

Adı Soyadı:

Bilg. Msh. 2.öğretim

İmza:

Öğrenci No:

CEVAP ANAHTARI

NOTU:

NOT: Süre: 45 dk.olup sadece Ders notları (defterler) serbesttir !...**SORULAR**

1. $y = c_1x + c_2x^{-1}$ eğri ailesinin diferansiyel denklemi bularak denklemin merteye ve lineerliğine göre sınıflandırınız.

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x-y}$ denklemini homojen denklem midir?. Cevabınız evet ise $y = ux$ dönüşümü uygulayarak denklemini çözünüz.

3. $(xy^3 - y)dx + (2x^2y^2 + 2x)dy = 0$ denklemini veriliyor. Buna göre

a) xy^3 -nin fonksiyonu şeklinde bir integrasyon çarpanı elde ediniz.

b) Bu çarpan yardımıyla denklemini tam diferansiyel hale getirerek çözünüz.

CEVAPLAR

$$\textcircled{1} \quad y = c_1x + c_2x^{-1} \quad \textcircled{1}$$

$$y' = c_1 - c_2x^{-2} \quad \textcircled{2}$$

$$y'' = 2c_2x^{-3} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ den } c_2 = \frac{x^3y''}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ den } c_1 = y' + x^2\left(\frac{x^3y''}{2}\right) = y' + \frac{xy''}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ den } y = x\left(y' + \frac{xy''}{2}\right) + x^{-1}\left(\frac{x^3y''}{2}\right)$$

$$y = xy' + \frac{x^2y''}{2} + \frac{x^2y''}{2} \Rightarrow \boxed{x^2y'' + xy' - y = 0} \quad \checkmark$$

2. mertebe lineer denklemdir.

$$\textcircled{2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x-y} = \frac{1+2(\frac{y}{x})}{2-(\frac{y}{x})} = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ şeklinde yazılabilir.} \text{ Homojen denklemdir.}$$

$$y = uX, y' = u'x + u \text{ ile.}$$

$$u'x + u = \frac{1+2u}{2-u}$$

$$\Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1+2u}{2-u} - u \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2-u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-u}{1+u^2} du = \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int \frac{2-u}{1+u^2} du - \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \arctan u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1) = \ln x + \ln C$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \arctan u = \ln(C \cdot x \sqrt{1+u^2})$$

$$\Rightarrow \boxed{2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(C \sqrt{x^2+y^2})} \quad \checkmark$$

$$(3) \quad M_y = (xy^3 - y)_y = 3xy^2 - 1$$

$$N_x = (2x^2y^2 + 2x)_x = 4xy^2 + 2$$

$$\alpha(xy) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM} d(xy)} = e^{\int \frac{(3xy^2 - 1) - (4xy^2 + 2)}{y(2x^2y^2 + 2x) - x(xy^3 - y)} d(xy)}$$

$$= e^{\int \frac{-xy^2 - 3}{x^2y^3 + 3xy} d(xy)} = e^{\int \frac{-(xy^2 + 3)}{xy(xy^2 + 3)} d(xy)} = e^{-\int \frac{1}{xy} d(xy)}$$

$$= e^{-\ln(xy)} = (xy)^{-1} = \frac{1}{xy} \quad \text{bir integral çarpandır.}$$

$$\psi(xy) = \int \bar{M} dx + h(y)$$

$$= \int \frac{1}{xy} (xy^3 - y) dx + h(y) = \int (y^2 - \frac{1}{x}) dx + h(y)$$

$$\psi(xy) = xy^2 - \ln x + h(y)$$

$$h(y) \because \text{bulmak için } \psi_y = \bar{N} \quad \text{kullanılır.}$$

$$(xy^2 - \ln x + h(y))_y = \frac{1}{xy} (2x^2y^2 + 2x)$$

$$2xy - 0 + h'(y) = 2xy + \frac{2}{y} \Rightarrow h'(y) = \frac{2}{y} \Rightarrow h(y) = 2\ln y + C$$

Genel çözüm

$$\psi(xy) = xy^2 - \ln x + 2\ln y + C \Rightarrow$$

$$\boxed{xy^2 + \ln(y^2/x) = C_0} \quad \checkmark$$