

ÇEVRE MÜHENDİSLİĞİ MATEMATİK-I ARA SINAVI

16.11.2017

SORU 1. Aşağıda verilen fonksiyonun *tanım aralığını* bulunuz. (25 puan)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} + \log \frac{5-x}{1+x}$$

SORU 2. Aşağıda verilen *limiti* hesaplayınız. (25 puan)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$$

SORU 3. Aşağıda verilen *limiti* hesaplayınız. (25 puan)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\tan x}{x^3}$$

SORU 4. Aşağıdaki fonksiyonun $x = 1$ ve $x = 2$ noktalarında *sürekli* olabilmesi için a ve b ne olmalıdır? (25 puan)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \leq 1 \text{ ise} \\ ax + b, & 1 < x < 2 \text{ ise} \\ x^2 + 1, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

NOT: Sınav süresi 70 dakikadır.

① $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} + \log \frac{5-x}{1+x}$ f. nin tanım aralığı

$x^2 - 3x \geq 0$ olmalı ve $\frac{5-x}{1+x} > 0$, $1+x \neq 0$ olmalı.

$x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$x(x-3)$	+	-	+	+

$-\infty < x \leq 0$ $3 \leq x < +\infty$

$A_1 = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ dir.

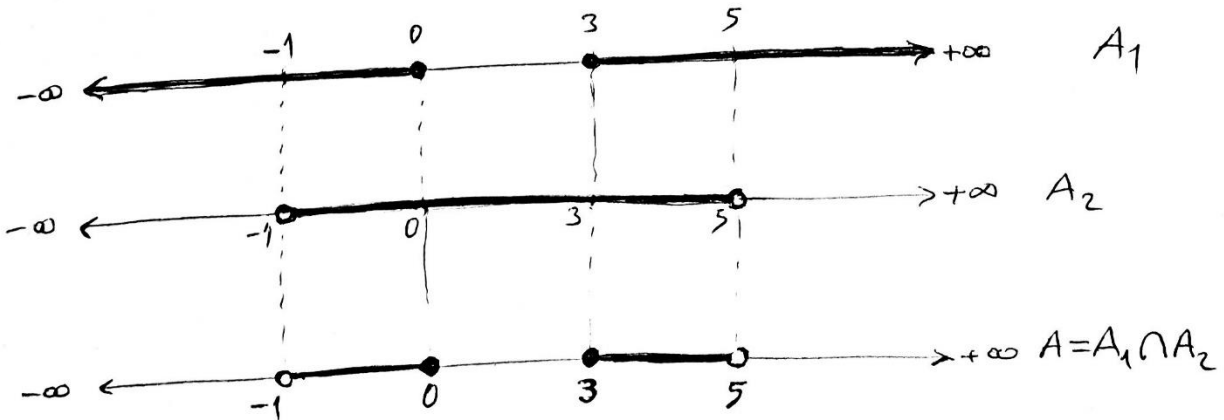
$5-x = 0 \Rightarrow x_3 = 5$

$1+x = 0 \Rightarrow x_4 = -1$

x	-1	5
$5-x$	+	0
$1+x$	-	+
$\frac{5-x}{1+x}$	-	+

$-1 < x < 5$

$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 5\} = (-1, 5)$ dir.



Tanım Aralığı: $A = A_1 \cap A_2 = (-1, 0] \cup [3, 5)$ dir.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} & \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin x) - (1-\sin x)}{\tan x \cdot (\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot (\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} \\
 & = \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x) \cdot \tan x}{x^3} & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x) \cdot \tan x}{x^3} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos^2 x) \tan x}{x^3 \cdot (1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \tan x}{x^3 \cdot (1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\tan x}{x \cdot (1+\cos x)} \\
 & = \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2}_{=1^2} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\cos x}}_{=\frac{1}{1+1}} = 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} //
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & x \leq 1 \text{ ise} \\ ax + b & 1 < x < 2 \text{ ise} \\ x^2 + 1 & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(1) = 1^3 + 3 = 4 \quad ; \quad f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 3) = 1^3 + 3 = 4 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 4 \quad \dots\dots (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5 = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + b = 5 \quad \dots\dots (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5 = f(2)$$

$$\begin{aligned} 2a + b &= 5 \\ \underbrace{a + b = 4}_{\boxed{a=1}} &\rightarrow 1 + b = 4 \Rightarrow \boxed{b=3} \end{aligned}$$