İşaretler ve Sistemler

Hazırlayan: M.Kemal Güvenç
Hoca: Seçkin Arı

⇒ Öteleme:

$n+3 \Rightarrow$ Geriye öteleme $\Rightarrow$ Gelecek Bilgisi

$n-3 \Rightarrow$ İleriye öteleme $\Rightarrow$ Geçmiş Bilgisi

$-n \Rightarrow$ Öteleme yönü değişir.

⇒ Fonksiyonların Periyotları:

$\underline{k \in Z^+,\ n=2k}$

$$\left.\begin{matrix} \sin^n(ax+b) \\ \cos^n(ax+b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

$\underline{k \in Z^+,\ n=2k+1}$

$$\left.\begin{matrix} \sin^n(ax+b) \\ \cos^n(ax+b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$\underline{n \in Z^+}$

$$\left.\begin{matrix} \tan^n(ax+b) \\ \cot^n(ax+b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

⇒ Birim İmpuls ve Birim İşaret Fonksiyonu:

- Birim İmpuls $\Rightarrow \delta(n-k)=\begin{cases} n-k=0, & 1 \\ n-k\neq 0, & 0 \end{cases} \Rightarrow \delta(n-k)=u(n-k)-u(n-k+1)$

$f(x)$, herhangi bir fonksiyon olmak üzere;

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k).\delta(x-k)$$

- Birim İşaret $\Rightarrow u(n-k)=\begin{cases} n-k\geq 0, & 1 \\ n-k<0, & 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

⇒ Ayrık Zamanlı Sistemler:

Dönüşüm Fonksiyonu

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(n)$$

$n \Rightarrow$ Bağımsız Değişken

$$T(x(n)) = y(n)$$

⇒ Ayrık Zamanlı Sistemlerin Özellikleri:

1) **Hafıza:** Sistemin, giriş sinyalinin geçmiş veya gelecek değerlerini kullanarak çalışıyorsa Hafızalı'dır yoksa Hafızasız'dır.

$$T(x(n)) = y(n) = 2x(n) + 4 \Rightarrow \text{Hafızasız}$$

$$T(x(n)) = y(n) = x(n-2) + 3/2\, x(n+2) + x(n) \Rightarrow \text{Hafızalı}$$

2) **Ters Çevrilebilir:** $T_1(x(n)) = y(n)$ olan bir sistemde $T_2(y(n)) = x(n)$ şeklinde bir T_2 dönüşüm fonksiyonu elde edilebiliyorsa o sistem Ters Çevrilebilir'dir yoksa değildir.

3) **Nedensellik:** Sistem, çıkış sinyalini üretirken giriş sinyalinin gelecek hariç sadece geçmiş ya da şimdiki değerlerini kullanıyorsa Nedensel'dir yoksa değildir.

$$T(x(n)) = y(n) = 2x(n) + 2x(n-2) \Rightarrow \text{Nedensel}$$

$$T(x(n)) = y(n) = \frac{1}{2} x(2n) + 3x(2n) \Rightarrow \text{Nedensel Değil}$$

4) **Kararlılık:** $\forall n,\ x(n) \in R$ ve $\forall n,\ y(n) \in R$ ise bu sistem Kararlı'dır yoksa Kararsız'dır.

$$T(x(n)) = y(n) = 2x(n) + 3 \Rightarrow \text{Kararlı}$$

$$T(x(n)) = y(n) = n^2 x(n+2) \Rightarrow \text{Kararsız}$$

5) Zamanla Değişmezlik: Eğer $T(x(n-k)) = y(n-k)$ ise bu sistem zamanla değişmez yoksa zamanla değişir.

6) Doğrusallık: Eğer $T(x_1(n)) = y_1(n)$, $T(x_2(n)) = y_2(n)$ ve $x_3 = a x_1(n) + b x_2(n)$ iken $T(x_3(n)) = a y_1(n) + b y_2(n)$ ise bu sistem doğrusaldır.

⇒ Doğrusal Zamanda Değişmez Sistemler:

Bu sistemler adlarından da anlaşılacağı üzere hem doğrusal hem de zamanla değişmez özelliklerine sahiptirler.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(n)$$

Neden T içinde değil?

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).\delta(n-k)$$

$$\Rightarrow y(n) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).\delta(n-k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).\, T(\delta(n-k))$$

$T(\delta(n-k)) = h(n-k) \Rightarrow$ Birim İmpuls Cevabı

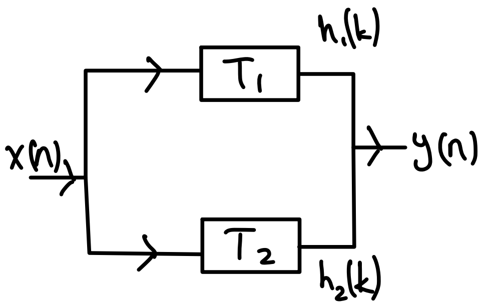
$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).h(n-k) \Rightarrow$ Konvolüsyon Toplamı

$\Rightarrow \underbrace{y(n)}_{\text{Çıkış Dizisi}} = \underbrace{x(n)}_{\text{Giriş Dizisi}} . \underbrace{h(n)}_{\text{İmpuls Cevabı}} \Rightarrow$ Konvolüsyon

⇒ Konvolüsyon Toplamının Özellikleri:

1) Değişme Özelliği: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k).h(k)$

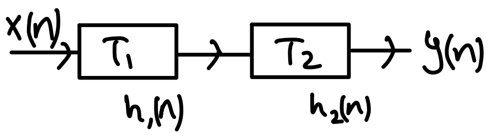
2) Dağılma Özelliği : 2 tane sistemin paralel bağlandığını düşünelim.



$$y(n) = x(n) \cdot h_1(n) + x(n) \cdot h_2(n) = x(n)\left(\underbrace{h_1(n) + h_2(n)}\right)$$

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) \Rightarrow y(n) = x(n) \cdot h(n)$$

3) Birleşme Özelliği : 2 tane sistemin seri bağlandığını düşünelim.



$$y(n) = \left(x(n) \cdot h_1(n)\right) \cdot h_2(n) = x(n) \cdot \left(h_1(n) \cdot h_2(n)\right)$$

$$h(n) = h_1(n) \cdot h_2(n) \Rightarrow y(n) = x(n) \cdot h(n)$$

Değişme özelliğinden dolayı $h(n) = h_1(n) \cdot h_2(n) = h_2(n) \cdot h_1(n)$ olur. Bu da sistemlerin bağlanış sırasının önemli olmadığını gösterir.

⇒ DZD Sistemlerde Kararlılık:

Konvolüsyon toplamı sonsuza gitmiyorsa kararlıdır yoksa kararsızdır.

⇒ DZD Sistemlerde Nedensellik:

$n < 0$ olduğunda $h(n) = 0$ ise bu sistem nedenseldir yoksa değildir.

⇒ DZD Sistemlerde Hafıza:

$n \neq 0$ olduğunda $h(n) = 0$ ise hafızasızdır yoksa hafızalıdır.

⇒ DZD Sistem Çeşitleri:

Sonlu Sayıda İmpuls Cevabı ⇒ Finite Impuls Response (FIR)

Sonsuz Sayıda İmpuls Cevabı ⇒ Infinite Impuls Response (IIR)

Konvolüsyon toplamı ile FIR sistemler hesaplansa da IIR sistemler bu şekilde hesaplanamaz. Bu sistemler için Fark Denklemleri kullanılır.

⇒ Fark Denklemleri :

⇒ Doğal Çözüm :

1. Adım: Verilen fark denklemindeki $y(n)$'lerin yerine λ^n koyulur ve sistem girişi 0 olarak alınır.

2. Adım: Ardından denklem, denklemdeki üstü en az olan λ ifadesinin parantezine alınıp λ değerleri bulunur.

3. Adım: Her bir λ değeri için $c_k \cdot \lambda^n$ $(k \in Z^+)$ değerleri toplanıp yeni bir denklem oluşturulur. Eğer λ değerlerinden bazıları aynı ise şu şekilde yazılır: $c_1\lambda^n + c_2 . n . \lambda^n + c_3 n^2 \lambda^n$ ---

4. adım: Başlangıç değerleri kullanılarak c değerleri bulunur ve Doğal Çözüm bulunmuş olur.

⇒ Zorlanmış Çözüm :

1. Adım: İlk önce c değerleri belirlenmemiş doğal çözüm bulunur.

2. Adım: Verilen denklemdeki $y(n)$ yerine $K . u(n)$ ve $x(n)$ yerine verilen değer yazılır. Buradanda K bulunur. $y_ö = K . u(n)$ bizim özel çözümümüz olur.

3. Adım: Zorlanmış çözüm $y_z = y_d + y_ö$ şeklinde yazılır. Buradanda kaç tane c varsa o kadar y değeri bulunur. Bunu yaparken $x(n)$ 0 alınmaz, başlangıç koşulları sıfır alınır.

⇒ Fark Denklemleriyle Birim İmpuls Cevabı :

$x(n) = \delta(n)$ giriş işaretine sahip zorlanmış çözümdür. Ayrıca özel çözüm 0 olacaktır.