Ad Soyad:

30/11/2013

No:

Şube:

Sakarya Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği
BSM307 İşaretler ve Sistemler
Güz 2013 Ara Sınav

C E V A P L A R

1. Fark denklemi $y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine cevabın

a. Doğal çözümünü

b. Zorlanmış çözümünü bulunuz.

Çözüm:

a. Başlangıç koşulları 0 verildiği için $y_d(n) = 0$ dır.

b. $y_z = y_ö + y_d$

$y_ö(n) = Ku(n)$

$Ku(n) - 4Ku(n-1) + 4Ku(n-2) = u(n)$

$n \geq 2$ için $K - 4K + 4K = 1$ eşitliği ile $K = 1$ bulunur.

$y_ö(n) = u(n)$

$y(n) = \lambda^n$

$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0$

$\lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$ eşitliğinden $\lambda_{1,2} = 2$ de çift katlı kök

$y_d(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n$ olarak ifade edilir.

$y_z(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n + u(n)$

Verilen fark denkleminden

$y(0) = u(0) + 4y(-1) - 4y(-2) = 1$

$y(1) = u(1) + 4y(0) - 4y(-1) = 1 + 4 = 5$

$y_z(0) = C_1 + 1 = 1$

$y_z(1) = 2C_1 + 2C_2 + 1 = 5$ eşitlikleri kullanılarak

$C_1 = 0\,, C_2 = 2$ bulunur.

$y_z(n) = (n2^{n+1} + 1)u(n)$

2. $x(n) = (n+1)a^n u(n-1)$ ayrık zaman işaretin z-dönüşümünü yakınsama bölgesi ile birlikte bulunuz.

Çözüm

$x(n) = na^n u(n-1) + a^n u(n-1) = nx_1(n) + x_1(n)$ şeklinde iki işaretin toplamı olarak yazılır.

$x_1(n) = a^n u(n-1) = aa^{n-1}u(n-1)$ dir.

$x_2(n) = a^n u(n)$ dersek $x_1(n) = ax_2(n-1)$ yazılabilir.

Bu durumda $X_2(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ $ve\ yakınsama\ bölgesi$ $|z| > a$ olacaktır.

$X_1(z) = az^{-1}X_2(z) = \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$ olacaktır. YB $|z| > a$

$\mathcal{Z}\{nx_1(n)\} = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ $|z| > a$

Bu durumda

$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} + \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}} = \frac{az^{-1}(2-az^{-1})}{(1-az^{-1})^2}$ ve $|z| > a$ bulunur.

3. $X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}$ ifadesinin ters z-dönüşümünü aşağıda verilen yakınsama bölgeleri için bulunuz.

a. $1 < |z| < 2$

b. $|z| > 2$

Çözüm:

$X(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}}$ şeklinde kısmi kesirlere ayırırsak

$A = \left.\frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}}\right|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{3}$ ve $B = \left.\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right|_{z^{-1}=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$ olarak bulunur.

$X(z) = \frac{1/3}{1-z^{-1}} + \frac{-1/3}{1+2z^{-1}} = X_1(z) + X_2(z)$ dersek

a.

$X_1(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-z^{-1}}$ $|z| > 1$ yakınsama bölgesi ile $x_1(n) = \frac{1}{3}u(n)$ olarak bulunur.

$X_2(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+2z^{-1}}$ $|z| < 2$ yakınsama bölgesi ile $x_2(n) = \frac{1}{3}(-2)^n u(-n-1)$

$x(n) = \frac{1}{3}\big(u(n) + (-2)^n u(-n-1)\big)$ olarak bulunur.

b.

$x_1(n)$ a şıkkındaki ile aynıdır.

a şıkkından farklı olarak

$X_2(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+2z^{-1}}$ $|z| > 2$ yakınsama bölgesi ile $x_2(n) = -\frac{1}{3}(-2)^n u(n)$ olarak bulunur.

$x(n) = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n)u(n)$ olarak bulunur.