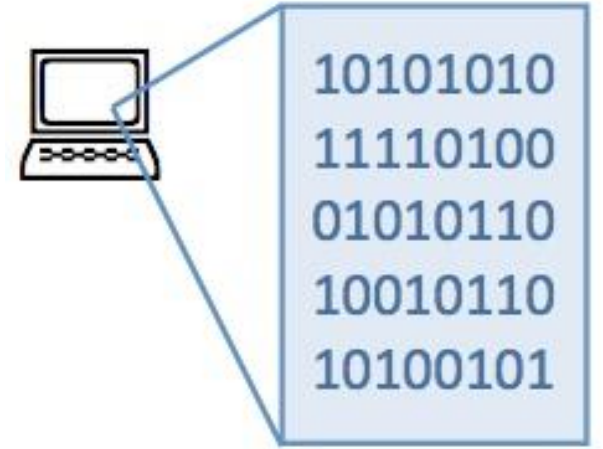


Bilgisayar Mühendisliğine

Giriş -5. hafta

Sayı Sistemleri

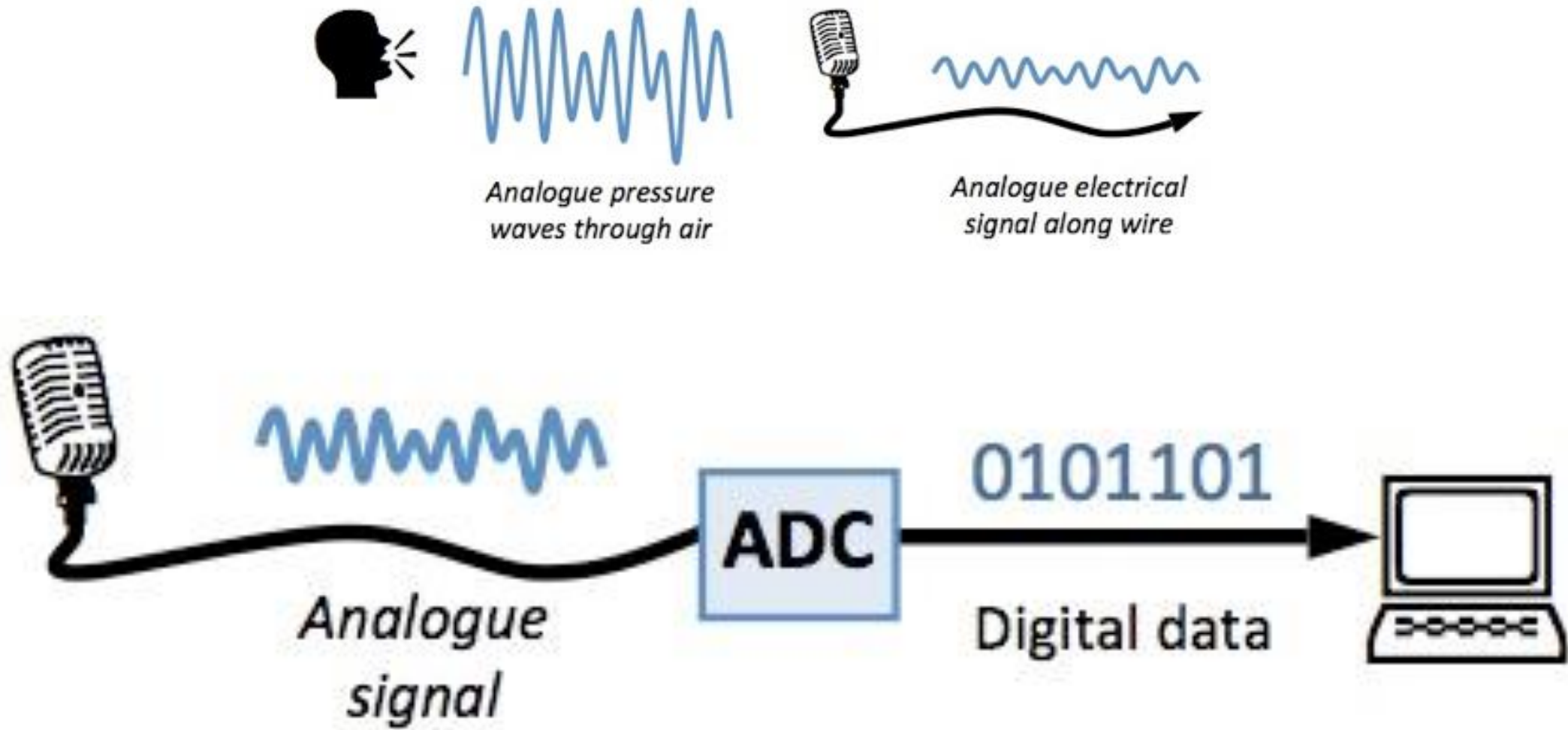
- Onluk, İkilik, Sekizlik ve Onaltılık sistemler
- Dönüşümler
- Tümleyen aritmetiği



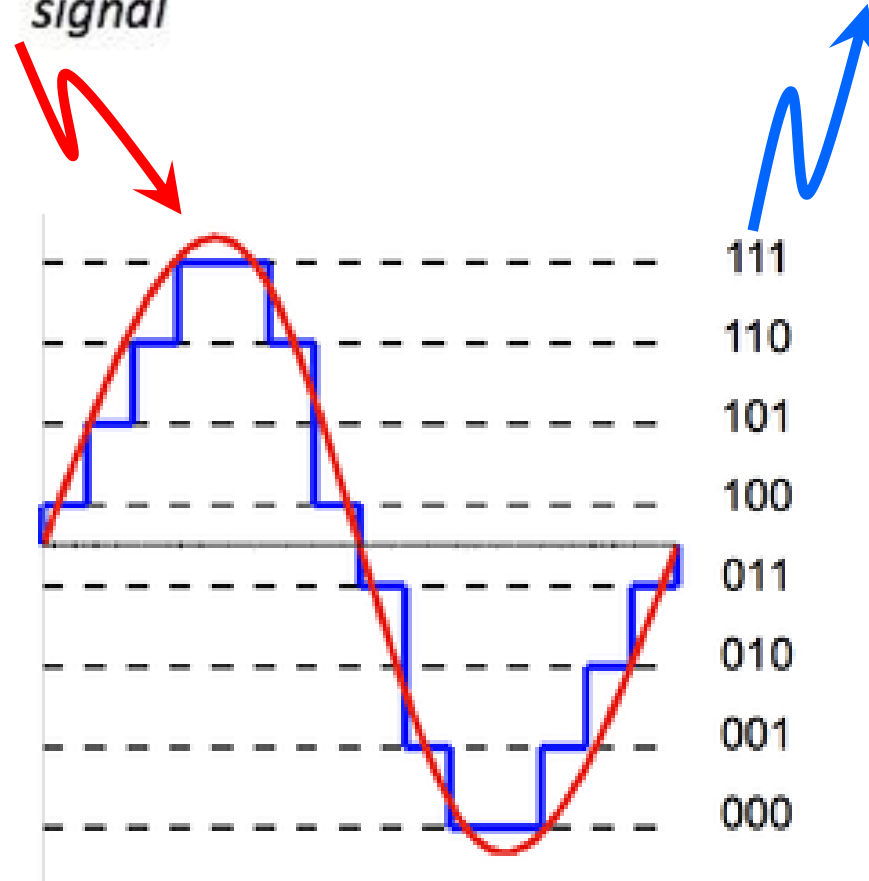
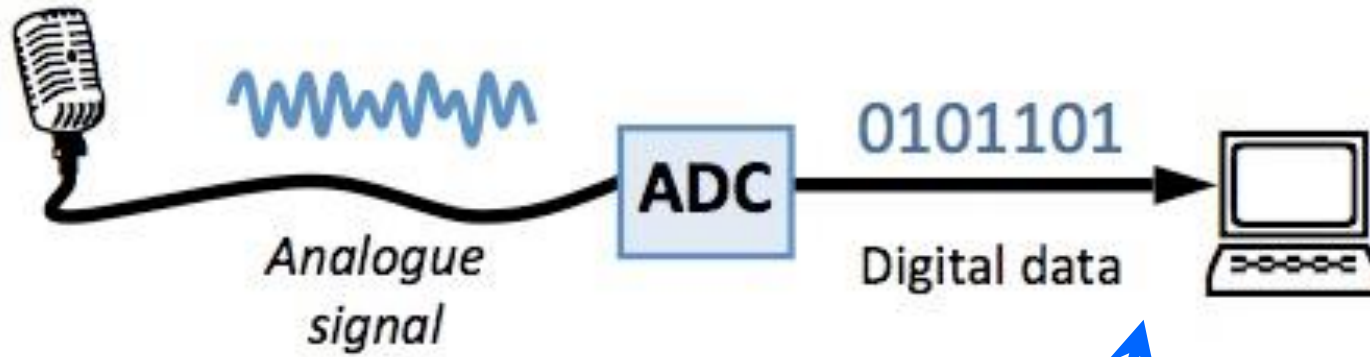
Giriş

- Bilgisayar dış dünyadan verileri sayılar aracılığı ile kabul eder.
- Günümüz teknolojisinde bu işlem ikilik sayı sistemin ile gerçekleştirilir.
- İkilik sayı sistemindeki sayılarda 0 ve 1 olmak üzere iki farklı değerden oluştuğu için bilgisayar donanımında iki farklı gerilim seviyesi kullanılarak temsil edilir.
- İkilik sayı sisteminin yanında, sekizlik ve onaltılık gibi sayı sistemleri de programlamada kullanılmaktadır.

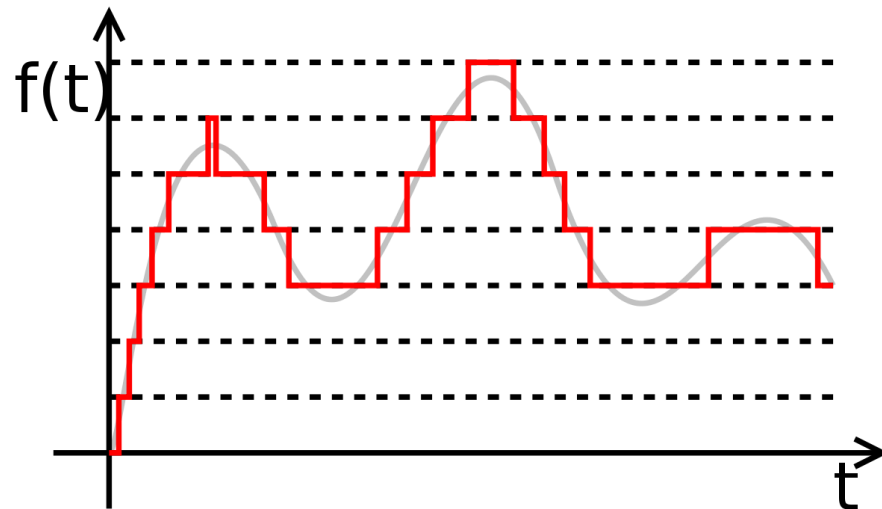
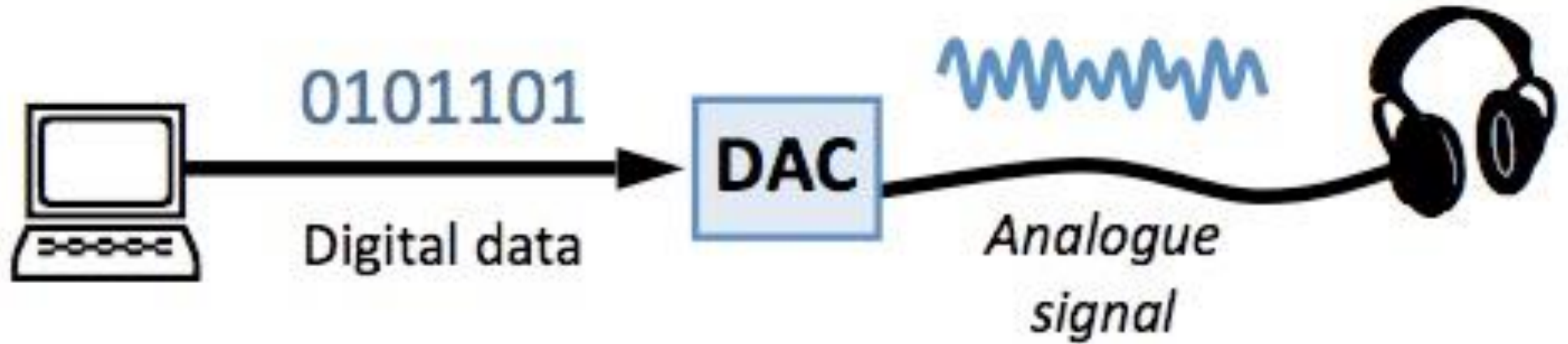
Sayısal verilere örnekler



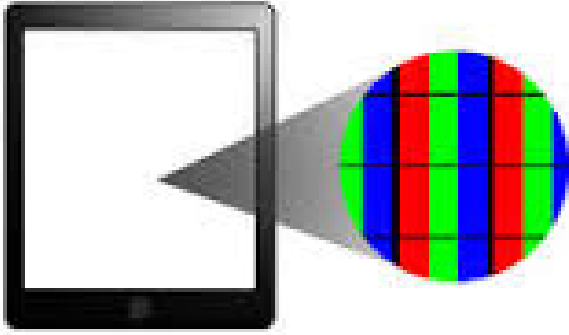
Sayısal verilere örnekler



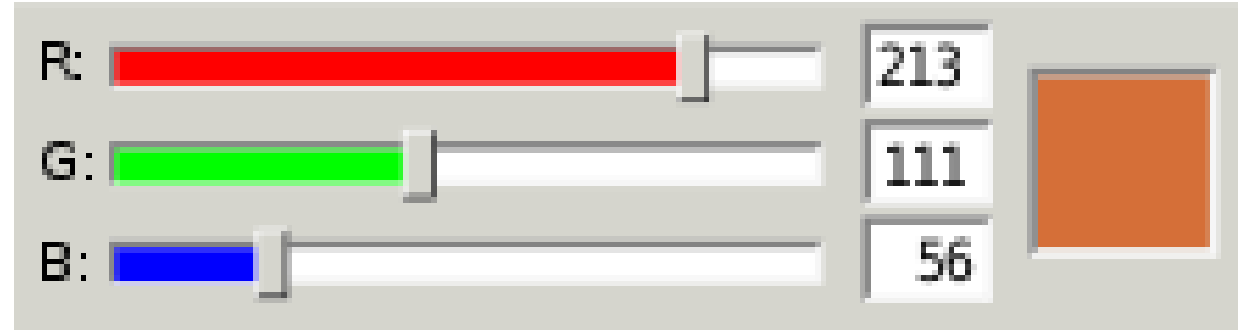
Sayısal verilere örnekler



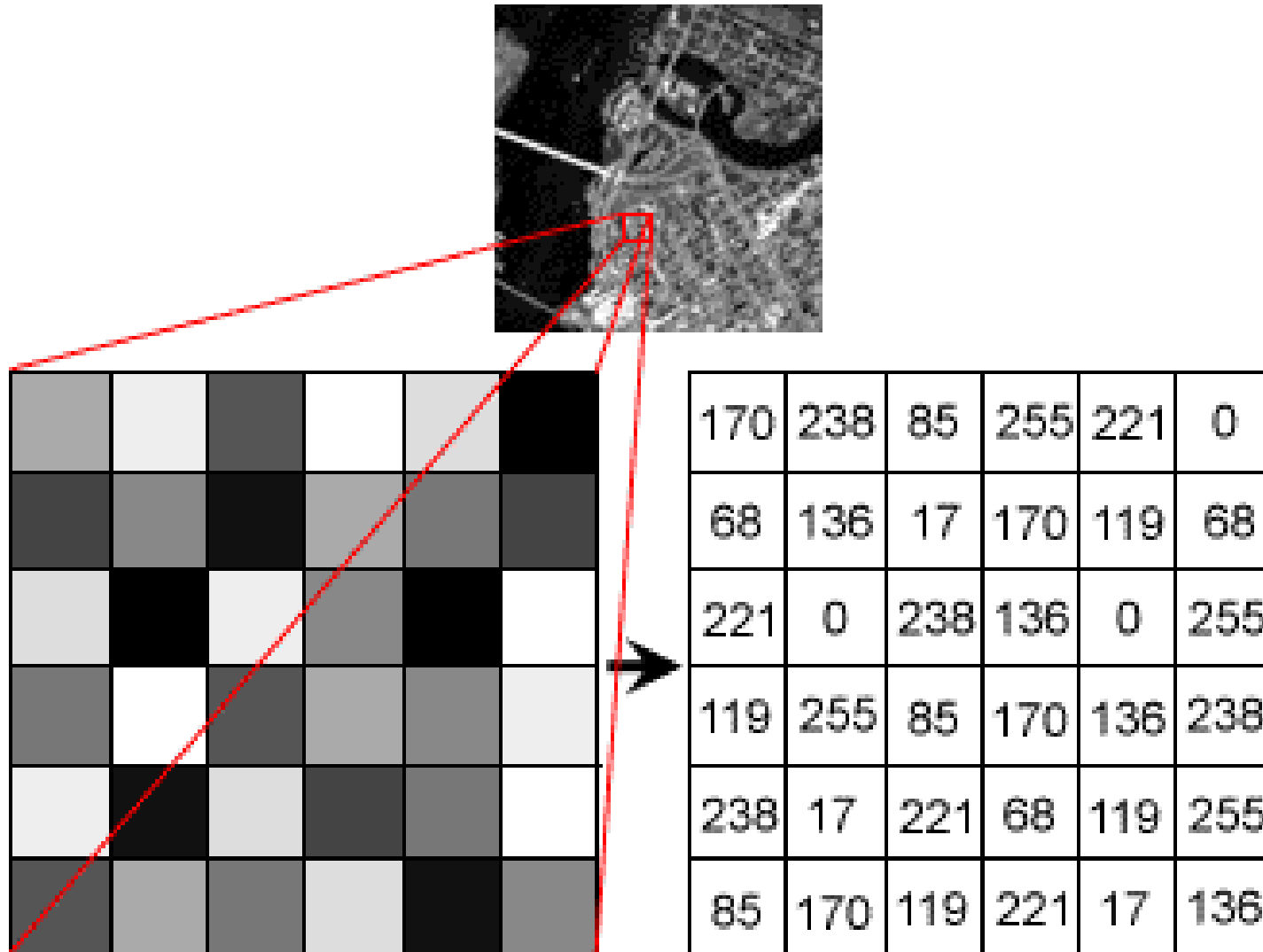
Sayısal verilere örnekler



- Görüntüyü oluşturan pikseller kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerinden oluşur. Genelde her bir bileşen 8 bitlik çözünürlüğe sahiptir. Yani her bir bileşen 0-255 arası toplam 256 değer alır. Dolayısıyla bir pikseli saklamak için 24 bitlik alan gerekir.



Sayısal verilere örnekler



Sayı sistemleri

Genel olarak bir S sayı sisteminin ifadesi:

$$S = d_n R^n + d_{n-1} R^{n-1} + \dots + d_2 R^2 + d_1 R^1 + d_0 R^0$$

Burada rakamlar d , taban R ile gösterilir.

Virgüllü sayı:

$$S = d_n R^n + d_{n-1} R^{n-1} + \dots + d_2 R^2 + d_1 R^1 + d_0 R^0, d_1 R^{-1} + d_2 R^{-2} + d_3 R^{-3} + \dots$$

Sayı sistemleri

Sık kullanılan bazı sayı sistemleri:



Onluk (Decimal) sistem

Genel ifade: digit: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$$\begin{aligned} \textit{Decimal} = & d_n 10^n + \dots + d_3 10^3 + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0 10^0, \\ & d_{-1} 10^{-1} + d_{-2} 10^{-2} + d_{-3} 10^{-3} + \dots \end{aligned}$$

Onluk (Decimal) sistem

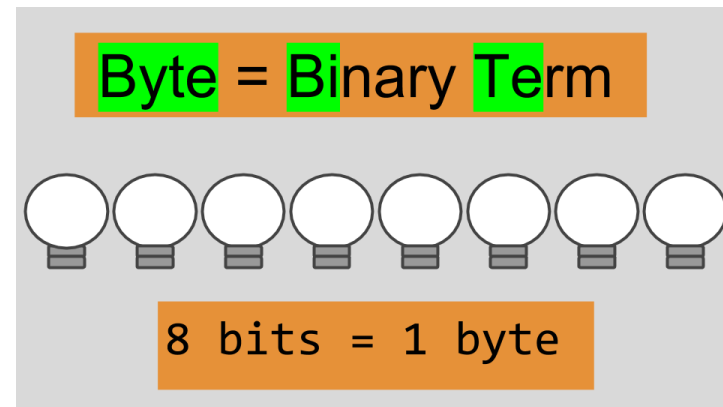
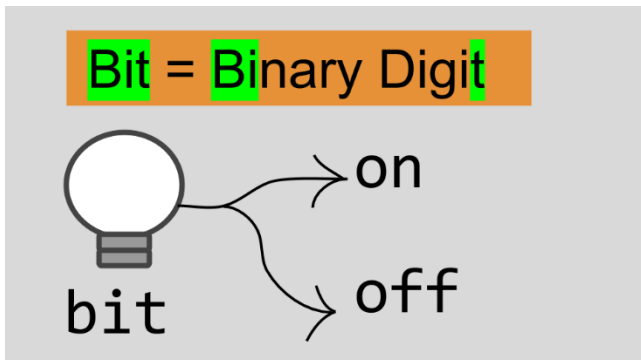
Örnek: 2017,2018

$$\begin{aligned} 2017,2018 = & 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\ & + 2 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

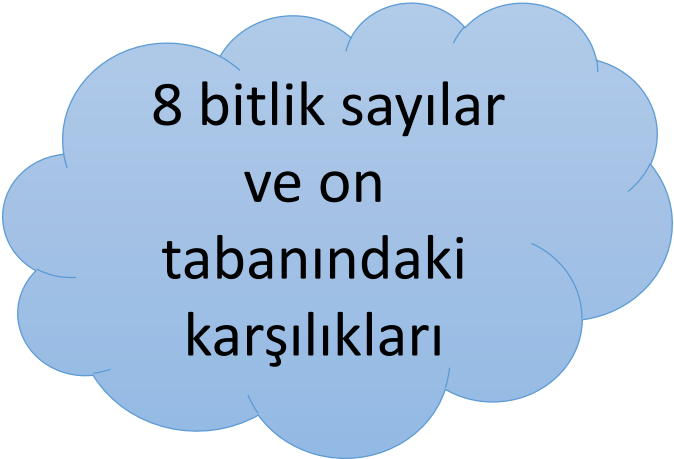
İkili (Binary) sayı sistemi

Genel ifade:

$$\text{Binary} = d_n 2^n + \dots + d_3 2^3 + d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0, \\ d_{-1} 2^{-1} + d_{-2} 2^{-2} + d_{-2} 2^{-3} + \dots$$



| 10 tabanı | 2 tabanı |
|-----------|----------|
| 0 | 00000000 |
| 1 | 00000001 |
| 2 | 00000010 |
| 3 | 00000011 |
| ... | ... |
| 65 | 01000001 |
| 66 | 01000010 |
| 67 | 01000011 |
| ... | ... |
| 254 | 11111110 |
| 255 | 11111111 |



8 bitlik sayılar
ve on
tabanındaki
karşılıkları

İkili (Binary) sayı sistemi

10111010

MSB

En önemli bit
(Most Significant
Bit)

LSB

En önemsiz bit
(Least Significant
Bit)

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkili sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$\begin{aligned}(1101)_2 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 8 + 4 + 0 + 1 \\ &= 13\end{aligned}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: $(10110101)_2 = ?$

$$(10110101)_2$$

$$= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 128 + 32 + 16 + 4 + 1$$

$$= 181$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: 8 bit ile ifade edilebilecek en büyük sayı nedir?

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkili sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: 8 bit ile ifade edilebilecek en büyük sayı nedir?

$$(11111111)_2$$

$$= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$= 255$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkili sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(101.101)_2 = (?)_{10}$$

$$\begin{aligned}(101.101)_2 &= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 4 + 1 + 1/2 + 1/8 \\ &= 5.625\end{aligned}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal → Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(155)_{10} = (?)_2$$

| <u>İşlem</u> | <u>Bölüm</u> | <u>Kalan</u> |
|--------------|--------------|--------------|
| 155 / 2 | 77 | 1 |
| 77 / 2 | 38 | 1 |
| 38 / 2 | 19 | 0 |
| 19 / 2 | 9 | 1 |
| 9 / 2 | 4 | 1 |
| 4 / 2 | 2 | 0 |
| 2 / 2 | 1 | 0 |
| 1 | → | 1 |

LSB

(10011011)₂

MSB

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal → Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(7.625)_{10} = (?)_2$$

| İşlem | Bölüm | Kalan |
|-------|-------|-------|
| 7 / 2 | 3 | 1 |
| 3 / 2 | 1 | 1 |
| 1 | → | 1 |



| İşlem | Çarpım | Tam kısım |
|-------------------------|--------|-----------|
| $0.625 \times 2 = 1.25$ | 1 | |
| $0.25 \times 2 = 0.50$ | 0 | |
| $0.50 \times 2 = 1.0$ | 1 | |



MSB

LSB

$$(111.101)_2$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal → Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(0.85)_{10} = (?)_2$$

İşlem

Çarpım

Tam kısım

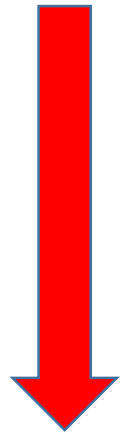
$$0.85 \times 2 = 1.70 \quad 1$$

$$0.70 \times 2 = 1.40 \quad 1$$

$$0.40 \times 2 = 0.80 \quad 0$$

$$0.80 \times 2 = 1.60 \quad 1$$

$$0.60 \times 2 = 1.20 \quad 1$$



$$(0.85)_{10} = (0.11011)_2$$

İşlemler devam ettirilebilir.

İkili (Binary) sayı sistemi

Toplama:

$$\begin{array}{r} 101 \\ + 11 \\ \hline 1000 \end{array}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Çıkarma:

$$\begin{array}{r} 101 \\ - 11 \\ \hline 010 \end{array}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Çarpma

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ +101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Bölme

$$\begin{array}{r} 1010 \\ - 11 \\ \hline 0100 \\ - 11 \\ \hline 001 \end{array}$$

| | |
|-------|----|
| 1010 | 11 |
| - 11 | |
| <hr/> | |
| 0100 | 11 |
| - 11 | |
| <hr/> | |
| 001 | |

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

$$D = d_n 8^n + \dots + d_3 8^3 + d_2 8^2 + d_1 8^1 + d_0 8^0, \\ d_{-1} 8^{-1} + d_{-2} 8^{-2} + d_{-2} 8^{-3} + \dots$$

- Sekizli sayı sistemi, ikili sayıları gösterimini basitleştirmek için kullanılır.
- Geçmiş yıllarda, 12-bit, 24-bit veya 36-bit gibi 3 ile bölünebilen kelime uzunluğuna sahip bilgisayarlarda kullanılmıştır.
- Günümüzde, 16 bit, 32 bit veya 64 bit gibi kelime uzunluğu sekize bölünen bilgisayarlarda yerini onaltılık sayı sistemine bırakmıştır.

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Octal → **Decimal**

Sekizlik sistemden onluk sisteme dönüşüm

• $(37246)_8 = (16038)_{10}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|

Octal Number

decimal

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|------------------------|
| 8^4 | 8^3 | 8^2 | 8^1 | 8^0 | |
| | | | | | $6 \times 8^0 = 6$ |
| | | | | | $4 \times 8^1 = 32$ |
| | | | | | $2 \times 8^2 = 128$ |
| | | | | | $7 \times 8^3 = 3584$ |
| | | | | | $3 \times 8^4 = 12288$ |
| | | | | | <hr/> |
| | | | | | 16038 |

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Decimal → **Octal**

Onluk sistemden sekizlik sisteme dönüşüm

- $(37)_{10} = (45)_8$

| | |
|------|---|
| 37 | 8 |
| - 32 | 4 |
| — | |
| 5 | |

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Decimal → **Octal**

Onluk sistemden sekizlik sisteme dönüşüm

• $(333)_{10} = (515)_8$

The diagram illustrates the conversion of the decimal number 333 to octal (base 8) using repeated division. The process is shown in three stages of division, with the remainders collected from bottom to top to form the final octal number.

Stage 1: $333 \div 8$
Quotient: 41, Remainder: 5 (circled)

Stage 2: $41 \div 8$
Quotient: 5, Remainder: 1 (circled)

Stage 3: $5 \div 8$
Quotient: 0, Remainder: 5 (circled)

Blue arrows indicate the sequence of remainders: 5 (from Stage 1), 1 (from Stage 2), and 5 (from Stage 3), which are read from bottom to top to form the octal number 515.

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

$$H = d_n 16^n + \dots + d_3 16^3 + d_2 16^2 + d_1 16^1 + d_0 16^0, \\ d_{-1} 16^{-1} + d_{-2} 16^{-2} + d_{-2} 16^{-3} + \dots$$

- Sekizli sayı sistemi gibi ikili sayıları gösterimini basitleştirmek için kullanılır.
- Günümüz bilgisayar sistemlerinde yaygın olarak kullanılır.
- Örnekler:
 - Görüntü renk kodları
 - Adres kodları
 - Makine kodları vb..

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

- Onaltılık sistemde rakamlar:
 - 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

| Decimal | 0 | 1 | ... | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-------------|---|---|-----|---|----|----|----|----|----|----|
| Hexadecimal | 0 | 1 | ... | 9 | A | B | C | D | E | F |


Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

Decimal → Hexadecimal

Onluk sistemden onaltılık sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(333)_{10} = (?)_{16}$$

| İşlem | Bölüm | Kalan | |
|------------|-------|-------|--|
| $333 / 16$ | 20 | D |  |
| $20 / 16$ | 1 | 4 | |
| 1 | → | 1 | |
| | | | LSB |
| | | | $(14D)_{16}$ |
| | | | MSB |

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

Hexadecimal→Decimal

Onaltılık sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(14D)_{16} = (?)_{10}$$

$$\begin{aligned}(14D)_{16} &= 1 \times 16^2 + 4 \times 16^1 + 13 \times 16^0 \\ &= 256 + 64 + 13 \\ &= 333\end{aligned}$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(11101)_2 = (?)_8$

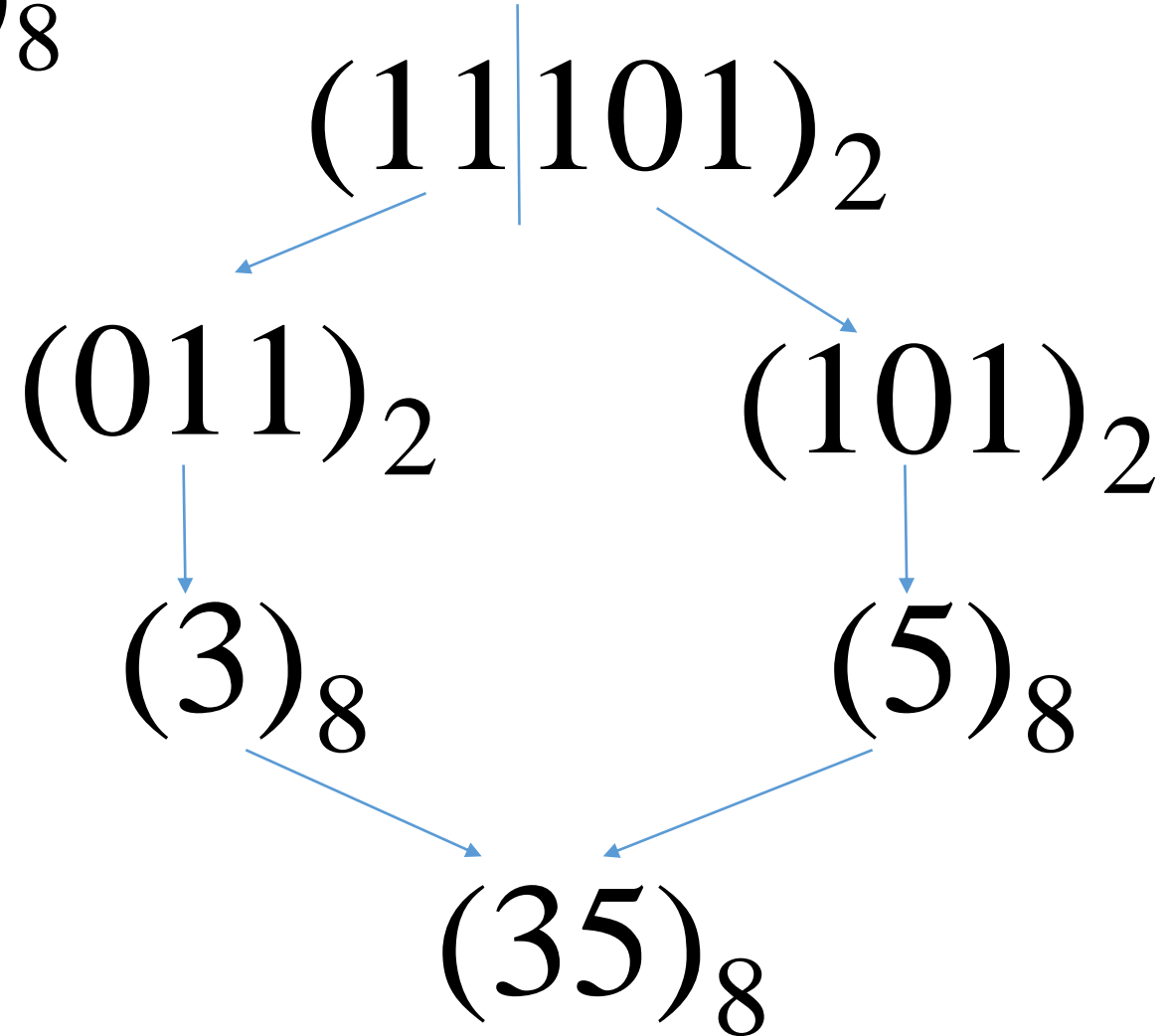
$$(11101)_2 = (29)_{10}$$

$$(29)_{10} = (35)_8$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek:

$$(11101)_2 = (?)_8$$



Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(2574)_8 = (?)_2$

$(2574)_8$

$(010 \ 101 \ 111 \ 100)_2$



$(010101111100)_2$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(10111011111101)_2 = (?)_{16}$

$(0010 \quad 1110 \quad 1111 \quad 1101)_2$



$(2)_{16}$



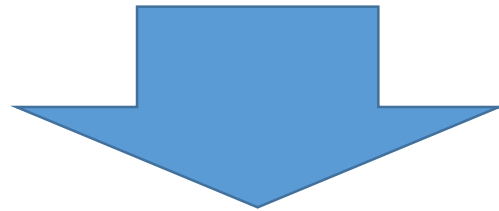
$(E)_{16}$



$(F)_{16}$



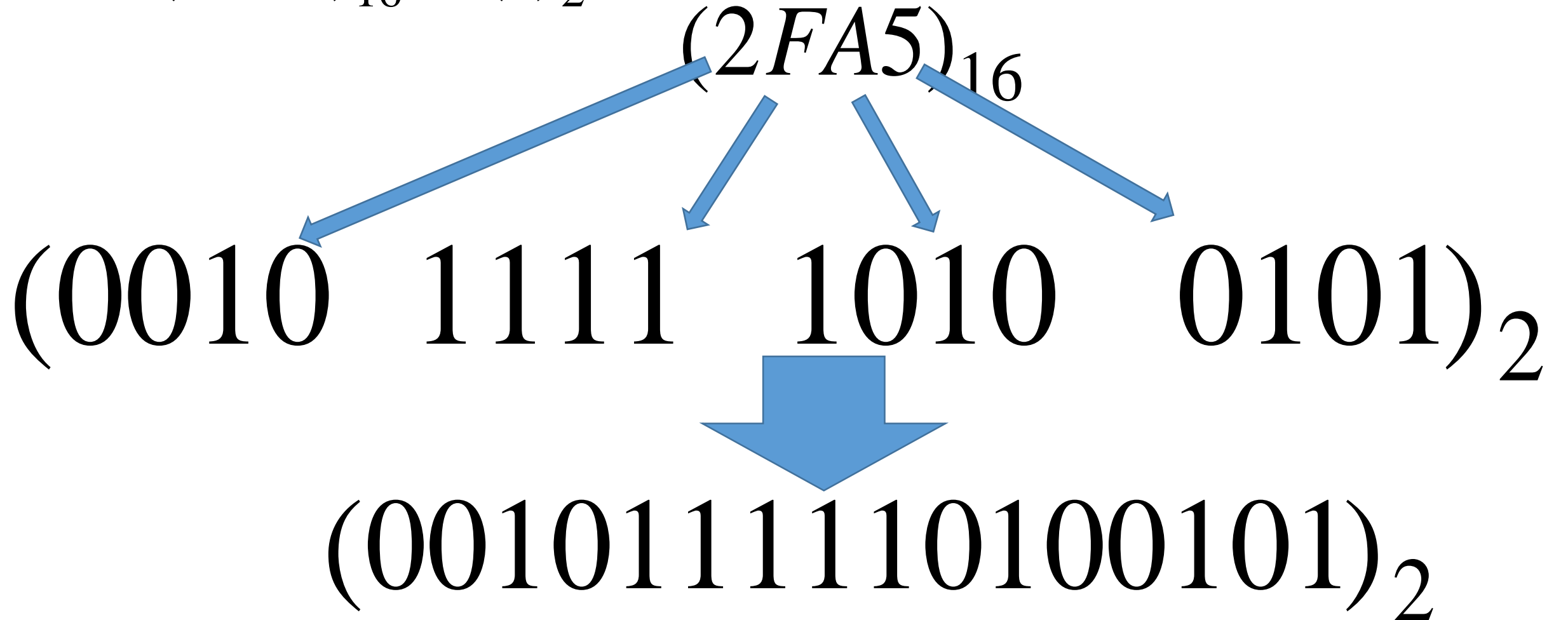
$(D)_{16}$



$(2EFD)_{16}$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(2FA5)_{16} = (?)_2$

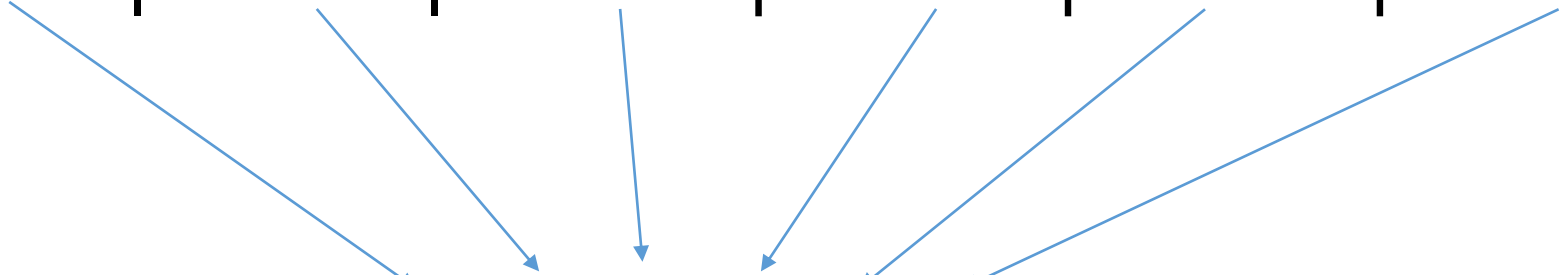


Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(F51A)_{16} = (?)_8$

$$(F51A)_{16} = (1111010100011010)_2$$

$$(001 | 111 | 010 | 100 | 011 | 010)_2$$


$$(172432)_8$$

Tümleyen aritmetiği

- Bilgisayarlarda çıkarma işlemini gerçekleştirmek için tümleyen aritmetiği kullanılır. M iki tabanında bir sayı, N bu sayının basamak adedi olmak üzere M sayısının 1 ve 2 tümleyeni aşağıdaki gibi belirlenir:

- 1 tümleyen aritmetiği
$$r = (2^N)_2 - (M)_2 - 1$$

- 2 tümleyen aritmetiği
$$r = (2^N)_2 - (M)_2$$

Tümleyen aritmetiği

- **Örnek:** 1010

- $N=4$

- 1 tümleyeni:

- $10000-1010-1=$

- $1111-1010= 0101$

(bitlerin terslenmiş hali)

Tümleyen aritmetiği

- Örnek: 1010

- $N=4$

- 2 tümleyeni:

-

$$10000 - 1010 = 0110$$

- $(1 \text{ tümleyeni} + 1)$

1 tümleyeni

Sayı 1 tümleyeni

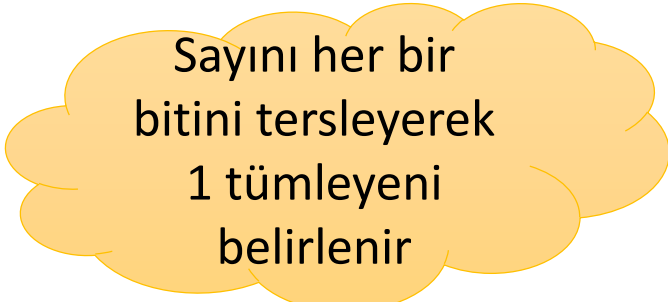
0 → 1

1 → 0

1111 → 0000

1010 → 0101

10100011 → 01011100



Sayıyı her bir
bitini tersleyerek
1 tümleyeni
belirlenir

2 tümleyeni

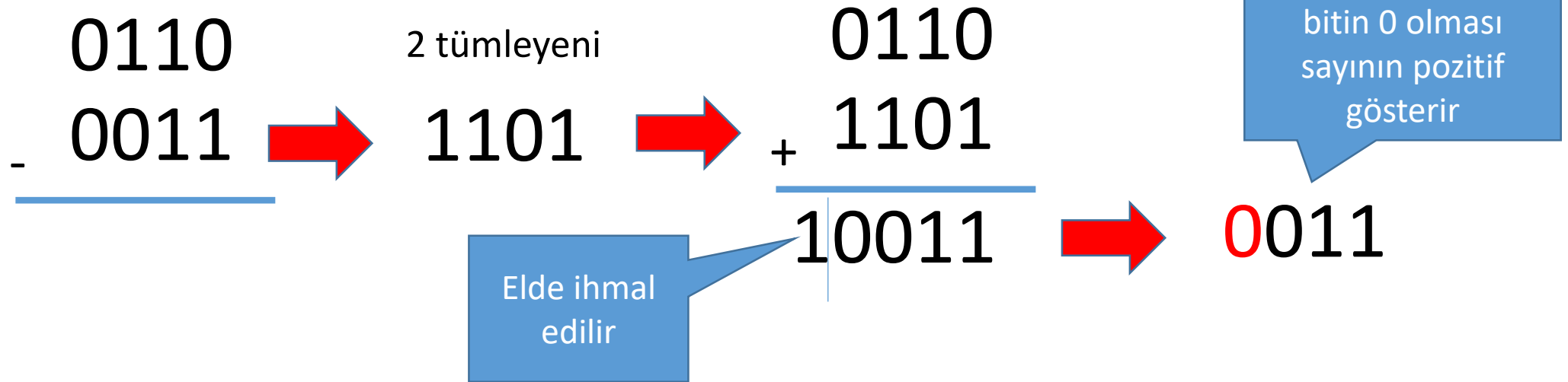
Pratikte 2 tümleyenini hesaplamak için 1 tümleyeni hesaplanır ve sonuca 1 eklenir.

| <u>Sayı</u> | <u>1 tümleyeni</u> | <u>2 tümleyeni</u> |
|-------------|--------------------|--------------------|
| 1111 | → 0000 | → 0001 |
| 1010 | → 0101 | → 0110 |
| 1011 | → 0100 | → 0101 |

2 tümleyeni ile çıkarma işlemi

- M-N işlemini gerçekleştirmek için
- N sayısının negatifi ile M sayısı toplanır.
- $M-N=M+(-N)$

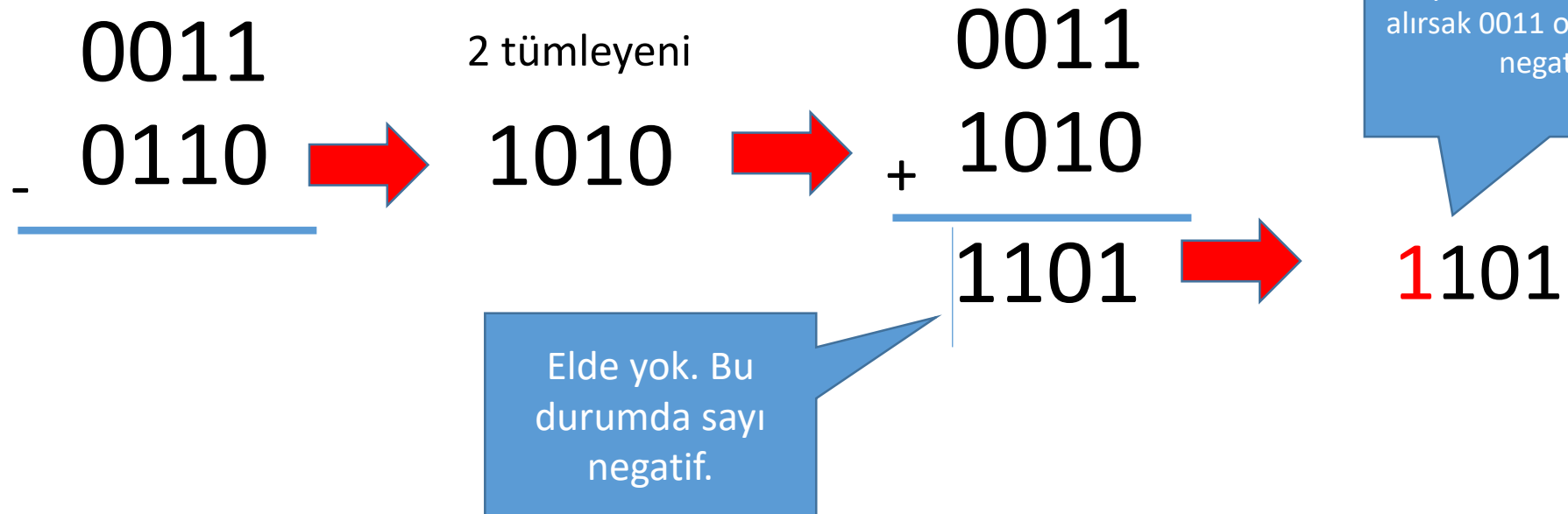
Örnek:



2 tümleyeni ile çıkarma işlemi

- $M-N$ işlemini gerçekleştirmek için
- N sayısının negatifi ile M sayısı toplanır.
- $M-N=M+(-N)$

Örnek:



Örnekler

| İşaretli sayı | Onluk değeri |
|---------------|--------------|
| 0000 | 0 |
| 0001 | 1 |
| 0010 | 2 |
| 0011 | 3 |
| 0100 | 4 |
| 0101 | 5 |
| 0110 | 6 |
| 0111 | 7 |

| İşaretli sayı | Onluk değeri |
|---------------|--------------|
| 1000 | -8 |
| 1001 | -7 |
| 1010 | -6 |
| 1011 | -5 |
| 1100 | -4 |
| 1101 | -3 |
| 1110 | -2 |
| 1111 | -1 |

Negatif (1 ile başlayan sayılarda) sayının değerini anlamak için 2 tümleyenini alınıp önüne – işareti yazarız. Örneğin: 1101 sayısı onluk 13 sayısına karşılık gelirken, eğer bu işaretli sayı ise $-0011 = -3$ sayısına karşılık gelmektedir.

Uygulamalar

```
public static void main(String[] args) {  
  
    //örnek sayı tanımlamaları  
    int s1=1234;  
    System.out.println ("Decimal="+s1+"-> Binary=" +  
        Integer.toBinaryString(s1));  
    System.out.println ("Decimal="+s1+"-> Hexadecimal=" +  
        Integer.toHexString(s1));  
  
    //sayının değeri hexadecimal belirtilebilir  
    int s2=0xabc;  
    System.out.println ("s2="+s2);  
    //sayının değeri binary belirtilebilir  
    int s3=0b11111111;  
    System.out.println ("s3="+s3);  
}
```

- Dönüşüm örnekleri için Java ile yazılmış program

Uygulamalar

```
System.out.println ("\n--- Toplama örneği ---");
```

```
int x=8;
```

```
int y= 3 ;
```

```
int z=x+y;
```

```
System.out.printf("\t%7s\n",Integer.toString(x));
```

```
System.out.printf("\t%7s\n",Integer.toString(y));
```

```
System.out.printf("\t+-----\n");
```

```
System.out.printf("\t%7s\n",Integer.toString(z));
```

Uygulamalar

```
Output - SayiSistemleri (run) x SayiSistemleri.java x
run:
Onluk=1234-> İkilik=10011010010
Onluk=1234-> Onaltılık=0x4d2
s2=110235
s3=255

--- Toplama örneği ---
      1000
       11
+-----
      1011
```

Uygulamalar

```
System.out.println (
```

```
int x=8;
```

```
int y=-3;
```

```
int z=x+y;
```

```
System.out.printf("\n
```

```
System.out.printf("\n
```

```
System.out.printf("\n
```

--- Toplama örneği ---

1000

111111111111111111111111111111111101

 $+$

101

int veri tipi 32 bit olduğu için -3 sayısının rakam
adedi 32. Bitleri tersleyip sayıya 1 ekledikten
sonra:

00000000000000000000000000000000000010

1

+

11

önüne negatif işaret konursa, sayının $-(11)=-3$ olduğu görülür.

Tekrar soruları

$(63)_{10}$ sayısının ikilik sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(111101)_2$

b) $(100001)_2$

c) $(111111)_2$

d) $(100000)_2$

Tekrar soruları

$(10101)_2$ sayısının onluk sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $(11)_{10}$
- b) $(21)_{10}$
- c) $(25)_{10}$
- d) $(15)_{10}$

Tekrar soruları

$(1011101101)_2$ sayısının onaltılık sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(2EF)_{16}$

b) $(2EC)_{16}$

c) $(54B)_{16}$

d) $(2ED)_{16}$

Tekrar soruları

$(A5F)_{16}$ sayısının ikilik sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 101001011111
- b) 100001011111
- c) 100111011011
- d) 110001011111

Tekrar soruları

$(010101)_2$ sayısının 1 tümleyeni aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(010101)_2$

b) $(101010)_2$

c) $(000111)_2$

d) $(110111)_2$

Tekrar soruları

$(010101)_2$ sayısının 2 tümleyeni aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(010101)_2$

b) $(101010)_2$

c) $(001011)_2$

d) $(101011)_2$

Tekrar soruları

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 101 \\ \hline \end{array}$$
 işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $(110010)_2$
- b) $(100010)_2$
- c) $(101010)_2$
- d) $(10001)_2$

Tekrar soruları

$C = 1010 - 0011$ yanda verilen 4 bitlik iki sayı üzerinde gerçekleştirilen çıkarma işleminin 2 tümleyeni kullanılarak toplama işlemi cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir

- a) $C = 1101 + 0011$
- b) $C = 1010 + 1101$
- c) $C = 1010 + 0111$
- d) $C = 1010 + 1011$

Tekrar soruları

- $(-3)_{10}$ sayısının ikilik sistemde 2 tümleyenine göre 4 bitlik uzunluktaki ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(1001)_2$ b) $(0011)_2$ c) $(1101)_2$ d) $(1110)_2$