

Ayrık İşlemsel Yapılar

DERS 1

Ders Tanıtımı & Giriş

Doç. Dr. Nilüfer YURTAY
Dr. Öğretim Üyesi Gülüzar ÇİT

Konu & İçerik

- Dersin Amacı & İçeriği
- Ders Değerlendirme
- Kombinasyonel Problemlere Giriş
- Kaynaklar



Dersin Amacı & İçeriği

➤ Dersin Amacı

- Matematiksel düşünceyi, sebep-sonuç ilişkisi oluşturmayı öğrenmek
- Sayma metotlarına bağlı olarak değişik sayılandırma problemlerinde analiz yapabilmek ve çözüm bulabilmek
- Ayırık yapılar (kümeler, permütasyon, bağıntılar, graf, ağaçlar) hakkında bilgi sahibi olmak
- Algoritmik düşünme yeteneği kazanabilmek
- Ayırık matematik uygulamaları ve modellerinin Bilgisayar Mühendisliği problemlerine nasıl uyarlandığını görmek

➤ Dersin İçeriği

- Bilgisayar mühendisliğindeki ve bilgisayar bilimlerindeki matematiksel tekniklere giriş, matematiksel mantık, indüksiyon, küme teorisi, bağıntılar, fonksiyonlar, cebirsel yapılar, graflar, ağaçlar ve eşleme.

Ders Değerlendirme

- **Yıl İçi Başarı Oranı** **%50**
 - Vize %40
 - 1. Proje / Tasarım %20
 - 2. Proje / Tasarım %20
 - 3. Proje / Tasarım %20
- **Yıl Sonu Başarı Oranı** **%50**

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş

- **Ayrık Matematik** veya **Ayrık İşlemsel Yapılar**, olası durumları sonlu olan problemin çözümü ile uğraşan matematik alanıdır.
- Bu problemler **varlık belirleme**, **sayma** ve **optimizasyon** olmak üzere üç ana kategoriye ayrılabilir.
- Bazı durumlarda çözümün var olup olmadığı açık değildir. Bu bir varlık belirleme(existence) problemidir.
- Bazı durumlarda ise çözümün olduğu bilinir ancak, bunların kaç tane olduğunu bilmek isteriz. Bu ise bir sayma (counting) problemidir.
- En iyi olan çözümün istendiği durum ise optimizasyon problemi olarak düşünülebilir.

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

- Dört evli çift , her pazar akşamı iki sahada karışık ve çift olarak tenis maçı yapıyorlar. İki saat oyun süresi içinde her yarım saatte bir eşlerini ve rakiplerini değiştiriyorlar. Her bir adamın her bir kadınla en az bir kere birlikte ve karşısında oynadığı ve her bir diğer adama karşı en az bir kez oynadığı bir fikstür var mı ? Bu problem bir varlık belirleme problemidir.

Varlık Belirleme
Problemi

- Altı kişilik bir yatırım kulübü her yıl başkan ve sayman pozisyonlarını dönerli olarak değiştirmek istiyorlar. Aynı insanların , aynı pozisyonlara gelmesi için kaç yıl geçmelidir ? Buradaki problem ise sayma problemi olarak düşünülebilir.

Sayma
Problemi

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

- Bir iş yerindeki üç çalışan Ali, Ayşe ve Ahmet sırasıyla 10 milyon, 12 milyon, 15 milyon saat ücreti alıyorlar. Patronun bu insanlara vereceği 3 ayrı iş var. Tabloda her bir insanın bu işleri ne kadar sürede yapacağı gösterilmiştir. Patron toplam olarak en az ödeme yapacak şekilde her birine hangi işi vermelidir? Açıkça görülmektedir ki bu bir optimizasyon problemidir.

Optimizasyon
Problemi

	Ali	Ayşe	Ahmet
İş 1	7,5	6	6,5
İş 2	8	8,5	7
İş 3	5	6,5	5,5

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Proje Tamamlama İçin Zamanlama

- Büyük bir mağaza bayram indirimi için 8 sayfalık bir ilan göndermeyi planlıyor. Bu ilanın bayramdan en az 10 gün önce postalanması gereklidir. Ancak bir çok işin yapılması ve öncelikle de bazı kararların alınması gerekiyor. Tüm bu işlerin yapımı için zamana ihtiyac vardır. Bunun için ise sadece 30 gün olduğunu kabul edelim. Her bir işin ne kadar süre alacağını tablo olarak verirse;

İş	Gün
Mal Seçimi (Kısım Mud.)	3
Mal Seçimi (Satın Alma)	2
İlan için mal seçimi ve fiyat belirleme	2
İlan Hazırlığı (Resim)	4
İlan Hazırlığı (Yazı)	3
İlan Tasarımı	2
Posta Listesi Hazırlama	3
Etiket Basımı	1
İlan Basımı	5
Etiket Yapıştırma	2
İlan Postalama	10

ilk bakışta bu işin yetiştirilmesi için gerekli toplam zaman 37 gündür.

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Proje Tamamlama İçin Zamanlama...

- Hangi işin hangisine bağlı olduğunu belirlemek için işlere A,B,C.....K gibi etiketler verelim ve bir başka tablo hazırlayalım:

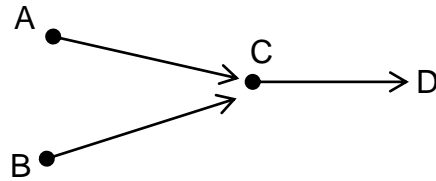
İş	Önceki İşler
A Mal Seçimi (Kısım Mud.)	Yok
B Mal Seçimi (Satın Alma)	Yok
C İlan Mal Seçimi Ve Fiyat Saptama	A,B
D Resim	C
E Yazı	C
F İlan Tasarımı	D,E
G Posta Listesi	C
H Etiket Basımı	G
I İlan Basımı	F
J Etiket Yapıştır	H,I
K İlan Postalama	J

- Bütün elemanların mümkün olan en kısa zamanda işlerine başlamış olduklarını varsayalım. Yine de işin yetişip yetişmeyeceğine henüz karar veremiyoruz. Bu işin 30 gün veya daha kısa sürede tamamlanabilme olasılığı var mı? Görüldüğü gibi burada problem bir **varlık problemi**dir.

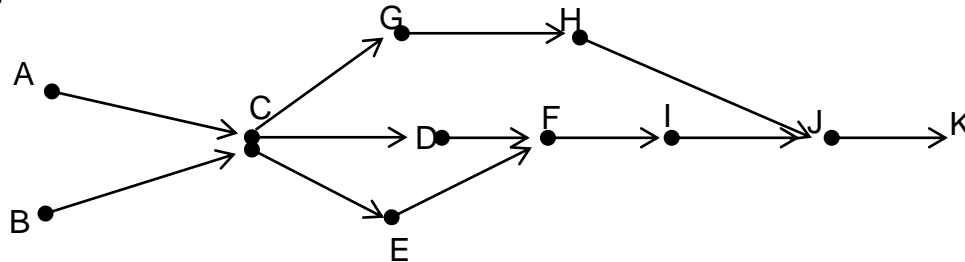
Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Proje Tamamlama İçin Zamanlama...

- Bazı durumlarda bilgiyi grafik olarak göstermek çok daha anlaşılabilir kılacaktır. Her bir görevi bir nokta ile gösterelim ve iki görev arasında eğer biri diğerinin yapılması için gerekiyorsa bir okla iki noktayı birleştirelim. Örneğin A ve B işleri C den önce yapılmalı ve D işi için de C önce yapılmalıdır. Buna göre graf şekildeki gibi olacaktır.



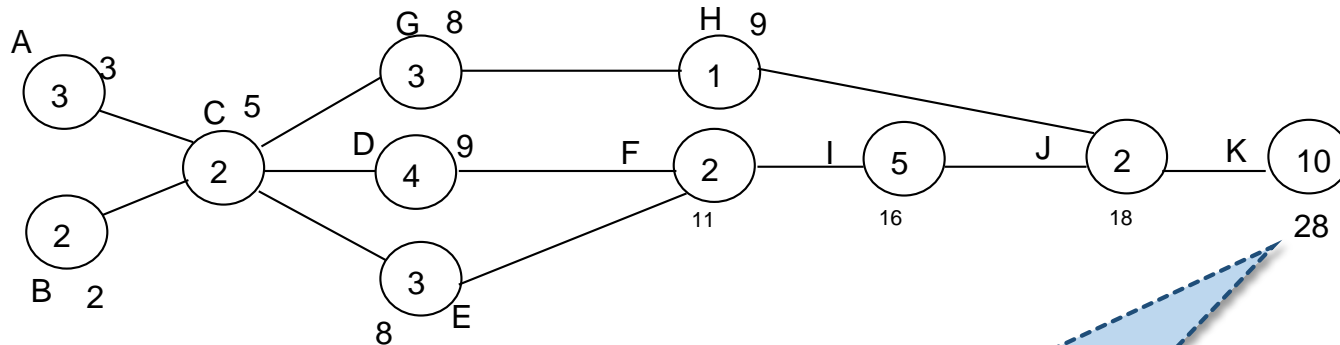
- Benzer düşünceyle yukarıda anlatılan problemin tüm graf gösterimi şekildeki gibidir.



Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

► Proje Tamamlama İçin Zamanlama...

- Burada tüm okların sağdan sola doğru olduğunu bildiğimize göre okları çizmeyebiliriz. Ayrıca her düğümü küçük bir daire ile gösterip içine o iş için gerekli süreyi de yazabiliriz. Bu durumda aşağıdaki şekili elde ederiz.

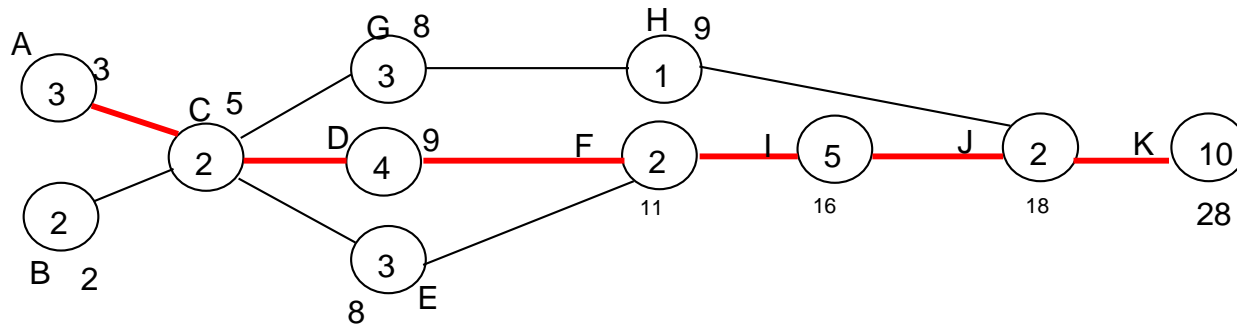


Sonuçta K işi için toplam 28 gün bulduğumuza göre iş zamanında yetiyecek demektir.

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Kritik Yol Analizi

- Açıkladığımız bu yöntem **PERT (Program Evalution and Review Technique)** olarak adlandırılır. Bu yöntem birkaç büyük projenin programlanması ve zamanlanması için çok kullanılan bir yöntemdir.
- Şimdi işin tamamlandığı K düğümünden geriye doğru incelemeye başlarsak ; K 28 günde tamamlanıyor , buna etken J 'nin 18 günde bitmesidir. J 'ye baktığımızda H ve I işlerine bağlıdır. H, 9 ve J, 16 günde bittiğine göre I çok daha önemli olmaktadır. Bu düşünce ile geriye başlangıç düğümlerine doğru analize devam edersek diyagramda sonuçta A düğümüne varırız. **A-C-D-F-I-J-K** yolu "**Kritik Yol**" olarak adlandırılır.

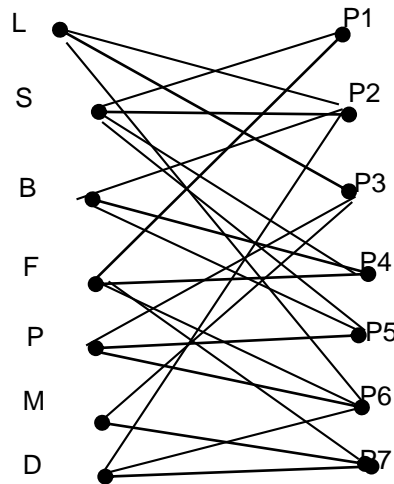


Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Eşleme Problemi

- Türk Hava Yollarının pazartesi sabahları Ankara'dan 7 ayrı ülkeye uçuşu vardır. THY 7 ayrı pilotunu uçmak istedikleri şehirlere göre tarife yapmak istemektedir. Pilotların isteklerine göre aşağıdaki liste hazırlanmıştır:

Libya : P2 , P3 , P6
Suriye : P1 , P2 , P4 , P5
Brezilya : P2 , P4 , P5
Fransa : P1 , P4 , P6 , P7
Peru : P3 , P5 , P6
Macaristan: P3 , P7
Danimarka : P2 , P6 , P7



Bu listeye göre görevlendirme mümkünse tüm pilotların isteklerine göre yapılacak, değilse mümkün olduğunca çok eşleme yapılacaktır. Bu problem bir optimizasyon problemi olarak düşünülebilir. Uçuşlarla pilotlar, pilotların isteğine göre mümkün olduğunca fazla çakışma olacak şekilde eşlenecektir.

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Eşleme Problemi...

- Eşleme işlemine doğrudan başladığımızı düşünelim. Her uçuşa bir pilotu eşlemek için olası tüm yolları listeleyebiliriz ve olası her yol için kaç tane görevlendirmenin pilotların isteğine uyduğunu sayabiliriz. Örnek olarak bir alanı eşlemeyi ele alalım.

		<u>İstek</u>
L	P1	Hayır
S	P2	Evet
B	P3	Hayır
F	P4	Evet
P	P5	Evet
M	P6	Hayır
D	P7	Evet

- Bu eşlemede 4 pilot istediği yere uçabilmektedir. Başka bir eşleme çok daha iyi bir sonuç verebilecektir. Eğer uçuş listesini aynı sırada sabit tutarsak, alanı eşlemede yapılan iş , pilotların sıralamasını değiştirmektir. Örneğin P2, P2 , P3 , P4, P5 , P6 , P7 bir başka eşleme olacaktır. Bu problemi çözmek için ortaya çıkan sorular şunlar :
 - Olası sıralama sayısı kaç tanedir ?
 - Tüm olası sıralamayı herhangi birini unutmadan nasıl üretebiliriz?

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Sayma Teknikleri

➤ Çoğu kombinasyonel problem sayma gerektirmektedir. Problemde ele alınması gereken obje sayısı genellikle çok fazla olduğundan, geçerli obje kümesini listelemeden bunların sayısını bulmamız istenir.

➤ Pascal Üçgeni ve Binom Teoremi

➤ Bazı problemlerde, verilen bir kümenin belli bir sayıda eleman içeren alt kümelerinin sayısı istenir.

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

➤ n, kümedeki eleman sayısı, r alt kümedeki eleman sayısıdır. Örneğin sesli harflerin {a,e,i,o,u} olarak tanımlanan bir kümesinin iki elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 10 \text{ olarak bulunabilir}$$

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Teorem:

- r ve n , $1 \leq r \leq n$ olmak üzere tamsayılar ise $C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ dir.

$n=0$				$C(0,0)$				
$n=1$				$C(1,0)$		$C(1,1)$		
$n=2$			$C(2,0)$		$C(2,1)$		$C(2,2)$	
$n=3$		$C(3,0)$		$C(3,1)$		$C(3,2)$		$C(3,3)$
$n=4$	$C(4,0)$		$C(4,1)$		$C(4,2)$		$C(4,3)$	$C(4,4)$

- üçgeni **Pascal üçgeni** olarak bilinir. Bu üçgeni yakından incelersek $C(n,0)=C(n,n)=1$ olduğundan her satırın ilk ve son elemanları 1'dir. Ayrıca Teorem 1.1'e göre, her satırdaki ilk ve son olmayan elemanların dışındaki elemanlar, bir üst satırda kendine en yakın elemanların toplamına eşittir. Örneğin $C(4,2)=C(3,1)+C(3,2)$ olacaktır. Sonuç olarak Pascal Üçgeni yandaki gibi gösterilebilir.

					1				
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ **Teorem:**

- **r ve n , $1 \leq r \leq n$ olmak üzere tamsayılar ise $C(n,r)=C(n,n-r)$ dir.**
- $C(n,r)$ sayıları Binom sabitleri olarak adlandırılırlar. $(x+y)^n$ in açılımında bu sabitler $x^{n-r}y^r$ nin katsayılarıdır. Buna göre $(x+y)^n$ in katsayıları Pascal üçgeninde n .satırın katsayılarıdır.
- **Örneğin**
 - $(x+y)^3=(x+y)(x+y)^2=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ de olduğu gibi.

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Sayma Teknikleri

Pigeonhole Prensibi

Eğer p eleman q adet yere yerleştirilecek ve $p > kq$ ($k > 0$) ise, q adet yerden bazılarında en az $k+1$ eleman olacaktır.

Örnek

15 evli çift içinden kaç kişi seçilmelidir ki, seçilenler içinde en az bir evli çift olsun ? Sorunun cevabı 16 kişidir.

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Sayma Teknikleri

Çarpma Prensibi

Bir prosedürün ardışık k adımdan oluştuğunu varsayalım. Birinci adım n_1 farklı yol, ikinci adım n_2 farklı yolla yapılabilir. Tüm prosedür, $n_1.n_2.....n_i.....n_k$ adet farklı yolla yapılabilir.

Örnek

Bir Japon arabası 6 farklı renkte, 3 farklı motorla, otomatik veya manuel vitesle araba üretilebiliyor. Kaç farklı model araba olabilir? $k=3$ $n_1=6$ $n_2=3$ ve $n_3=2$ olduğuna göre $6.3.2=36$ farklı model olacaktır. Şimdi uçuş problemine geri dönelim. Birinci uçuşu ele alalım. 7 pilot içinden birini seçebiliriz. Yani 7 olasılık vardır. Bunların içinden bir tanesini seçip, ikinci uçuşa geçtiğimizde 6 farklı seçeneğiniz kalacaktır. Bu şekilde devam edersek olası eşleşmelerin sayısı $7.6.5.4.3.2.1$ olacaktır. Demek ki n adet uçuş ve n adet pilot varsa eşleşme sayısı $n!=n.(n-1)(n-2)...3.2.1$ adettir. Bu işleme permütasyon adını vermekteyiz. n adet objenin farklı biçimde sıralanması işlemine, permütasyon diyoruz. n objenin içinden r objenin tekrarlanmadan seçilebilme sayısı n objenin r adet permütasyonu olup,

$P(n,r) = n!/(n-r)!$ olacaktır.

Örneğin 7 uçuştan 2 si iptal edilmesi durumunda olası görevlendirme sayısı ;

$P(7,5) = 7.6.5.4.3$ olacaktır.

Problemin çözümünün gerçekleştirilebilmesini tekrar ele alırsak, 7 uçuş için 7 pilot $7! = 5040$ farklı biçimde görevlendirilebilir.

Kombinasyonel Problemler ve Tekniklere Giriş...

➤ Sayma Teknikleri

Toplama Prensibi

Eleman sayıları n_1, n_2, \dots, n_k olan k adet küme olsun. Eğer bu kümelerin elemanları ayık ise, yani hiçbir kümenin başka küme ile ortak elemanı yoksa, bu kümelerin birleşimleri ile oluşan kümenin eleman sayısı $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ dır.

Örnek

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ olsun. A ve B kümelerinin elemanları ortak değil, yani $A \cap B = \emptyset$ dir. O halde $|A \cup B| = |A| + |B| = 7$ dir.

Örnek

1 ile 100 arasında çift veya 5 ile biten kaç sayı olduğunu araştıralım. 1-100 arasında 50 çift sayı vardır. 5 ile biten tüm sayılar tek sayı olup bunlar 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 olup 10 tanedir. O halde istenen yanıt $50 + 10 = 60$ olacaktır.

Kaynaklar

- “Applied Combinatorics”, Alan Tucker, John Wiley&Sons Inc, 1994.
- “Applications of Discrete Mathematics”, John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.
- “Discrete Mathematics”, Paul F. Dierker and William L.Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.
- “Discrete Mathematic and Its Applications”, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5th Edition, 1999.
- “Discrete Mathematics”, Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.
- “Discrete Mathematics with Graph Theory” , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.
- “Discrete Mathematics Using a Computer”, Cordelia Hall and John O’Donnell, Springer, 2000.
- “Discrete Mathematics with Combinatorics”, James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.
- “Discrete and Combinatorial Mathematics”, Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.
- “Discrete Mathematics”, John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.
- “Essence of Discrete Mathematics”, Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.
- “Mathematics:A Discrete Introduction”, Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.
- “Mathematics for Computer Science”, A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.
- “Theory and Problems of Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.
- “2000 Solved Problems in Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.