Şimdi bazı özel çözümlerin nasıl bulunabileceğini inceleyelim.

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ (1) denklemini

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2) şeklinde yazabiliriz.

$p = \dfrac{a_1}{a_2}$, $q = \dfrac{a_0}{a_2}$ $(a_2 \neq 0)$

i) $y = x$ (2) denkleminin çözümü olsaydı

$p(x) + x\,q(x) = 0$ olması gerekirdi.

Dolayısıyla (2) denkleminde $p(x) + x\,q(x) = 0$ ise $y = x$ bir özel çözümdür.

Eğer denklem (1) şeklinde ise bu durumda

$a_1(x) + a_0(x) \cdot x = 0$ ise $y = x$ özel çözümdür. Ayrıca mertebesi ne olursa olsun bir denklemde $xy' - y$ kalıbı varsa $y = x$ özel çözümdür.

ii) Eğer (1) denkleminde

$a_2 + a_1 + a_0 = 0$ ise $y = e^{x}$ özel

çözümdür. (Veya (2) de $1 + P + q = 0$ ise)

iii) $a_2 - a_1 + a_0 = 0$ ise $y = e^{-x}$ özel

çözümdür.

Ör $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin

bir özel çözümü $y_1 = x$ ise genel çöz. bulunuz

$$(1+x^2)y'' - 2(xy' - y) = 0$$

Veya $a_2 = 1 + x^2$ $a_1 = -2x$ $a_0 = 2$

$$a_1 + a_0 x = -2x + 2x = 0$$

$y = xu$ $y' = u + xu'$

$$y'' = u' + u' + xu'' = xu'' + 2u'$$

$$(1+x^2)(xu''+2u')-2x(u+xu')+2ux=0$$

elde edilir. Düzenleme yapılırsa

$$x(1+x^2)u''+(2+2x^2-2x^2)u'+\underbrace{(-2x+2x)}_{0}u=0$$

$$\Rightarrow \quad x(1+x^2)u''+2u'=0$$

$$u'=v \qquad u''=v'$$

$$x(1+x^2)v'+2v=0$$

$$\frac{dv}{v}+\frac{2}{x(1+x^2)}dx=0 \qquad \frac{2}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{dv}{v}+\left(\frac{2}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=0$$

$$\ln v+2\ln x-\ln(1+x^2)=\ln c_1$$

$$\boxed{v=\frac{c_1\cancel{x}(1+x^2)}{x^2}}$$

$$v = u' = \frac{c_1(1+x^2)}{x^2} = \frac{c_1}{x^2} + c_1$$

$$\Rightarrow \quad u = -\frac{c_1}{x} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow \quad u = c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2$$

$$y = xu \Rightarrow \boxed{y = c_1(x^2 - 1) + c_2 x}$$

Ör 7 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^x$ old göre genel çözümünü bulunuz

$y = e^x u \quad y' = e^x u' + e^x u \quad y'' = e^x u'' + 2e^x u' + e^x u$

$(x-1)\left[e^x u'' + 2e^x u' + e^x u\right] - x\left[e^x u' + e^x u\right] + e^x u = 0$

$e^x \left\{ (x-1)(u'' + 2u' + u) - x(u' + u) + u \right\} = 0$

$\Rightarrow (x-1)u'' + \left[2x - 2 - x\right]u' + \left[\underbrace{\cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{1}}_{0}\right]u = 0$

$\Rightarrow (x-1)u'' + (x-2)u' = 0$

$u' = v \quad u'' = v'$

$(x-1)v' + (x-2)v = 0$

$$\frac{dv}{v} + \frac{x-2}{x-1}dx = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) dx = 0$$

$$\ln v + x - \ln(x-1) = \ln c_1$$

$$\ln\left(\frac{v}{(x-1)c_1}\right) = -x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c_1(x-1)} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad v = c_1(x-1)e^{-x}$$

$$v = u' = c_1(x-1)e^{-x}$$

$$u = c_1 \int (x-1)e^{-x}\,dx \qquad \begin{array}{ll} x-1=u & e^{-x}dx = dv \\ dx = du & -e^{-x} = v \end{array}$$

$$u = c_1\left[(x-1)(-e^{-x}) + \int e^{-x}dx\right] + c_2$$

$$u = -c_1\left[(x-1)e^{-x} - e^{-x}\right] + c_2 = -c_1 x e^{-x} + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y = e^x u = e^x\left[-c_1 x e^{-x} + c_2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c_1 x + c_2 e^x}$$

3

Ör $\cancel{x}y'' + 2y' = 2x$ denk genel çöz bul

$y' = u \quad y'' = u'$

$xu' + 2u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 2$ lin

$\lambda = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$

$(x^2 u)' = 2x^2 \Rightarrow x^2 u = 2\frac{x^3}{3} + c_1$

$y' = u = \frac{2x}{3} + c_1 x^{-2}$

$\Rightarrow y = \int \left(\frac{2x}{3} + c_1 x^{-2}\right) dx + c_2$

$y = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2} - \frac{c_1}{x} + c_2 \cancel{x}$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{c_1}{x} + c_2 + \frac{x^2}{3}}$

10