Sınav süresi 70 dakikadır. 04.01.2019

MAT111 Matematik Dersi Final Sınavı Soruları

1a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) = ?$ (10p)

1b) $\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{1/x} = ? \, (a > 0)$ (10p)

1c-) $\sqrt[3]{28}$ sayısını diferansiyel kavramını kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız. (15p)

1d-) $x^2 + y^2 - 9 = 0$ eğrisine $\left(1, 2\sqrt{2}\right)$ noktasından çizilen teğet ve normalin denklemlerini bulunuz.(15p)

1e-) Yarıçapı 4 birim olan bir çemberin içine en büyük alana sahip dikdörtgen çizilmek isteniyor. Bu biçimdeki dikdörtgenin boyutlarını belirleyiniz. (20p)

1f-) $y = f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini ayrıntılı inceleme yaparak çiziniz. (30p)

MAT111 Matematik 1 Final Sınavı 04.01.2019

1a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right) \underset{\infty-\infty}{\overset{\downarrow}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x.\sin x}$

$\underset{\frac{0}{0}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin x + x\cos x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=0$

1b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} \underset{1^{\infty}}{\overset{\downarrow}{=}} \alpha$ olsun. $y=(1+ax)^{1/x} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}\ln(1+ax)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}}{1}=a$

$\Rightarrow \ln\alpha=a \Rightarrow \alpha=e^{a}$ olur.

1c) $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ olsun. $f'(x)=\frac{2}{3.\sqrt[3]{x}}$ olur.

$x=27$, $\Delta x=1$ ve $x+\Delta x=28$ olsun.

$f(x+\Delta x)=\sqrt[3]{28}\cong f(x)+f'(x).\Delta x=\sqrt[3]{27}+\frac{2}{3\sqrt[3]{27}}.1$

$=3+\frac{2}{9}=\frac{29}{9}=3{,}222\ldots$

1d) $x^2+y^2-9=0$, $(1,2\sqrt{2})=(x_0,y_0)$ olsun.

$\frac{d}{dx}(x^2+y^2-9)=0 \Rightarrow 2x+2y.y'=0 \Rightarrow 2.1+2.2\sqrt{2}.y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

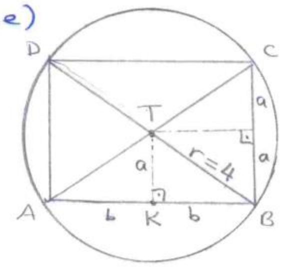
olduğundan $m_t=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ve $m_N.m_t=-1$ için $m_N=2\sqrt{2}$ olur.

Buna göre $(1,2\sqrt{2})$ noktasındaki

teğet denklemi: $y-2\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) \Rightarrow y=\frac{-\sqrt{2}}{4}x+\frac{9\sqrt{2}}{4}$

normal denklemi: $y-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}(x-1) \Rightarrow y=2\sqrt{2}x$ olur.

1e)



$A=\text{Alan}(ABCD)=2a.2b=4ab$

TKB üçgeninde $a^2+b^2=16 \Rightarrow b=\pm\sqrt{16-a^2}$

$A=4a\sqrt{16-a^2}$ olur.

$\frac{dA}{da}=A'=4\sqrt{16-a^2}+\frac{4a.(-2a)}{2\sqrt{16-a^2}}$

$=\frac{4(16-a^2)-4a^2}{\sqrt{16-a^2}}=\frac{8(2-a^2)}{\sqrt{16-a^2}}$ olur. + ↓

(1/2)

$A' = 0 \Rightarrow 8(2-a^2)=0 \Rightarrow 2-a^2=0 \Rightarrow a_1=\sqrt{2},\ a_2=-\sqrt{2}$ bulunur.
Buna göre; $a=\sqrt{2}$ için $A = 4\sqrt{2}.\sqrt{16-2} = 8\sqrt{7}$ en büyük değer olur. Bu dikdörtgenin boyutları $a=2\sqrt{2}$ ve $b=2\sqrt{2}$ 'dir.

1f) $y=f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ * Tanım kümesi $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ 'dir.

* $x=0$ için $y=\frac{3}{2}$ olur: $(0,\frac{3}{2})$.
  $y=0$ için $x=\mp\sqrt{3}$ olur: $(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$.

* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\infty$ olur. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3}{x-2}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3}{x-2}=+\infty\end{array}\right\}$ $x=2$ doğrusu düşey asimptot olur.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x}=1=m_1\neq 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-m_1x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{x-2}=2=n_1$$

olduğundan $y=x+2$ doğrusu eğik asimptot olur.

* $y'=f'(x)=\dfrac{2x(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

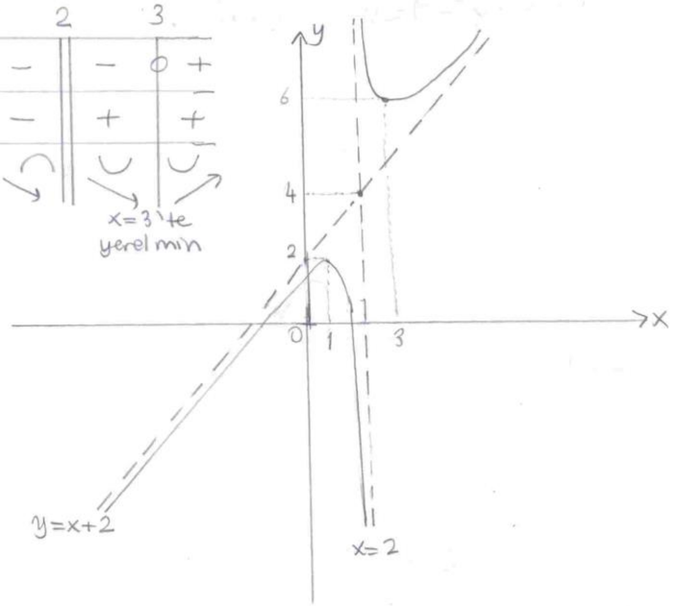
  $f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$

* $y''=f''(x)=\dfrac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)^4}=\dfrac{2}{(x-2)^3}$

*

x		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		2		3	
y'	+		+	0	−		−	‖	−	0	+
y''	−		−		−		−	‖	+		+
y	∩ ↗		∩ ↗		∩ ↘		∩ ↘	‖	∪ ↘		∪ ↗

x=1'de yerel max   x=3'te yerel min



(2/2)