow x(n) = u(n) - u(n-5)$$