1. a) $\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}dx$ integralini hesaplayınız. (15.p)

$\sqrt{x^2-1} = t$ dönüşümü yapalım.

$\frac{\cancel{2}x\,dx}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} = dt$ yazılır.

$\int e^t dt = e^t + C = e^{\sqrt{x^2-1}} + C$ ✓

b) $\int_{-1/2}^{1/2} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$ integralinin değeri sıfırdır. Neden? (10p.) (Not: İntegrali çözmeden belirli integralle ilgili özellikleri hatırlayınız.)

$\int_{-a}^{a} f(x)dx$ integralinde $f(x)$ tek fonksiyon ise integralin değeri sıfırdır.

$f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ tek fonksiyon mudur? $\left(f(-x)\overset{?}{=}-f(x)\right)$

$f(-x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-f(x)$ ✓

$f(x)$ tek fonksiyondur.

2. $y = \sqrt{x}$ eğrisinin x=0, x=2 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgesinin

a) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin (otomobil farı) hacmini hesaplayınız. (10p.)
$(V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx)$

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi . \int_0^2 x \, dx = \pi . \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \pi\left[\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right] = 2\pi \quad br^3. \checkmark$$

b) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayınız. (15p.)
$(S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2} dx)$

$$S = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} . \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} \, dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} \, dx$$

$$= \cancel{2}\pi \int_0^2 \cancel{\sqrt{x}} . \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{x}}} . \sqrt{4x+1} \, dx = \pi \int_0^2 \sqrt{4x+1} \, dx$$

$4x+1 = t$ dönüşümü yapılırsa $dx = \frac{1}{4} dt$ elde edilir.

x	t
2	9
0	1

$$S = \pi \int_1^9 \sqrt{t} \, \frac{dt}{4} = \frac{\pi}{4} \int_1^9 \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4} . \frac{2}{3} t^{3/2}\Big|_1^9$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[9^{3/2} - 1^{3/2}\right] = \frac{\pi}{6}(27 - 1) = \frac{13}{3}\pi \quad br^2. \quad \checkmark$$

3. $\int_1^{\infty} \frac{lnx}{x^2} dx$ integrali veriliyor.

a) Üstte verilen integralin genelleştirilmiş integral olmasının nedenini açıklayınız. (10p.)

sınırlardan biri sonsuz olduğundan fonksiyon sınırlı değildir.
1. tür genelleştirilmiş integral adını alır.

b) Yakınsak olup olmadığını inceleyiniz. (15p)

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{\ln x}{x^2} dx \xrightarrow[\substack{x=e^t \\ \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt}]{} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} t e^{-t} dt$$

x	t
1	0
R	$\ln R$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-te^{-t} - e^{-t}\right]\Big|_0^{\ln R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\left(\underbrace{-\ln R . e^{-\ln R}}_{\downarrow 0} - \underbrace{e^{-\ln R}}_{\downarrow 0}\right) - \left(\underbrace{-0 . e^{-0}}_{0} - \underbrace{e^{-0}}_{\downarrow 1}\right)\right] = 1$$

$$\left(\text{Not}: \lim_{x\to\infty} x e^{-x} = 0\right)$$

Yani $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ integrali yakınsaktır ve değeri 1 dir.

4. $f(x,y) = arcsin\sqrt{xy}$ fonksiyonu veriliyor.

a) f_x ve f_y kısmi türevlerini yazınız.(10p)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{(\sqrt{xy})_x}{\sqrt{1-(\sqrt{xy})^2}} = \frac{y}{2\sqrt{xy}\cdot\sqrt{1-xy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{(\sqrt{xy})_y}{\sqrt{1-(\sqrt{xy})^2}} = \frac{x}{2\sqrt{xy}\,\sqrt{1-xy}}$$

b) $f_x(1,\frac{1}{4})$ değerini hesaplayınız.(5p.)

$$f_x(1,\tfrac{1}{4}) = \frac{1/4}{2\sqrt{1.1/4}\cdot\sqrt{1-1.1/4}} = \frac{1/4}{1.\frac{1}{2}.\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \checkmark$$

c) $xf_x + yf_y$ ifadesinin eşitini yazınız. (10p.)

$$xf_x + yf_y = x.\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}\,\sqrt{1-xy}}\right) + y\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}\,\sqrt{1-xy}}\right) = \frac{\cancel{2}xy}{\cancel{2}\sqrt{xy}\cdot\sqrt{1-xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{1-xy}} \checkmark$$