SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Ayrık İşlemsel Yapılar

Hafta 10

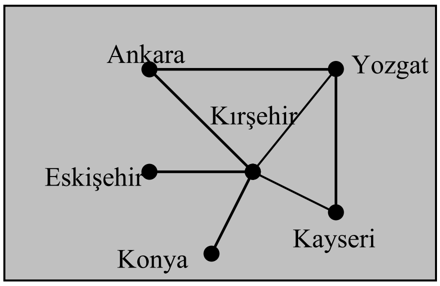
Doç.Dr. Nilüfer YURTAY

Not: Bu şekilde yazılanlar benim notlarımdır.

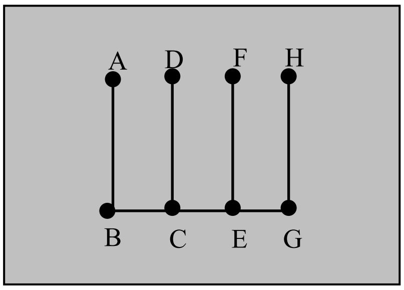
Graflar

10.1 Graflara Giriş

Objelerin durumunu ve aralarındaki bağıntıyı göstermek için diyagram çizmek oldukça yaygındır. Bu diyagramlarda elemanlar noktalar, aralarındaki bağıntılar da, noktalar arasını birleştiren çizgilerle temsil edilirler. Şekil 10.1 şehirlerarası bir yol haritasını göstermektedir. Bu yol haritasında şehirler noktalarla , bu şehirler arasındaki yollar çizgilerle temsil edilebilir.



Şekil 10.1 Yol haritası



Şekil 10.2 Bilgisayar ağı

Şekil 10.2'de A,B,C,D,E,F,G,H ile gösterilen bilgisayarların oluşturduğu ağ ve bunlar arasındaki bilgi akışı graf modeli ile gösterilmiştir.

> ***Tanım***
>
> *Bir graf , boş olmayan sonlu bir V kümesi ile V kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin bir E kümesinden oluşur. Burada V kümesinin elemanlarını köşeler (vertices) veE kümesinin elemanlarını da kenarlar (edges) oluşturmaktadır.*

Düğüm = Köşe = Nokta

Şekil 10.2'de A,B,C,D,E,F,G,H düğüm ve

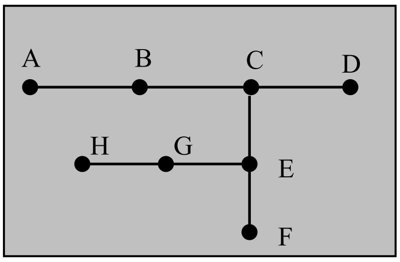
{A,B},{B,C},{C,D},{C,E},{E,F},{E,G},{G,H} kenarlardır. O halde bir graf , bir diyagramla ya da kümelerle tanımlanabilir.

Burada graf tanımında dikkat edilmesi gereken bazı noktalar bulunmaktadır. Bazı literatüre göre graf tanımında köşelerin sonlu bir küme olması gerekmez. Yine buradaki tanımda herhangi bir kenar aynı düğümü geri dönemez ve iki düğüm arasında farklı kenarlar olamaz.

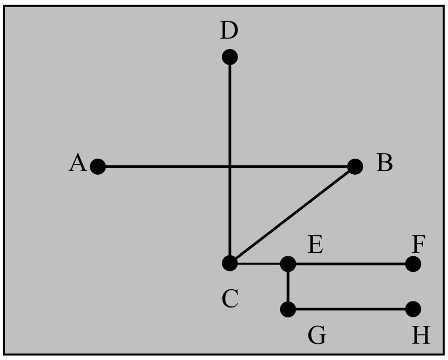
Not: Düğümler büyük harfler ile yazılır. Kenarlar küçük harfler ile yazılır.

e = {U,V} gösteriminde, e kenarının U ve V düğümlerini birleştirdiği anlaşılır. U ve V komşu köşelerdir. Ayrıca e kenarının U düğümüne ait olduğu (incident) ve U düğümünün e kenarına ait olduğu söylenir. Şekil 10.2 'ye göre A ,B köşeleri komşudur, A,D köşeleri ise aralarında bir kenar olmadığı için komşu değildir.

Aynı grafın farklı bir biçimde çizilmesi de mümkündür. Sadece düğümleri ve bağlantı biçimleri önemlidir. Örneğin şekil 10.3a'daki grafı şekil 10.3b'deki biçimde de çizebiliriz.



a

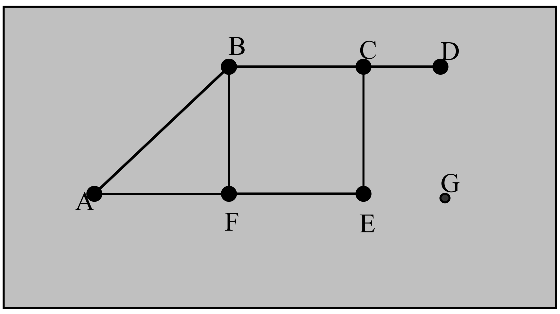


b

Şekil 10.3

Şekil 10.3(b)'de dikkat edilmesi gereken nokta, AB kenarı ile CD kenarının kesim noktasında yeni bir köşe düğümü olup olmadığıdır. Grafı mümkünse yanlış anlamaya neden olmayacak biçimde çizmek önemlidir. Bazı durumlarda böyle kesişmeler olmadan grafı çizmek çok zor olabilir. Bir grafta bir V düğümüne bağlı olan kenar sayısı V'nin derecesidir (degree of V) ve deg (V) ile gösterilir. Şekil 10.4'te verilen grafta her bir düğümün dereceleri;

Deg (A) =2, Deg (B) = 3, Deg (C) = 3, Deg (D) =1, Deg (E) =2, Deg (F) =3, Deg (G) =0 olacaktır.

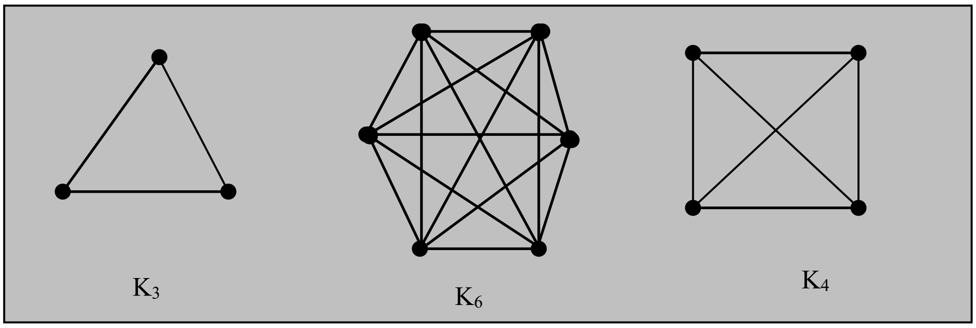


Şekil 10.4

Tanım

Bir grafta, n adet düğümün hepsi diğer düğümlerle bağlı ise bu grafa tam graftır denir. Böyle bir graf K_n ile gösterilir.

Şekil 10.5'de K_3 ,K_4 ve K_6 grafları gösterilmiştir.



Şekil 10.5

Tanım

Bir G(V,E) grafında, eğer V düğümleri boş olmayan kümelerin parçalı birleşimleri olarak ifade edilebiliyorsa G(V,E)'ye iki parçalı graf denir. $V=A\cup B$ ve her bir kenar {a,b} biçiminde olup $a\in A$ ve $b\in B$'dir. Eğer her $a\in A$ ve $b\in B$, $\{a,b\}\in E$ için, A, m düğüm ve B, n düğüm içeriyorsa parçalı grafa $K_{m,n}$ tam parçalı graf denir.

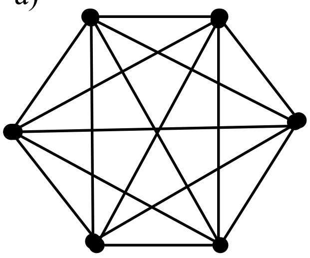
Not: A ve B diye kendi içlerinde kenar bağlantıları olmayan 2 tane düğüm kümesi var dersek; A'da bulunan herbir düğüm B'deki bütün düğümler ile bağlıysa buna tam parçalı graf denir.

Örnek 10.1

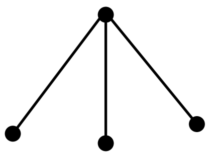
Aşağıdaki graf gösterimlerini çiziniz.

a)K_6 b)$K_{1,3}$ c)$K_{1,4}$ d)$K_{3,4}$

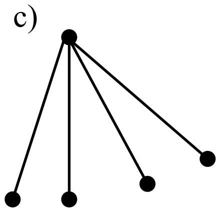
a)



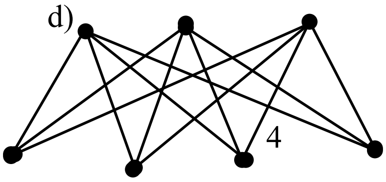
b)



c)



d)



Teorem

Bir grafta düğümlerin derecelerin toplamı , kenar sayılarının iki katına eşittir.

İspat

Her bir kenar iki düğüme bağlıdır. Buna göre toplam dereceyi hesaplarken bir kenarı iki kez göz önüne almış oluyoruz. Bu nedenle de toplam derece kenar sayısının iki katıdır.

10.2 Grafların Gösterilimi

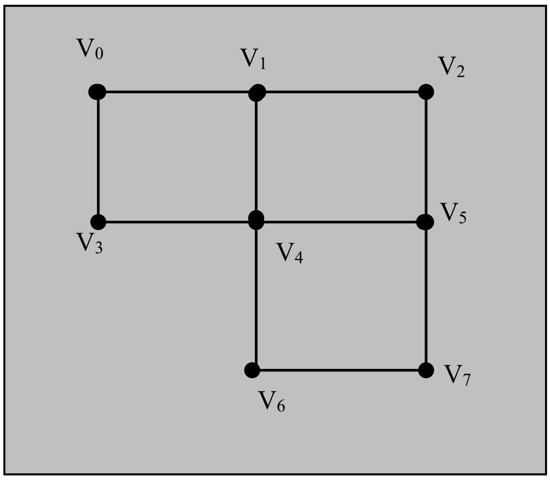
Komşuluk Matrisi Gösterimi

Komşuluk Listesi Gösterimi

10.2.1 Matris Gösterilimi

Bir grafın çok sayıda kenar ve düğüm içermesi durumunda graf işlemlerinin bilgisayarla yapılması daha uygun olacaktır. Grafı bilgisayarda temsil etmenin bir yolu, matris gösterimidir.

Bir G grafının $V_1,V_2,\ldots,V_n$ düğümleri olsun. Bu grafı bir nxn kare matrisi ile göstermek istersek V_i düğümü ile V_j düğümü arasında bir kenar varsa matrisin i,j elemanı 1, yoksa 0 olacaktır. Bu matrise G'nin komşuluk matrisi (adjacency matrix) denir ve A(G) ile gösterilir. Şekil 10.6a ve şekil 10.6b'de sırası ile G_1 ve G_2 grafları ve komşuluk matrisleri gösterilmiştir.

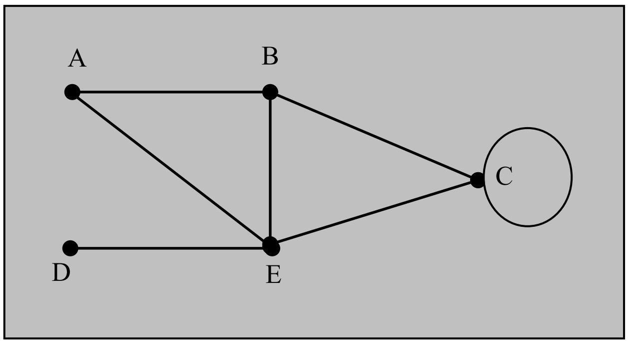


Şekil 10.6 (a) G_1 grafı

Komşuluk matrisi de aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 10.6 (b) G_2 grafı

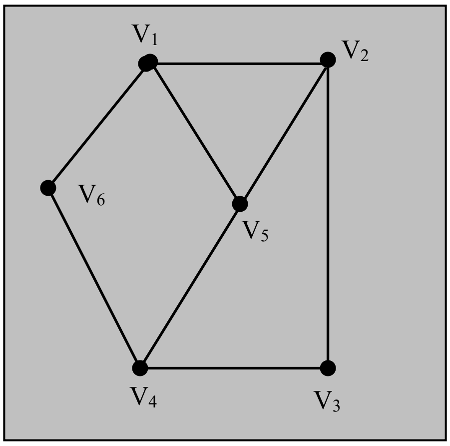
Graf matrisi incelendiğinde görüleceği gibi, $A(G_1)$ ‘in 2. Satırının elemanlarının toplamı 3 olup V_1 düğümünün derecesini göstermektedir.

Teorem

Bir grafın komşuluk matrisinin i. satır elemanlarının toplamı, V_i düğümünün derecesine eşittir.

10.2.2 Komşuluk listesi ile gösterim

Grafları bilgisayarda modellemek için farklı yöntemler de bulunmaktadır. Komşuluk matrisini oluşturmak zor olmadığı halde $n.n = n^2$ bir saklama alanı kullanmak, özellikle büyük n değerleri ve çok sayıda 0 elemanın olması halinde verimsiz bir yol almaktadır. Bu nedenle komşuluk listesi gösterilimi daha iyi olmaktadır. Komşuluk listesinde her bir düğüm ve ona komşu olan düğümler listelenir.Şekil 10.7 de örnek bir graf ile komşuluk listesi verilmiştir.



Şekil 10.7

V_1:V_2,V_5,V_6

V_2:V_1,V_3,V_5

V_3:V_2,V_4

V_4: V_3,V_5,V_6

V_5:V_1,V_2,V_4

V_6:V_1,V_4

Şekil 10.6a'daki G_1 grafının komşuluk listesi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

V_0:V_1,V_3

V_1:V_0,V_2,V_4

V_2:V_1,V_5

V_3:V_0,V_4

V_4:V_1,V_3,V_5,V_6

V_5:V_2,V_4,V_7

V_6:V_4,V_7

V_7:V_5,V_6

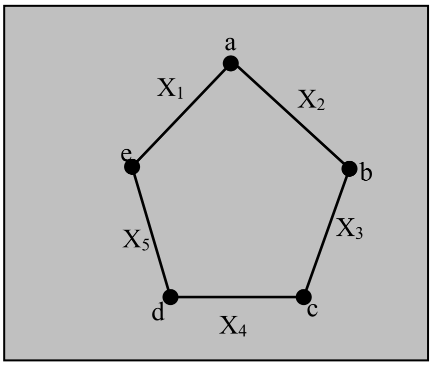
10.3 İzomorfizm

Tanım

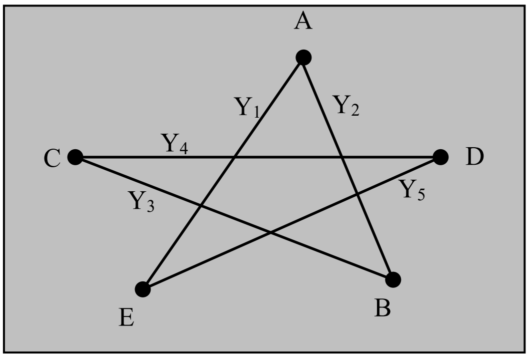
G_1 grafının düğümlerinden G_2 grafının düğümlerine bire-bir bir f fonksiyonu ve G_1'in kenarlarından G_2'nin kenarlarına bire-bir bir g fonksiyonu bulunuyorsa ve e kenarı G_1 grafındaki v ve w düğümlerine ait ise, ancak ve ancak g(e) kenarının f(v) ve f(w)'ya ait olması halinde G_1 ve G_2 grafları izomorfiktir denir. f ve g fonksiyonlarına ise G_1 ve G_2'nin izomorfizmi denir.

İki grafdaki düğüm sayısı ve bu düğümlerin dereceleri eşit ise bu iki graf birbirine eşittir. Yani bu graflar izomorfiktir.

Şekil 10.8a ve b'de verilen grafları ele alalım.



(a) G_1



(b) G_2

Şekil 10.8

Her iki grafta 5 düğüm ve 5 kenar bulunmaktadır. Şimdi yapmak istediğimiz, bu iki grafın birbirine eşdeğer olup olmadığını bulmaktır. Düğüm sayıları eşit olduğuna göre iki grafın düğümleri karşılıklı eşlersek, şöyleki ikinci (10.8b) yeniden (10.8a) daki düğüm biçiminde düğümleri yerleştirerek çizdiğimizde, birinci grafla aynı olduğunu görürüz (Şekil 10.9).

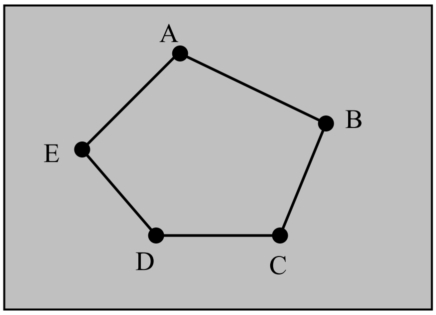
a – A

b – B

c – C

d – D

e – E



f(a)=A

f(b)=B

f(c)=C

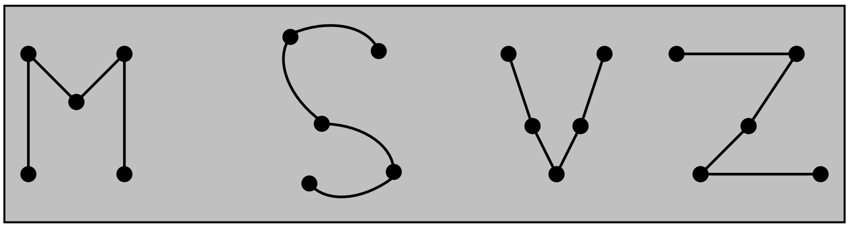
f(d)=D

f(e)=E

$g(x_i)=y_i$ i=1,...,5

Şekil 10.9

Aşağıdaki grafların hepsi izomorfiktir.



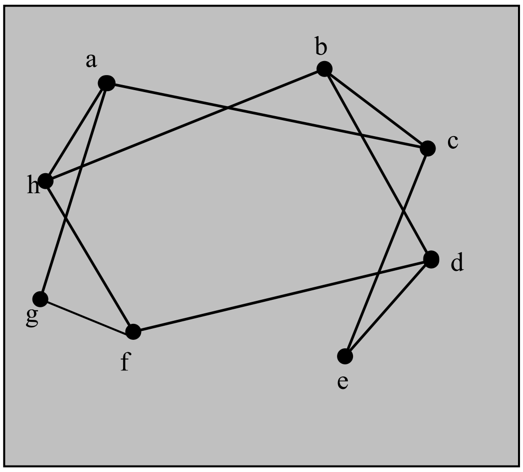
Teorem

G_1 ve G_2 grafları arasında bir f izomorfizmi varsa G_1 de ki herhangi bir V düğümü için

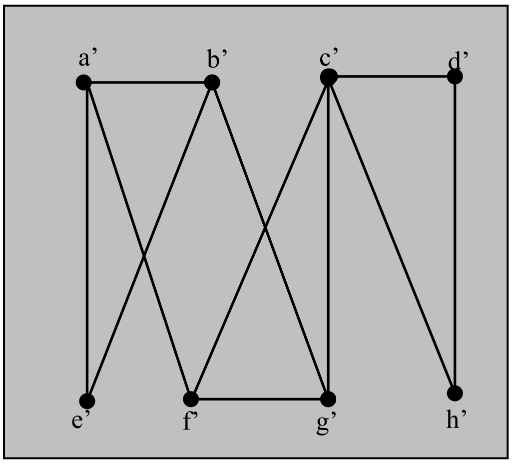
deg(V) = deg(f (v)) olmalıdır.

Düğüm sayıları ile bu düğümlerin dereceleri eşit ise zaten kenarları da eşit olacaktır. Çünkü iki grafın da derecelerinin toplamı eşit çıkacaktır ve kenar sayısı da düğüm derecelerinin toplamının yarısı olacağından kenar sayısı eşit çıkacaktır.

Buna göre iki graf arasında izomorfizmin var olması için düğüm sayıları ile kenar sayıları eşit olmalı ve her düğümün dereceleri de eşit olmalıdır.



Şekil 10.10 G_1 grafı



Şekil 10.11 G_2 grafı

G_1	G_2
Dugum sayisi = 8	Dugum sayisi = 8
Kenar sayisi = 10	Kenar sayisi = 10
deg(a)=3	deg(a')=3
deg(b)=3	deg(b')=3
deg(c)=3	deg(c')=4
deg(d)=3	deg(d')=2
deg(e)=2	deg(e')=2
deg(f)=3	deg(f')=3
deg(g)=2	deg(g')=3
deg(h)=3	deg(h')=2

G_2 grafında c' düğümünün derecesi 4'tür. Fakat G_1 grafında 4 dereceli düğüm yoktur. Bu yüzden G_1 ve G_2 izomorfik değildir.

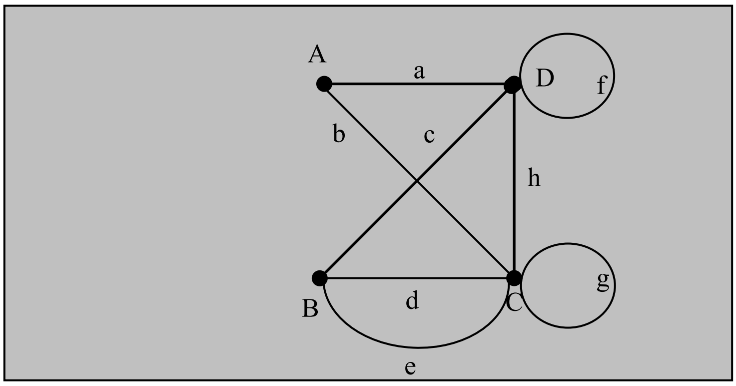
10.4 Yollar ve Halkalar (Paths And Circuits)

Graflar birçok durumu tanımlamak için kullanılabilmektedir. Çoğu zaman graf üzerinde bir düğümden başlayıp bir başka düğüme kenarları izleyerek gitmek isteriz. Bazı durumlarda graf üzerinde bir düğümden başlayıp bütün düğümleri dolaşabileceğimiz bir yolun olup olmadığını öğrenmek isteriz. Birçok olayın graflarla temsil etmek istediğimizde başlangıçta graf tanımında yasakladığımız , bir düğümün kendisine dönen bir kenarın olması , iki düğüm arasında birden fazla kenarın olması durumlarına izin vermeliyiz. Örneğin sehirlerarası yolları grafla gösterdiğimizde iki şehir arasında iki ayrı yol olabilir. Bu durumları tanımlayabilmek için graf kavramını genişletmemiz gerekecektir.

Tanım
Sonlu sayıda düğüm (V) ve kenar (E) kümesinden ve E'den $\{\{u,v\}|u,v\in V,u\neq v\}$'ye bir f fonksiyonundan oluşan G(V,E) grafına çoklu graf denir.

Bir çoklu graf (multi graph) sonlu sayıda düğüm ve kenar kümesinden oluşur. Bir çoklu grafta iki düğüm arasında birden fazla kenar olabildiği gibi (paralel kenarlar) bir düğümden çıkıp tekrar kendisine dönen kenarlar da (çevrim, loop) olabilir. Bu durumda graf, çoklu grafın bir özel durumu olup çoklu graf için yapılan tüm tanımlamalar graf içinde geçerli olacaktır.

Şekil 10.12'de bir çoklu graf gösterilmiştir. B ve C düğümleri arasında d,e paralel kenarları ve D düğümünde bir çevrim vardır.



Şekiil 10.12

Çoklu grafta bir düğüme bağlı kenar sayısı düğümün derecesidir ve deg (V) ile gösterilir. V düğümünde bir çevrim varsa derecesi iki olarak sayılır. Şekilde deg(B) = 3 , deg (C) = 6 dır.

Ayrık Düğüm: Hat bağlantısı olmayan düğümdür.

G bir çoklu graf , U ve V bu grafa ait düğümler olsun. U ve V in ayrık düğümler olması gerekli değildir. Bir U-V yolu (U-V path) ya da U dan V ye yol düğüm ve kenarların V_1, e_1, V_2 , e_2 .... V_n , e_n ,V_{n+1} biçimindeki bir alternatif dizisidir. Burada V_1 düğümü U düğümü , V_{n+1} ise V düğümüdür. e_i kenarı V_i ve V_{i+1} (i = 1,2....n) düğümlerini birleştiren kenardır. Bu yolun uzunluğu (length) n ise, yol üzerindeki kenarların sayısıdır. Bir U düğümünün kendisine olan yolun uzunluğu 0 dır.

Yol: Bir düğümden başka bir düğüme giderkenki güzergaha denir.

Şekil 10.12'de AaDcBdC yolu , A-C yolu olup uzunluğu olup uzunluğu 3 dür. Benzer biçimde acdg yolu da A-C yolu olup uzunluğu 4 olacaktır. AaDaA yolu 2 uzunluklu A'dan A'ya bir yoldur. BdC yolu sadece

Yol 3 farklı şekilde gösterilebilir: AaBbCc veya ABC (Yol üzerinde paralel kenar yok ise) veya abc

Düğüm Kenar

Yol → Basit Yol
Yol → Euler Yolu
Yol → Hamilton Yolu

B,C düğümleri ile tanımlanamaz. Çünkü B,D düğümleri arasında birde e kenarı vardır. Yol, bir düğümden bir başka düğüme nasıl gidebileceğimizi tarif etmektedir. Bir U-V yolunun etkin bir yol olması gerekli değildir. Yani bir yol üzerinde düğümler ve kenarlar tekrarlanabilir.

Tanım

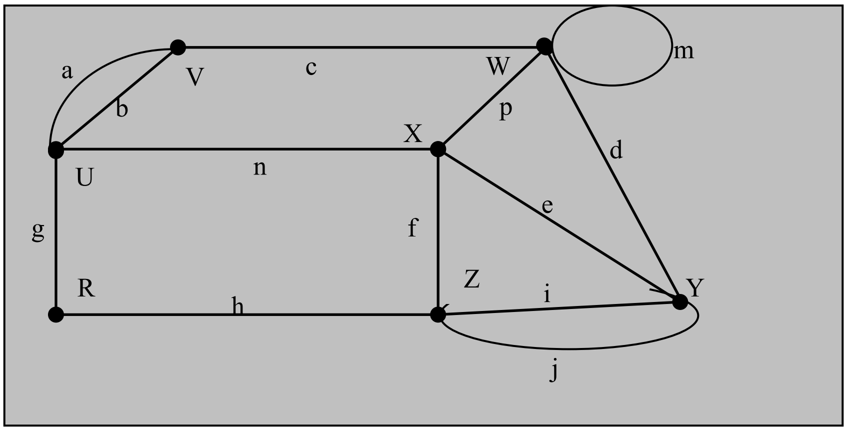
U dan V ye giden , ancak hiçbir düğüm ve kenarın tekrarlanmadığı yola U-V basit yolu denir.

Buna göre , bir basit yolda çevrimler ve paralel kenarlar olamaz. Bu durumda basit yol , etkin bir yol olmaktadır.

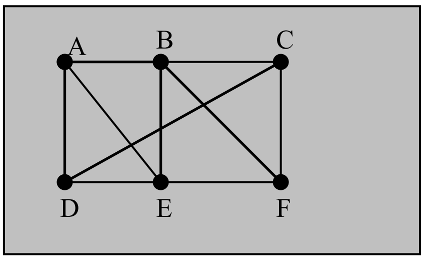
Eğer olsaydılar düğüm tekrarı olurdu.

Örnek 10.2

Şekil 10.13a'da acdj U- Z ye basit yoldur. acmdj yolu ise bir basit yol değildir. Çünkü W düğümü tekrarlanmaktadır. Benzer şekilde X den Z ye ei yolu basit yol olup, fij yolu, basit yol değildir. Benzer şekilde cpfien yolu bir basit yol değildir. Ancak bu yoldan fie çıkarılırsa kalan cpn yolu V'den U'ya bir basit yol olacaktır.



Şekil 10.13a



Şekil 10.13b

Şekil 10.13b'deki grafta ADCFE yolu 4 uzunluklu A'dan F'ye bir basit yoldur. Buna karşılık ABEDAB yolu AB kenarı iki kez tekrar edildiğinden basit yol değildir.

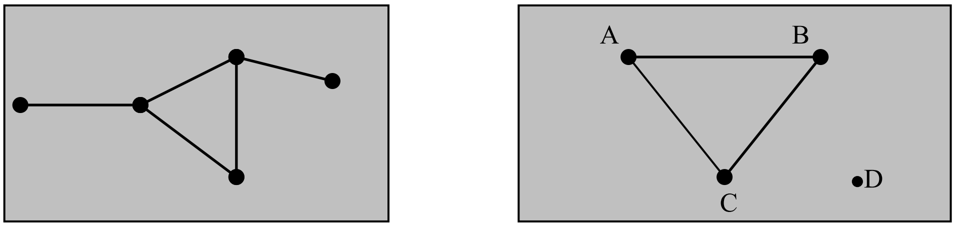
Teorem

Her U -V yolu bir U-V basit yolu içerir.

Tanım

Eğer bir G grafında, grafın bütün düğümleri bir yol ile birbirine ulaşabiliyorsa g grafı bağlıdır. Bir çoklu grafta her düğüm çifti arasında bir yol var ise bu grafa bağlantılı (connected) çoklu graf denir.

Şekil 10.14a bir bağlantılı çoklu graftır. Şekil 10.14b ise D'ye giden bir yol olmadığından bağlı değildir.



(a) (b)

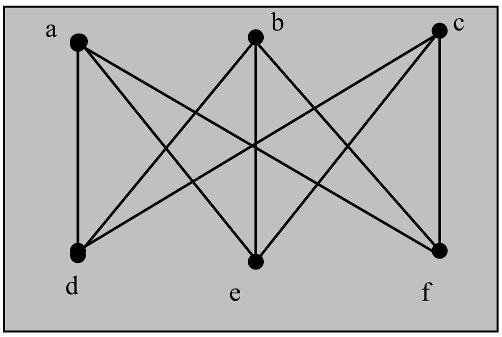
Şekil 10.14

Döngü: Bir düğümden başlanıp, aynı düğümle biten ve düğüm tekrarı olmayan yollara döngü denir.

Bir döngüde (cycle) , $n>0$ olmak üzere V_1, e_1, V_2 , e_2 .... V_n , e_n ,V_{n+1} yolunda $V_1 = V_{n+1}$ olup tüm düğüm ve kenarlar ayrıktır. Şekil 10.13b'de ABEDA bir döngü oluşturur. Benzer biçimde ABCFEA yolu da bir döngüdür. Ancak ABCFEBA yolu B düğümünden 2 kez geçildiği için bir döngü değildir.

Döngü = Halka

Örnek 10.3



Şekil 10.15'de verilen graf için, aşağıda tanımlananların hangisi bir yoldur. Bu yolların hangisi basit yoldur. Uzunluklarını belirleyiniz.

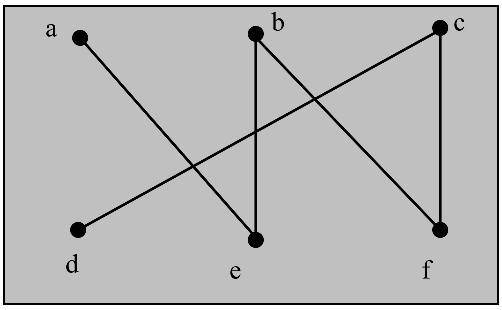
a)aebfcd b)aecdaec c)aebecfbd d)aecfbdafc

Sekil 10.15

Döngü → Euler Döngüsü

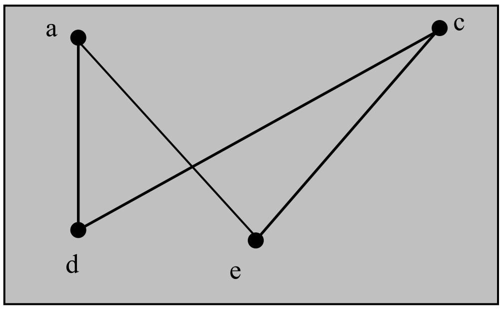
Döngü → Hamilton Döngüsü

a) aebfcd yolu,   a-d tanımlanan graf için bir yoldur. Bu yol üzerinde çevrim ve paralel yol bulunmadığından basit yoldur. Yolun uzunluğu 5 dir.

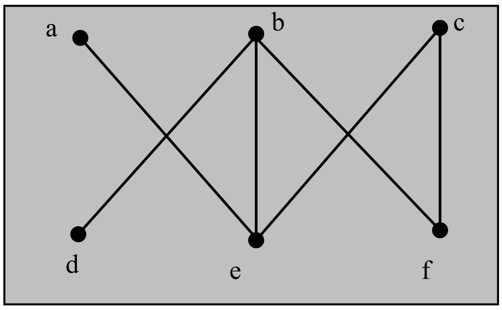


b) aecdaec yolu,   a ile c arasında bir yoldur. Fakat tekrarlanan düğümler olduğundan basit yol

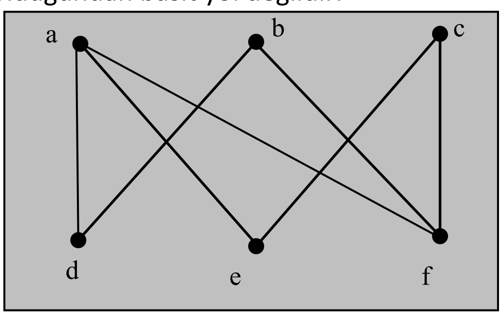
değildir. Yolun uzunluğu 6 dır.



c) aebecfbd yolu ise a ile d arasında bir yoldur. be kenarı, b ile e düğümü tekrarlanmaktadır. Bu yüzden basit yol değildir. Yolun uzunluğu 7 dir.

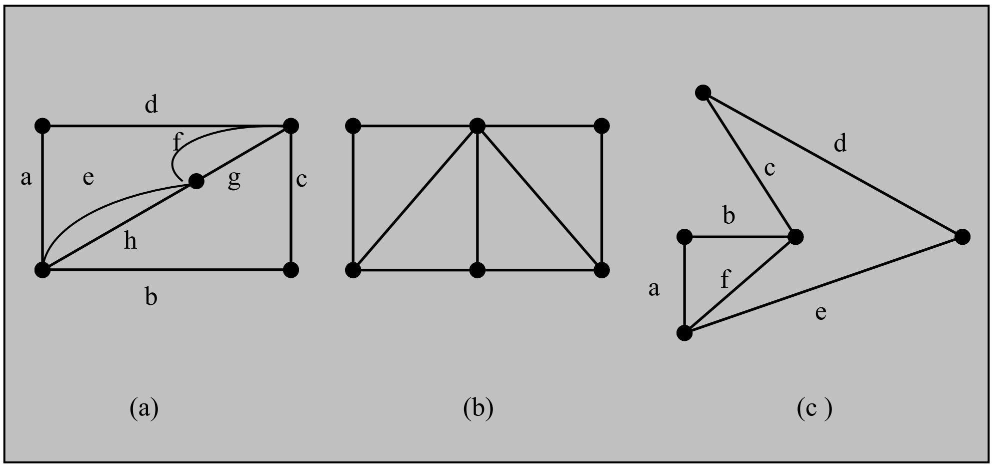


d) aecfbdafc   de   a ile c arasında bir yoldur. uzunluğu 8 dir. Tekrarlanan yollar ve düğümler olduğundan basit yol değildir.



10.5 Euler Halkası Ve Yolu

Bir haberleşme ağında, linklerin hepsinin çalışıp çalışmadığının test edilmesi gerektiğinde maliyeti düşürmek için öyle bir yol istenir ki her bir kenardan sadece bir kez geçilsin. Bu kavramla ilk uğraşan matematikçi Leonhard Euler anısına bir çoklu grafta tüm kenarlardan sadece bir kez geçilmek suretiyle oluşan , başlangıç ve bitiş düğümleri farklı olan yola Euler Yolu , başlangıç bitiş düğümleri aynı olan yola Euler Halkası (Euler Circuit) adı verilmiştir. Şekil 10.16'daki grafları ele alalım.



Eğer bir grafta bütün düğümler çift dereceli ise Euler Halkası vardır. Eğer bir grafta 2 düğüm tek dereceli geri kalanı çift dereceli ise Euler Yolu vardır. Bu yol tek dereceli düğümlerin birinde başlar, diğerinde biter.

Şekil 10.16

Şekil 10.16a grafında, dfhegcba bir Euler Halkasıdır. Şekil 10.16b'de ise Euler yolu ve halkası yoktur. Şekil 10.16c'de ise a,b,c,d,e,f bir Euler yoludur ancak Euler halkası değildir.

Euler Halkası Algoritması

Bu algoritmayı kullanabilmek için bütün derecelerin çift sayı olması gerekir.

Bu algoritma , her düğümü çift dereceli olan bağlanıtılı çoklu graf için bir Euler Halkası oluşturur. Algoritma aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

Hoca bu algoritma için bir tablo gösterdi. Onun üzerinde yapmak çok daha kolay.

Adım 1 (başlangıç yolu)

(a) g grafının kenar kümesini , E yap.

(b) Bir düğüm seç ve C yi bu tek düğümü içeren yol yap. (C Euler Halkası olacak !)

Adım 2 (yolu genişlet)

while (E boş değil)

Adım 2.1 (genişletmek için bir başlangıç noktası seç) *(a) A yı C de E' deki bir kenara bağlı olan bir düğüme set et.*

(b) P yi sadece A yı içeren yol olarak ata.

Adım 2.2 (P yi A dan A ya bir yol olarak genişlet)

(a) set B = A

(b) while (E de B ye bağlı bir e kenarı var)

(a) e yi E den çıkar.

(b) B yi e nin diğer düğümü ile yer değiştir.

(c) e kenarını ve B düğümünü P ye ekle.

endwhile.

Adım 2.3 (C yi genişlet)

C de bulunan A yerine P yi yerleştir.

endwhile

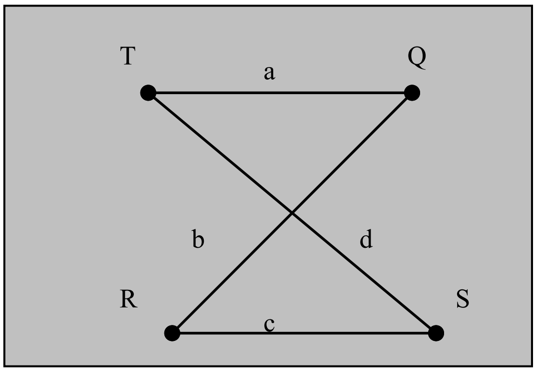
Adım 3 C yolu Euler Halkasıdır.

Euler algoritmasının karmaşıklığı ;

Algoritmada bir elemanter işlem için bir kenar ele alıyoruz. O halde her bir kenar bir kez ele alındığına göre karmaşıklık en fazla e kadar olacaktır. n düğümlü bir graf için $e \leq 1/2\ n\ (n-1) = 1/2\ (n^2-n)$, burada C (n ,2)= 1/2 n (n-1) düğümler arası olan bağlantı sayısıdır. Buna göre n düğümlü bir graf için karmaşıklık n^2 mertebesindedir.

Örnek 10.4

Şekil 10.17'de verilen grafta Euler halkası var mıdır? Euler algoritmasını uygulayarak bulunuz.



Şekil 10.17

Çözüm:

T, Q, R ve S düğümlerinin dereceleri çift olduğundan bu grafta Euler halkası vardır. Algoritmayı adım adım uygulayalım.

Adım 1

(a) E={a,b,c,d} ,

(b) C=T

Adım 2

While (1)

2.1 (a) A=T (b) P=T

2.2 (a) B=T

While (2)(b) a ve d kenarları T ye bağlı .

(a) a kenarını seç E={b,c,d} (b) B=Q

(c) P=T,a,Q

(2)(b) b kenarı (B=Q) ya bağlı

(a) b kenarını seç E={c,d} (b) B=R

(c) P=T,a,Q,b,R

(3)(b) c kenarı R ye bağlı

(a)c kenarını seç E={d} (b) B=S

(c) P=T,a,Q,b,R,c,S

(4)(b) d kenarı S ye bağlı

(a) d kenarını seç E={$\emptyset$} (b) B=T

(c) P=T,a,Q,b,R,c,S,d,T

endWhile (1)

Adım 2.3

C= T,a,Q,b,R,c,S,d,T

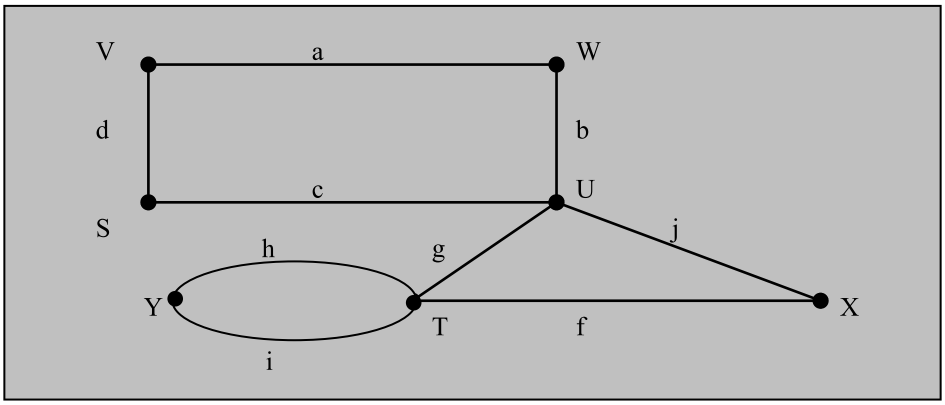
End While(2) E={$\emptyset$}

Adım 3

C= T,a,Q,b,R,c,S,d,T olur.

Örnek 10.5

Şekil 10.18’ deki çoklu grafta Euler halkasını bulalım.



Şekil 10.18

Çözüm:

E={a,b,c,d,g,f,j,h,i} V={V,W,U,S,X,T,Y} her bir düğümün derecesi çift ve bağlantılı bir çoklu graf olduğuna göre Euler algoritmasını uygulayabiliriz.

Adım 1 (a) E={a,b,c,d,g,f,j,h,i}

(b) C=V

Adım 2 While E={a,b,c,d,g,f,j,h,i}boş değil

2.1 (a) A=V (b) P=V

2.2 (a) B=V

While E'da B=V'ye bağlı a,d kenarları var

(a) a'yı seç E={b,c,d,g,f,j,h,i}

(b) B=W (c) P=V,a,W

While E'da B=W'ye bağlı b kenarları var

(a) b'yi seç E={c,d,g,f,j,h,i}

(b) B=U (c) P=V,a,W,b,U

While E'da B=U'ye bağlı c,g,j kenarları var

(a) c'yı seç E={d,g,f,j,h,i}

(b) B=S (c) P=V,a,W,b,U,c,S

While E'da B=S'ye bağlı d kenarları var

(a) d'yı seç E={g,f,j,h,i}

(b) B=V (c) P=V,a,W,b,U,c,S,d,V

End while (2) E'da V ye bağlı kenar yok

Adım 2.3 C= V,a,W,b,U,c,S,d,V

Adım 2 While 1 E={g,f,j,h,i} boş değil

Adım 2.1 (a) A=U ε'da U 'ya bağlı kenar var

(b) P=U

Adım 2.2 (a) B=U

While 2 E'da B=U'ya bağlı g,j kenarları var

(a) g'yi seç E={f,j,h,i}

(b) B=T (c) P=U,g,T

While 2 E'da B=T'ya bağlı f,h,i kenarları var

(a) f'yi seç E={j,h,i}

(b) B=X (c) P=U,g,T,f,X

While 2 E'da B=X'e bağlı j kenarları var

(a) j'yi seç E={h,i}

(b) B=U (c) P= U,g,T,f,X,j,U

End while (2) E'da U ya bağlı kenar yok

Adım 2.3 C= V,a,W,b,U,g,T,f,X,j,U,c,S,d,V

Adım 2 While (1) E={h,i}boş değil

Adım 2.1 (a) A=T E'da T 'ye bağlı kenar var

(b) P=T

Adım 2.2 (a) B=T

While 2 E'da B=T'ye bağlı h,i kenarları var

(a) h'yi seç E={i}

(b) B=Y (c) P=T,h,Y

While 2 E'da B=Y'ye bağlı i kenarları var

(a) i'yi seç E={∅}

(b) B=T (c) P=T,h,Y,i,T

End while (2) E'da T ya bağlı kenar yok

Adım 2.3 C= V,a,W,b,U,g,T,h,Y,i,T,f,X,j,U,c,S,d,V

EndWhile (1) E boş

Adım 3

C= V,a,W,b,U,g,T,h,Y,i,T,f,X,j,U,c,S,d,V

Teorem

G bir bağlantılı çoklu graf olsun. Bu durumda eğer her düğüm çift dereceli ise G'nin bir Euler halkası mevcuttur. Buna ek olarak ,eğer G' nin iki düğümü tek dereceli ve diğer bütün düğümleri çift dereceli ise bir Euler Yolu vardır. Bu durumda Euler yolu bu tek dereceli düğümlerin birinde başlar ve diğerinde sona erer.

Böyle bir graf için Euler Yolunu bulmak istersek önceki algoritmada yapılacak değişiklik şöyle olacaktır;

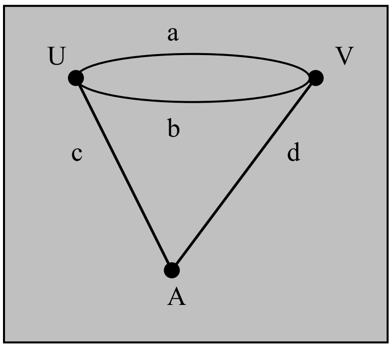
a) Tek dereceli iki düğüm arasına bir kenar ekle

b) Elde edilen grafa Euler halkası algoritması uygula (Bu kenarı eklediğin düğümlerden birini başlangıç düğümü seç)

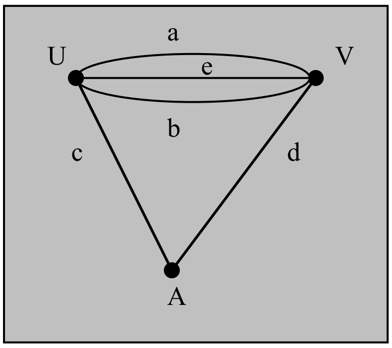
c)Elde ettiğin Euler halkalarından eklediğin kenarı çıkar.

Örnek 10.6

Şekil 10.19'daki grafı ele alalım. U ve V düğümlerinin dereceleri 3, geri kalan A düğümü ise 2. derecedendir. O halde bir Euler yolu vardır.Bunun için U,V düğümleri arasına bir e kenarı ekleyelim. Euler halkasını bulalım. U dan başlarsak C=e,a,d,c,b Euler halkasıdır. Bundan e' yi çıkarırsak, a,d,c,b Euler Yolu olacaktır.



Şekil 10.19



Şekil 10.20

Kaynaklar

F.Selçuk,N.Yurtay,N.Yumuşak,Ayrık İşlemsel Yapılar, Sakarya Kitabevi,2005.
İ.Kara, Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2000.
"Soyut Matematik", S.Aktaş,H.Hacısalihoğlu,Z.Özel,A.Sabuncuoğlu, Gazi Ünv.Yayınları,1984,Ankara.
"Applied Combinatorics", Alan Tucker, John Wiley&Sons Inc, 1994.
"Applications of Discrete Mathematics", John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.
"Discrete Mathematics", Paul F. Dierker and William L.Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.
"Discrete Mathematic and Its Applications", Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5^{th} Edition, 1999.
"Discrete Mathematics", Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.
"Discrete Mathematics with Graph Theory" , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.
"Discrete Mathematics Using a Computer", Cordelia Hall and John O'Donnell, Springer, 2000.
"Discrete Mathematics with Combinatorics", James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.
"Discrete and Combinatorial Mathematics", Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.
"Discrete Mathematics", John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.
"Essence of Discrete Mathematics", Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.
"Mathematics:A Discrete Introduction", Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.
"Mathematics for Computer Science", A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.
"Theory and Problems of Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.
"2000 Solved Problems in Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.