Lagrange Diferensiyel Denklemi:

$$y = x\,g(p) + f(p) \qquad y' = p$$

şeklinde tanımlanan dif. denk.'in x'e göre her iki tarafın türevi alınarak çözüm bulunur.

$$p = g(p) + x\,g'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p - g(p) = [x\,g'(p) + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow [p-g(p)]\frac{dx}{dp} - x\,g'(p) = f'(p)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{g'(p)}{p-g(p)}x = \frac{f'(p)}{p-g(p)} \quad (\text{Lineer})$$

Sorular: Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz.

1) $y = 2xy' + \ln y'$

2) $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$

3) $y = 2xy' + \sqrt{1+y'^2}$

Çözüm: 1) $y = 2xy' + \ln y' \qquad y' = p$

$y = 2xp + \ln p$ (Lagrange) x'e göre türev alalım

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

$\Rightarrow \quad p = 2p + 2x \dfrac{dp}{dx} + \dfrac{1}{p} \dfrac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \quad -p = \left(2x + \dfrac{1}{p}\right) \dfrac{dp}{dx}$

$p=0$ olduğu zaman $\ln p$ tanımsızdır. Buradan $p=0$'a karşılık gelen aykırı çözüm yoktur.

$\Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2}{p} x = -\dfrac{1}{p^2}$ (lineer)

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{p^2} - \dfrac{1}{p} \\ y = 2xp + \ln p \end{cases}$$

integral eğrilerinin parametrik gösterimi

—.—

+2) $y = \dfrac{3}{2} x y' + e^{y'}$ $\quad y' = p \quad$ x'e göre türev alalım

$p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2} p + \dfrac{3x}{2} \dfrac{dp}{dx} + e^p \dfrac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \quad p = \dfrac{3p}{2} + \left(\dfrac{3x}{2} + e^p\right) \dfrac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{p}{2} = \left(\dfrac{3}{2} x + e^p\right) \dfrac{dp}{dx}$

$-\dfrac{p}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ y = \dfrac{3}{2} x p + e^p \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 1}$ Aykırı çözüm

$$-\frac{p}{2}\frac{dx}{dp} = \frac{3x}{2} + e^p$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{p}x = -\frac{2}{p}e^p \quad (\text{lineer})$$

$$\lambda = e^{3\ln p} = p^3$$

$$p^3 \cdot x = \int -\frac{2}{p}e^p p^3\, dp + c = -2e^p(p^2-2p+2) + c$$

$$\begin{cases} p^3 x = -2e^p(p^2-2p+2) + c \\ y = \frac{3}{2}xp + e^p \end{cases}$$

parametrik çözümü

parametrik gösterimi

+ 3) $y = 2xy' + \sqrt{1+y'^2}$ $\quad y' = p$ yazıp x'e göre türev alalım.

$$-p = \left(2x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow -p\frac{dx}{dp} - 2x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad (\text{lineer})$$

denklemini elde ederiz.

Genel Çözüm

$$x = \frac{1}{p^2}\left[c_1 - \int \frac{p^2\, dp}{\sqrt{1+p^2}}\right]$$

$$y = \frac{2}{p}\left[c_1 - \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}}\right] + \sqrt{1+p^2}$$

Soru: $y = 2xy' + y'$ dif. denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' = p$ diyelim. ve x'e göre türev alalım.

$$y' = 2y' + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow -p = (2x+1)\frac{dp}{dx}$$

$p=0$ için $\boxed{y=0}$ aykırı çözüm.

$$\Rightarrow -p\frac{dx}{dp} - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -p \quad \text{(lineer)}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln p} = e^{\ln p^2} = p^2$$

$$\lambda x = \int \lambda(-p)\,dp + c$$

$$\Rightarrow p^2 x = -\int p^3\,dp + c \Rightarrow p^2 x = -\frac{1}{4}p^4 + c$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}p^2 + \frac{c}{p^2}$$

$$y = 2\left(-\frac{1}{4}p^2 + \frac{c}{p^2}\right)p + p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-p^2}{4} + \dfrac{c}{p^2} \\ y = -\dfrac{p^3}{2} + 2\dfrac{c}{p} + p \end{cases}$$

Parametrik çözüm.