ALT VEKTÖR UZAYLARI ÖRNEKLERİNE DEVAM

⑤ $H = \left\{ \begin{bmatrix} t & -t \\ 0 & 2t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ kümesinin, $M_2^2(\mathbb{R})$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzayı geren bir küme bulunuz.

<u>Çözüm</u> $\begin{bmatrix} t & -t \\ 0 & 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dir. Böylece H kümesinin bir geren (üretici) kümesi olarak $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi alınabilir. (Bu H kümesi, parantez içindeki matris ile üretilir)

Alt vektör uzayı old.nu gösterelim.

$A = \begin{bmatrix} t_1 & -t_1 \\ 0 & 2t_1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} t_2 & -t_2 \\ 0 & 2t_2 \end{bmatrix}$ alalım. $(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$

$A + B = \begin{bmatrix} t_1 + t_2 & -(t_1 + t_2) \\ 0 & 2(t_1 + t_2) \end{bmatrix}$ olup, $t_1 + t_2 = t$ denirse

$A + B = \begin{bmatrix} t & -t \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \in H$ olur.

$\overset{\text{skaler}}{c} \cdot A = c \begin{bmatrix} t_1 & -t_1 \\ 0 & 2t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct_1 & -ct_1 \\ 0 & 2ct_1 \end{bmatrix} \overset{ct_1 = t \text{ denirse}}{=} \begin{bmatrix} t & -t \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \in H$ olur.

Böylece, H bir alt vektör uzayıdır.

Lineer Bağımlılık - Bağımsızlık Örnekleri

① $M^{2,3}$ de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

<u>Çözüm</u>. $c_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

Buradan $\begin{bmatrix} c_1 & 3c_1+2c_2 & 0 \\ 2c_1+2c_2 & -c_1 & c_1+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur.

$c_1 = 0 \qquad 3c_1+2c_2 = 0 \qquad 2c_1+2c_2=0 \quad -c_1=0 \quad c_1+c_2=0$

olup, bu eşitliklerden $c_1=c_2=0$ bulunur. Yani verilen küme lineer bağımsızdır.

(Sonsuz çözüm çıksaydı, küme lineer bağımlı olurdu.)

② $\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha_1=(2,t,3)$, $\alpha_2=(0,1,t)$, $\alpha_3=(0,1,2)$ olduğuna göre, hangi t sayıları için $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ kümesi lineer bağımlıdır?

<u>Çözüm</u> $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ t & 1 & 1 \\ 3 & t & 2 \end{bmatrix} = 0$ olursa lineer bağımlı olur.

Bu determinant $2.(2-t)$ ye eşittir ve 0 olması için $t=2$ olmalıdır.

(3) $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{(1,2,0,-1),(2,1,-3,1),(0,3,1,-5),(1,1,3,4)\}$ kümesi ile üretilen H alt uzayını geren lineer bağımsız bir küme elde ediniz.

<u>Çözüm</u>.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \underset{R_1+R_3\to R_3}{\overset{-2R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \end{bmatrix} \overset{-R_2+R_3\to R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \end{bmatrix} \overset{R_2+R_4\to R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \overset{-R_3+R_4\to R_4}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{2}R_3\to R_3}{\overset{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-2R_2+R_1\to R_1}{\overset{R_3+R_2\to R_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 1 & \cancel{0} & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-2R_3+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

farklı elementer vektörler

Böylece $\{(1,2,0,-1),(2,1,-3,1),(0,3,1,-5)\}$ kümesi lineer bağımsızdır. H alt uzayındaki her eleman, bu üç vektörün lineer bileşimi olarak yazılabilir.

Baz ve Boyut ile İlgili Örnekler

(1) $\{(-1,3),(2,-6)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayı için bir baz mıdır?

Çözüm. $\det\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{bmatrix} = 6-6=0$ olduğundan, vektörler lineer bağımlıdır. Baz olabilmesi için, hem lineer bağımsız olmalı, hem de uzayı germelidir. Dolayısıyla verilen küme $\mathbb{R}^2$ için bir baz olamaz.

(2) $\{(1,1,1),(-1,2,1),(3,1,2)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir baz mıdır?

Çözüm. $\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} = 1 \neq 0$ olduğundan, verilen vektörler lineer bağımsızdır. 3 boyutlu olan $\mathbb{R}^3$ uzayında, 3 tane vektör lineer bağımsız ise, bu 3 vektör uzayı gerer. Böylece, verilen küme bazdır.

(3) $\mathbb{R}^4$ uzayında, $\{(3,-1,0,2),(-6,2,0,-4)\}$ vektörleri ile üretilen H altuzayının bazını bulunuz. H alt uzayının boyutu nedir?

Çözüm. $(-6,2,0,-4)$ vektörü, $(3,-1,0,2)$ vektörünün bir skaler katıdır. Böylece, $\{(3,-1,0,2),(-6,2,0,-4)\}$ ile üretilen küme, sadece $\{(3,-1,0,2)\}$ ile de üretilir. Sadece bir vektörden oluşan küme, eğer bu vektör 0 vektörü değilse, lineer bağım sızdır. Böylece H nin bir bazı $\{(3,-1,0,2)\}$ olup, H nin boyu 1 dir.

(4) $\mathbb{R}^4$ uzayında, $\{(1,0,1,-1),(-1,2,-3,0),(0,-1,1,0),(1,3,-2,-2)\}$ kümesi ile gerilen H altuzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{R_1+R_4 \to R_4}{\overset{-R_1+R_3 \to R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2+R_3 \to R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{-R_4 \to R_4}{\overset{2R_4+R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-R_4 \to R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2+R_1 \to R_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elementer vektörler.

Böylece $\{(1,0,1,-1),(-1,2,-3,0),(0,-1,1,0)\}$ kümesi hem lineer bağımsız hem de uzayı gerer. Yani tabandır.

(H nin boyutu da 3 tür.)