Sayısal Analiz

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

İletişim :

yyurtay@sakarya.edu.tr
www.cs.sakarya.edu.tr/yyurtay
(264) 295 58 99

Ders İçeriği

- Gauss Jordan Yöntemi
- Cramer Kuralı
- Uygulama

Gauss Jordan Yöntemi :

Bu yöntem gauss eliminasyon yöntemine, son aşamada elde edilen üçgen matrisi birim matris haline dönüştürmesi işlemidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ denklem takımı ile ifade edersek

2. satır a_{12} ile çarpılarak 1. satırdan çıkarılırsa,

$a_{13}' = a_{13} - a_{12}.a_{23}$, $b_1' = b_1 - a_{12}.b_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}' \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

3. satır a_{13}' ile çarpılarak 1. satırdan çıkarılırsa,

$b_1'' = b_1' - a_{13}'.b_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1'' \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

3. satır a_{23} ile çarpılarak 2. satırdan çıkarılırsa,

$b_2' = b_2 - a_{23}.b_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1'' \\ b_2' \\ b_3 \end{bmatrix}$$

olarak katsayı matrisi birim matris haline dönüşmüş olur.

Gauss Jordan

$A * X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow S1/a_{11}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}5 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow S2 - a_{21} * S1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 0 & 2{,}5 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}5 \\ 13{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow S3 - a_{31} * S1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 0 & 2{,}5 & -3 \\ 0 & 2{,}5 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}5 \\ 13{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow S2/a_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & -1{,}2 \\ 0 & 2{,}5 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}5 \\ 5{,}4 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow S3 - a_{32} * S2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}5 \\ 5{,}4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow S3/a_{33}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}5 \\ 5{,}4 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ gauss eliminasyon işlemleri burada sona eriyor.

Gauss Jordan işleminden devam edilecek.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 \\ 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 5,4 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow S2 - a_{23} * S3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow S1 - a_{13} * S3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow S1 - a_{12} * S2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Gauss Jordan işlemi sona erdi.

Elde ettiğimiz X'leri yazalım.

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$ $\quad$ $Çözüm\ Kümesi = \{1, 3, -2\}$

$x_3 = -2$

BSM

5. Hafta

Uygulama :

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Çözümü gauss jordan yöntemi ile bulunuz ?

…

(x1, x2, x3) = (4, 3, 2)

Uygulama :

Gauss Jordan

$$6x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$$
$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5$$

Çözümü gauss jordan yöntemi ile bulunuz ?

…

(x1, x2, x3) = (-3, 4, 5)

Uygulama :

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= -3 \\
3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

Çözümü gauss jordan yöntemi ile bulunuz ?

…

(x1, x2, x3) = (4,-1,1)

Uygulama :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\
2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\
x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

Çözümü gauss jordan yöntemi ile bulunuz ?

…

(x1, x2, x3, x4) = (1, 2, -1, -2)

Cramer Kuralı

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}\, x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}\, x_n = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{3n}\, x_n = b_3$ denklem sistemi matris formunda yazılarak ifade edilirse

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Elde edilir. Katsayı matrisinin ek matrisi;

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$ olsun . Buradan Adj A.B matrissel çarpımı yapılırsa

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3 \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3 \\ A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{33}b_3 \end{bmatrix}$$ elde edilir. A_{ij} lerin yerlerine a_{ij} lerden

alınmış ifadeleri yerlerine yerleştirilirse;

Cramer Kuralı

$$A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{13}b_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$ olduğundan;

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|} \quad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}}{|A|}$$ hesaplanması ile

bilinmeyen değerler bulunmuş olur.

Örnek 2:

$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 8$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$ denklem sistemini cramer yöntemi ile çözelim.

$|A|=-5$ olduğu bilindiğine göre matrisleri düzenler hesaplarsak;

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} -11 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{-5} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -11 & 2 \\ 1 & 8 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}}{-5} = 3 \qquad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 & -11 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{-5} = -2$$

Cramer Kuralı

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$ dir. Bu durumda,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (54 - 8 - 1) - (6 + 12 + 6) = 21 \neq 0$$

olduğundan sistemi Cramer yöntemi ile çözebiliriz.

$\det(A_1)$, $\det(A_2)$ ve $\det(A_3)$ ü bulalım.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-45 - 20 + 1) - (15 - 10 - 6) = -63,$$

Cramer Kuralı

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = (-18 + 20 + 5) - (-2 - 60 - 15) = 84 \text{ ve}$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (90 - 4 + 5) - (-30 + 6 + 10) = 105 \quad \text{dir.}$$

Bu durumda, $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{-63}{21} = -3$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{84}{21} = 4$ ve $x_3 = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = 5$

bulunur. (x1, x2, x3) = (-3, 4, 5)

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

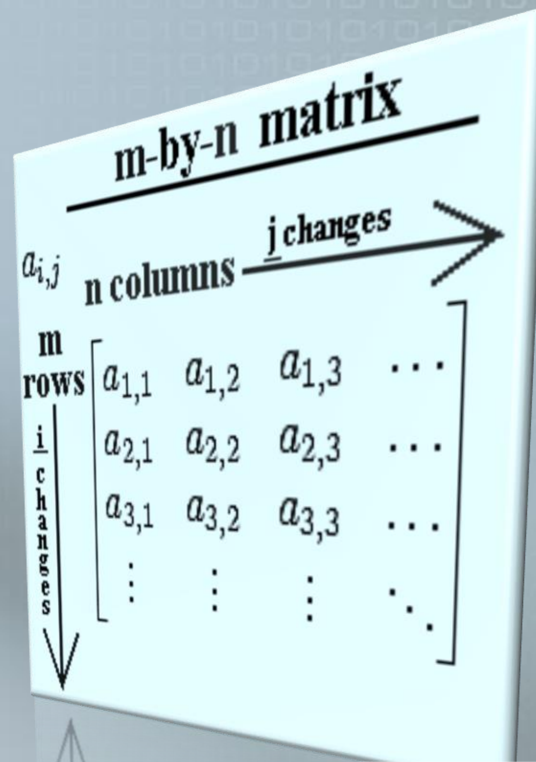
lineer denklem sistemini matlab üzerinde cramer yöntemi ile çözümleyiniz?

```
>> R=[1 -1 2;2 3 1;3 2 2]

R =

   1   -1    2
   2    3    1
   3    2    2

>> E=[1 1 0]'

E =

   1
   1
   0
```

Cramer Kuralı

```
>> MI1=[E R(:,[2 3])]

MI1 =

   1   -1    2
   1    3    1
   0    2    2
>> MI2=[R(:,1) E R(:,3)]

MI2 =

   1    1    2
   2    1    1
   3    0    2

>> MI3=[R(:,[1 2]) E]

MI3 =

   1   -1    1
   2    3    1
   3    2    0
>> I=[det(MI1);det(MI2);det(MI3)]/det(R)

I =
  -2
   1
   2
```

Sayısal Analiz S.Akpınar



Sonraki Hafta :

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri…