$\Rightarrow$ Aşağıda verilen integrallerde M_n'yi teşkil ederek ve $n \to +\infty$ için limit alarak int. hesaplayınız.

$*_1 \displaystyle\int_0^5 x\,dx$:

$*_2 \displaystyle\int_0^1 x^2 dx$

$*_3 \displaystyle\int_0^1 e^x dx$

$*_4 \displaystyle\int_1^3 x^3 dx$

Çözüm; $*_1$ $\underbrace{0 \quad x_1}_{\Delta x}\underbrace{\quad x_2}_{\Delta x}\underbrace{\quad x_3}_{\Delta x} \ldots\ldots\ldots \underbrace{x_{n-1} \quad x_n}_{\Delta x}$

$0 \le x \le 5$ aralığı, uzunluğu $\Delta x = \frac{5}{n}$ olan n eşit aralığa bölünmüş olsun. x_n nokt. alt aralıkların sağ uç nokt. olarak yani,

$x_1 = \Delta x$

$x_2 = 2\Delta x$

$x_3 = 3\Delta x$

$\vdots$

$x_n = n\Delta x$ alarak $M_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

$= \sum_{i=1}^{n} (i.\Delta x)\Delta x$

$= (1+2+3+\ldots+n)(\Delta x)^2$

$= \frac{n.(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{5}{n}\right)^2$

$= \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ yi teşkil

edersek, $\int_0^5 x\,dx = \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{25}{2}$

$*_2$ $M_n = \sum_{i=1}^{n} (f x_i)\Delta x_i$

$M_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 (\Delta x_i)^3$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{n^3}$ ($2n^3$ / $6n^3$)

$= \frac{1}{3}$

Teorem; $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonk. olsun. $\forall x \in (a,b)$ için $\int f(x)dx = F(x) + c$ o.ş. sürekli bir $F:(a,b) \to \mathbb{R}$ fonk. varsa $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Tanım; İntegrallenebilen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonk. için o.ş. öz. mevcuttur;

$\bullet_1$ $\int_a^a f(x)dx = 0$

$\bullet_2$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $c \in [a,b]$ o.ü.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) $k \in \mathbb{R}$ o.ü.

$$\int_a^b k[f(x) \mp g(x)] = k\int_a^b f(x)\,dx \mp k\int_a^b g(x)\,dx$$

5) $f\ [-a,a] \to \mathbb{R}$ fonk. sürekli o.ü.

→ f tek ise $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

→ f çift " $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

30.04.13/salı

⇒ $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = ?$

$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} \Rightarrow f(-x) = -\frac{\sin x}{(1+x^2)}$ (tektir) → $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x\,dx}{1+x^2} = 0$

⇒ $\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{dx}{3-x^2}}_{\text{çift}} = 2\cdot\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3-x^2} = \left(2\cdot\frac{1}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|\right)\Big|_0^1$

⇒ $\int_1^e \frac{dx}{x\cdot(3-\ln x)} = ?$

I. yol

$\int \frac{dx}{x(3-\ln x)} = \int \frac{du}{(3-u)} = \left(-\ln|3-u|\right)\Big|_1^e$

$\left(u = \ln x \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\right)$

II. yol

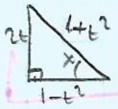
$u = \ln x \to \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$\left(\begin{array}{ll} x \to 1 \text{ için} & u = 0 \\ x \to e \ " & u = 1 \end{array}\right)$

$\int_0^1 \frac{du}{(3-\ln u)} = \left[-\ln(3-\ln x)\right]\Big|_0^1$

⇒ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x} = \int_0^1 \frac{2dt/1+t^2}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$t = \tan\frac{x}{2}$



$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$x \to 0$ için $t \to 0$

$x \to \frac{\pi}{2}$ " $t = 1$

İntegral Hesabının Temel Teoremi (Leibnitz Teoremi/Formülü)

$u=u(x)$ ve $v=v(x)$, $f(x)$'in türevlenebilir fonk. o.ü.

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = u'(x).f(u) - v'(x).f(v)$$

Ör/ $F=\int_{\sin x}^{2x^2}\cos 7x\,dx \Rightarrow F'(x)=?$

$=4x.\cos(7.2x^2) - (\cos x).\cos(7\sin x)$

Ör/ $\int_0^{\pi/6}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t \cos 3x\,dx\right]dt=?$

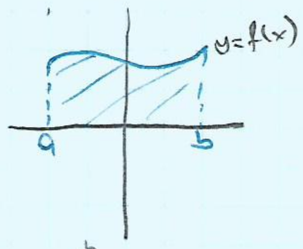
$\int_0^{\pi/6}[1.\cos 3t-0]\,dt = \frac{1}{3}\sin 3t\Big|_0^{\pi/6} -$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = 0.\infty$

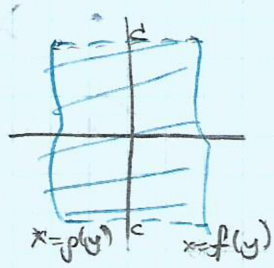
$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}}{x^2} = \frac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'hospital}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1.\frac{x^2}{x^4+1}}{2x} = 0$

ALAN HESABI

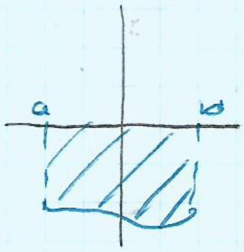
$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2\cos x}{1+\sin^{10}x}\,dx=?$ (tek fonk) $=\underline{0}$



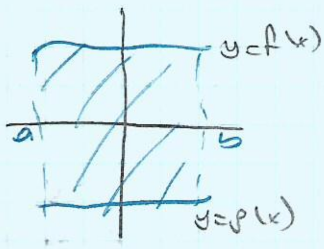
$A=\int_a^b f(x)\,dx$



$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy$



$A=-\int_a^b f(x)\,dx$



$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

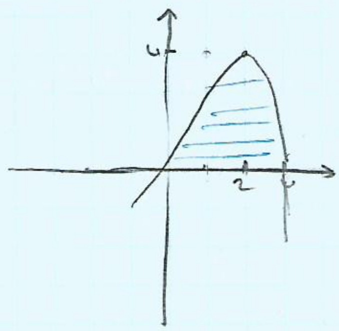
⇒ x-ekseni ve $y=4x-x^2$ eğrisi ile sınırlandırılan bölgenin alanını (SBA) bulunuz.

$y=x(4-x)$ $y=a(x-r)^2+k$ $(T(r,k))$ $y=4-(x-2)^2$

$y=0$ ← 0, 4 → $y=4$

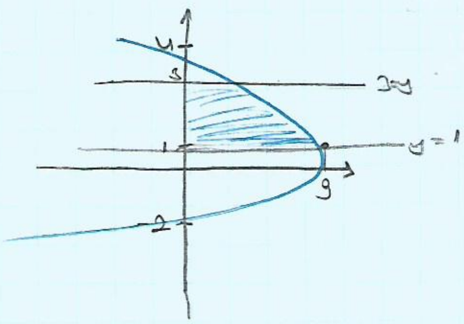
$$\int_0^4 (4x-x^2)\,dx = \frac{4x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$= \underset{(3)}{32}-\frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$



⇒ $x=8+2y-y^2$ parabolü $y=1$ ve $y=3$ doğru ile y ekseni s.b.a?

$x=-[y^2-2y-8]=-[(y-1)^2-9]=9-(y-1)^2 \to T(9,+1)$



$$\int_1^3 (8+2y-y^2)\,dy$$

$$= 8y+\frac{2y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_1^3$$

$$=(24+\cancel{9}-\cancel{9})-(8+1-1/3)$$

$$=24-\frac{26}{3}$$

⇒ $x=3y-y^2$ eğrisi ile $x+y=3$ doğru ve y-eks. ile s.b.a?

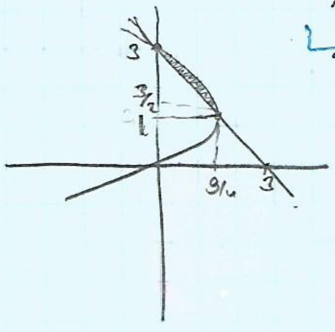
$y(3-y)$ → 0, 3

$3y-y^2=3-y$

$y^2-4y+3=0$

$\begin{pmatrix} y=1,\ 3 \\ x=2,\ 0 \end{pmatrix}$

$x=\frac{9}{4}-(y-\frac{3}{2})^2$



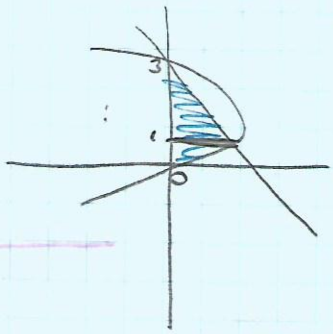
$$A=\int_1^3 (3y-y^2-3+y)\,dy$$

$$=-\frac{y^3}{3}+\frac{3y^2}{2}-3y\Big|_1^3$$

$\tan\frac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{2(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})}{2(\cos^2\frac{x}{2})}$

14

⇒ ($x = 3y - y^2$ ile $x+3$ doğrusu ve y-ekseni ile S.B.A?)



$$A = \int_0^1 (3y-y^2)\,dy + \int_1^3 (3-y)\,dy$$

⇒ $y = x^3 - 6x^2 - 8x$ ve x-eks. ile S.B.A?

$x(x^2 - 6x^2 - 8) = 0$

$x=0$, $x=2$, $x=4$

x		0	2	4
y	−	+	−	+

eks. altında — eks. üzerinde

$$\int_0^2 (x^3-6x^2-8x)\,dx - \int_2^4 (x^3-6x^2-8x)\,dx$$

⇒ $y = 2-x^2$ ve $y^3 = x^2$ eğr. ile S.B.A?

$2 - y = y^3$ $(y-1)(y^2+y+2) = 0$
(<0 kök yok)

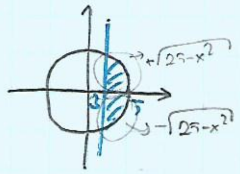
$(y=1)$

$y=1 \Rightarrow 2-x^2 = 1$, $1 = x^2$ $x = \mp 1$ $x=\mp 1$ $(1,1)$, $(-1,1)$ k.n.

$$A = \int_{-1}^{1} \left((2-x^2) - x^{2/3}\right) dx$$

$(1,-1)$ aralığında değer ver. $x=0$ $\dfrac{y=2}{y=0}$ → üstte.

⇒ $x^2+y^2=25$ dairesinden $x=3$ doğr. ile ayrılan küçük alanı bulunuz.



$$A=\int_3^5 \sqrt{25-x^2}-(-\sqrt{25-x^2})\,dx$$

$$=\int_3^5 2\sqrt{25-x^2}\,dx$$

$y=\mp\sqrt{25-x^2}$

CİSİMLERİN HACİMLERİ

03.05.13/Cuma

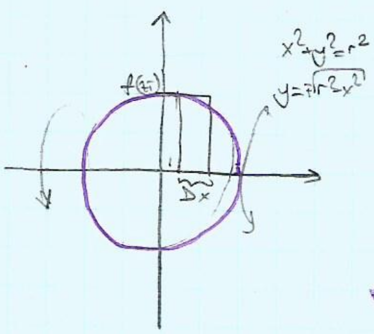
Verilen bir eğrinin bir doğru etrafında dönmesiyle oluşan cisimlerin hacimlerini inceleyeceğiz. Etrafında dönme yapılan eğriye „dönme ekseni" ve eğrinin dönmesiyle oluşan cisme ise „dönel cisim" denir.

1. Disk Metodu: Herhangi bir dikdörtgen kenarlarından birisi etrafında 360° döndüğünde bir silindir elde edilir. Bilindiği gibi r yarıçaplı, yüksekliği h olan bir silindirin hacmi, $V=\pi r^2 h$'dır. Disk metodu bu temel üzerine kurulmuştur.

$y=f(x)$ fonk. belirttiği eğrinin $[a,b]$ aralığında kalan kısmının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi (ED ile OCH) yaklaşık olarak $V\approx\pi\sum_{i=1}^{n}[f(z_i)]^2.\Delta x_i$ ile ifade edilir. Burada z_i, dikdörtgenin dönme ekseninin karşısındaki kenarının eğriyi kestiği noktanın apsisidir. Dolayısıyla istenen V hacmi, $V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(z_i)]^2.\Delta x=\pi\int_a^b\{f(x)]^2\,dx$

İki eğrinin x-ekseni ED ile OCH, $V=\pi\int_a^b\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}\,dx$ dır.

⇒ Kürenin hacim formülünü int. elde ediniz.

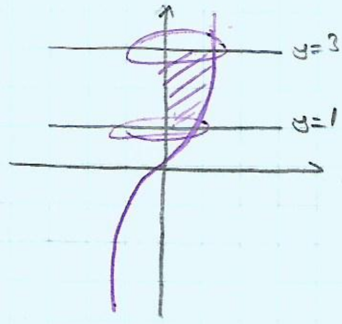


$$V=\pi[f(z_i)]^2.\Delta x$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}[(r^2-x^2)]^2.\Delta x$$

$$V=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)^2.\Delta x=\frac{4}{3}\pi r^3$$

⇒ $y=x^3$ eğrisi, y-ekseni, $y=1$ ve $y=3$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin y-ekseni E.D ile O.C.H=?



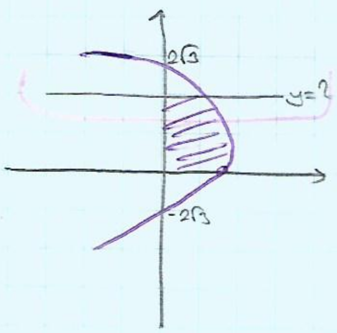
$y=x^3$

$y^{1/3}=x$

$$\underbrace{V=\pi\int_1^3 (y^{1/3})^2\,dy}$$

⇒ $y^2=12-4x$ eğrisi, $y=2$ doğrusu ve I. çeyrek bölg. eks. tarafından sınırlanan bölg. y-eks. E.D. ile O.C.H?

$$x=\frac{12-y^2}{4}=3-\frac{y^2}{4}$$



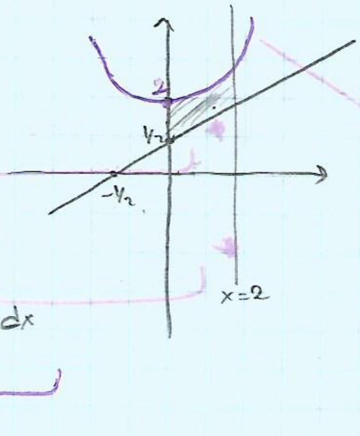
$$\underbrace{V=\pi\int_0^2 \left(3-\frac{y^2}{4}\right)^2 dy}$$

⇒ $y=\frac{x^2}{2}+2$ eğrisi ve $y=x+\frac{1}{2}$, $x=0$ ve $x=2$ doğruları ile sınırlanan bölg. x-ekseni E.D ile O.C.H?

Kesim nokt. ⇒ $\frac{x^2}{2}+2=x+\frac{1}{2}$

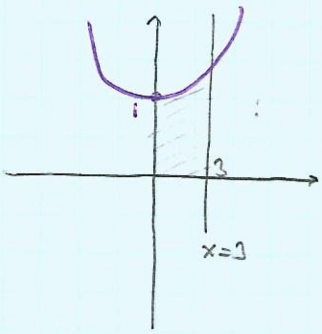
$x^2-2x+3=0$

$\Delta<0$ kes. n. yok



$$\underbrace{V=\pi\int_0^2\left[\left(\frac{x^2}{2}+2\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]dx}$$

⇒ $y=x^2+1$ eğrisi, x-ekseni, $x=0$ ve $x=3$ doğruları ile sınırlanan bölge x-ekseni E.D ile O.C.H?



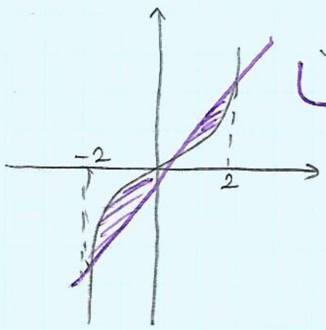
$$V=\pi\int_0^3 (x^2+1)^2\,dx$$

⇒ $y=\frac{1}{4}x^3$ eğrisi ve $y=x$ doğrusu ile sınırlanan bölge koor. ekseninin I. bölg. kalan kısmının,

ÖDEV
I. bölg. deyse nasıl olur?

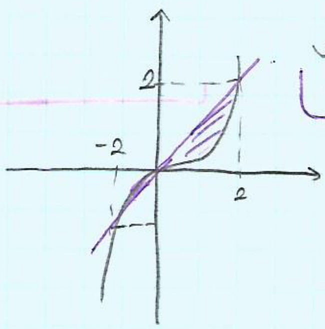
* x-ekseni E.D ile O.C.H?

$\frac{x^3}{4}=x \Rightarrow x=0,\ x=\mp 2$



$$V=\pi\int_0^2\left[x^2-\left(\tfrac{1}{4}x^3\right)^2\right]dx$$

* y-ekseni E.D ile O.C.H?

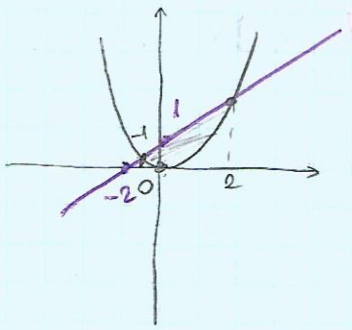


$$V=\pi\int_0^2\left[(4y)^{2/3}-y^2\right]dy$$

⇒ $y=x+2$ ve $y=x^2$ eğrileriyle sınırlanan bölge
* alanını?
* x-eks. E.D ile O.C.H?

Kes. nokt.; $x+2=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$x=2,\ x=-1$



* $A=\int_{-1}^{2}\left[(x+2)-x^2\right]dx$

* $V=\pi\int_{-1}^{2}\left[(x+2)^2-x^4\right]dx$

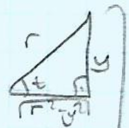
$\Rightarrow (x-\alpha)^2+y^2=r^2$ cemb. y-ekseni E.D. ile O.C.H? $(\alpha>0)$

$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left[\left(\alpha+\sqrt{r^2-y^2}\right)^2-\left(\alpha-\sqrt{r^2-y^2}\right)^2\right]dy$$

$$V=8\pi\alpha\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,dy$$

$y=r\sin t$

$dy=r\cos t\,dt$



$y\to 0$ için $t\to 0$

$y\to r$ için $t\to\frac{\pi}{2}$

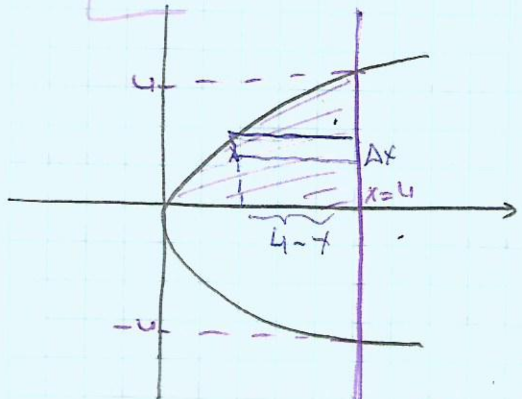
$$V=8\pi\alpha\int_0^{\pi/2}r^2\cos^2t\,dt=4\pi^2r^2\alpha \text{ br}^3$$

$(x-\alpha)^2+y^2=r^2$

$x-\alpha=\mp\sqrt{r^2-y^2}$

$x=\alpha\mp\sqrt{r^2-y^2}$

$\Rightarrow$ $x=\frac{y^2}{4}$ eğrisi, x-ekseni ve $x=4$ doğr. ile sınırlanan bölgenin $x=4$ doğrusu E.D. ile O.C.H?

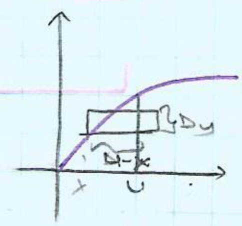


2 şekilde çözülebilir; *1 orijin nokt. (4,0) noktasına taşırsak (ötelersek) yeni parabol denklemi şöyle olur:

$x=x+4$, $y=y+0$ $\Rightarrow$ $x+4=\frac{y^2}{4}$ olur.

$$V=\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{4}-4\right)^2dy=\frac{512}{15}\pi \text{ br}^3$$

*2

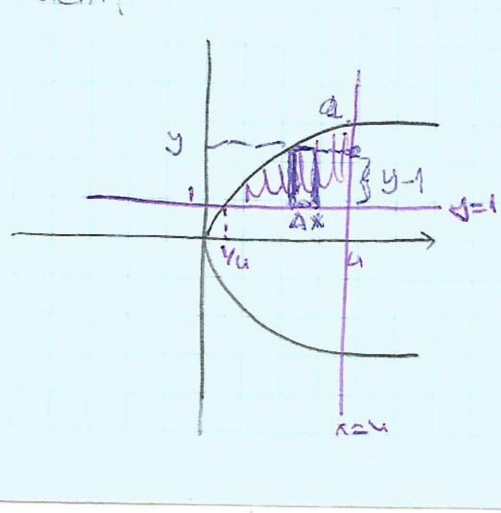


$V=\pi(4-x)^2\,\Delta y$

$V=\lim_{n\to 0}\sum_{i=1}\pi(4-x)^2\cdot\Delta y$

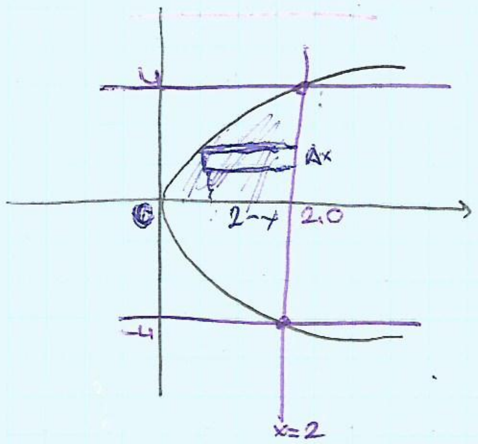
$$V=\int_0^4\pi\left(4-\frac{y^2}{4}\right)^2dy$$

$\Rightarrow$ $y=2\sqrt{x}$ eğrisi, $x=4$ ve $y=1$ doğruları ile sınırlanan bölg. $y=1$ doğrusu E.D. ile O.C.H?



$$V=\pi\int_{1/4}^{4}(y-1)^2\cdot\Delta x=\pi\int_{1/4}^{4}(2\sqrt{x}-1)^2\cdot dx$$

⇒ $y^2=8x$ parabolü ve $x=2$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin I. bölgede kalan kısmının, a) x-eks. E.D ile O.C.H b) $x=2$ doğrusu E.D ile O.C.H? c) $y=4$ d. E.D ile O.C.H?



a-) $V=\pi\int_0^2 (\sqrt{8x})^2\,dx = 16\pi$

b-) orijini (2,0) taşıyalım $\left.\begin{array}{l} x=x+2 \\ y=y+0 \end{array}\right\}$ $y=\sqrt{8x+16}$

$$V=\pi\int_0^4 \left(\frac{y^2}{8}-2\right)^2 dy = \frac{128}{5}\pi \text{ br}^3$$

c-) orijini (0,4) noktasına taşıyalım;

$\left.\begin{array}{l} x=x+0 \\ y=y+4 \end{array}\right\}$ $(y+4)^2=8x$
$y=\mp\sqrt{8x}-4$

$$V=\pi\int_0^2 (-4\mp\sqrt{8x})^2-(-4\mp\sqrt{8x})^2\,dx=\frac{256}{3}\pi$$

II. Silindirik Kabuk Metodu;

Bu metod aynı taban merkezli çemberlerden oluşan iç içe iki silindirin arasında kalan hacmin hesabı için genelleştirilmiştir.

$[a,b]$ aralığında $f(x)\geq g(x)$ olsun. $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri $x=a$ ve $x=b$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin y-eks. E.D. ile O.C.H

$$V=2\pi\int_a^b x\,[f(x)-g(x)]\,dx$$ eşitliğiyle belirlenir.

Bu metod x veya y-eks. paralel eks. etrafında dönme ile oluşan hacimlerin hesabında kullanılır. Dönme eks. d, y-eks. paralel bir doğru olsun ($x=d$ doğrusu). $y=f(x)$ fonk. $[a,b]$ aralığında kalan kısmı ile x-eks. arasında kalan bölg. $x=d$ doğrusu E.D ile O.C.H;

*1 Dönme eks. verilen bölgenin sağ tarafında ise,

$$V=2\pi\int_a^b (d-x).f(x).dx$$

*2 Dönme eks. verilen bölg. sol tarafında ise,

$$V = 2\pi \int_a^b (x-d)\, f(x)\, dx$$ eşitlikleriyle belirlenir.

06.05.13 / Ptesi

⇒ $x = 2y^3 - y^4$ eğrisi ile y-ekseni arasında kalan bölg. x-ekseni E.D ile o.c.h.?

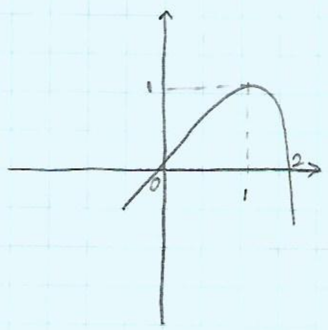
$V = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx$

$2y^3 - y^4 = 0 \Rightarrow y^3(2-y) = 0$

$y = 0,\ y = 2$

$$V = 2\pi \int_0^2 y\,[2y^3 - y^4]\,dy$$

⇒ $y = 2x - x^2$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin y-ekseni E.D ile o.c.h?



$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0$

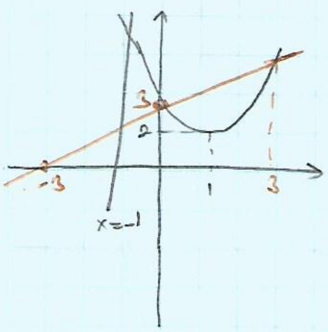
$x = 0,\ x = 2$

$y = 2x - x^2 = -(x^2 - 2x) = -[(x-1)^2 - 1]$

$= 1 - (x-1)^2$

$$V = 2\pi \int_0^2 x\,[2x - x^2]\,dx$$

⇒ $y = x^2 - 2x + 3$ parabolü ile $y = x+3$ doğrusunun arakesitinin oluşturduğu alanın $x = -1$ doğrusu E.D. ile o.c.h?



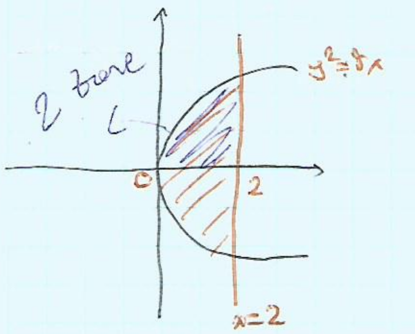
$x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

K.N. ; $x^2 - 2x + 3 = x + 3$

$x^2 - 3x = 0$; $x = 0$, $x = 3$

$$V = 2\pi \int_0^3 (x+1)\,[(x+3) - (x^2 - 2x + 3)]\,dx$$

⇒ $y^2 = 8x$ eğrisi ile $x=2$ doğrusu arasında kalan alanın $x=2$ doğrusu E.D. ile O.C.H.?

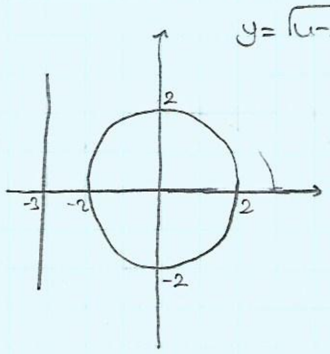


$\sqrt{8x} - (-\sqrt{8x})$

$$V = 2\pi \int_0^2 (2-x)\,[2\sqrt{8x}]\,dx$$

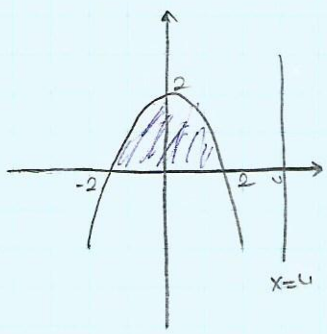
⇒ $x^2+y^2=4$ çemb $x=-3$ doğrusu E.D. ile O.C.H.?

$y=\sqrt{4-x^2}$



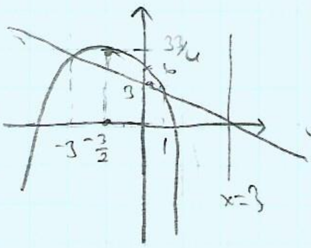
$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (x+3)\,(2\sqrt{4-x^2})\,dx$$

⇒ $x^2 = 4-y$ parabolü ile x-ekseni arasında kalan bölgenin $x=4$ doğrusu E.D. ile O.C.H?



$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (4-x)\,(x^2-4)\,dx$$

⇒ $y=-x^2-3x+6$ parabolü ile $x+y-3=0$ doğrusu arasında kalan bölge $x=3$ doğrusu E.D. ile O.C.H?



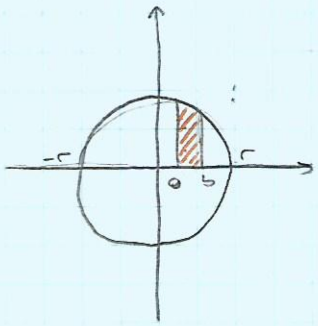
$-x^2-3x+6 = 3-x$

$x^2+2x-3=0 \quad \underline{x=-3} \quad \underline{x=1}$

$$y = -(x^2+3x-6) = -\left((x+\tfrac{3}{2})^2 - 6 - \tfrac{9}{4}\right) = -\left((x+\tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{33}{4}\right)$$

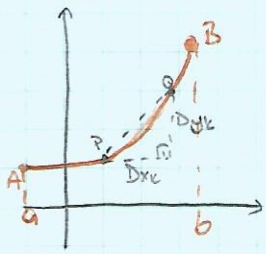
$$V = 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\,[(-x^2-3x+6)-(3-x)]\,dx$$

⇒ Üstten: $x^2+y^2=r^2$ çemberi, alttan x-ekseni ve yanlardan $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile sınırlanan bölge y-ekseni E.D. ile O.C.H?



$$\underline{V = 2\pi \int_a^b x\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)dx}$$

Eğri Uzunluğu Hesabı (Yay Uzunluğu)



İntegralin bir uygulaması da, verilen sürekli bir eğrinin yay uzunluğunun hesaplanmasıdır.

Bunun için AB yayı n tane eşit parçaya bölünür ve bu noktalar ardışık olarak birleştirilir. Böylece PQ kirişinin uzunluğu,

$$|PQ| = \sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2} \text{ olur.}$$

Buna göre bunların toplamı, $|PQ| \approx \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$ olur. Eğer AB yayının bölüntüsü sonsuz tane olarak hesaplanırsa,

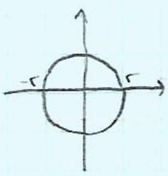
$$|PQ| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2\left(1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\cdot\Delta x$$

$$L = |PQ| = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{bulunur.}$$

⇒ r yarıçaplı bir çember yay uzunluğunu (çevresini) hesaplayınız.



$x^2+y^2=r^2 \qquad y = \mp\sqrt{r^2-x^2}$

$$y' = \mp\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \mp\, x\cdot(r^2-x^2)^{-1/2}$$

$$L = 4\int_0^r \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$= 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)}}$$

$$= 4r\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r = 4r\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi r$$

⇒ $3y^2=x^3$ eğrisinin (0,0) ile (3,3) noktaları arasındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$L=\int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad y=\mp\frac{x^{3/2}}{\sqrt{3}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\,x^{1/2} = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$$

$$L=\int_0^3 \sqrt{1+\frac{3x}{4}}\,dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{4+3x}}{2}\,dx \qquad (y')^2=\frac{3}{4}x$$

⇒ $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$ eğrisinin $x=1$'den $x=2$'ye kadar olan yay uzunluğu?

$$(y')^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2$$

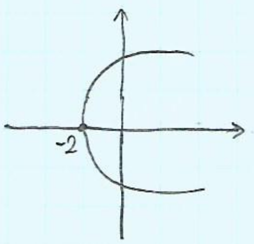
$$(y')^2=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}$$

$$L=\int_1^2 \frac{x^2+1}{2x}\,dx=\frac{3}{4}+\ln\sqrt{2}\ \text{br}$$

※ Eğer eğri $x=g(y)$; $c\le y\le d$ biçiminde verilmişse eğri uzunluğu

$$L=\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$ eşitliğiyle belirlenir.

⇒ $y^2=x+2$ parabolünün $(-2,0)$ ile $(2,2)$ noktaları arasında kalan yay uzunluğunu bulunuz.



$$x=y^2-2$$

$$\frac{dx}{dy}=2y \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2=4y^2$$

$$L=\int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^2 \sqrt{1+4y^2}\,dy \qquad 2y=\tan t,\quad 2dy=\sec^2 t\,dt$$

$$=\int_0^2 \sec t\cdot\sec^2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\tan t\sec t+\ln|\tan t+\sec t|\Big]_0^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(2y\sqrt{1+4y^2}+\ln\left|2y+\sqrt{4y^2+1}\right|\right)\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\Big[4\sqrt{17}+\ln|4+\sqrt{17}|\Big]=2\sqrt{17}+\frac{\ln|4+\sqrt{17}|}{2}+c$$

※ Eğer eğri $\left.\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array}\right\}$ $a \le t \le b$ şeklinde parametrik olarak verilmişse yay uzunluğu, $L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ eşitliğiyle belirlenir.

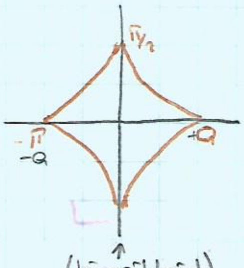
⇒ $x=2(\cos t+t\sin t)$
$y=2(\sin t-t\cos t)$ $[0,2\pi]$ aralığındaki yay uzunluğu?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=2t\cos t \\ \frac{dy}{dt}=2t\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=\int_0^{2\pi}2t\,dt=4\pi^2$$

⇒ $x=\frac{t^2}{2}$, $y=\frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$, $t\in[0,3] \Rightarrow L=?$

$$\frac{dx}{dt}=t \quad \frac{dy}{dt}=\sqrt{2t+1} \rightarrow L=\int_0^3\sqrt{(t^2+2t+1)}\,dt=\int_0^3(t+1)\,dt=\frac{15}{2}$$

⇒ $\left.\begin{array}{l} x(\theta)=a\cdot\cos^3\theta \\ y(\theta)=a\sin^3\theta \end{array}\right\}$ $\theta\in[0,\pi]$ e.y.u?



(hiposikloid)

$$\frac{dx}{d\theta}=3a\cos^2\theta(-\sin\theta)\Rightarrow\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2=9a^2\sin^2\theta\cos^4\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta\Rightarrow\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\,(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})}\,d\theta$$

$$L=3a\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=6a$$

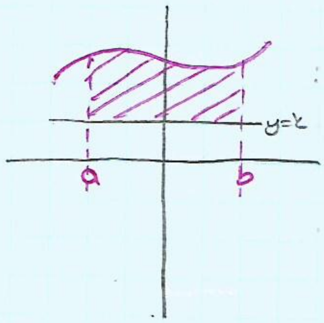
DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI

07.05.13 / Salı

$f(x)$ fonk. $[a,b]$ aralığında türevli bir fonk. o.ü, bu fonk.'u x-ekseni E.D. ile oluşan dönel yüzeyin alanı,

$$A=2\pi\int_a^b|y(x)|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$ eşitliğiyle belirlenir.

Ayrıca $y=f(x)$, $a\le x\le b$ denk. verilen eğrinin $x=a$, $x=b$ doğr. arasında kalan eğri parçasının $y=k$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı ise,

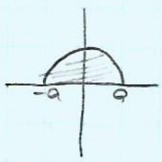


$A=2\pi\int_a^b |y-k|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ eşitliğiyle belirlenir.

⇒ $y=x^2$ ve $x=0$, $x=1$ doğruları arasında kalan yay parçası x-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin alanı?

$A=2\pi\int_0^1 |x^2|\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 |x^2|\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx$ → (tan)

⇒ a yarıçaplı kürenin yüzey alanı?

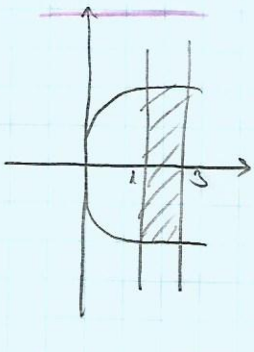


$x^2+y^2=a \Rightarrow y=\mp\sqrt{a^2-x^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a^2}{a^2-x^2}$

$A=2\pi\int_{-a}^{a} |\mp\sqrt{a^2-x^2}|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi a\int_{-a}^{a}\frac{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}\,dx = 2\pi a.\, x\Big|_{-a}^{a} = 4\pi a^2$

⇒ $y^2=9x$ ve $1\le x\le 3$ eğri arasında kalan yay parçalarının x-eks. E.D ile O.D.C.A?



$V=2\pi\int_1^3 |\mp 3x|\cdot\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx =$

$y=\mp 3\sqrt{x} \Rightarrow y'=\mp\frac{3}{2\sqrt{x}}$

$(y')^2=\frac{9}{4}x$