İç Çarpım ile İlgili Örnekler

① $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ uzayında bir iç çarpım
$f(u,v) = u_1v_2 + u_2v_1$

olur mu?

<u>Çözüm</u>. $u = \underset{(u_1,u_2)}{(1,0)}$ alalım.

İç çarpımda, $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ özelliği vardı.

$f(u,u) = u_1.u_2 + u_2u_1 = 1.0 + 0.1 = 0$ olup $\langle u,u\rangle = 0$ fakat

$u = (1,0) \neq (0,0)$ old. dan, f fonk. bir iç çarpım değildir.

② $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u,v) = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4u_2v_2$ fonksiyonunun

$\mathbb{R}^2$ uzayında bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

<u>Çözüm</u> ⊛ $u = (u_1,u_2) \neq 0$ olsun
$$f(u,u) = u_1^2 - \underset{u_2u_1}{u_1u_2} + 4u_2u_2 = u_1^2 - 2u_1.u_2 + 4u_2^2$$
$$= (u_1-u_2)^2 + 3u_2^2$$

$f(u,u) = 0$ olsaydı $u_1 - u_2 = 0$ ve $u_2 = 0$ yani $u_1 = u_2 = 0$

olurdu ki bu $(u_1,u_2) \neq 0$ olması ile çelişir. Böylece

$f(u,u) = (u_1-u_2)^2 + 3u_2^2 > 0$ dır. Ayrıca

$f(u,u) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0$ dır.

⊛ ~~$f(u,u) = u_1^2 - u_1u_2 - u_2u_1 + 4u_2v_2$~~

$$f(u,v) = u_1.v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4u_2v_2 = v_1u_1 - v_1u_2 - v_2u_1 + 4v_2u_2$$
$$= f(v,u)$$

$\circledast$ $f(u+v,w) = f\big(u+v,w\big) = f\big((u_1+v_1, u_2+v_2),(w_1,w_2)\big)$

$= (u_1+v_1)w_1 - (u_2+v_2)w_1 - (u_1+v_1)w_2 + 4(u_2+v_2)w_2$

$= \big(u_1w_1 - u_2w_1 - u_1w_2 + 4u_2w_2\big) + \big(v_1w_1 - v_2w_1 - v_1w_2 + 4v_2w_2\big)$

$= f(u,w) + f(v,w)$

$\circledast$ $f(c.u,v) = f\big((cu_1,cu_2),(v_1,v_2)\big) = (cu_1)v_1 - (cu_2)v_1 - (cu_1)v_2 + 4(cu_2)v_2$

$= c\big(u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4u_2v_2\big)$

$= c.f(u,v)$

4 şartı da sağladığından, f bir iç çarpımdır.

③ $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ uzayında bir iç çarpım
$f(u,v) = -u_1v_1 + u_2v_2$

olur mu?

<u>Çözüm.</u> $u = (1,1) \neq 0$ alalım

$f(u,u) = -1.1 + 1.1 = 0$ olur. Dolayısıyla ilk şart sağlamaz.

Böylece f bir iç çarpım değildir.