

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.

Tanım: İçinde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri bulunan bağıntılara "diferansiyel denklem" denir. Diferansiyel denklemin mertebesi denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. Derece ise denklemindeki en yüksek mertebeden türevin polinom şeklindeki yazılışındaki derecedir.

- Örnek: - $y' = x + 5$, 1. mert. , 1. derece
- $y'' + 3y' + 2y = 0$, 2. mert. , 1. derece
- $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$, 3. mert. , 1. derece
- $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$, 2. mert. , 2. derece

1) Aşağıdaki denklemlerin basamak ve dereceleri belirleyiniz

a) $y'' = 3y' + xy$

b) $y''' + 2xy' + xy = 0$

c) $(y''')^2 = \frac{3}{4} \frac{x}{y}$

d) $\sin(y') = 2y + x^{2/3}$

e) $\sqrt{y'} = 3(y'')$

f) $y'' = \sqrt{1 + (y')^4}$

g) $(y'')^{1/3} = k(1 + (y')^2)^{5/2}$

h) $\left(\frac{du}{dy}\right)^{2/3} = y \frac{d^2u}{dy^2}$

Not: Dereceler bulunurken y ve türevlerinin kuvvetlerinin pozitif tam sayı olması gerekir.

Cözüm: a) 2. basamak, 1. derece

b) 3. basamak, 1. derece

c) 3. basamak, 2. derece

d) 1. basamak, derece yok

e) 2. basamak, 4. derece

f) 2. basamak, 2. derece

g) 2. basamak, 2. derece

h) 2. basamak, 3. derece

* sin, cos v.b. dereceleri yok.

2) Aşağıda yazılı dif denk. gözümlerinin karşılıklarını yazılı olan değerler old. gösteriniz.

a) $y + xy' = x^4 (y')^2$; $y = c^2 + cx^{-1}$

b) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$; $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} + 2x e^{2x}$

c) $y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 \ln y$; $\ln y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

d) $y = xy' + x\sqrt{x^2 - y^2}$ $x > 0$ $y = x \sin(A-x)$

Cözüm: a) $y' = -cx^{-2}$

$$\left. \begin{aligned} y + xy' &= c^2 \\ x^4 (y')^2 &= c^2 \end{aligned} \right\}$$

$$y + xy' = x^4 (y')^2$$

$$d) y = xy' + x\sqrt{x^2 - y^2} \quad x > 0 \quad y = x \sin(A-x)$$

$$y' = \sin(A-x) - x \cos(A-x)$$

$$\frac{y}{x} = \sin(A-x) \quad y' = \frac{y}{x} - x\sqrt{1 - \sin^2(A-x)}$$

$$y' = \frac{y}{x} - x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} - \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow xy' = y - x\sqrt{x^2 - y^2} \Rightarrow y = xy' + x\sqrt{x^2 - y^2}$$

3) Aşağı verilen eğri ailelerinin dif. denk. bulunuz.

a) $y = cx^2 + cx$ b) $x^2 + y^2 = c^2$ c) $y = x \sin(x+c)$
d) $y = c_1 x^2 + c_2 x$ e) $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ f) $y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$
g) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + x$

Çözüm: Not: Verilen eğri ailesine ait dif. denk. bulmak için eğri ailesindeki herhangi bir eğriyi seçeriz ve o eğri için dif. denk. buluruz. Eğer ailede sabit yoksa, o zaman dif. denk. bulmak için ailedeki herhangi bir eğriyi seçeriz ve o eğri için dif. denk. buluruz.

a) $y = cx^2 + cx$ $y' = 2cx + c$
 $y' = c(2x+1)$

$$y = c(x^2 + x)$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{x^2 + x}{2x+1} \Rightarrow (2x+1)y = y'(x^2 + x)$$

$$c) y = x \sin(x+c) \quad y' = \sin(x+c) + x \cos(x+c)$$

$$\frac{y}{x} = \sin(x+c) \quad y' = \frac{y}{x} + x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$e) \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \frac{2x}{A^2} + \frac{2yy'}{B^2} = 0$$

$$\frac{2}{A^2} + \frac{2}{B^2} (y'^2 + yy'') = 0$$

$$\frac{2}{A^2} = -\frac{2}{B^2} (y'^2 + yy'') \Rightarrow$$

$$x = \frac{yy'}{(y')^2 + yy''}$$

$$g) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + x \quad (*)$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} + 1$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

$$y' + y'' = 6c_1 e^{2x} + 1 \Rightarrow c_1 = \frac{y' + y'' - 1}{6e^{2x}}$$

$$c_2 = \frac{y'' - 2y' + 2}{3} e^x$$

c_1 ve c_2 yerine yazılırsa $(*)$ da

$$y'' - y' - 2y + 2x + 1 = 0$$

denklemini elde edilir

4) Merkezleri x -ekseni üzerinde ve sabit r yarıçaplı daire ailelerinin dif denklemini bulunuz

Çözümü Daire ailesinin denklemi $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ dir.

c , keyfi sabit.

$$2(x-c) + 2y y' = 0 \Rightarrow (x-c) + y y' = 0$$

$$\Rightarrow x-c = -y y' \Rightarrow \underline{y^2 (y')^2 + y^2 = r^2} \text{ elde edilir.}$$

Ödev problemleri:

1) Aşağı denklemleri mertebe ve derecelerine göre sınıflandırınız

a) $dy + (xy - \cos x) dx = 0$ (1. mrt, 1 der)

b) $L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + R \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{C} = 0$ (2. mrt, 1 der)

c) $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$ (3. mrt, 1 der)

d) $e^{y'''} - xy'' + y = 0$ (3. mrt, der. yok)

e) $y' + x = (y - xy')^{-3}$ (1. mrt, 4. der)

f) $\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$ (2. mrt, 4. der)

2) $y = A \cos ax + B \sin ax$ eđnri ailesinin dif denklemini bulunuz

Cözümü

$$y' = -Aa \sin ax + Ba \cos ax$$

$$y'' = -Aa^2 \cos ax - Ba^2 \sin ax$$

$$= -a^2 (A \cos ax + B \sin ax) = -a^2 y$$

$$\Rightarrow y'' + a^2 y = 0$$

3) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^x$ eđnri ailesinin dif denklemini bulunuz

Cözümü

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x} + C_3 e^x$$

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{2x} + C_3 e^x$$

$$y''' = 27C_1 e^{3x} + 8C_2 e^{2x} + C_3 e^x$$

Ün derkleenden determinant yardımıyla

C_1, C_2 ve C_3 elde edilerek olur

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{2x} & e^x & y \\ 3e^{3x} & 2e^{2x} & e^x & y' \\ 9e^{3x} & 4e^{2x} & e^x & y'' \\ 27e^{3x} & 8e^{2x} & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{6x} (-2y''' + 12y'' - 22y' + 12y) = 0$$

$$\Rightarrow y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

elde edilir

4) $y = Ax^2 + Bx + C$ eğri ailesinin dif
derklemini bulunuz

Çözüm $y = Ax^2 + Bx + C$

$$y' = 2Ax + B \quad y'' = 2A$$

$$y''' = 0$$

Burada

derklemin

$$y''' = 0$$

derklemini istedi