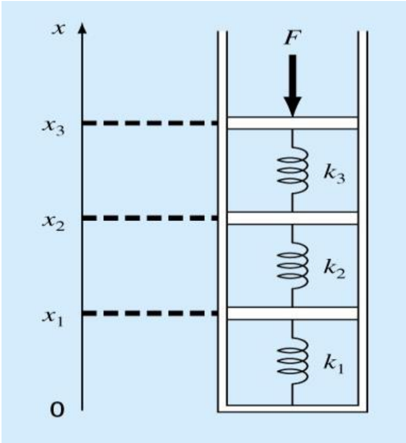
1(40 P)



Yandaki şekilde verilen sistem için, F=2000 kg'lık bir kuvvetle sıkıştırılan seri düzende bağlanmış dört adet yayın denge durumunu tanımlayan denklemler aşağıda verilmektedir.

$\mathbf{k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 = 0}$

$\mathbf{k_3(x_3 - x_2) - k_2(x_2 - x_1) = 0}$

$\mathbf{F - k_3(x_3 - x_2) = 0}$

Bu denklemlerdeki yay sabitleri, $\mathbf{k_1 = 150\ kg/s^2}$ **,** $\mathbf{k_2 = 50\ kg/s^2}$ **,** $\mathbf{k_3 = 75\ kg/s^2}$ **olarak verilmektedir. Yayların yer değişimini (x), CRAMER YÖNTEMİ** ile hesaplayınız.

2(30 P) A Matrisinin tersini $[A \vdots I] \rightarrow [I \vdots A^{-1}]$ yöntemini kullanarak elde ediniz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3 (30P)

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{w} &= \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}\right\}$$

Yanda verilen vektörlerin arasındaki açıyı bulunuz

4 (30P)

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini bulunuz ve bulduğunuz öz değerlerden en küçük öz değere karşı gelen öz vektörü bulunuz.

Cevap 1

$$\left.\begin{aligned} -200x_1 + 50x_2 &= 0 \\ 50x_1 - 125x_2 + 75x_3 &= 0 \\ -75x_2 + 75x_3 &= 2000 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -4x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 80 \end{aligned}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{bmatrix}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -60 - (-36 - 6) = 18$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$[A_1]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ -80 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad |A_1| = -240$$

$$x_1 = \frac{-240}{-18}$$

$$x_1 = 13.33$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$[A_2]=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -80 & -3 \end{bmatrix} \qquad |A_2| = -960$$

$$x_2 = \frac{-960}{-18}$$

$$x_2 = 53.33$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$[A_3]=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -80 \end{bmatrix} \qquad |A_3| = -1440$$

$$x_3 = \frac{-1140}{-18}$$

$$x_3 = 80$$

Cevap 2

$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım ve elemanter satır işlemleri ile genişletilmiş (birim) formda tersini bulalım :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim R_1+R_3 \to R_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \frac{R_3}{3}+R_1 \to R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \frac{R_3}{3} \to R_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \frac{R_1}{2} \to R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Cevap 3

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=2\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)+4\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)-4\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right)-3\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)$$
$$-6\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)+6\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)+\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right)+2\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right)-2\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=2\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)-6\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)-2\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=2-6-2=-6$$

$$|v|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$$

$$|w|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|v|\cdot|w|}=\frac{-6}{\sqrt{14}\times 3}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(-\frac{6}{3\sqrt{14}}\right)=122.31^0$$

Cevap 4

A’nın karakteristik polinomu,

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$$

Olup $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$ denkleminin kökleri öz değerdir. Bu denklemin kökleri 12’nin çarpanlarını denklemde deneyerek $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = -2$ bulunur. Şimdi bu öz değerlerden en küçük olanına karşılık gelen öz vektörü bulalım.

λ öz değerine karşı gelen x öz vektörü
$x = (x_1 , x_2 , x_3)$
ise
$(A - \lambda I^3) x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Olur.
$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörleri bulalım:
Üstteki denklemde (1) $\lambda = -2$ yazılarak işlem yapılırsa;
$3x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$
$-3x_1 + x_2 + x_3 = 0$

sistemin çözümünden $x_2 = -x_1$, $x_3 = 4x_1$ bulunur.
$x_1 = k$ için $x_2 = -k$, $x_3 = 4k$ olur.

$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $x = \begin{bmatrix} k \\ -k \\ 4k \end{bmatrix}$
biçimindedir.