BİRİNCİ DERECEDEN VE BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİ

Birinci mertebe ve birinci dereceden bir diferensiyel denklem şu şekilde yazılabilir

$P = P(x,y) \qquad Q = Q(x,y)$ olmak üzere

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

Değişkenlerine ayrılabilen denklemler:

$$X_1 Y_1\,dx + X_2 Y_2\,dy = 0 \qquad X_1 = X_1(x) \quad Y_1 = Y_1(y)$$
$$X_2 = X_2(x) \quad Y_2 = Y_2(y)$$

$$\frac{X_1}{X_2}\,dx + \frac{Y_2}{Y_1}\,dy = 0 \;=\; \left(f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0 \right)$$

Ör → $(x-2)\,y^3\,dx + x^4(y-3)\,dy = 0$ denk çöz bulunuz

$$\frac{x-2}{x^4}\,dx + \frac{y-3}{y^3}\,dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^3}\right)dy = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{y} + \frac{3}{2y^2} = c$$

Ör → $x\sin y\,dx + (x^2+1)\cos y\,dy = 0$ denk çöz bulunuz

$$\frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln\sin y = c_0 \qquad \ln c = 2c_0$$

$$\ln(x^2+1) + 2\ln\sin y = \ln c$$

$$(x^2+1)\sin^2 y = c$$

$\sin y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2k\pi \\ y = (2k+1)\pi \end{array}\right\} \Rightarrow y = n\pi$$

$y = n\pi$ $c = 0$ 'a karşılık geldiğinden ayrı bir çözüme gerek yok.

SORULAR:

1) Aş. dif. denklemlerin çözümlerini bulunuz.

a) $a\left[x\frac{dy}{dx} + 2y\right] = xy\frac{dy}{dx}$ $\quad y(2a) = a$

Çözüm:

$a\left[x\frac{dy}{dx} + 2y\right] = xy\frac{dy}{dx}$ $\quad$ dx ile çarpalım

$a(x\,dy + 2y\,dx) = xy\,dy$

$ax\,dy - xy\,dy + 2ay\,dx = 0$

$2ay\,dx + (a-y)x\,dy = 0$ (Her iki tarafı y ile bölelim)

$2a\,dx + \frac{(a-y)}{y}x\,dy = 0$ (Her iki tarafı x ile bölelim)

$\frac{2a}{x}dx + \frac{(a-y)}{y}dy = 0$

$2a\ln x + a\ln y - y = \ln c$

$\ln x^{2a} + \ln y^{a} - \ln c = y$

$\Rightarrow y = \ln\frac{x^{2a}y^{a}}{c}$

x yerine 2a, y yerine a yazalım

$(2a)^{2a}a^{a} = ce^{a} \Rightarrow c = 4^{a}a^{3a}e^{-a}$

$\Rightarrow \boxed{x^{2a}y^{a} = 4^{a}a^{3a}e^{y-a}}$

11

b) $xy^2\,dx + e^x\,dy = 0 \qquad x \to \infty$ için $y \to \frac{1}{2}$

Çözüm: $\frac{x}{e^x}dx + \frac{1}{y^2}dy = 0$ (Her iki tarafı y^2e^x'le bölelim)

$$\int xe^{-x}dx + \int y^{-2}dy = \int 0$$

$$\boxed{\int e^x \underbrace{p(x)}_{\text{Polinom}}\,dx = e^x(p - p' + p'' - p''' + \dots) + c}$$

$-x = t$

$dx = -dt$

$$\int te^t\,dt - \frac{1}{y} = c$$

$$e^t(t-1) - \frac{1}{y} = c$$

$$e^{-x}(-x-1) - \frac{1}{y} = c \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{-x}(-x-1) - \frac{1}{\frac{1}{2}} = c$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{e^x} - 2 = c \qquad \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{e^x} = c \Rightarrow c = -2$$

$$\boxed{e^{-x}(x+1) + \frac{1}{y} = 2}$$

---

c) $(xy + x)\,dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)\,dy$

Çözüm: $x(y+1)\,dx = [x^2(y^2+1) + (y^2+1)]\,dy$

$$x(y+1)\,dx = (y^2+1)(x^2+1)\,dy$$

$$\frac{2x}{2x^2+1}dx = \frac{y^2+1}{y+1}dy \qquad \left[\frac{y^2+1}{y+1} = y - 1 + \frac{2}{y+1}\right]$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{y^2}{2} - y + 2\ln(y+1) + \ln c$$

$$\frac{\ln\sqrt{1+x^2}}{(y+1)^2 c} = \frac{y^2}{2} - y \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{(y+1)^2 c} = e^{\frac{y^2}{2}-y}$$

—o—

Ödev

• d) $y' = [\sin\ln x + \cos\ln x + a]y$

$$\frac{dy}{y} = (\sin\ln x + \cos\ln x + a)\,dx$$

$$\ln y = \int \sin\ln x\,dx + \int \cos\ln x\,dx + ax + \ln c$$

$\int \sin\ln x\,dx$ $\quad u = \sin\ln x \quad du = \cos\ln x \frac{1}{x}$

$\quad dv = dx \quad v = x$

$$= x\sin\ln x - \int x\cos\ln x \frac{1}{x}\,dx = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,dx$$

$$\ln y = x\sin\ln x - \cancel{\int \cos\ln x\,dx} + \cancel{\int \cos\ln x\,dx} + ax + \ln c$$

$$\ln y = x\sin\ln x + ax + \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = ce^{x\sin\ln x + ax}}$$

—o—

Ödev

• 2) $(1+2x)y\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{y}{1+y^2}dy + \frac{dx}{1+2x} = 0$$ Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln(1+2x) = \ln c$$

$$\ln\sqrt{(1+y^2)(1+2x)} = \ln c$$

$$(1+y^2)(1+2x) = \sqrt{c} = c_1$$

$$\boxed{y^2 = \frac{c_1}{1+2x} - 1}$$ olarak bulunur

Ödev 3) $y' - xy^2 + x = 0$ dif. denkleminin genel çöz. bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem

$y' - x(y^2-1) = 0$ şeklinde düzenlenirse

$\frac{dy}{y^2-1} - x\,dx = 0$ ifadesinde integral alınarak

$\frac{1}{2}\ln(y-1) - \frac{1}{2}\ln(y+1) - \frac{x^2}{2} = \ln c$

bulunur. Buradan genel çözüm

$$\boxed{\frac{y-1}{y+1} = c e^{x^2}}$$ olarak bulunur

---

4) $\sin x \cos^2 y\,dx + \cos^2 x\,dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

Çözüm: $\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$ integral alınırsa

$$\sec x + \tan y = c$$

$$\Rightarrow \tan y = c - \sec x$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \arctan(c - \sec x)}$$ elde edilir.

---

5) $(x+y)\,dx + dy = 0$ dif denk çöz bulunuz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = -(x+y)$

[Not: $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ biçiminde ise

$ax+by+c = z$ değişken değiştirmesi yapılır]

Buradan $\frac{dy}{dx} = -(x+y)$ ise

$x+y = z \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

$\frac{dz}{dx} - 1 = -z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - z \Rightarrow \int \frac{dz}{1-z} = \int dx$

$\Rightarrow \ln(1-z) = x + \ln c$

$\ln\left(\frac{1-z}{c}\right) = x \Rightarrow 1 - z = ce^{x}$

$\Rightarrow \boxed{1 - x - y = ce^{x}}$

---

6) $2\,dy = [\cos x \cos 2y + \sin x \sin 2y + 1]\,dx$ dif denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $2\frac{dy}{dx} = \cos(x-2y) + 1$

$$X-2Y=z \Rightarrow 1-2\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx}$$

Buradan

$$\cancel{1}-\frac{dz}{dx}=\cos z+\cancel{1} \Rightarrow \frac{dz}{\cos z}=-dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\cos z}+x=\ln c$$

$$\Rightarrow -\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)+x=\ln c$$

$$\Rightarrow -\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-2y}{2}\right)+x=\ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x=c\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-2y}{2}\right)}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\ln\tan\frac{x}{2}+c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$\frac{\pi}{2}-x=t \qquad -dx=dt$$

$$\int -\frac{dt}{\sin t}=-\ln\tan\frac{t}{2}+c$$

$$=-\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+c$$

olarak elde edilir.

---

7) Bir memleketin nüfusu, o memleketteki insan sayısına orantılı olarak değişiyor. Orantı sabiti 0,028 ve 1990 yılında 60 milyonluk nüfus olduğuna göre 2000 yılındaki nüfusu bulunuz.

Çözüm

m: doğum oranı Δy: nüfustaki artış

n: ölüm oranı Δt: zaman

$y(t)$: zamana bağlı nüfus

$$\Delta y = m y(t)\Delta t - n y(t)\Delta t$$

$$= (m-n)\, y(t)\,\Delta t \qquad m-n=k$$

$$= k\, y(t)\,\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = k y(t) \qquad k = 0{,}028$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} k y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = k y(t)$$

$y(0) = 60$ $\qquad \frac{dy}{y} = k\,dt \Rightarrow \ln y = kt + c$

$$\Rightarrow y = c e^{kt}$$

$$c = 60$$

$$\Rightarrow y(t) = 60 e^{0{,}028 \cdot t} \qquad t = 10$$

$$y(10) = (60) e^{(0{,}028)\cdot(10)}$$

$$= 60 \cdot (1.3231)$$

$$= 79{,}3860 \text{ milyon}$$

---

8) $y' = (3x+3y+8)^2$ dif denk genel çöz. bulunuz

Çözümü $\qquad u = 3x+3y+8$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{du}{dx} = 3 + 3\frac{dy}{dx}$$

olacağından

$$\frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 3\right) = u^2 \quad \text{veya}$$

10) $\dfrac{e^{\cos x}}{\cos^2 y} y' - \sin x \tan y = 0$ dif. denk.

genel çöz. bulunuz.

<u>Çözüm</u> $u = \tan y$ $u' = \dfrac{y'}{\cos^2 y}$ Dönüşümü ile

$$e^{\cos x} u' - u \sin x = 0$$ elde edilir

$$\frac{du}{u} - \sin x \, e^{-\cos x} = 0$$

$\Rightarrow \ln u - e^{-\cos x} = \ln c$

$\ln \frac{u}{c} = e^{-\cos x}$ $\Rightarrow u = c e^{e^{-\cos x}}$ elde edilir

$u = \tan y$ konulursa

$$\tan y = c e^{e^{-\cos x}}$$ veya

$$y = \arctan\left(c e^{e^{-\cos x}}\right)$$ bulunur