Uygulama

Gauss-Jordan Eliminasyon Metodu İle Denklem Sistemi Çözme

Örnek 1.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -13 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

denklem sistemini Gauss-Jordan Eliminasyon metodu ile çözünüz.

Çözüm.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -13 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & -13 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{-2S_1+S_2 \leftrightarrow S_2 \\ -3S_1+S_3 \leftrightarrow S_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -6 & -25 \\ 0 & -14 & -1 & -17 \end{array}\right]$$

$$\overset{(-2)S_2+S_3 \leftrightarrow S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{11}S_3 \leftrightarrow S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{\substack{(-1)S_3+S_1 \leftrightarrow S_1 \\ 6S_3+S_2 \leftrightarrow S_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{-\frac{1}{7}S_2 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{-5S_2+S_1 \leftrightarrow S_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

olup $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ bulunur.

Çalışma Soruları

1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini satır indirgenmiş eşelon biçime dönüştürünüz.

2)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_3 + 7x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemini Gauss-Jordan eliminasyon metodu ile çözünüz.

3) $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 &= a \end{aligned}$$
lineer denklem sistemi veriliyor.

a nın hangi değerleri için bu lineer denklem sistemi tutarsız dır?

(Not: Ekli matrisi satır indirgenmiş eşelon biçime getirerek irdeleyiniz)

Örnek. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{l} 2x_1 + ax_2 = 1 \\ 6x_1 + bx_2 = 3 \end{array}$ lineer denklem sistemi veriliyor.

Bu lineer denklem sisteminin çözümünü a ve b sayılarının durumuna göre irdeleyiniz.

Çözüm. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 6 & b & 3 \end{array}\right] \overset{-3S_1+S_2 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 0 & b-3a & 0 \end{array}\right]$

$\underline{\underline{b-3a \neq 0}}$ ise,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 0 & b-3a & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{b-3a}S_2 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{(-a)S_2+S_1 \leftrightarrow S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}S_1}{\sim}$$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ olur. Buradan $\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ bulunur. Yani $b-3a \neq 0$ ise tek çözüm vardır.

$\underline{\underline{b-3a=0}}$ ise,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 0 & b-3a & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2}a & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

olur. Buradan $x_1 + \frac{1}{2}a x_2 = 1/2$ olur. $x_2 = t \in \mathbb{R}$ denirse, $x_1 = 1/2 - 1/2\, at$

olur. Yani $b-3a=0$ (veya $b=3a$) ise, denklem sisteminin t parametresine bağlı sonsuz çözümü vardır.

Örnek. $\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{array}$ denklem sistemini Gauss-Jordan eliminasyon metodu ile çözünüz.

Çözüm. $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 7 \end{array}\right] \overset{-2S_2+S_1 \leftrightarrow S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 11 & -12 \\ 3 & -4 & 7 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow (-1)S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11 & 12 \\ 3 & -4 & 7 \end{array}\right]$

$\overset{(-3)S_1+S_2 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11 & 12 \\ 0 & 29 & -29 \end{array}\right] \overset{S_2 \leftrightarrow \frac{1}{29}S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ $\left.\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ x_1 - 11x_2 = 12 \\ \quad\downarrow \\ \quad -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}$

Örnek. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 2$$
$$2x_1 - 5x_2 + (a^2-7)x_3 = a+3$$

lineer denklem sistemi veriliyor.

i) a sayısının hangi değerleri için denklem sistemi tutarsız dır?

ii) a " " " " denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır?

iii) a sayısının hangi değerleri için denklem sisteminin bir tek çözümü vardır?

Çözüm. Ekli matrisi yazıp satır indirgeyelim

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 3 & 10 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & a^2-7 & a+3 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 10 \\ 2 & -5 & a^2-7 & a+3 \end{array}\right] \underset{-2S_1+S_3 \leftrightarrow S_3}{\overset{-3S_1+S_2 \leftrightarrow S_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right]$$

$$\overset{S_2 \leftrightarrow \frac{1}{4}S_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right] \underset{(-1)S_2+S_3 \leftrightarrow S_3}{\overset{3S_2+S_1 \leftrightarrow S_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

(*) $\underline{a^2-4 \neq 0}$ ise, 3. satır a^2-4 e bölünebilir. Yani

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right] \underset{S_3 \leftrightarrow \frac{1}{a^2-4}S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right] \underset{-3S_3+S_2 \leftrightarrow S_2}{\overset{-6S_3+S_1 \leftrightarrow S_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5-\frac{6}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{3}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (5a+4)/a+2 \\ 0 & 1 & 0 & (a-1)/a+2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a+2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5a+4}{a+2} \\ x_2 = \dfrac{a-1}{a+2} \\ x_3 = \dfrac{1}{a+2} \end{cases}$$

Yani eğer $a^2-4 \neq 0$ ise yani $a \neq \mp 2$ ise lineer denklem sistemi tek çözüme sahiptir.

(*) $a^2-4=0$ ve $a-2=0$ ise,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

olur. Buradan $x_1 + 6x_3 = 5$, $x_2 + 3x_3 = 1$ yani

$x_1 = 5 - 6x_3$, $x_2 = 1 - 3x_3$ olur. $x_3 = t \in \mathbb{R}$ denirse, $x_1 = 5-6t$, $x_2 = 1-3t$ olur. Böylece

$(x_1, x_2, x_3) = (5-6t, 1-3t, t)$ şeklinde sonsuz çoklukta çözüm vardır.

(*) $a^2-4=0$ ve $a-2\neq 0$ ise,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right]$$

olup, son satırdan $0 = a-2$ çelişkisi elde edilir. Yani bu durumda denklem sistemi tutarsızdır.