Alt Vektör Uzayı ile İlgili Örnekler

① $\mathbb{R}^n$ uzayında, birinci bileşenleri tamsayı olan elemanların kümesi bir alt vektör uzayı mıdır? (bu kümeye W diyelim)

Çözüm. W bir alt vektör uzayıdır $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Her $u, v \in W$ için $u+v \in W$.

(ii) Her c skaleri için $c.u \in W$.

$\mathbb{R}^n$ uzayında $u = (2, u_2, u_3, \dots, u_n)$ vektörü alalım. (rasgele bir tamsayı)

$c = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ bir skaler olsun. $c.u = \left(\underset{\notin \mathbb{Z}}{\frac{2}{3}}, \frac{u_2}{3}, \dots, \frac{u_n}{3}\right) \notin W$

old. dan, W bir alt vektör uzayı değildir. ((ii) yi sağlamıyor)

---

② $\mathbb{R}^5$ uzayında, bileşenlerinden en az biri 0 olan vektörlerin kümesi bir alt vektör uzayı mıdır?

Çözüm. Kümemiz W olsun.

$u = (0, 2, 3, 4, 5) \in W$ ve $v = (1, 0, 3, 4, 5) \in W$ alalım.

$u+v = (1, 2, 6, 8, 10) \notin W$ old. dan W bir alt vektör uzayı değildir.

(Hiçbir elemanı 0 değil!)

③ $H=\{(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ ve $u_1+u_2+\dots+u_n=3\}$ eşitliği ile verilen H kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt vektör uzayı mıdır?

Çözüm $u=(3,0,0,\dots,0)\in H$
$v=(0,3,0,\dots,0)\in H$ alalım (Bileşenler toplamı 3)

$u+v=(3,3,0,\dots,0)\notin H$ çünkü bileşenler toplamı 6.

Böylece H, bir alt vektör uzayı değil.

④ $H=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R},\ b+c=0\right\}$ kümesinin $M^{2,2}$ nin bir alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.

Çözüm $M^{2,2}\rightarrow$ 2x2 boyutlu matrislerin uzayı

$u=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\in H$, $v=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2\end{bmatrix}\in H$ alalım.

$b_1+c_1=0$ ve $b_2+c_2=0$ old. açıktır.

$u+v=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2\end{bmatrix}$ $b_1+b_2+c_1+c_2=0$ old. dan $\boxed{u+v\in H}$ dir.

k bir skaler olsun

$k.u=k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd\end{bmatrix}$ $kb+kc=k\underbrace{(b+c)}_{0}=0$ old. dan $\boxed{ku\in H}$ dir.

Böylece H bir alt vektör uzayıdır.