T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

MATEMATİK II

Ders Notları

DOÇ. DR. MURAT SARDUVAN

Nisan 2020

Önsöz

Verilen bir $f(x)dx$ ifadesini diferansiyeli olarak kabul eden $F(x)$ fonksiyonunun bulunması matematikte önemli bir problemdir. $F(x)$ fonksiyonuna f(x) fonksiyonunun integrali veya ilkeli denir. İntegral, Latince toplam kelimesinin ("summa") baş harfi s'nin biraz evrim geçirmiş hali olan $\int$ işareti ile gösterilir. Bu işaret Leibniz tarafından tanımlanmıştır.

Uzunluk, alan ve hacimlerin hesaplanmasında integral hesabın önemli yeri vardır. Birden fazla değişkene bağlı fonksiyonlarda integral kavramı genişletilebilir ve bu durumda katlı integraller ortaya çıkar.

Integral, cebir açısından bakıldığında aslında bir toplama işlemidir. Yani iki arti iki eşittir dört eder gibi basit bir toplama işlemidir. Yalnız, bu toplama işlemi öyle bir toplama işlemidir ki, nesnel olarak bununla her şeyi toplayabilirsiniz. Bu toplama işlemi Riemann toplamı olarak da bilinir.

İçindekiler

Şekil Listesi

Bölüm 1

Belirsiz İntegral

1.1 Giriş ve Belirsiz İntegralin Özellikleri

Bu bölümde öncelikle belirsiz integralin ne anlama geldiğinden bahsedeceğiz. Daha sonra bazı kitaplarda diferansiyel alma işleminin tersi olduğundan da bahsedilen integral alma işleminin nasıl yapılacağı ve özelliklerinden bahsedeceğiz.

Tanım 1. *$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $x \in A$ için $F'(x) = f(x)$ ise ya da $d(F(x)) = f(x)dx$ ise $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun bir anti türevi ya da bir ilkeli denir.*

Bununla birlikte, $F(x) + 10$, $F(x) - e$, vb. fonksiyonların da türevi yine $f(x)$'i vereceği için $f(x)$ fonksiyonunu türevi olarak kabul eden birden fazla ilkel fonksiyon mevcuttur. c bir sabit olmak üzere, bu ilkel fonksiyonların tamamı $F(x)+c$ ile ifade edilebilir. İşte bu $F(x)+c$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali denir ve bu durum

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

olarak yazılır. Burada c'ye integral sabiti, $f(x)$'e integrant ve dx diferansiyelindeki x'e integral değişkeni denir.

Dolayısıyla $\int f(x)dx$ belirsiz integrali hesaplanırken sorulacak soru "türevi $f(x)$ olan fonksiyonun ne olduğu"dur. Yukarıda verilen tanımdan hareketle bazı fonksiyonların belirsiz integrali direkt olarak aşağıdaki gibi yazılabilir. Bu ifadeler integral alma işlemlerinin bel kemiğidir. Dolayısıyla integral içeren tüm konuları anlayabilmek için iyi bilinmelidirler.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1 \tag{1.1}$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c \tag{1.2}$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \tag{1.3}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \tag{1.4}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \tag{1.5}$$

$$\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + c \tag{1.6}$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \left(1 + \cot^2 x\right) dx = -\cot x + c \tag{1.7}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arc\cot \frac{x}{a} + c \tag{1.8}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c = -\arccos\frac{x}{a} + c \tag{1.9}$$

Belirsiz İntegralin Özellikleri

Özellik 1. *$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için*

$$\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

dir. Bu özelliğe integralin lineerlik özelliği denir.

Özellik 2. *Bir fonksiyonun önce türevini alınır, sonra da belirsiz integrali alınırsa bir sabit farkı hariç en baştaki fonksiyon elde edilir. Yani, ($f(x)$ fonksiyonu $f'(x)$'in bir ilkeli olduğu için)*

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c$$

dir.

Özellik 3. *Bir fonksiyonun önce belirsiz integrali alınır, sonra da türevi alınırsa en baştaki fonksiyon elde edilir. Yani,*

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x) + c\right) = F'(x) = f(x)$$

dir.

Şimdi hem Özellik 1 hem de (1.1)–(1.9) ile verilen özelliklerden yararlanarak bazı integralleri hesaplamaya çalışalım:

Örnek 1. $I = \int 2\cos 3x dx = ?$

Örnek 2. $I = \int \left(2x^3 + \frac{5}{x} + 7^x\right) dx = ?$

Örnek 3. $I = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = ?$

Örnek 4. $I = \int \cos ec^2 2x dx = ?$

Örnek 5. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = ?$

Örnek 6. $I = \int \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = ?$

Örnek 7. $I = \int 3\sqrt[5]{x^2} dx = ?$

Örnek 8. $I = \int 2\tan x dx = ?$

Örnek 9. $I = \int \left(5x^{-3} + 3\sin 4x\right) dx = ?$

Örnek 10. $I = \int \left(7e^{3x} - \frac{4}{1+x^2}\right) dx = ?$

1.2 İntegral Hesaplama Yöntemleri

Maalesef bütün belirsiz integraller yukarıda verilen özellikler yardımıyla elde edilememektedir. Bu nedenle verilen bir fonksiyonun belirsiz integralini bulmak için bazı yöntemler gerekmektedir. Bu kısımda belirsiz integral hesaplama yöntemleri incelenecek ve örneklerle pekiştirilecektir.

1.2.1 Değişken Değiştirme Metodu

İntegral alma yöntemleri içerisinde yaygın olarak kullanılan metod değişken değiştirme metodudur. Bu metod yardımıyla $\int f(g(x))\, g'(x)dx$ şeklindeki bir integral, $t = g(x)$ dönüşümü ile $dt = g'(x)dx$ olduğundan $\int f(t)dt$ şeklinde hesaplanması daha kolay bir hale getirilebilir. Bu son integral $\int f(t)dt = F(t) + c$ şeklinde hesaplanır ve $t = g(x)$ yerine yazılırsa

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

sonucu elde edilmiş olur. O halde uygulamada yapılacak iş $f(x)$ fonksiyonunun tamamına ya da bir kısmına yeni bir (örneğin) t değişken ataması yapıp integralin bir kısmının bu t değişkenine bağlı olarak yazılmasını ve geri kalanının da dt şeklinde ifade edilmesini sağlamaktır. Böylece artık integral yalnızca t değişkenine bağlı olarak ifade edilebilmiş olur. Daha sonra yeni hal üzerinden belirsiz integral (bulunabilirse) bulunur. Son olarak yeniden t değişkeni yerine x cinsinden karşılığı yazılır.

Ancak her integrant yukarıdaki yapıda verilmeyebilir. Yani $f(x)$ fonksiyonu her zaman bileşke fonksiyon şeklinde olmayabilir. Böyle bir durumda dikkat edilmesi gereken şey dönüşümün uygun bir biçimde seçilmesidir. Bazen sadece $x = g(t)$ şeklinde bir dönüşüm işe yararken bazen de $f(x)$'i oluşturan fonksiyonlardan birine yapılacak olan dönüşüm integrali kolaylaştırabilir.

Şimdi metodu daha iyi anlayabilmek için çeşitli örnekler verelim:

Örnek 11. $\int x^2\sqrt{3x^3}dx =?$

Örnek 12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx =?$

Örnek 13. $\int x\sqrt{x-5}\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 14. $\int \sin x \cos x dx =?$

Örnek 15. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx =?$

Örnek 16. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =?$

Örnek 17. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 18. $\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x+1}\right)dx}{\sqrt{x+1}(x+1)}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 19. $\int \frac{x-3}{x^2-6x} dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 20. $\int \frac{(2t+6)dt}{t^2+6t+5}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 21. $\int \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 22. $I = \int \frac{(4x+2)dx}{\sqrt{4x^2+4x-8}}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 23. $I = \int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^x+5}}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 24. $I = \int \frac{\left(3x^2+4x\right)dx}{x^3+2x^2}$ *integralini bulunuz.*

Örnek 25. $\int e^{2x}\sqrt{3+e^x}dx =?$

Örnek 26. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} =?$

Örnek 27. $\int \frac{dx}{(1+x)^3} =?$

Örnek 28. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx =?$

Örnek 29. $\int \frac{x dx}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}$ *integralini hesaplayınız.*

1.2.2 Kısmi İntegrasyon Metodu

Değişken değiştirme metodunun uygulanamayacağı bazı özel integraller vardır. Bu gibi durumlarda çarpımın diferansiyelinden yararlanmak suretiyle $f(x)dx$ ifadesi yeni bir yapıya dönüştürülerek daha kolay integre edilebilir hale dönüştürülebilir. Şimdi bu durumu inceleyelim:

u ve v, x in diferensiyellenebilir iki fonksiyonu olsun. Çarpımın diferensiyeli tanımı gereğince

$$d\,(u.v) = vdu + udv$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafından integral alınırsa

$$\int d\,(u.v) = \int vdu + \int udv$$

elde edilir. Bu son ifade de

$$\int udv = u.v - \int vdu \tag{1.10}$$

şeklinde yeniden düzenlenirse kısmi integrasyon bağıntısı adı verilen eşitlik elde edilmiş olur. Böylece $\int f(x)dx$ integrali verildiğinde (1.10) bağıntısından yararlanmak için önce integral $\int udv$ şekline dönüştürülür. Dolayısıyla $f(x)dx$ in yapısında bu dönüşümün nasıl yapılacağı önemlidir. Çünkü (1.10) ifadesinin sol yanı, verilen integral olurken onun yerine biz sağ yanda oluşan $\int vdu$ integralini hesaplamak zorunda kalacağız. Bu integrali oluştururken ise u'nun diferansiyelinin, dv'nin ise integralinin hesaplanması gerekir. Şimdi birkaç özel durumu paylaşalım:

Eğer integrant logaritmik bir fonksiyonla ters trigonometrik, polinom, trigonometrik ya da üstel bir fonksiyonun çarpımı şeklinde ise logaritmik fonksiyona u, geri kalan kısma (dx dahil) dv denir. Eğer integrant ters trigonometrik bir fonksiyonla polinom, trigonometrik ya da üstel bir fonksiyonun çarpımı şeklinde ise ters trigonometrik fonksiyona u, geri kalan kısma (dx dahil) dv denir. Eğer integrant polinom şeklinde bir fonksiyonla trigonometrik ya da üstel bir fonksiyonun çarpımı şeklinde ise polinom şeklindeki fonksiyona u, geri kalan kısma (dx dahil) dv denir.

u'yu belirleme konusunda burada söylenen öncelik sırasına uyulduğu taktirde (1.10) bağıntısı verilen integrali daha kolay bir integralin hesabına muhtemelen dönüştürür. u'yu belirleme konusundaki bu sıralama LAPTÜ sıralaması diye de bilinir. Yani Logaritmik, Arc içeren, Polinom, Trigonometrik, Üstel kelimelerinin baş harflari ile oluşan bu kelimede baş harfi diğer fonksiyonun baş harfine göre solda olan fonksiyon u atamasında tercih edilir. İntegrantın geri kalanına da (dx dahil) dv ataması yapılır.

Örnek 30. $I = \int \ln x dx = ?$

Örnek 31. $\int x \arctan x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 32. $I = \int x \cos x dx = ?$

Örnek 33. $I = \int x^2 e^x dx = ?$

Örnek 34. $\int x \ln 3x dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 35. $I = \int \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 36. $\int 3x \ln x dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 37. $\int (2x-1)\, e^{-x} dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 38. $I = \int \sin \sqrt{x} dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 39. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 40. $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$ *integrali hesaplayınız.*

Örnek 41. $I = \int e^{3x} \sin x dx = ?$

Örnek 42. $\int chx \sin x dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 43. $I = \int \sin(\ln x) dx = ?$

Örnek 44. $\mathrm{I} = \int \frac{\cos^2 x}{e^x} dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 45. $I = \int xe^{-x} dx = ?$

Örnek 46. $I = \int e^{3x} \cos 5x dx = ?$

Örnek 47. $I = \int \arccos x dx = ?$

Örnek 48. $I = \int x^2 \sin x dx = ?$

Örnek 49. $I = \int \sin x \ln(\cos x) dx = ?$

Örnek 50. $\int \cot x \ln \sin x dx = ?$

1.3 Bazı Fonksiyonların İntegrali

1.3.1 Rasyonel Fonksiyonların İntegrali

$P(x)$ ve $Q(x)$ derecesi sırasıyla n ve m olan iki polinom olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Şimdi, $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integralinin nasıl hesaplanabileceği incelenecektir. Öncellikle $n < m$ olsun ve $Q(x)$ polinomunun

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{\lambda_1} (x - \alpha_2)^{\lambda_2} \dots \left(a_1 x^2 + b_1 x + c_1\right)^{\beta_1} \left(a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right)^{\beta_2} \dots$$

şeklinde birinci ve ikinci dereceden polinomların çarpımı şeklinde yazılabildiğini kabul edelim. Böylece integrant

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x - \alpha_1)^{\lambda_1} (x - \alpha_2)^{\lambda_2} \dots (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} (a_2 x^2 + b_2 x + c_2)^{\beta_2} \dots}$$

şeklinde yazılabilecektir. Şimdi yapılması gereken bu rasyonel ifadenin

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{\mathrm{A}_{\lambda_1}}{(x - \alpha_1)^{\lambda_1}} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x - \alpha_2)} + \frac{\mathrm{B}_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{\mathrm{B}_{\lambda_2}}{(x - \alpha_2)^{\lambda_2}} + \dots$$

$$+ \frac{\mathrm{C}_1 x + D_1}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)} + \dots + \frac{\mathrm{C}_{\beta_1} x + D_{\beta_1}}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1}} + \frac{\mathrm{E}_1 x + F_1}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)} + \dots + \frac{\mathrm{E}_{\beta_2} x + F_{\beta_2}}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_2}} + \dots$$

şeklinde basit kesirlerin toplamı olarak ifade edilmesini sağlamaktır. Buradan elde edilecek katsayılar yerine yazılarak integral daha kolay bir biçimde hesaplanmış olur.

Şimdi $n \geq m$ olarak alalım. Bu durumda önce integrant $\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ şeklinde yazılır. Burada $B(x)$, $n - m$ inci dereceden bir polinom, $K(x)$ ise derecesi $Q(x)$ den küçük olan bir polinomdur. Böylece $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integralini

$$I = \int \left(B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)} \right) dx = \int B(x) dx + \int \frac{K(x)}{Q(x)} dx$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Artık yapılması gereken eşitliğin sağ tarafındaki integralleri hesaplamaktır. Sağ taraftaki ilk integral bir polinom integrali olup kolayca hesaplanır. İkinci integral hesabında ise ilk durumdaki yol izlenir.

Bu anlatılanların daha kolay anlaşılabilmesi için konuyu örnekler üzerinden açıklayalım.

Örnek 51. $\frac{x-5}{(x-2)^3 (x^2+x+1)^2}$ *rasyonel ifadesini basit kesirlerine ayırınız.*

Örnek 52. $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx = ?$

Örnek 53. $\int \frac{(2x-1)dx}{(x^2-4)(x-3)}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 54. $\mathrm{I} = \int \frac{3x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 55. $\int \frac{x+1}{(x-3)(x^2+1)}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 56. $\int \frac{3x^2+7x+16}{x^3+3x^2+7x+5}dx =?$

Örnek 57. $\int \frac{x^2+3}{x^2+4x-5}dx =?$

Örnek 58. $\int \frac{2x^3+9x^2+10x+8}{x^2+4x+3}dx =?$

Örnek 59. $\int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)}dx =?$

Örnek 60. $\int \frac{dx}{1-x^2} =?$

Örnek 61. $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 62. $\int \frac{x-2}{x^2-4x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 63. $\int \frac{x^3+1}{x^2+2x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 64. $\int \frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}dx$ *integrali hesaplayınız.*

Örnek 65. $\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 66. $\int \frac{3x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 67. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 68. $I = \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-7x-8}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 69. $\int \frac{(5x-6)dx}{(x+1)(x-1)^2}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 70. $\int \frac{2dx}{(x-1)^2(1+x)}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 71. $\int \frac{5dx}{x(x^2-1)}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 72. $I = \int \frac{t^4+3t^2+2}{t^2-3t}dt$ *integralini bulunuz.*

Örnek 73. $I = \int \frac{(x+1)dx}{(x-3)(x^2+1)}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 74. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 75. $I = \int \frac{2dx}{(x-1)(x-3)} =?$

Örnek 76. $\int \frac{x+1}{(x-3)(x^2+1)}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 77. $I_5 = \int \frac{3x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 78. $\int \frac{(2x-1)dx}{(x^2-4)(x-3)}$ *integralini çözünüz.*

Örnek 79. $\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}dx =?$

Örnek 80. $\int \frac{dx}{(2x+3)x^2} =?$

1.3.2 Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

Bu kısımda integrantın trigonometrik fonksiyonlardan oluşması durumunda izlenecek olan yol anlatılacaktır.

Eğer integral $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $(m, n \in \mathbb{N})$ **şeklinde ise**

Durum 1. ***m veya n sayılarından biri tek ise*** *tek kuvvetli fonksiyonlardan bir kuvvet kenara ayrılır. Daha sonra m tek ise $\sin x = t$, n tek ise $\cos x = t$ dönüşümü uygulanır. Her iki kuvvet de tek ise bu dönüşümlerinden herhangi biri uygulanabilir.*

Örnek 81. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = ?$

Örnek 82. $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 83. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx = ?$

Örnek 84. $\int \sin^3 x \cos^6 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 85. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 86. $\int \sin^3 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 87. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ *integrali hesaplayınız.*

Örnek 88. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx = ?$

Örnek 89. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = ?$

Durum 2. ***m ve n sayılarının ikisi de çift ise*** $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ *veya* $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ *bağıntıları kullanılarak kuvvet düşürme yoluna gidilir.*

Örnek 90. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = ?$

Örnek 91. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = ?$

Eğer integral $\int \tan^n x dx$ **veya** $\int \cot^n x dx$ **şeklinde ise** $(m, n \in \mathbb{N})$

Bu durumda $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ve $\cot^2 x = \mathrm{cosec}^2 x - 1$ özdeşliklerinden yararlanılır.

Örnek 92. $\int \tan^3 x dx = ?$

Örnek 93. $\int \cot^4 x dx = ?$

Örnek 94. $\int \cot^5 x dx = ?$

Örnek 95. $\int \tan^4 x dx = ?$

Eğer İntegral $\int \sec^m x dx$ **veya** $\int \mathrm{cosec}^m x dx$ **şeklinde ise** $(m \in Z^+)$

Örnek 96. $\int \sec x dx = ?$

Örnek 97. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ?$

Eğer İntegral $\int \tan^n x \sec^m x dx$ **veya** $\int \cot^n x \mathrm{cosec}^m x dx$ **şeklinde ise** $(m, n \in Z^+)$

Örnek 98. $\int \tan^2 x \sec^2 x dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 99. $\int \tan^2 x \cos ec x \, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 100. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Trigonometrik Özdeşlikler Yardımıyla Hesaplanabilen İntegraller

Bazen integrant farklı açıların trigonometrik fonksiyonlarının çarpımı şeklinde olabilir. Böyle durumlarda aşağıdaki trigonometrik özdeşlikler hesaplamada büyük kolaylık sağlar. Şimdi önce özdeşlikleri verelim sonrada bu özdeşlikleri integrallerde kullanalım.

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right] \tag{1.11}$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right] \tag{1.12}$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right] \tag{1.13}$$

Örnek 101. $\int \sin 2x \cos 5x dx = ?$

Örnek 102. $\int \sin 5x \sin 2x dx = ?$

Örnek 103. $\int \cos x \cos 3x dx = ?$

Örnek 104. $\mathrm{I} = \int \sin x \sin 2x \, \sin 3x \, dx$ *integralini hesaplayın.*

Örnek 105. $\int \cos 4x \cos 2x dx = ?$

Örnek 106. $\int \sin 7x \cos 2x dx = ?$

Örnek 107. $\int \sin x \sin 3x dx = ?$

İntegralin $\sin x$ ve $\cos x$ in Rasyonel Fonksiyonu Olması

Eğer intagrant $\sin x$ ve $\cos x$'in rasyonel fonksiyonu ise $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü uygulanır. Bu durumda dik üçgen yardımıyla $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ olur. $x = 2\arctan t$ yardımıyla da $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ olur. Bu değerler integralde yerlerine yazılırsa hesaplama daha kolay bir hale gelir.

Örnek 108. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x} dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 109. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$ *integrali hesaplayınız.*

Örnek 110. $\int \frac{dx}{1+2\sin x - \cos x}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 111. $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} = ?$

Örnek 112. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = ?$

Örnek 113. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\cos x)} dx = ?$

Örnek 114. $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x} = ?$

Örnek 115. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = ?$

1.3.3 Özel Değişken Değiştirmeler

Bu kısımda integralin içerdiği bazı özel ifadelere göre yapılabilecek özel dönüşümlerden bahsedilecektir.
1. Eğer integral $\sqrt{a^2 - x^2}$ şeklinde bir ifade içeriyorsa $x = a \sin t$ dönüşümü yapılır.
2. Eğer integral $\sqrt{x^2 - a^2}$ şeklinde bir ifade içeriyorsa $x = a \sec t$ dönüşümü yapılır.
3. Eğer integral $\sqrt{x^2 + a^2}$ şeklinde bir ifade içeriyorsa $x = a \tan t$ dönüşümü yapılır.

Örnek 116. $\int \sqrt{4 - x^2} dx = ?$

Örnek 117. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = ?$

Örnek 118. $\int x^5\sqrt{x^2-1}dx=?$

Örnek 119. $\mathrm{I}_3=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-5x^2}}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 120. $\mathrm{I}=\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+8}}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 121. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{15-2x-x^2}}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 122. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$ *integrali hesaplayınız.*

Örnek 123. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}=?$

Örnek 124. $\int \sqrt{12x-3x^2-8}dx=?$ *(Yol gösterme: Kök içindeki ifadeyi iki kare farkı şeklinde yazmaya çalışınız.)*

Örnek 125. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=?$

1.3.4 İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali

En az bir terimi köklü biçimde ifade edilen fonksiyonlara irrasyonel fonksiyon denir. Böyle fonksiyonları aşağıdaki gibi durumlara ayırıp belirsiz integrallerini bulmak için yapılması gerekenleri tartışalım:

Durum 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *şeklindeki integraller önce tam kare yardımıyla* $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+d)^2+e^2}}$ *şekline dönüştürülür. 1.1.12. daki 3. durum gereği* $x+d=e\tan t$ *dönüşümü ile*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+d)^2+e^2}}=\int \sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|$$

$$=\ln\left|x+d+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+c_1(A)$$

sonucu elde edilir.

Örnek 126. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}=?$

Örnek 127. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+18}}=?$

Örnek 128. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+20x+28}}=?$

Örnek 129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+4}}=?$

Durum 4. $\int \frac{(Ax+B)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ *şeklindeki integrallerde önce pay paydanın türevi olacak şekilde düzenlenir.* $\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b$ *olduğundan* $Ax+B$, $2ax+b$ *cinsinden*

$$Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{(Ax+B)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$=\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

elde edilir. Buradaki ilk integralde pay, paydanın türevi olduğundan paydadaki yapıya dönüşüm uygulanarak sonuç kolaylıkla bulunur. İkinci integral ise Durum 3'deki yapının aynısıdır.

Örnek 130. $\int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2-2x+7}}=?$

Örnek 131. $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}=?$

Örnek 132. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x^2+5x-3}} = ?$

Örnek 133. $\int \frac{(5x+2)dx}{\sqrt{x^2+3x-1}} = ?$

Tanım 2. *$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ şeklindeki integrallerde $x-k=\frac{1}{u}$ dönüşümü yapılarak integral Durum 3 şekline dönüştürülür.*

Örnek 134. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}} = ?$

Örnek 135. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{7x^2-24x+21}} = ?$

Örnek 136. $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2+4x+1}} = ?$

Örnek 137. $I_1 = \int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{4x^2-4x-8}}$ *integralini hesaplayınız.*

Tanım 3. *Eğer integral $P_n(x)$ n–inci dereceden polinom olmak üzere*

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

şeklinde ise integral önce

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = R_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

olarak yazılır. Bu eşitlik sağlanacak şekilde K reel sayısı ve $R_{n-1}(x)$ polinomu bulunarak integral kolaylıkla hesaplanır.

Örnek 138. $\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = ?$

Örnek 139. $\int \frac{2x^3+3x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx = ?$

Örnek 140. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{3x^2+2x-1}} = ?$

Örnek 141. $\int \frac{(x^4+1)dx}{\sqrt{x^2+6x+2}} = ?$

Örnek 142. $\int \frac{(x^3+2x+1)dx}{\sqrt{2x^2+3x+5}} = ?$

Örnek 143. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 144. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 145. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$ *integrali hesaplayınız.*

Örnek 146. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 147. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 148. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 149. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+8}}$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 150. $I = \int \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\sqrt{4+x^2}}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 151. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx = ?$

Örnek 152. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-5x^2}}$ *integralini hesaplayınız.*

1.3.5 Binom İntegralleri

$p, q, r \in Q$ olmak üzere

$$\int x^r (a + bx^p)^q dx \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanan integrale binom integrali adı verilir. Bu integral p, q ve r nin özel durumlarına göre yapılacak dönüşümlerle kolayca hesaplanabilir. Şimdi bu durumları inceleyelim.
1. $q \in Z$ ise r ile p nin paydalarının en küçük ortak katı k olmak üzere $x = t^k$ dönüşümü uygulanır.
2. $q \notin Z$ ise $x^p = y$ dönüşümü yapılır. Bu durumda integral $px^{p-1}dx = dy$ ile $\frac{1}{p}\int (a+by)^q y^{\frac{r+1}{p}-1} dy$ şekline dönüşür. Burada da eğer $\frac{r+1}{p} \in Z$ ise q nun paydası n olmak üzere
$a + by = t^n$ dönüşümü uygulanır. $x^p = y$ dönüşümü yapmadan da $q \notin Z$ iken $\frac{r+1}{p} \in Z$ ise $a + bx^p = t^n$ dönüşümü uygulanır.

3. $\frac{r+1}{p} \notin Z$ ise bu durumda $\frac{1}{p}\int (a+by)^q y^{\frac{r+1}{p}-1} dy$ integralindeki integrantı $\frac{1}{p}\int \left(\frac{a+by}{y}\right)^q y^{\frac{r+1}{p}+q-1} dy$ şeklinde yazabiliriz. Eğer burada $\frac{r+1}{p} + q \in Z$ ise $\frac{a+by}{y} = t^n$ yani $ax^{-p} + b = t^n$ dönüşümü yapılır.

Örnek 153. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = ?$

Örnek 154. $\int \sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+2\sqrt{x}}dx = ?$

Örnek 155. $\int x^{-3}\left(1+x^3\right)^{\frac{-1}{3}} dx = ?$

Örnek 156. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)^2} = ?$

Örnek 157. $\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{\frac{4}{3}} dx = ?$

Örnek 158. $\int x^2\left(2+3x^3\right)^{\frac{1}{2}} dx = ?$

1.3.6 İndirgeme Formülleri

Kısmi integrasyon yardımıyla $\int (\sin x)^n dx$, $\int (\ln x)^n dx$ gibi bazı integraller için genel formüller elde etmek mümkündür. İndirgeme formülü adı verilen bu formüller yardımıyla n değiştikçe integrali yeniden hesaplamaya gerek kalmadan sonuç kolaylıkla yazılabilecektir. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

Örnek 159. $I_n = \int \cos^n x dx$ *integrali için indirgeme formülü elde edelim.*

Örnek 160. $\int \cos^3 x dx = ?$

Örnek 161. $I_n = \int (\ln x)^n dx$ *integrali için indirgeme formülü elde edelim.*

Örnek 162. $\int \ln^4 x dx = ?$

Uyarı 1. *Bu bölümde bazı fonksiyonların anti türevini bulmak için çeşitli yöntemlerden bahsedildi. Ancak* $\int f(x)\,dx$ *ifadesi her zaman bilinen fonksiyonlar cinsinden ifade edilemeyebilir. Dolayısıyla, şimdiye kadar anlatılanlar ile her fonksiyonun integralini bulamayabiliriz. Örneğin,* $\int e^{x^2}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \sqrt{\sin x}dx$, $\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{\sin(\ln x)}{\ln x}dx$ *integralleri bilinene fonksiyonlar cinsinden ifade edilemezler.*

Bölüm 2

BELİRLİ İNTEGRAL

Tanım 4. *$[a,b]$ kapalı aralığı verilsin. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olmak üzere,*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

kümesine $[a,b]$'nin bir parçalanışı denir.

$$|P| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

değerine de bu P parçalanışının normu denir.

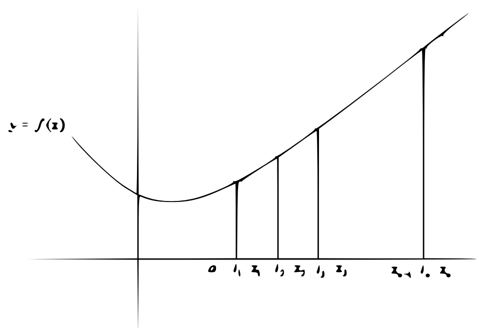
Tanım 5.

1. *$I \subseteq R$ bir alt küme ve $f : I \to R$ verilsin. $[a,b] \subset I$ olsun. Her $x \in [a,b]$ için $m \le f(x) \le M$ olan $m, M \in R$ reel sayıları mevcut ise f ye $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlıdır denir.*

2. *f , $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlı ve $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, $[a,b]$ nin bir parçalanışı olsun. $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere $T = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$olarak tanımlansın.*

$$\begin{aligned} R(f,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i &= f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \ldots f(t_n)\Delta x_n \\ &= f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

değerine nin parçalanışına göre Rieman toplamı denir.



Şekil 2.1: İki eğri arası kalan bölge

$f(t_i)\Delta x_i = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, taban uzunluğu $x_i - x_{i-1}$ ve yüksekliği $f(t_i)$ olan dikdörtgenin alanıdır. Her $x \in [a,b]$ için $m \le f(x) \le M$ olduğundan $m \le f(t_i) \le M$ olup

$$R(f,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a)$$

$$R(f,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a)$$

yani, $m(b-a) \le R(f,T) \le M(b-a)$ sağlanır.

Tanım 6. *$[a,b] \subset T_f$ olmak üzere f , $[a,b]$ de sınırlı olsun. Burada T_f ile f nin tanım kümesi gösteriliyor.*

$\lim\limits_{|P|\to 0} R(f,T) = L$ ise f ye $[a,b]$ de integrallenebilirdir denir ve bu L değeri $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre f $[a,b]$ de integrallenebilirdir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $[a,b]$ nin $|P| < \delta$ şartını sağlayan herhangi bir parçalanışı ve $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ve $T = \{t_1, t_2, \ldots,, t_n\}$ olmak üzere

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

sağlanır.

Tanım 7.

1. *Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekliyse f $[a,b]$ de integrallenebilirdir.*
2. *$a < c < b$ olsun. f fonksiyonu $[a,b]$ de integrallenebilirdir $\Leftrightarrow$ f fonksiyonu $[a,c]$de ve $[c,b]$ de integrallenebilirdir. f, $[a,b]$ de integrallenebilirse $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ dir.*
3. *f , $[a,b]$ de integrallenebilirse kf fonksiyonu da $[a,b]$ de integrallenebilirdir ve $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ dir.*
4. *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ de integrallenebilirse $f \pm g$ fonksiyonları da $[a,b]$ de integrallenebilirdir ve $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ dir.*
5. *f, $[a,b]$ de integrallenebilirse $|f(x)|$ de $[a,b]$ de integrallenebilirdir ve $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ dir.*
6. *Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ dir.*
7. *f $[a,b]$ de sürekli ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Ayrıca bir $c \in [a,b]$ için $f(c) > 0$ ise $\int_a^b f(x)dx > 0$ dır (Hiçbir zaman negatif değer almayan ve en az bir noktada pozitif değer alan sürekli bir fonksiyonun integrali sıfırdan büyüktür).*
8. *f $[a,b]$ de integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dır.*

Tanım 8. *$[a,b]$ nin bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $(1 \leq i \leq n)$ parçalanışı ve $f_i : [x_{i-1}, x_i] \to R$ her $x \in (x_{i-1}, x_i)$ açık aralığı için $f(x) = f_i(x)$ olacak biçimde sürekli f_i fonksiyonları varsa f ye $[a,b]$ kapalı aralığında parçalı-sürekli bir fonksiyon denir.*

Uyarı 2. *Tanımdan görüleceği gibi parçalı sürekli bir fonksiyonun $[a,b]$ aralığında en fazla n tane (sonlu tane) noktada süreksizliği olabilir.*

Teorem 1. *f fonksiyonu $[a,b]$ de parçalı sürekli bir fonksiyon ve f_i $(1 \leq i \leq n)$ ler yukarıda tanımda tanımlanan fonksiyonlar ise f $[a,b]$ de integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_1} f_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x)dx$$

dir.

Teorem 2. *f fonksiyonu $[a,b]$ de integrallenebilirdir ve her $x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak biçimde $[a,b]$ de sürekli bir F fonksiyonu mevcut ise $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)]_a^b$ dir.*

Örnek 163. *$f(x) = x^2$ olsun, $\int_a^b f(x)dx =?$*

Örnek 164. *$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ olsun, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx =?$*

Örnek 165. *$f(x) = x - [\![x]\!]$ olsun, $\int_0^3 f(x)dx =?$*

2.1 Belirli İntegralde Kısmi İntegrasyon Yöntemi

Teorem 3. *f, g, f', g' fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olsunlar. Bu durumda $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ dir.*

Kanıt. $h(x) = f(x)g(x)$ olsun. $h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ olup h ve h' $[a,b]$ de sürekli fonksiyonlardır. Dolayısıyla $\int_a^b h'(x)dx = h(x)]_a^b = f(x)g(x)]_a^b$ ve $\int_a^b h'(x)dx = \int_a^b [f'(x)g(x) + g'(x)f(x)]\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b g'(x)f(x)dx$ olduğundan $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ bulunur. □

Örnek 166. $\int_0^\pi x\cos x dx = ?$

Örnek 167. $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx = ?$

Tanım 9. *Eğer $b \leq a$ ise*

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} 0 & , b = a \\ -\int_b^a f(x)dx & , b < a \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4. *Yukarıdaki tanıma göre $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ sağlanır. Burada, $a < c < b$, $a < b < c$,$c < a < b$, $b < a < c$, $b < c < a$ olabilir.*

Kanıt. $a < b$ olsun. $a < c < b$ ise formül doğrudur. $a < b < c$ olsun. Dolayısıyla

$$\int_c^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Dolayısıyla $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ olur. Diğer durumlar da benzer biçimde yapılır. □

Teorem 5. *I bir aralık ve $a \in I$ sabit olmak üzere her $x \in I$ için $\int_a^x f(t)dt$ mevcut olsun. Bu durumda $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ fonksiyonu süreklidir ve f I da sürekliyse her $x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ dir.*

Teorem 6. *$b < a$ olmak üzere F $[b,a]$ aralığında sürekli ve her $x \in (b,a)$ için $F'(x) = f(x)$ olsun. Bu durumda $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)]_a^b$ dir.*

Kanıt. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -\left(F(x)]_b^a\right) = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) = F(x)]_a^b$ olur □

Teorem 7. *I bir aralık ve u, v fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlar ve $u(x), v(x) \in I$ olsun. Eğer f I da türevlenebiliyorsa $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ ise*

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

dir.

Örnek 168. $\frac{d}{dx}\left[\int_{2x}^{e^x} te^t dt\right] = ?$

2.2 Belirli İntegralde Değişken Değiştirme Yöntemi

Teorem 8. *$g'(t)$ sürekli olmak üzere $\int_a^b f(x)dx$ integralinde $x = g(t)$ (veya $t = g^{-1}(x)$) dönüşümü yapılırsa $\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$ olur.*

Aşağıdaki yöntemle yapılabilir.

$x = g(t)$ (veya $t = g^{-1}(x)$) al;$x = a$ için $t = g^{-1}(a)$, $x = b$ için $t = g^{-1}(b)$ sınırları değiştir, x yerine $g(t)$, dx yerine de $g'(t)dt$ koyarak integrali hesapla ($x = g(t)$ ise $dx = g'(t)dt$)

Örnek 169. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx = ?$

Örnek 170. $\int_1^2 x^2\sqrt{x^3-1}dx$

Örnek 171. $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x} = ?$

Örnek 172. $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = ?$

Örnek 173. $\int\limits_0^3 |(x-1)(x-2)|\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 174. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ *integralini hesaplayınız.*

2.2.1 Belirli İntegral İle İlgili Bazı Özellikler ve Problem Çözümleri

2.2.2 Özellik 1

f fonksiyonu $[0,a]$ kapalı aralığında sürekliyse $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ dir.

Kanıt. $t = a-x$ olsun. $dt = -dx$ olur. $x = 0$ için $t = a$ $x = a$ için $t = 0$

$$\int_0^a f(a-x)dx = -\int_0^a f(a-x)(-dx) = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$$

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ elde edilir. □

Örnek 175. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x dx = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 176. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^3}{3}$ *olduğunu gösteriniz*

2.2.3 Özellik 2

f fonksiyonu sürekli ve $[-a,a] \subset T_f$ olsun. (Burada T_f , f nin tanım kümesi) Eğer $f(-x) = -f(x)$ ise (yani f] tek fonksiyon ise) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ dır.

2.2.4 Özellik 3

f fonksiyonu sürekli ve $[-a,a] \subset T_f$ olsun. Eğer $f(-x) = f(x)$ ise (yani f çift fonksiyon ise) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ dir.

Notlar

T_f ile f nin tanım kümesini gösterelim. Her $x \in T_f$ için $-x \in T_f$ oluyorsa f nin tanım kümesi orjine göre simetriktir denir. f nin tanım kümesi orjine göre simetrik olsun.

1. $f(x) = f(-x)$ ise f ye çift fonksiyon

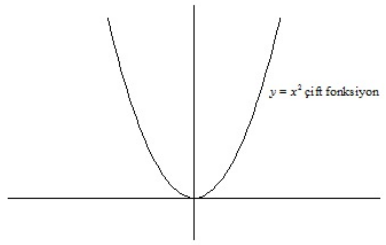
2. $f(-x) = -f(x)$ ise f ye tek fonksiyon denir. Çift fonksiyon y -eksenine göre, tek fonksiyon orjine göre simetriktir. $y = f(x) = x^2$ çift fonksiyon, $y = f(x) = x^3$ tek fonksiyon,$y = f(x) = |x|$ çift fonksiyon, $y = f(x) = \frac{1}{x}$ tek fonksiyon, $y = f(x) = \frac{1}{|x|}$ çift fonksiyon

Örnek 177. $\int_{-2}^2 \left(x^4+x^6\right) dx = ?$

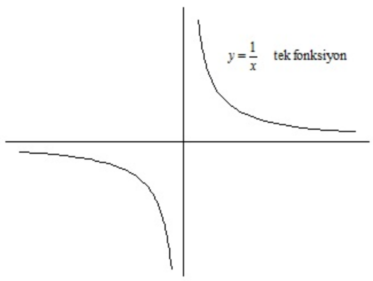
Örnek 178. $\int_{-6}^6 \left(x+x^5\right) dx = ?$

Örnek 179. $\int_{-1}^1 \left|\frac{1}{4}-x^2\right| dx = ?$

Örnek 180. $\int_{-2}^2 |1-x|\, dx$ *integralini hesaplayınız.*



Şekil 2.2: Çift fonksiyon örneği



Şekil 2.3: Tek fonksiyon örneği

Örnek 181. $\int_{-1/2}^{1/2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\sin^{10}x dx = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 182. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 183. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = ?$

Örnek 184. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$

Örnek 185. $\int_0^4 \sqrt{1+2x}dx = ?$

Örnek 186. $\int_{-1}^0 \frac{2+x}{x^2+4x-1}dx = ?$

Örnek 187. $\int_0^1 \frac{x^3+x}{2+x^2}dx = ?$

Örnek 188. $\frac{d}{dx}\left[\int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}dt\right] = ?$

Örnek 189. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos x}dx = ?$

Örnek 190. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}dx = ?$

Örnek 191. $\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{t^2+1}^{\tan t} \arctan x dx\right)$ *diferansiyelini hesaplayınız.*

Örnek 192. $I = \int\limits_1^3 \frac{2x-5}{x^2+5x+4}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 193. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ *integralini* $x = \pi - u$ *dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.*

Örnek 194. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+\cos^2 2x}dx$ *integralinin sonucunu bulunuz.*

Örnek 195. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$ *integralini bulunuz.*

Örnek 196. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^2 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 197. $\int\limits_1^3 |(x-1)(x-2)|\,dx$ *integrali hesaplayınız.*

Örnek 198. $\int\limits_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 199. $\int\limits_1^5 |(x-2)(x-3)|\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

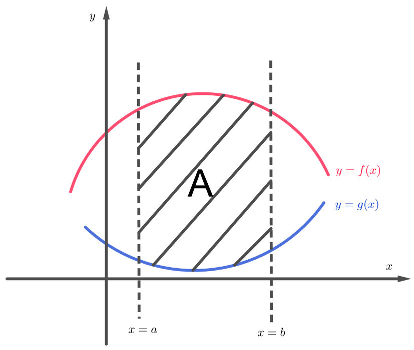
Örnek 200. $f(x) = \begin{cases} 2-x & ,x \leq 1 \\ x^3 & ,x \geq 1 \end{cases}$ *olarak veriliyor.* $\int_{-1}^3 f(x)dx$ *ve* $\int_1^2 (f(x) - f(x-1))\,dx$ *integrallerini hesaplayınız.*

Bölüm 3

Belirli İntegralin Uygulamaları

3.1 Düzlemsel Bölgenin Alanı

Teorem 9. *f ile g fonksiyonları her $x \in [a,b]$ için sürekli, her $x \in (a,b)$ için $f(x) > g(x)$ koşulunu sağlasın. Ayrıca, $f(a) \geq g(a)$, $f(b) \geq g(b)$ olsun. Bu durumda Şekil 3.1'deki gibi sol ve sağdan $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile üst ve alttan $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri ile sınırlı A bölgesinin alanı $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ ile bulunur.*



Şekil 3.1: İki eğri arası kalan bölge

Uyarı 3. *Şekil 3.1'deki A bölgesi temsili olarak 1. bölgede çizilmiştir. Ancak Teorem 9, A bölgesinin kartezyen düzlemin herhangi bir yerinde olması durumunda da geçerlidir.*

Teorem 10. *$x = f(y)$ ve $x = g(y)$ ile verilen f ve g fonksiyonları $[c,d]$ de sürekli, $c < y < d$ ve $f(y) > g(y)$, $f(c) \geq g(c)$, $f(d) \geq g(d)$ şartlarını sağlasın. Bu iki eğri arasında kalan bölgesinin alanı $\int_c^d (f(y) - g(y))\,dy$ dir.*

Örnek 201. *$y = x^2$ eğrisiyle $y = \frac{a}{b}x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. ($a > 0$, $b > 0$)*

Örnek 202. *$y = \frac{1}{2}x$ doğrusu ve $y^2 = 8 - x$ parabolü arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 203. *$y = \sin x$ eğrisi $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ ve $x = \frac{5\pi}{6}$ doğruları arasında kalan bölgeyi koordinat düzleminde gösterip integral vasıtasıyla alanını bulunuz.*

Örnek 204. *$x^2 + y^2 = 4$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanını integral yardımıyla bulunuz.*

Örnek 205. *$y = 9 - x^2$ parabolü ve $y = x + 3$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını integral yardımı ile hesaplayınız.*

Örnek 206. *$y = -x^2 + 2x + 2$ parabolü ve $y = -2x + 5$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgeyi koordinat düzleminde gösteriniz ve bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 207. *$y = x^2 - 4x$ eğrisi, $x = 2$ ve $x = 6$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgelerin alanları toplamını bulunuz.*

Örnek 208. *$y = cosx$ eğrisi , $x + y = \frac{3\pi}{2}$ ve $x = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*

Örnek 209. *$y = x^2 - 1$ parabolü ve $y = 0$ doğrusu tarafından sınırlandırılan bölgenin alanını belirli integrali kullanarak bulunuz.*

Örnek 210. *$y = 4 - x^2$ parabolü ve $y = x + 2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını integral yardımı ile hesaplayınız.*

Örnek 211. *a yarıçaplı dairenin alanını integral yardımıyla hesaplayınız.*

Örnek 212. *Üstten $y = 12 - x^2$ parabolü ve alttan $y = |x|$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanını belirli integrali kullanarak hesaplayınız.*

Örnek 213. *$y = 4x - x^2$ eğrisi ve $y = x$ doğrusu tarafından sınırlandırılan bölgenin alanını belirli integrali kullanarak hesaplayınız.*

Örnek 214. *$y = 4 - x^2$ parabolü ve $y = x + 2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 215. *$y = x$, $x = 3$ ve $y = -2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını belirli integral kullanarak hesaplayınız.*

Örnek 216. *$f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ eğrileri ve $x = 0$, $x = \frac{5\pi}{6}$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 217. *$y = \sqrt{x}$ ve $y = x^2$ eğrileriyle sınırlana bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin alanını bulunuz.*

Örnek 218. *$x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2x$ çemberleri arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*

Örnek 219. *$y = sinx$, $0 \leq x \leq \pi$ eğri parçası y ekseni ve $x - y = \pi$ eğrisi tarafından sınırlandırılan bölgenin alanını hesaplayınız.*

Örnek 220. *$y = 9 - x^2$ parabolü ve $y = x + 3$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını integral yardımı ile hesaplayınız.*

Örnek 221. *$y = x^2 - 1$, $y = -4$, $x = -1$, $x = 1$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını hesaplaınız.*

Örnek 222. *$y = \sin x$ eğrisi $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ ve $x = \frac{5\pi}{6}$ doğruları arasında kalan bölgeyi koordinat düzleminde gösterip integral vasıtasıyla alanını hesaplayınız.*

Örnek 223. *$x^2 + y^2 = 4$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanını integral yardımı ile bulunuz.*

Örnek 224. *$y = |x|$ ve $y = 2 - x^2$ eğrisi arasında kalan alanı bulunuz.*

Örnek 225. *$x = 4 - y^2$ ve $x = y^2 + 2y$ parabolleri arasında kalan alanı bulunuz.*

Örnek 226. *$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(0) = 0$ olan bir eğri ve f sürekli olsun. Herhangi bir (x_1, y_1) noktası $y = f(x)$ eğrisi üzerindeyse eğri $0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_1$ dikdörtgenini eşit parçaya bölsün. Yukarıda kalan alan A ve aşağıdaki alan B olsun. $A = 2B$ ise $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz. ($x > 0$ ise $f(x) > 0$ dır.)*

Örnek 227. *$y = 2 + x^2$ eğrisi ve $y = 1 - x$ doğrusu arasında $x = -1$ ve $x = 2$ doğrularıyla sınırlı bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 228. *$y = x^2$ eğrisiyle $y = 2 + x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.*

Örnek 229. *$y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri arasındaki alanı bulunuz.* (cevap:$\frac{1}{3}$)

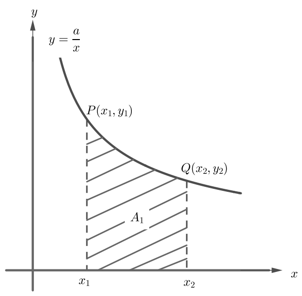
Örnek 230. *$x = y^2$ eğrisiyle $x = y + 2$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.*

Örnek 231. *$x = a\cos t + at\sin t$, $y = a\sin t - at\cos t$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ aralığındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.* (cevap:$\frac{\pi^2 a}{8}$)

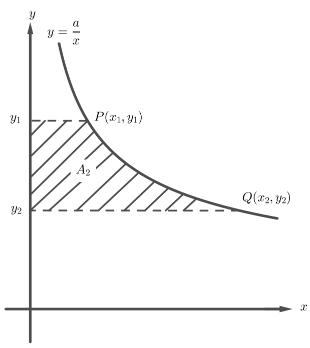
Örnek 232. *$9y^2 = 4\left(1+x^2\right)^3$ eğrisinin $0 \leq x \leq 3$ aralığındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.* (cevap:21)

Örnek 233. *$x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{1}{3}(1+2t)^{3/2}$ ile verilen eğrinin $0 \leq t \leq 4$ aralığındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.* (cevap:12)

Örnek 234. *$y = \frac{a}{x}$ eğrisi veriliyor.* $\mathrm{Alan}\,\mathrm{A}_1 = \mathrm{Alan}\,\mathrm{A}_2$ *olduğunu gösteriniz.*



Şekil 3.2:



Şekil 3.3:

Örnek 235. *$y = \cos x$ ve $y = \sin x$ eğrilerinin $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığında aralarındaki alanı hesaplayınız.*

Örnek 236. *$x = \frac{1}{2}y^2$ parabolü ile $y = 2x-2$ doğrusu arasındaki alanı bulunuz.*(cevap: $\frac{9}{4}$)

Örnek 237. *$x = y^2 - y$ ve $x = y - y^2$ eğrileri arasındaki alanı bulunuz.*

3.2 Yay Uzunluğu Hesabı

Örnek 238. *f fonksiyonu türevlenebilir ve $f'(x)$ sürekli olsun. $[a,b] \subset T_f$ olmak üzere f nin $[a,b]$ aralığına ait grafiğinin oluşturduğu yay parçasının uzunluğunu hesaplayınız.*

Örnek 239. *$f(x) = 2 + x^{\frac{3}{2}}$ ise f'nin $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ aralığındaki parçasının yay uzunluğunu bulunuz.*

Tanım 10. *Eğer C eğrisi $x = g(y)$ formülüyle verilmişse C eğrisinin $c \leq y \leq d$ aralığına düşen parçasının yay uzunluğu*

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\,dy$$

ile bulunur.

Örnek 240. *$x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$ denklemiyle verilen eğrinin $1 \le y \le 2$ aralığındaki yayının uzunluğunu bulunuz.*

Örnek 241. *$y = x^{3/2}$ eğrisinin $A(1,1)$ ile $B(4,8)$ noktaları arasında kalan parçasının yay uzunluğunu bulunuz.*

Örnek 242. *$3x - 2y - 6 = 0$ doğrusunun $A(4,3)$ ve $B(6,6)$ noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu integral yardımıyla bulunuz.*

Örnek 243. *r yarıçaplı çemberin çevre uzunluğunu integral yardımıyla hesaplayınız.*

Örnek 244. *$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ erisinin $x = 1$ ve $x = 4$ noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.*

Örnek 245. *$y = 5x$ eğrisinin $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları arasında kalan parçasını koordinat düzleminde gösteriniz ve bu kısmın uzunluğunu integral yardımı ile bulunuz.*

3.2.1 Parametrik Denklemlerle Verilen Bir Eğrinin Yay Uzunluğu

Tanım 11. *Kabul edelim ki bir parçacık C eğrisi üzerinde hareket eder. Bu durumda (x,y) noktası C eğrisi üzerinde bir nokta ise x ve y'yi t zamanının fonksiyonu olarak yazabiliriz. Bu durumda I aralığında tanımlı f ve g fonksiyonlarının $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ olacak biçimde mevcut olduğunu varsayacağız.*
Bazen $x = x(t) = f(t)$, $y = y(t) = g(t)$ olarak yazılır. Bu denklemlere C eğrisinin parametrik denklemi denir.

Örnek 246. *C eğrisi $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$\begin{cases} x = x(t) = 1 - 2t \\ y = y(t) = -3 + 4t \end{cases}$$

ile verilsin. C eğrisinin denklemini bulunuz.

Tanım 12. *Genel olarak $x = x(t) = a + bt$, $y = y(t) = c + dt$, $b \neq 0$ veya $d \neq 0$ bir doğru gösterir.*
$x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ ile verilen eğrinin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ çemberidir.

Tanım 13. *$x = x(t) = f(t)$, $y = y(t) = g(t)$ ile verilen bir C eğrisinin $a \le t \le b$ aralığındaki parçasına ait yay uzunluğu $l = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$ dır. Burada $x'(t)$ ve $y'(t)$ ler sürekli fonksiyonlardır.*

Örnek 247. *Yarıçapı r olan bir çemberin çevre uzunluğunu bulunuz.*

Örnek 248. *Parametrik denklemi $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$ $, 0 \le t \le 2\pi$ olan eğrinin yay uzunluğunu bulunuz.*

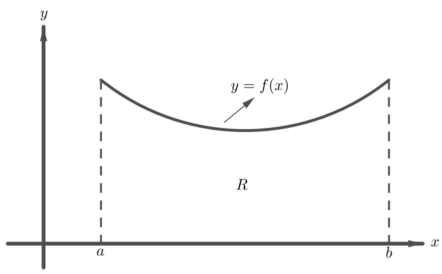
Örnek 249. $9x^2 = 4y^3$ *eğrisinin $(0,0)$ noktasından $\left(2\sqrt{3}, 3\right)$ noktasına kadar olan yayının uzunluğunu bulunuz.* (cevap: $\frac{14}{3}$) (*Yol:* $x = \frac{2}{3}t^3$, $y = t^3$ parametrelenmesini kullanınız.)

3.3 Dönel Cisimlerin Hacmi

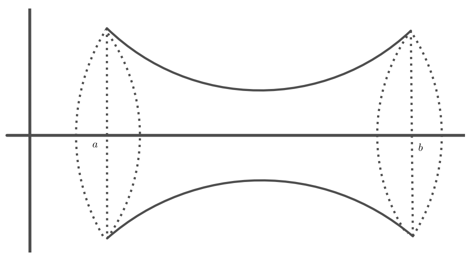
$y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve $\mathbb{R}$ bölgesi aşağıdaki gibi olsun.

$\mathbb{R}$ bölgesinin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayalım. Öncelikle taban alanı ve yüksekliği belli olan bir silindirin hacminin taban alanıyla yüksekliğinin çarpımına eşit olduğunu biliyoruz. $[a,b]$ nin bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanışını ele alalım.

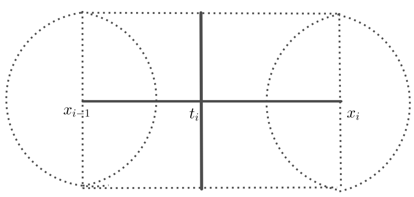
$|P| = \max\{\Delta x_i : 1 \le i \le n\}$ olsun. Oluşan S cisminin $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında kalan kısmının hacmi V_i olsun. Dolayısıyla S nin hacmi $\sum_{k=1}^{n} V_k$ dır. $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere yüksekliği $\Delta x_i = x_i -$



Şekil 3.4:



Şekil 3.5:



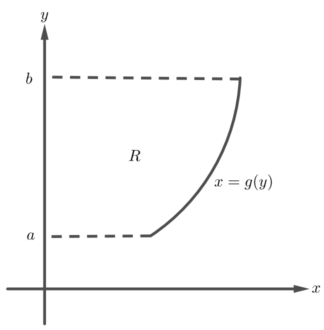
Şekil 3.6:

x_{i-1} ve taban yarıçapı $f(t_i)$ olan silindirin alanı $\pi(f(t_i))^2\Delta x_i$ dir. Dolayısıyla S nin hacmi $\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(t_i))^2\Delta x_i$ olur. Buradan S nin hacmi;

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi(f(t_i))^2\Delta x_i = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

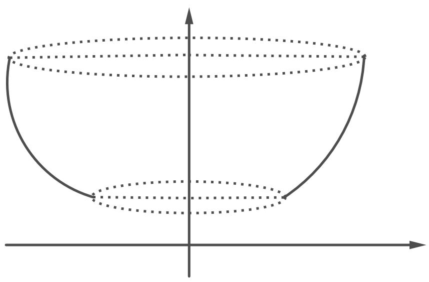
bulunur.

Tanım 14. *$x = g(y)$ denklemiyle verilen $a \le y \le b$ aralığında sürekli $g(y)$ fonksiyonunun $y = a$ ve $y = b$ doğrularıyla oluşturduğu $\mathbb{R}$ bölgesinin y–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi, $V = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi(g(y))^2 dy$ dir.*



Şekil 3.7:

$V = \pi\int_a^b x^2 dy = \pi\int_a^b (g(y))^2 dy$ *dir.*



Şekil 3.8:

Tanım 15. *$y = f(x)$ eğrisi $x = a$, $x = b$ ve $y = k$ tarafından sınırlı bölge $\mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}$ bölgesinin $y = k$ doğrusunun bir tarafında kaldığını kabul edelim. $\mathbb{R}$ bölgesinin $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin V hacmi $y = f(x) - k$ nın oluşturduğu şeklin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmine eşit olup*

$$V = \int_a^b \pi(f(x) - k)^2 dx$$

dir.

Tanım 16. *Her $x \in [a, b]$ için $0 \le g(x) \le f(x)$ olmak üzere sürekli $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlı bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi*

$$V = \int_a^b \pi\left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx$$

dir.

Tanım 17. *$\mathbb{R}$ bölgesi $x = f(y)$, $x = g(y)$ ve her $y \in [a, b]$ için $f(y) \geq g(y) \geq 0$ olan sürekli f ve g fonksiyonlarının oluşturduğu eğrilerle $y = a$ ve $y = b$ doğrularının sınırladığı bölge olsun. Bu bölgesinin y–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi*

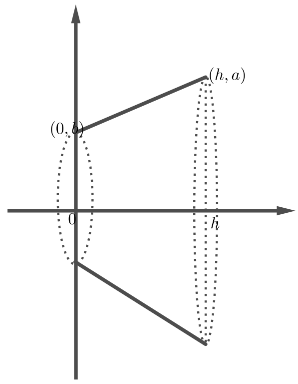
$$V = \int_a^b \pi \left(f(y)^2 - g(y)^2 \right) dy$$

dir.

Örnek 250. *$y = 4$ doğrusunun $1 \leq x \leq 3$ aralığında kalan kısmının x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 251. *Yarıçapı $\mathbb{R}$ olan bir çemberin x-ekseninin üst kısmında kalan parçasının x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim bir küredir. Bu kürenin hacmini bulunuz.*

Örnek 252. *Aşağıdaki kesik koninin hacmini bulunuz.*



Şekil 3.9:

Örnek 253. *$y = x^2$ eğrisi ve $y = 4$ doğrusu ile sınırlı bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 254. *Kenarları $(1, 1)$, $(1, 2)$ ve $(2, 2)$ olan üçgenin y–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 255. *$f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ eğrileri ve $x = 0$, $x = \frac{5\pi}{6}$ doğruları arasında kalan bölgeyi koordinat düzleminde gösteriniz ve bu bölgenin $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 256. *$y = x^2 + 1$ eğrisi x ekseni , y ekseni ve $x = 3$ doğrusu ile sınırlı bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 257. *$y = \sqrt{x + 4}$ eğrisi ile $x = 2$ ve $y = 2$ doğruları arasında kalan bölgenin Ox ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız.*

Örnek 258. *$y = \cos x$ eğrisinin x in $[0, \pi]$ aralığındaki değerlere karşılık gelen parçasının Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 259. *$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ elipsinin sınırladığı bölge x ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini hesaplayınız .*

Örnek 260. *$x^2 + y^2 - 2x = 0$ ve $x^2 + y^2 - 2y = 0$ eğrileri arasında kalan bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 261. *$x = siny$, $0 \leq y \leq \pi$, eğrisi ve $x = 1/2$ doğrusu ile sınırlı düzlem parçasının $x = 5$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini yalnızca integral kullanarak (geometriden kesinlikle fadalanılmayacaktır) hesaplayınız.*

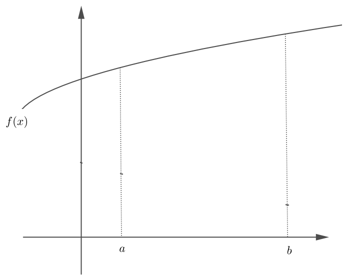
Örnek 262. *$y = sinx$, $0 \leq x \leq \pi$, eğri parçasının Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin sınırladığı hacmi bulunuz.*

3.4 Silindirik Tabakalar Yöntemi

Teorem 11. *$x = a$, $x = b$ doğruları ve $y = f(x)$ sürekli eğrisi ile sınırlı $\mathbb{R}$ bölgesinin $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi*

$$V_y = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

dir.



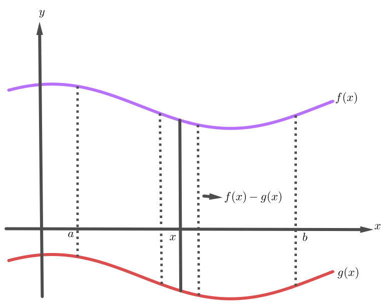
Şekil 3.10:

Teorem 12. *R bölgesi her $x \in (a,b)$ için $f(x) > g(x)$ olmak üzere $x = a$, $x = b$ doğruları ve $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ sürekli eğrileriyle sınırlı bölge ise R nin $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi*

$$V_y = \int_a^b 2\pi x \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

dir.

Yöntem:



Şekil 3.11:

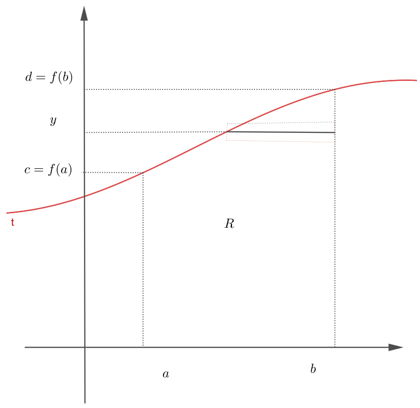
$$V_y = \int\limits_a^b 2\pi x \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right) dx$$

$$x \rightarrow kesitin\ donme\ eksenine\ uzakligi$$

$$\left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right) \rightarrow kesitin\ \ boyu$$

Örnek 263. *$y + x = 2$ doğrusu, $x = 0$ ve $y = 0$ doğrularıyla sınırlı $\mathbb{R}$ bölgesinin $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 264. *$f(x) = 3 - x^2$ ve $g(x) = 3x - 1$ eğrilerinin $[0,1]$ aralığındaki parçalarının oluşturduğu bölgenin $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*



Şekil 3.12:

Tanım 18. *$\mathbb{R}$ bölgesinin y–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $V_x = \int_c^d 2\pi y\, g(y) dy$ dir. Burada kesitin x-eksenine olan uzaklığı y, kesitin boyu $g(y)$ olarak düşünülür.*

Örnek 265. *$y=\sqrt{x}$ eğrisiyle $x=4$ doğrusu arasındaki bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 266. *$y=x^2$ ve $y=4$ doğrularıyla sınırlı bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 267. *$y=x^2+1$ eğrisi ve $y=x+3$ doğrusu arasındaki bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.* (cevap: $\frac{117\pi}{5}$)

Örnek 268. *$y=3+x^2$ eğrisi ve $y=4$ doğrusu arasında kalan bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 269. *$y=4-x^2$ eğrisi ve $y=2-x$ doğrusu arasında kalan bölgenin*
a)y–ekseni b)$x=2$ doğrusu c)$x=-1$ doğrusu
d)$x=4$ doğrusu e)$x=-3$ doğrusu f)x–ekseni
g)$y=2$ doğrusu h)$y=4$ doğrusu i)$y=-2$ doğrusu j)$y=8$ doğrusu
etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

3.5 Yüzey Alanı

Tanım 19. *f', $[a,b]$'de sürekli ve her $x\in[a,b]$ için $f(x)\geq 0$ olan bir fonksiyon olsun. f nin $[a,b]$ aralığına ait grafiğinin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanı S ise $S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ dir.*

Tanım 20.
$\overset{\frown}{AB}$ yayının y–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanı S ise

$$S=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}dy=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$$

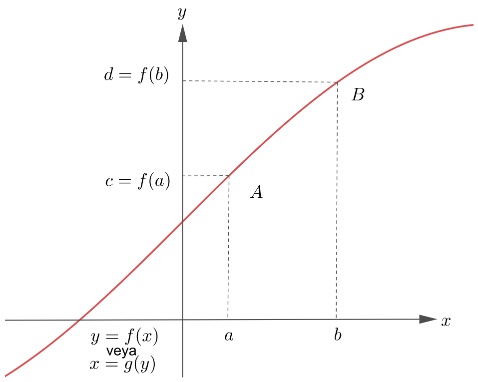
dir.

Örnek 270. *$y=4-x^2$ parabolünün x–ekseniyle sınırladığı bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.*

Tanım 21. *Bir eğri $x=f(t)$ ve $y=g(t)$, $a\leq t\leq b$ parametrik denklemiyle verilmiş ve $f'(t)$, $g'(t)$ sürekli ve $g(t)\geq 0$ ise yüzey alanı*

$$S=\int_a^b 2\pi g(t)\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}dt$$

dir.



Şekil 3.13:

Örnek 271. *Bir doğrunun $(0,0)$ ve $(2,4)$ noktaları arasında kalan parçasının Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.*

Örnek 272. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ *çemberinin üst yarısının $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.*

Örnek 273. $x = \sqrt{y}$ *eğrisinin $y = 0$ ve $y = 2$ doğruları arasında kalan parçasının Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.*

Örnek 274. $y = \sqrt{x}$ *ve* $y = x^2$ *eğrilerinin sınırladığı bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.*

Örnek 275. $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ *eğri parçasının Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.*

Örnek 276. $y = \frac{(3-x)\sqrt{3}}{3}$ *eğrisinin $0 \leq x \leq 3$ aralığında kalan parçasının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını integral kullanarak bulunuz.*

Örnek 277. $y = 2\sqrt{x}$ *eğrisinin $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasında kalan parçasını koordinat düzleminde gösteriniz ve onun Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.*

Bölüm 4

Genelleştirilmiş integraller

Şimdiye kadar, kapalı ve sonlu $[a, b]$ aralığı üzerinde f sürekli olmak üzere, $\mathrm{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ biçimindeki belirli integralleri ele aldık. Böyle bir fonksiyon sınırlı olduğundan I integralinin sonlu bir sayı olması gerekir. Üstelik f pozitif ise I integrali sınırlı bir bölgenin alanına karşılık gelir. Böyle integrallere has (proper) integraller de denir. Şimdi belirli integrali, burada açıklanan durumun haricindeki aşağıdaki iki duruma izin verecek şekilde genelleştireceğiz.

1. $a = -\infty$ veya $b = \infty$ veya her ikisinin birden olması.

2. f fonksiyonunun x'in a'ya veya b'ye yaklaşırken veya her iki durumda da sınırsız olması.

Bunlardan 1. tipindeki integrallere "I. tip genelleştirilmiş (has olmayan) integraller", 2. tipindeki integrallere "II. tip genelleştirilmiş integraller" denir. Genelleştirilmiş integralin her iki tipi (f nin pozitif olması durumunda) düzlemdeki, bir yönde sonsuzluğa genişleyen ve bu nedenle sınırsız olan bir bölgenin alanına karşılık gelir. Böyle integrallerin sonlu ya da sonsuz değerler alabileceğini göreceğiz.

Şimdi bu durumları içeren örneklerle konuyu anlamaya çalışalım:

4.1 I. Tip Genelleştirilmiş integraller

Örnek 278. *$y = \frac{1}{x^2}$ eğrisi altında x-ekseninin üstünde $x = 1$ in sağında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 279. *$y = \frac{1}{x}$ altında $y = 0$ın üstünde ve $x = 1$'in sağında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Tanım 22. *f, $[a, \infty)$ üzerinde sürekli ise $[a, \infty)$ üzerinde f nin genelleştirilmiş integrali düzgün integralin bir limiti olarak, $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde, f $(-\infty, b]$ üzerinde sürekli ise, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{R\to-\infty} \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ tanımlanır. Eğer bu limit varsa (sonlu bir sayı ise) genelleştirilmiş integrale yakınsaktır denir. Eğer limit ∞ (veya $-\infty$) ise genelleştirilmiş integral sonsuza (veya negatif sonsuza) ıraksaktır denir.*
Reel doğru üzerinde sürekli olan f için $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ integrali her iki uç noktada da I. tip genelleştirilmiş integraldir. Bu durumda onu iki ayrı integrale ayırırız;

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

ve çözüme böyle ulaşmaya çalışırız.

Örnek 280. *$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ integralini hesaplayıp yakınsaklığını inceleyiniz.*

4.2 II. Tip Genelleştirilmiş integraller

Örnek 281. *$y = 1/\sqrt{x}$'in altında x-ekseninin üstünde ve $x = 0$ ile $x = 1$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Tanım 23. *f, $(a, b]$ aralığında sürekli ve a'nın civarında sınırsız olması söz konusu ise,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

genelleştirilmiş integralini tanımlarız. Benzer şekilde, eğer f $[a, b)$ üzerinde sürekli ve b civarında sınırsız olması söz konusu ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

genelleştirilmiş integralini tanımlarız. Bu tip genelleştirilmiş integrallere II. tip genelleştirilmiş integral denir ve bu integraller de yakınsayabilir veya ıraksayabilir.

Görülmektedir ki II. tip genelleştirilmiş integralde integrantın, dikey asimptotlarının olduğu noktalara dikkat etmek gerekir. II. tip genelleştirilmiş integrallerde integrant, eğer integrasyonun uç noktalarının her ikisinde veya integrasyon aralığının içindeki bazı noktalarda sınırsız ise integral birden fazla genelleştirilmiş integrale parçalanabilir. Örneğin,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x|dx}{\sqrt{1-x}} = \int_{-1}^{0}\frac{\ln|x|dx}{\sqrt{1-x}} + \int_{0}^{1/2}\frac{\ln|x|dx}{\sqrt{1-x}} + \int_{1/2}^{1}\frac{\ln|x|dx}{\sqrt{1-x}}$$

ifadesinin sağ yanındaki her bir integral bir uç noktasındaki singülerlikten dolayı genelleştirilmiştir.

Örnek 282. *Aşağıdaki integrallerin karakterini belirleyiniz.*

1. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

2. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

3. $\int_0^1 \ln x\,dx$

Örnek 283. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ *integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.*

Örnek 284. $\int_0^5 \frac{dx}{x^3}$ *integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.*

Örnek 285. $\int_3^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Teorem 13. ***(P-integralleri)*** $0 < a < \infty$ *olmak üzere,*

1. $\int_a^\infty x^{-p}dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}{}'e\, yakınsar & p > 1\ ise \\ \infty' a\, ıraksar & p \le 1\ ise \end{cases}$

2. $\int_0^a x^{-p}dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{1-p}{}'ye\, yakınsar & p < 1\ ise \\ \infty' a\, ıraksar & p \ge 1\ ise \end{cases}$

Kanıt. Yalnızca (2) yi ispatlayacağız. (1) inn ispatı benzer şekildedir. Ayrıca (2) nin $p = 1$ hali Örnek 5(a) nın ta kendisidir. O halde biz yalnızca $p < 1$ ve $p > 1$ hallerini ele alacağız:

1. Eğer $p < 1$ ise $1 - p > 0$ olduğundan,

$$\int_0^a x^{-p}dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^a x^{-p}dx = \lim_{c\to 0^+}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_c^a = \lim_{c\to 0^+}\frac{a^{1-p}-c^{1-1}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}$$

2. $p > 1$ ise,

$$\int_0^a x^{-p}dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^a x^{-p}dx = \lim_{c\to 0^+}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_c^a = \lim_{c\to 0^+}\frac{c^{-(p-1)}-a^{-(p-1)}}{p-1} = \infty$$

Bu teoremdeki integrallere P-integralleri denir. □

Uyarı 4. *$\int_0^\infty x^{-p}dx$'in her bir p değeri için yakınsak olmadığına dikkat edelim.*

Uyarı 5. *Eğer f $[a,b]$ üzerinde sürekli ise bu durumda $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali düzgün belirli integraldir. Bu durumda integral genelleştirilmiş integral gibi işleme tabi tutulursa aynı değer elde edilir.*

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

Bu parça parça sürekli fonksiyonunun belirli integralinin tanımını sağlar. Farklı aralıklar üzerinde farklı sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanan bir fonksiyonu integre etmek için, sadece farklı bileşen fonksiyonlarının kendilerinin tanımlı oldukları aralıklar üzerinde hesaplanan integrallerini toplamak gerekir. Bu integrallerin herhangi biri düzgün veya genelleştirilmiş olabilir. Eğer bazıları genelleştirilmiş ise tümünde yakınsak olması gerekir. Aksi halde verilen integral ıraksak olur.

Örnek 286. $f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & 0 < x \le 1 \\ x-1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ *olmak üzere $\int_0^2 f(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.*

4.3 Yakınsaklığın ve Iraksaklığın Tahmini

Teorem 14. ***(İntegraller için karşılaştırma teoremi)*** *$-\infty \le a < b \le \infty$ olsun ve f ve f fonksiyonlarının (a,b) üzerinde sürekli olduğunu ve ayrıca $0 \le f(x) \le g(x)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\int_a^b g(x)\,dx$ yakınsak ise bu takdirde $\int_a^b f(x)\,dx$ de yakınsaktır ve $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ dır. Denk olarak $\int_a^b f(x)\,dx$, ∞'a ıraksak ise $\int_a^b g(x)\,dx$ de ıraksaktır.*

Kanıt. Her iki integrant da nonnegatif (sonucu sıfır veya daha büyük) olduğundan, her ikisi içinde yalnızca iki olasılık vardır: Ya nonnegatif bir sayıya yakınsama ya da ∞ 'a ıraksama. (a,b) üzerinde $f(x) \le g(x)$ olduğundan (Eski Bilgi: f ve g a, b ve c noktalarını içeren bir aralık üzerinde integrallenebilir ise bu durumda $f(x) \le g(x)$ ve $a \le b$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ dir.)
$a < r < s < b$ise, bu durumda $\int_r^s f(x)\,dx \le \int_r^s g(x)\,dx$ elde edilir. Buradan $r \to a^+$ ve $s \to b^-$ limitleri alınarak istenen sonuç elde edilir. □

Örnek 287. *$\int_a^\infty e^{-x^2}dx$'in yakınsak olduğunu gösteriniz ve bunun değeri için bir üst sınır bulunuz.*

Örnek 288. *$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$'ün yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.*

Örnek 289. *$\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$'in yakınsak olup olmadığını gösteriniz.*

Örnek 290. *$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 291. *$\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 292. *$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}$ integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 293. $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4}$ *integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.*

Örnek 294. $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{x^2+25}$ *integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.*

Örnek 295. $\int\limits_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 296. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{x^3}$ *integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.*

Örnek 297. $\int\limits_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 298. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 299. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ *integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.*

Kaynakça

[1] B. Musayev, M. Alp, N. Mustafayev, *Analiz II*, Seçkin Yayıncılık, Ankara, Türkiye, 2007.

[2] E. Kadıoğlu, M. Kamali, *Genel Matematik*, Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, Türkiye, 2009.

[3] H. Halilov, A. Hasanoğlu, M. Can, *Yüksek Matematik*, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2001.