Sayısal Analiz

$$
\begin{bmatrix}
9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 9 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 1 & 9 & 1 & 1 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

Matrisler

Dersimizin İçeriği

- Matrisler
- Matris işlemleri
- Örnek akış diyagramı
- Determinant ve özellikleri
- Sarrus Kuralı
- Matlab ve Uygulama örnekleri

TANIM: *m* tane satır ve *n* tane sütun oluşturacak biçimde dizilmiş *mn* tane sayının oluşturduğu tabloya bir ***m*** × ***n*** **matris** denir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1×3 satır matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2×1 sütun matrisi

$$B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

İki matris toplamı :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

İŞLEMLER :

A, B ve *C* , büyük lükleri aynı olan matrisler olmak üzere

A+(B+C)=(A+B)+C (Birleşme)
ve
A+B=B+A (Değişme) özellikleri vardır.

Skaler değerle çarpılması $s\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa & sb \\ sc & sd \end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_n$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\cdot 3 + (4)\cdot 1 + 3\cdot(-2) = 4$$

Matris Çarpımı

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & & \dots & \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ & & \dots & & \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısı aynı

Matrislerinin çarpımını elde etmek için

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & & \dots & \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ & & \dots & & \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ & \dots & & \dots & \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ & & \dots & & \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$, $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$ işlemini yapmak yeterlidir.

Matris çarpımının birleşme özelliği vardır:

A, *B* ve *C* çarpımı gerçekleşecek büyüklükte matrisler ise **A (B C) = (A B) C** dir.

Matris çarpımının değişme özelliği yoktur: **AB ≠ BA** olan matrisler vardır.

Matris çarpımının toplama işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır:

A, B ve C matrisleri için, **A (B + C) = (A B) + (A C)** , **(A + B) C = (A C) + (B C)** eşitlikleri geçerlidir.

Matrisler

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$(A^T)^T=A$, $(sA)^T= s\,A^T$, $(A+B)^T= A^T+B^T$, $(AB)^T= B^T A^T$
özelliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir.

Transpozesi kendine eşit olan kare matrise **simetrik matris** denir. **($A=A^T$)**

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise **kare matris** adı verilir

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrisin $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, . \ . \ . \ , a_{nn}}$ girdilerine matrisin **köşegeni** denir.

Köşegen elemanlarından başka diğer elemanları sıfır olan kare matrise **köşegen matris** denir.

Birim matris bir köşegen matrisdir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Kare bir matrisin köşegeninin üstündeki elemanlar sıfırsa matrise **alt üçgensel ma**tris, köşegeninin altındaki elemanlar sıfırsa matrise **üst üçgensel matris** denir.

$$\text{Alt Üçgensel Matris} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Üst Üçgensel Matris} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ & \dots & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Köşegen girdilerinin her biri 1, geri kalan tüm girdileri 0 olan matrise **birim matris** adı verilir.

Her m× n A matrisi için **A I_n = A = I_m A** dir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_n , n× n birim matris

A (A^{-1}) = (A^{-1}) A = I_n , A^{-1} A matrisinin tersi denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersinin olup olmadığını araştıralım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A = (aij) nxn kare matrisinde;

bir aij ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) elemanının bulunduğu i. satır ile j. sütunun çıkarılmasıyla elde edilen (n-1). mertebeden alt kare matrisin determinantına, A matrisinin aij elemanının **minörü denir .**

aij elemanının minörü **Mij** ile gösterilir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrisinde,}$$

$a_{11} = 1$ elemanının minörü $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 1 - ((-2) \,.\, 1) = 4,$

$a_{32} = -2$ elemanının minörü $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,.\, 1 - 0 \,.\, 2 = 1$ dir

A = (aij) nxn matrisinde, bir aij elemanının minörü olan Mij nin $(-1)^{i+j}$ ile çarpılmasıyla elde edilen sayıya, aij öğesinin **kofaktörü (eş çarpanı) denir.**

aij nin kofaktörü **Aij** ile gösterilir.

verilen A matrisinde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrisinde},$$

a11 = 1 elemanının kofaktörü $A11 = (-1)^{1+1} \,.\, M11 = 1 \,.\, 4 = 4$

a32 = -2 elemanının kofaktörü $A32 = (-1)^{3+2} \,.\, M32 = (-1) \,.\, 1 = -1$ dir.

A matrisinin determinantının **i.inci satıra göre açılımı**

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{12}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$ denir.

Benzer şekilde, A matrisinin determinantı bir sütunun kofaktörlerine göre de hesaplanabilir.

$1 \le j \le n$ olmak üzere, **j.inci sütuna göre açılım**

$$\det(A) = \sum_{i}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

formülüyle verilir.

A matrisinin determinantı, bu matrisin herhangi bir satırındaki (veya sütunundaki) elemanların kofaktörleriyle çarpılıp, toplanmasıyla bulunur.

Bu yöntemi ard arda uygulayarak n. mertebeden bir kare matrisin determinantını 2. mertebeden kare matrislerin determinantlarına indirgeyebilmekteyiz.

Uygulama :

Bir matrisinin determinantını kofaktörler yardımıyla hesaplayalım.
A gibi bir matrisin determinantını hesaplamak için herhangi bir satır veya sütunu belirleyebiliriz.

örnekte 2. sütun belirlenmiş olsun;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_{12}\,A_{12} + a_{22}\,A_{22} + a_{32}\,A_{32} \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2}\, M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \\ A_{22} &= (-1)^{2+2}\, M_{22} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2}\, M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \end{aligned}\right\} \det(A) = 1\,.\,7 + 0\,.\,(-7) + 5\,.\,(-7) = -28$$

bulunur.

Kofaktör matrisin transpozesine de **ek (adjoint)matris** denir. AdjA=(kofaktör A)^T dir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} iken \qquad \text{kofaktör A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ idi. Buna göre Adj A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dir}$$

Ters matrisin elde edilmesinde ek matrisden yararlanılabilir. Şöyleki:

$A^{-1} = \dfrac{AdjA}{|A|}$ ile bulunabilir. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} iken \qquad A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Determinantının değeri sıfıra eşit olan kare matrise **Singüler Matris** denir

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad |A| = \left|\begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\right| = 6.7 - 21.2 = 0$$ olduğundan singülerdir.

Köşegen veya köşegene göre simetrik olacak şekilde belli sıraları sıfırdan farklı olan

matrise **Band Matris** denir

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpozesi tersine eşit olan kare matrise de ortogonal matris denir.

Bir A matrisi ortogonal özelliğe sahip ise $A^T=A^{-1}$ şartı sağlanıyor demektir.

$A^T = A^{-1}$ => **Ortogonal matris**

A kare matris ve det A = 0 => **Singüler matris**

Band matris =>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix}$$

Uygulama

$$aij \left\{ \begin{array}{ll} \text{Üst} & i \leq j \\ \text{alt} & i \geq j \\ \text{köşegen} & i = j \end{array} \right\} \quad k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right.$$

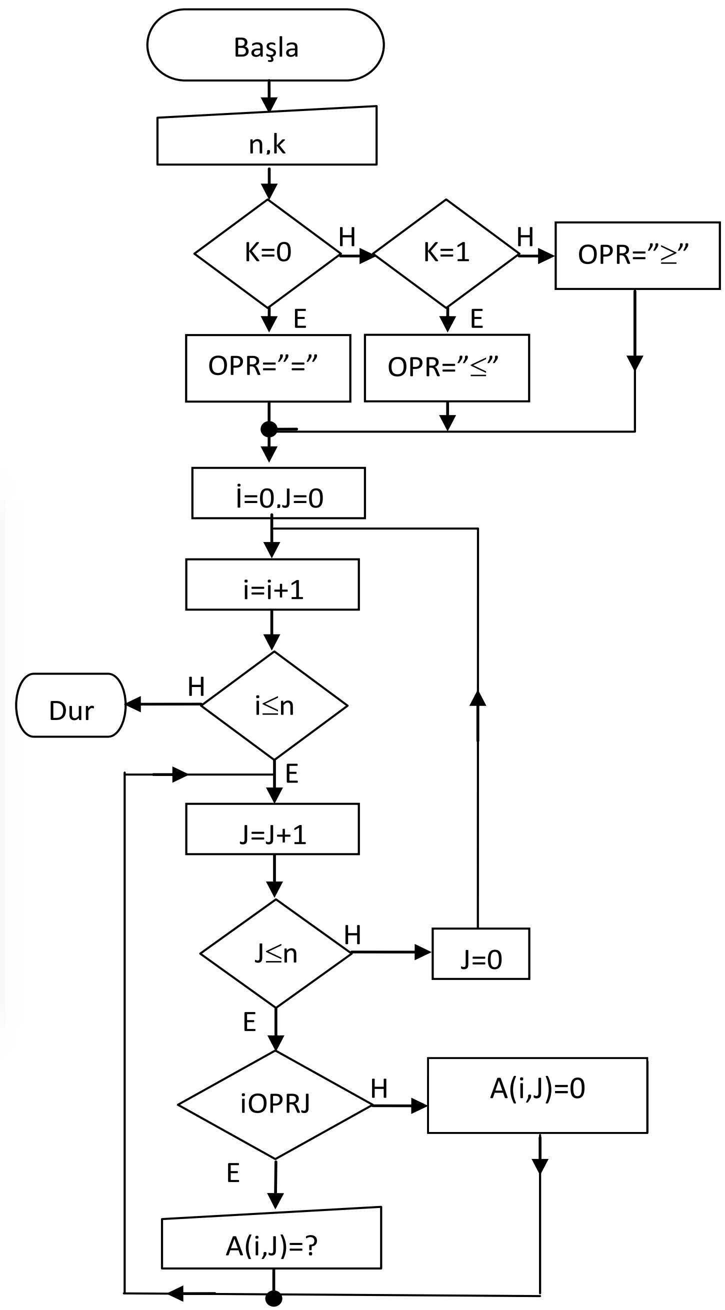
Klavyeden girilen 0,1,-1 değerlerine karşılık üst ,a alt veya Köşegen matris oluşturan programın akış diyagramını çiziniz.

Uygulama

$$aij \begin{cases} \text{Üst} & i \leq j \\ \text{alt} & i \geq j \\ \text{köşegen} & i = j \end{cases} \quad k = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

OPR	n	k	i	J	A(i,J)
=	3	0	0	0	
			1	1	3
			2	2	0
			3	3	0
			4	4	0
				0	5
				1	0
				2	
				3	
				4	
				0	

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$



Determinant

Tanım : Elemanları reel sayılar olan nxn tipindeki **kare** matrislerin kümesinden, reel sayılar kümesine tanımlanan fonksiyona, determinant fonksiyonu denir.

A karesel matrisinin determinantı,

det A veya **|A|** ile gösterilir.

Eğer nxn kare matrisin determinantını hesaplamak için ;

n=2 olması durumu için $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ reel sayılar olmak üzere 2x2 tipinden bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ formülü ile tanımlanan bir reel sayıdır.

A $_{1\times 1}$ boyutlu bir matris ise, $\mathbf{det\ (A) = a_{11}}$' dir

Determinant özellikleri

Bir k reel sayısı ile A matrisinin bir satırının çarpılması ,A matrisinden elde edilen bir B matrisi için

$$\det B = k.\det A$$ **dır**

$$n\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = n(ad - bc) = nad - nbc$$

$$\begin{vmatrix} na & c \\ nb & d \end{vmatrix} = nad - nbc \qquad ve \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ nb & nd \end{vmatrix} = nad - nbc$$

Eğer B matrisi,A matrisinin satırlarının yer değiştirilmesi ile A'dan elde edilen bir matris ise,

$$\det \mathrm{B} = -\det \mathrm{A}$$ **'dır.**

Eğer B matrisi;A'nın bir satırının skaler katının A'nın diğer satırına ilave edilmesi ile A matrisinden elde edilen bir matrisi ise,

$$\det \mathrm{B} = \det \mathrm{A}$$ **'dır.**

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Determinant özellikleri

Her nxn matrise bir reel sayıyı karşılıklı getiren ve aşağıdaki özelliklere sahip olan bir ve yalnızca bir fonksiyon vardır:

B matrisi; verilen bir nxn A matrisinin bir satırının bir reel sayısı ile çarpılması sonucu A matrisinden elde edildiğinde her zaman

$$\det B = x \det A$$

B matrisi; verilen nxn A matrisinin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi ile A'dan elde edildiğinde her zaman

$$\det \mathrm{B} = -\det \mathrm{A}$$

B, nxn A matrisinin bir satırının bir skaler katının diğer bir satıra ilave edilmesi ile A'dan elde edilen matris olduğunda

$$\det \mathrm{B} = \det \mathrm{A}$$

I, nxn birim matris olmak üzere ,

$$\det I = 1$$ **'dir.**

```
>> A=[2,1;4,3]

A=  2    1
    4    3

>> det(A)

ans = 2

>> B=[10,5;4,3]

B=  10   5
    4    3

>> det(B)

ans = 10
```

```
>> A=[2,1;4,3]

A=  2    1
    4    3

>> det(A)

ans = 2

>> B=[4,3;2,1]

B=  4    3
    2    1

>> det(B)

ans = -2
```

```
>> A=[2,1;4,3]

A=  2    1
    4    3

>> det(A)

ans = 2

>> B=[2,1;8,5]

B=  2    1
    8    5

>> det(B)

ans = 2
```

Determinant özellikleri

Örnek

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1 & 5\\ 5 & 4 & 1 & 3\\ 6 & -4 & 7 & 2\\ 3 & 4 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı sıfırdır.

```
>> A=[3,4,-1,5;5,4,1,3;6,-4,7,2;3,4,-1,5]

      3      4     -1      5
A =   5      4      1      3
      6     -4      7      2
      3      4     -1      5

>> det(A)

ans = 0
```

$$B=\begin{bmatrix}-7 & 4 & 9 & 5 & 5\\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 22 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -9 & 10 & 6 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı sıfırdır.

```
>> A=[3,4,-1,5;5,4,1,3;0,0,0,0;3,4,-1,5]
      3      4     -1      5
A =   5      4      1      3
      0      0      0      0
      3      4     -1      5

>> det(A)

ans = 0
```

Determinant özellikleri

Teorem

Bir köşegen matrisin determinantı matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}_{3x3} \Rightarrow \det(a)=1x4x6=24$$

```
>> a=[1 3 2;0 4 5 ;0 0 6]

        1    3    2
  a =   0    4    5
        0    0    6

>> det(a)
   ans =    24
```

Determinant özellikleri

✓Bir satır veya bir sütunun tüm elemanları sıfır olan matrislerin determinantı **sıfır**dır.

✓Herhangi iki satır veya iki sütunun elemanları eşit olan matrisin determinantı **sıfır**dır.

✓Herhangi iki satır veya iki sütunun elemanları orantılı olan matrisin determinantı **sıfır**dır.

✓Herhangi iki satır veya iki sütunun yerleri değişirse determinantının **işareti değişir**.

✓Bir kare matrisin determinantı ile transpozunun determinantı **eşittir**.

✓Kare matrislerin çarpımlarının determinantı, bu matrislerin determinantları çarpımına eşittir.

$$\det(A \times B) = \det A \times \det B$$

Determinant özellikleri

✓**Bir kare matrisin kuvvetinin determinantı, determinantının kuvvetine eşittir.**

det(An)= (detA)n

✓**Bir kare matrisin çarpmaya göre tersinin determinantı, determinantının tersine eşittir.**

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \qquad (|A| \neq 0)$$

✓**A = [a_{ij}|m×n matrisinin k ile çarpımının determinantı, A nın determinantının kn ile çarpımına eşittir.**

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n} \text{ ise } |k \cdot A| = k^n \cdot |A| \text{ olur.}$$

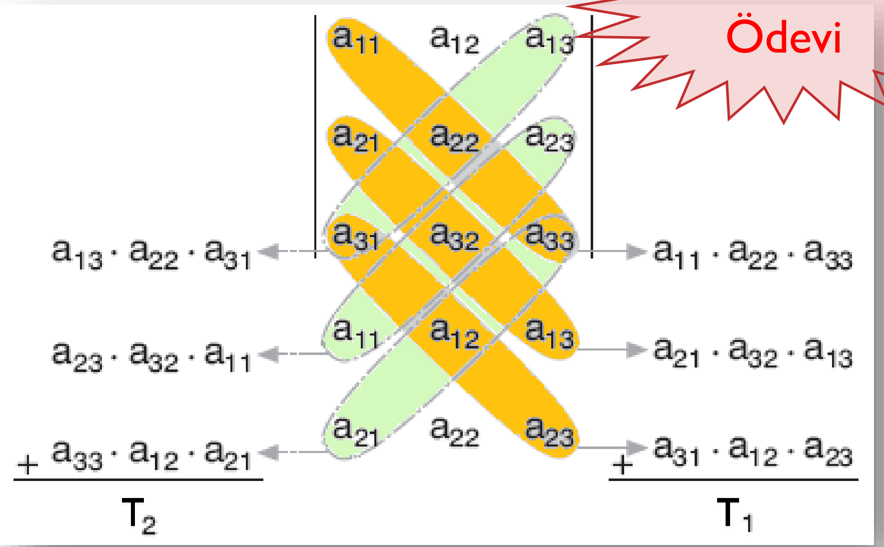
```
>> A=[3,4,-1,3;5,4,1,3;6,-4,7,2;3,4,-1,5]

         3     4    -1     3
A =      5     4     1     3
         6    -4     7     2
         3     4    -1     5

>> det(A)

   ans = 48

>> B=inv(A)

       2.1667   -1.0000    0.3333   -0.8333
B =   -1.6667    1.1250   -0.3333    0.4583
      -2.6667    1.5000   -0.3333    0.8333
      -0.5000         0         0    0.5000

>> det(B)

   ans = 0.0208

>> C=1/48

   C= 0.0208
```

✓**Bir matrisin herhangi bir satırını k ile çarpıp diğer bir satıra ekleyince veya herhangi bir sütununu k ile çarpıp diğer bir sütuna ekleyince determinantının değeri değişmez.**

✓**Sadece bir satır veya bir sütun elemanları farklı olan matrislerin determinantları toplamı, diğer satır veya sütunları aynı olan ve farklı sütunu farklı sütunların toplamı kadar olan yeni matrisin determinantına eşittir.**

Sarrus Kuralı

Hafta Ödevi



A = [aij]3×3 biçimindeki matrislerin determinantını bulmak için Sarrus kuralı kullanılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki işlemleri sırayla yaptığımızda detA = T1 – T2 ifadesi aradığımız determinantdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Determinant özellikleri

Örnek

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad |A| = \begin{array}{|ccc|}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{array}$$
$$\begin{array}{ccc}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{array}$$

det A = 1· 2· 2 + 0·1· 4 + 3·3·1− 4· 2·3−1·1·1− 2·3·0 = −12 bulunur.

Determinant özellikleri

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinant değerini elde ediniz

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & 8 \end{matrix}$$

= [(3)(4)(-9)+(4)(-3)(1)+(-6)(4)(8)]-[(1)(4)(-6)+8(-3)(3)+(-9)(4)(4)]

= [-108 -12 -192]-[-24 -72 -144]

= (-312) - (240) = -312 + 240 = -72

Determinant özellikleri

Minörler ile Determinantların Hesaplanması

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} ise$$

a11=(-1)$^{1+1}$.1=1
a12=(-1)$^{1+2}$.1=-1
a21=(-1)$^{2+1}$.3=-3
a22=(-1)$^{2+2}$.2=2   olduğundan

Kofaktör matrisin transpozesine de ek (adjoint)matris denir. AdjA=(kofaktör A)T dir.

$$\text{kofaktör A} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} iken \qquad \text{kofaktör A} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \text{ idi. Buna göre Adj A} = \begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix} \text{ dir}$$

Determinant özellikleri

Aşağıdaki gibi 3x3 tipinde genel bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Buna göre

$$\det A_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det A_{12} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det A_{13} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

olup, $\propto_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = \det A_{11}$

$$\propto_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = -\det A_{12}$$

$$\propto_{13} = (-1)^{1+3} deA_{13} = \det A_{13}$$

şeklindedir.

Determinant özellikleri

Buna göre 3x3 tipindeki bir A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= a_{11} \propto_{11} + a_{12} \propto_{12} + a_{13} \propto_{13}$$

olarak hesaplanabilir.

$$\det A = a_{i1} \propto_{i1} + a_{i2} \propto_{i2} + \ldots + a_{in} \propto_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \propto_{ik}$$

yada

$$\det A = a_{1j} \propto_{1j} + a_{2j} \propto_{2j} + \ldots + a_{nj} \propto_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \propto_{kj}$$

Determinant özellikleri

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

matrisinin bütün elemanlarına karşılık gelen kofaktörlerini bulup bu kofaktörlerden faydalanarak determinant değerini hesaplayalım.

$$\propto_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}=-18 \qquad \propto_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{bmatrix}=2, \qquad \propto_{13}=(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}=4,$$

…

Benzer şekilde hesaplanarak … $\det A=a_{11}\propto_{11}+a_{12}\propto 12+a_{13}\propto_{13}=2.(-18)+3.(2)+-4.4=-46$

yada $\det A=a_{11}\propto_{11}+a_{21}\propto_{21}+a_{31}\propto_{31}=2.(-18)+0.(-11)+1.-10=-46$ **bulunur.**

```
>> A=[2,3,-4;0,-4,2;1,-1,5]

        2       3      -4
A =     0      -4       2
        1      -1       5

>> det(A)

ans = -46
```

Uygulamalar

Matrisler üzerine çalışma soruları :

1) n boyutlu birim matrisin akış diyagramını çiziniz ?
2) Klavyeden girilen mxn boyutlu bir matrisin transpozunu ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
3) Klavyeden girilen nxn boyutlu iki matrisin toplamını alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
4) Klavyeden girilen nxn boyutlu iki matrisin çarpımını alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
5) Klavyeden girilen mxn boyutlu bir matrisin klavyeden girilen herhangi bir değerle çarparak sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
6) Klavyeden girilen mxn boyutlu bir matrisin klavyeden girilen herhangi bir değere bölerek sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
7) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisin determinantını alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
8) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisin tersini alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
9) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisi alt üçgensel matris olarak ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
10) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisi üst üçgensel matris olarak ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
11) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisi alt üçgensel ,üst üçgensel veya köşegen matris olarak ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?

İyi Çalışmalar…

Kaynak:

Sayısal Analiz (Sefa Akpınar)