Adı Soyadı: **Diferansiyel Denklemler 1.Kısa Sınav** **(15.03.2019)**

Bilg. Müh. 1.şb.

İmza:

Öğrenci No: CEVAP ANAHTARI

NOTU:

NOT: Süre: 45 dk.olup sadece Ders notları (defterler) serbesttir !...

SORULAR

1. $y = c_1 x + c_2 x^{-2}$ eğri ailesinin diferansiyel denklemi bularak denklemin mertebe ve lineerliğine göre sınıflandırınız.

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+2y^4}{xy^3}$ denklemi homojen denklem midir? Cevabınız evet ise $y = ux$ dönüşümü uygulayarak denklemi çözünüz.

3. $(y - xy^2)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0$ denklemi veriliyor. Buna göre

a) xy -nin fonksiyonu şeklinde bir integrasyon çarpanı elde ediniz.

b) Bu çarpan yardımıyla denklemi tam diferansiyel hale getirerek çözünüz.

CEVAPLAR

1. 2. adet keyfi sabit olduğu için iki defa türev almalıyız.

$y' = c_1 - 2c_2 x^{-3} \Longrightarrow c_1 = y' + 2x^{-3}\left(\frac{x^4 y''}{6}\right)$

$y'' = 6c_2 x^{-4} \Longrightarrow c_2 = \frac{x^4 y''}{6}$

$y = c_1 x + c_2 x^{-2} = x\left(y' + 2x^{-3}\left(\frac{x^4 y''}{6}\right)\right) + x^{-2}\left(\frac{x^4 y''}{6}\right)$

$y = xy' + \frac{x^2}{3}y'' + \frac{x^2}{6}y'' \Longrightarrow \boxed{x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0}$ ✓

2. mertebeden lineer denklemdir.

(y, y', y'' lineerdir)

2. $\frac{dy}{dx} \stackrel{?}{=} f(y/x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+2(y/x)^4}{(y/x)^3} = f(y/x)$ şeklinde yazılabildiği için denklem homojen denklemdir.

$y = ux$, $y' = xu' + u$ ile

$u + xu' = \frac{1+2u^4}{u^3} \Leftrightarrow xu' = \frac{1+2u^4}{u^3} - u$

$\Leftrightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1+u^4}{u^3}$

$\Leftrightarrow \frac{u^3}{1+u^4}du = \frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow \int \frac{u^3}{1+u^4}du = \int \frac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln(1+u^4) = \ln x + \ln c$

$\Rightarrow 1 + u^4 = c_0 x^4$

$\Rightarrow 1 + (y/x)^4 = c_0 x^4$

$\Rightarrow \boxed{x^4 + y^4 = c_0 x^8}$ ✓

(3)

$\underbrace{(y-xy^2)}_{M}dx+\underbrace{(x^2y^2+x)}_{N}dy=0$

$\left.\begin{array}{l} M_y=1-2xy \\ N_x=2xy^2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow M_y\neq N_x$

(xy)-e bağlı int. çarpanı:

$$e^{\int \frac{M_y-N_x}{yN-xM}d(xy)} = e^{\int \frac{-2xy(1+y)}{y(x^2y^2+x)-x(y-xy^2)}d(xy)} = e^{\int \frac{-2xy\cancel{(1+y)}}{x^2y^2\cancel{(y+1)}}d(xy)}$$

$$= e^{\int \frac{-2}{xy}d(xy)} = e^{-2\ln(xy)} = (xy)^{-2} = \frac{1}{x^2y^2} \text{ int. çarpanıdır.}$$

$\underbrace{\frac{1}{x^2y^2}(y-xy^2)}_{\overline{M}}dx+\underbrace{\frac{1}{x^2y^2}(x^2y^2+x)}_{\overline{N}}dy=0$

$\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right)dx+\left(1+\frac{1}{xy^2}\right)dy=0$

$U(x,y)=\int \overline{M}(x,y)dx+h(y)=\int\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right)dx+h(y)=-\frac{1}{xy}-\ln|x|+h(y)$

$U_y=\overline{N} \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{xy}-\ln x+h(y)\right)_y=1+\frac{1}{xy^2}$

$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{xy^2}}-0+h'(y)=1+\cancel{\frac{1}{xy^2}} \Rightarrow h'(y)=1 \Rightarrow h(y)=y+C$

Genel çözüm: $\boxed{U(x,y)=-\frac{1}{xy}-\ln|x|+y+C=0}$ ✓