Dr. Yüksel YURTAY

Sayısal Analiz

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4
\end{aligned}
$$

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ders İçeriği

- Tanım
- Gauss Eliminasyon Yöntemi
- Örnek Uygulamalar
- Matlab uygulama

Tanım

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenler olmak üzere,

$$a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

denklemine **n- bilinmeyenli bir lineer denklem** denir.

Bir lineer denklemde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarına **denklemin katsayıları**, b sayısına da **denklemin sabiti** denir.

Örnek:

$2x - y + z = 1$ lineer denkleminde,

2, -1 ve 1 denklemin katsayıları, 1 de denklemin sabitidir.

Tanım

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m$$

şeklin deki **n tane bilinmeyen** ve **m- tane lineer denklemden** oluşan sisteme bir **lineer denklem sistemi** denir.

lineer denklem sisteminde

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in$ **R** sayılarına sistemin katsayıları,

$b_1, b_2, \ldots, b_m \in$ **R** sayılarına da **sistemin sabitleri** denir.

denklem sistemini farklı bir şekilde ifadesiyle

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$, yada $A\,x = b$ gibi en genel ifadesi ile

gösterilebilir.

Bu lineer denklem sistemleri;

b=0 => "**homojen denklem sistemi**"

b≠0 => "**homojen olmayan denklem sistemi**" adını alır.

Homojen olmayan denklem sisteminin çözümü için geliştirilen yöntemler iki grupta incelenebilir.

1. Dolaylı yöntemler
   - Gauss-Seidel yöntemi
   - Basit iterasyon yöntemi
   - …
2. Dolaysız yöntemler
   - Gauss eliminasyon yöntemi
   - Gauss-Jordan yöntemi
   - Cramer yöntemi
   - …

Bu iki gruba ait yöntemleri ve örnekleri önümüzdeki derslerde çözümleyeceğiz.

Sayısal Analiz

Gauss Eliminasyon Yöntemi

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{3n}x_n = b_3$

lineer denklem sistemini **AX=B** formunda matris yardımı gösterebiliriz.

$$AX=B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ A ve B matrisleri üzerinde işlem yapılacağından , düzenlenerek;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ sistemimizi üst üçgensel matris formuna getirerek çözüme gidelim,

- Buna göre başlangıç adım için katsayı matrisinin ilk satırını $\boldsymbol{a_{11}}$ bölelim.

$$a'_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1 \quad , a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad , a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad , b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad \Bigg\} \begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Gauss Eliminasyon Yöntemi

- İkinci adımda ilk satırı a_{21} ile çarpıp ikinci satırdan çıkarırsak.

$a_{21} = 0$, $a'_{22} = a_{22} - a_{21}.a_{12}'$, $a'_{23} = a_{23} - a_{21}.a_{13}'$, $b'_2 = b_2 - a_{21}.b'_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

- Aynı şekilde ilk satırı a_{31} ile çarpıp üçüncü satırdan çıkardığımızda elde edilen matrisleri ;

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix}$$ haline gelir.

- Üçüncü adımda a'_{22} satırı kendisine bölünerek;

$$\left. a''_{23} = \frac{a_{23}'}{a_{22}'} \quad , b''_2 = \frac{b'_2}{a_{22}'} \quad \right\} \begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & 1 & a_{23}'' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2'' \\ b_3' \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Sayısal Analiz

Gauss Eliminasyon Yöntemi

- Benzer şekilde 3. Satırdaki $a_{32}{}'$ elemanını sıfıra indirgemek için ikinci satır $a_{32}{}'$ ile çarpılıp üçüncü satırdan çıkarılırsa;

$$\left.\begin{array}{l} a_{33}'' = a_{33}{}' - a_{32}{}'.\,a_{23}{}'' \quad ,b_3'' = b_3' - a_{32}{}'.\,b_2'' \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & a_{12}{}' & a_{13}{}' \\ 0 & 1 & a_{23}{}'' \\ 0 & 0 & a_{33}{}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1{}' \\ b_2{}'' \\ b_3{}'' \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

- Son adım olarak son satırı $a_{33}{}''$ ile bölersek;

$$\left.\begin{array}{l} a_{33}{}''' = \frac{a_{33}{}''}{a_{33}{}''} = 1 \quad , \quad b_3{}''' = \frac{b_3{}''}{a_{33}{}''} \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & a_{12}{}' & a_{13}{}' \\ 0 & 1 & a_{23}{}'' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1{}' \\ b_2{}'' \\ b_3{}''' \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

- Matrisler eliminasyonlardan sonra bilinmeyen matrisi ekleyerek düzenlersek;

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}{}' & a_{13}{}' \\ 0 & 1 & a_{23}{}'' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1{}' \\ b_2{}'' \\ b_3{}''' \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{x_3 = b_3{}'''} \\ \boldsymbol{x_2 = b_2'' - a_{23}{}''.\,x_3} \\ \boldsymbol{x_1 = b_1' - a_{12}{}'.\,x_2 - a_{13}{}'.\,x_3} \end{array}$$

Denklemleri sıra ile çözümlenerek x_1, x_2, x_3 bilinmeyenleri elde edilir.

Gauss Eliminasyon Yöntemi

Not :

Pivotlama : Gauss eliminasyon yönteminde gerçekleştirilen hesaplamalarda paydaya karşılık gelen değer(pivot) sıfır olduğunda sorunlar ortaya çıkabilir, bu durumda satırların yeri en büyük eleman pivot elemanı olacak biçimde yer değiştirilebilir.

Çözüm kümesi ?

Homojen L.D.S. n. dereceden A katsayılar matrisinin rankının bilinmeyen (N) sayısından küçükse mümkündür .(rank(A)<N veya | A|=0 Birden fazla çözüme sahiptir.)

Homojen olmayan lineer denkl. sisteminin rank(A)=N ise tek çözüm eğer rank değeri N'den küçük ise birden fazla çözüm mevcuttur.

Örnek :

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -11 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5.5 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5.5 \\ -5.4 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5.5 \\ -5.4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5.5 \\ -5.4 \\ -2 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\}$$

Buradan

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{X_3 = -2} \\ &\mathbf{X_2 = 5.4+1.2x_3 = 5.4+1.2(-2) = 3} \\ &\mathbf{X_1 = -5.5 + 1.5x_2 - x_3 = -5.5 + 1.5\text{-}1(-2)=1} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek uygulama :

Aşağıda AX=B formunda verilen lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz ?

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

Çözüm :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

Denklem sistemi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ -3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

Katsayılar matrisi

Birinci sütun sıfırlanarak

$$\begin{array}{l} \\ R_2-(-3/4)\times R_1 \rightarrow \\ R_3-(1/4)\times R_1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 0 & -0.5 & 2.75 & 9.25 \end{array}\right]$$

İkinci sütun sıfırlanarak

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3-(-0.5/-2.5)\times R_2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 0 & 0 & 1.80 & 5.40 \end{array}\right]$$

Geri süpürme ile

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \dfrac{5.40}{1.80} = 3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{19.25 - 4.75\times 3}{-2.5} = -2 \\[2ex] x_1 = \dfrac{15 - [(-2)\times(-2) + 1\times 3]}{4} = 2 \end{array} \right.$$

Uygulama :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\
2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\
x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz ?

Sistemde 1. denklemin -1 katını 3. denkleme ve yine 1. denklemi 4. denkleme ekleyelim.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ -x_2 &= -2 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

bulunur.

Burada 2. denklem ile 3. denklemin yerlerini değiştirelim.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_2 &= -2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

olur.

Son elde edilen denklem sisteminde 2. denklemin 2 katını 3. denkleme ekleyelim.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_2 &= -2 \\ x_3 - x_4 &= 1 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu son elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü ile başlangıçtaki sistemimizin çözümü aynıdır.

O halde, son elde edilen denklem sisteminde,

$x_4 = -2$
$x_3 = 1 + x_4 = 1 - 2 = -1,$
$x_2 = 2$ ve
$x_1 = 2 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 - 2 - 1 + 2 = 1$ dir.

Dolayısıyla verilen denklem sisteminin çözümü

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = -1$
$x_4 = -2$ dir

Uygulama :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\
x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= -8 \\
2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 11 \\
x_1 + 2x_3 - x_5 &= 2 \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 4x_5 &= 1
\end{aligned}
$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm : AX=B => (A|B)

…

x1= 2
x2= 1
x3= -1
x4= 3
x5= -2 bulunur.

Uygulamalar :

1)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini gauss eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

2)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 &= -1 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini gauss eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

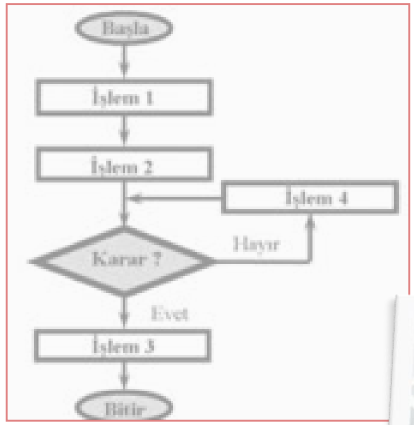
3)

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini gauss eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

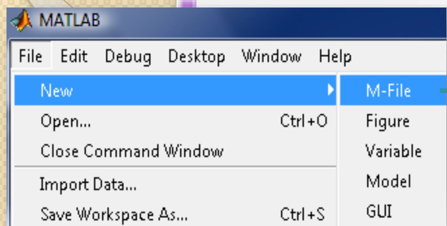
4) Gauss Eliminasyon yönteminin işaret akış diyagramını çiziniz.

MATLAB



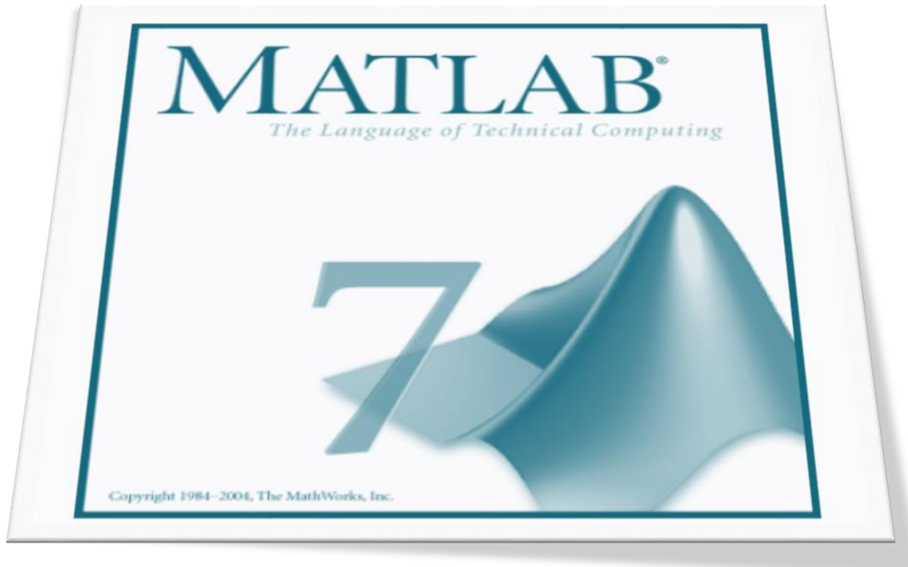
Gauss Eliminasyon yönteminin
akış diyagramını çizerek ve matlab kodunu yazınız.

MATLAB




```
%*** Gauss Eliminasyon ile denklem çözümleme ***
function I=gauss_eleme(N,Y)
X=[N Y]
[satir,sutun]=size(N)
for n=1:(sutun-1),
    s=1;
    while X(n,n)==0
        if not(X(n+s,n)==0)
            Y=X;
            X(n,:)=Y(n+s,:);
            X(n+s,:)=Y(n,:);
        end
        if s==n
            disp('Çözüm Bulunamadı!');return
        end;
        s=s+1;
    end
    for m=(n+1):(satir)
        X(m,:)=X(m,:)-X(n,:)*X(m,n)/X(n,n);
    end
end
% bilinmeyenlerin  bulunması
I=zeros(satir,1);
for n=satir:-1:1
    tp=X(n,[sutun:-1:(n+1)])*I([sutun:-1:(n+1)]);
    I(n)=(X(n,sutun+1)-tp)/X(n,n);
end
```

```
>> N=[2 -3 2;1 1 -2;3 -2 -1]
N =
     2    -3     2
     1     1    -2
     3    -2    -1

>>Y=[-11 8 -1]';

>> I=gauss_eleme(N,Y)

X =
     2    -3     2   -11
     1     1    -2     8
     3    -2    -1    -1

satir =
     3
sutun =
     3

I =
     1
     3
    -2
```


MATLAB®
The Language of Technical Computing
7
Copyright 1984–2004, The MathWorks, Inc.

Uygulama …