Birinci Mertebeden Yüksek Dereceden Diferensiyel Denklemler:

Clairaut Diferensiyel Denklemi:

$y = xy' + f(y')$, $y' = p$

$y = xp + f(p)$ şeklindeki diferensiyel denkleme

Clairaut dif denk denir.

x'e göre türev alırsak

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left[x + f'(p)\right] = 0$$

Buradan $\frac{dp}{dx} = 0$ ve $x + f'(p) = 0$ denklemlerinin çözümleriyle Clairaut denkleminin genel çözümü bulunur.

$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ buradan $y = cx + f(c)$ doğru ailesi elde edilir.

$x + f'(p) = 0$ ile $y = xp + f(p)$ arasından p yok edilerek bir çözüm elde edilir. Bu çözüm hem aykırı çözüm hem de zarftır. (Bir eğri ailesinin bütün eğrilerine teğet olan eğri.)

Eğri ailesini temsil eden denklem ile, bu denk parametreye göre kısmi türevi arasından parametre yok edilerek zarf denk bulunur.

(102)

Sorular: Aş. denk çözümlerini bulunuz

1) $y = xp - e^p$

2) $y = xy' + \frac{1}{y'}$

3) $y = px + \sqrt{4+p^2}$

4) $(y-px)^2 = 1+p^2$

5) $y = xy' + y'^3$

6) $y = xy' - \frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{y'^3}$

7) $y = xy' - y'^2$

Çözüm: 1) $y = xp - e^p$ $\frac{dy}{dx} = p$

x'e göre türev alalım.

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - e^p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}(x - e^p) = 0$$

$x = e^p \Rightarrow p = \ln x$

$$\left.\begin{array}{l} x = e^p \\ y = xp - e^p \end{array}\right\} \quad \boxed{y = x\ln x - x} \text{ Aykırı çözüm}$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = c \\ y = xp - e^p \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = cx - e^c} \text{ Parametreli çözüm}$$

—— , ——

2) $y = xy' + \frac{1}{y'}$ $\qquad$ $y' = p$

$y = xp + \frac{1}{p}$ $\qquad$ x'e göre türev alalım

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$p = c$ ise $\boxed{y = cx + \frac{1}{c}}$ parametreli çözüm

$$x - \frac{1}{p^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{p^2}$$

$$x = \frac{1}{p^2} \Rightarrow p^2 = \frac{1}{x}$$

$$y = px + \frac{1}{p} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

$\Rightarrow \boxed{y^2 = 4x}$ aykırı çözüm

+3) $y = px + \sqrt{4+p^2}$ $\quad$ x'e göre türev alalım

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{4+p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{4+p^2}}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = 0 \\ y = px + \sqrt{4+p^2} \end{cases} \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx + \sqrt{4+c^2}}$$

parametreli çözüm

$$\begin{cases} x + \dfrac{p}{\sqrt{4+p^2}} = 0 \\ y = px + \sqrt{4+p^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2p}{2\sqrt{4+p^2}} = -x$$

$$2p = -2x\sqrt{4+p^2}$$

$$4p^2 = 4x^2(4+p^2)$$

$$4p^2 = 16x^2 + 4p^2x^2$$

$$4p^2 - 4p^2x^2 = 16x^2$$

$$4p^2(1-x^2) = 4x^2$$

$$p^2 = \frac{4x^2}{4(1-x^2)} \Rightarrow p = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{y = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{4 + \frac{4x^2}{1-x^2}}}$$

Aykırı çözüm

4) $(y-px)^2=1+p^2$

$y=px\mp\sqrt{1+p^2}$ x'e göre türev alalım

$\cancel{p}=\cancel{p}+x\frac{dp}{dx}+\frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0$

$\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c \Rightarrow \boxed{(y-cx)^2=1+c^2}$ ~~Pa~~ Parametrik Çözüm

$x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0 \Rightarrow \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=-x \Rightarrow p^2=x^2(1+p^2)$

$\Rightarrow p^2=x^2+x^2p^2$

$\Rightarrow p^2(1-x^2)=x^2$

$\Rightarrow p^2=\frac{x^2}{1-x^2}$

$\Rightarrow p=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\begin{cases} y=px+\sqrt{1+p^2} \\ p=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}$ Aykırı Çözüm

+5) $y = xy' + y'^3$ x'e göre türev alalım

$y = xp + p^3$

$\Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx}(x+3p^2) = 0$

$\begin{cases} y = xp + p^3 \\ p = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = cx + c^3}$ parametreli çözüm

$x + 3p^2 = 0 \Rightarrow x = -3p^2 \Rightarrow p^2 = -\frac{x}{3}$

Buradan $\boxed{y^2 = -\frac{4}{27}x^3}$ Aykırı çözümü bulunur

+6) $y = xy' - \frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{y'^3}$ $y' = p$ dersek

$y = xp - \frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{p^3}$ x'e göre türev alalım.

$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{3}{2}\sqrt{p}\frac{dp}{dx}$

veya

$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{p}\right) = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0$ dan $\boxed{y = cx - \frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{c^3}}$ ~~Aykırı~~ parametreli çözümü bulunur.