Karısık Örnekler

① $x+y+2z=8$
$-x+2y+3z=1$
$3x-7y+4z=10$

lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_1+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_1\to R_1]{-3R_3+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{11}R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{11} \end{array}\right]$$

$z=\frac{12}{11}$; $y-2z=-1$; $x+4z=9$

$y-2\cdot\frac{12}{11}=-1 \Rightarrow y=-1+\frac{24}{11}=\frac{13}{11}$

$x+4z=9 \Rightarrow x=9-4z=9-4\cdot\frac{12}{11}=\frac{51}{11}$

$(x,y,z)=\left(\frac{51}{11},\frac{13}{11},\frac{12}{11}\right)$

② $\det\begin{bmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{bmatrix} = 0$ olduğunu gösteriniz

Çözüm. $\det\begin{bmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2+C_3\to C_3} \det\begin{bmatrix} 1 & bc & ab+ac+bc \\ 1 & ca & bc+ca+ba \\ 1 & ab & ab+ca+bc \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{-(ab+ac+bc)C_1+C_3\to C_3} \det\begin{bmatrix} 1 & bc & 0 \\ 1 & ca & 0 \\ 1 & ab & 0 \end{bmatrix} = 0$$

③ $\det\begin{bmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{bmatrix} = a.b.c \det\begin{bmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{bmatrix}$

$$= a.b.c.\ a.b.c.\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_1+R_2\to R_2 \\ R_1+R_3\to R_3}}{=} a^2.b^2.c^2.\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a^2.b^2.c^2.(-1).\det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -a^2b^2c^2.(0-4) = 4a^2b^2c^2.$$

④ $\det\begin{bmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{bmatrix} = 4abc$ olduğunu göster.

Soru. $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B^2 = k.B \Rightarrow k = ?$

Çözüm. $B^2 = B.B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

$= 2.\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \underset{\downarrow\, k}{2}B \Rightarrow k=2$

Soru. $\det\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & 0 & 1 & x \\ x & x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = x^8 + x^4 + 1$ old. göst.

Çözüm.
$C_2 + C_1 \to C_1$
$C_3 + C_1 \to C_1$
$C_4 + C_1 \to C_1$

$\det\begin{bmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 & 0 \\ 1+x+x^2 & 1 & x & x^2 \\ 1+x+x^2 & 0 & 1 & x \\ 1+x+x^2 & x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$-R_1 + R_2 \to R_2$
$-R_1 + R_3 \to R_3$
$-R_1 + R_4 \to R_4$

$\det\begin{bmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1-x & x-x^2 & x^2 \\ 0 & -x & 1-x^2 & x \\ 0 & x^2-x & -x^2 & 1 \end{bmatrix}$

$= (-1)^{1+1}.(1+x+x^2).\det\begin{bmatrix} 1-x & x-x^2 & x^2 \\ -x & 1-x^2 & x \\ x^2-x & -x^2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3+C_1 \to C_1]{C_2+C_1 \to C_1}$

$= (1+x+x^2).\det\begin{bmatrix} 1 & x-x^2 & x^2 \\ 1-x^2 & 1-x^2 & x \\ 1-x & -x^2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-x^2).R_3+R_1 \to R_1]{(-x)R_3+R_2 \to R_2}$

$\longrightarrow$

$$= (1+x+x^2)\det\begin{bmatrix} 1-x^2(1-x) & x-x^2+x^4 & 0 \\ 1-x^2-x(1-x) & 1-x^2+x^3 & 0 \\ 1-x & -x^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1+x+x^2)\cdot(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{bmatrix} 1-x^2+x^3 & x-x^2+x^4 \\ 1-\cancel{x^2}-x+\cancel{x^2} & 1-x^2+x^3 \end{bmatrix}$$

$$= (1+x+x^2)\cdot\det\begin{bmatrix} 1-x^2+x^3 & x-x^2+x^4 \\ 1-x & 1-x^2+x^3 \end{bmatrix}$$

$$= (1+x+x^2)\cdot\det\begin{bmatrix} 1-x^2+x^3 & x(1-x+x^3) \\ 1-x & 1-x^2+x^3 \end{bmatrix}$$

$$= (1+x+x^2)\cdot\left((1-x^2+x^3)^2 - x\cdot(1-x)\cdot(1-x+x^3)\right)$$

$$= (1+x+x^2)\cdot\left(1-2x^2+x^4+2(1-x^2)\cdot x^3+x^6-(x-x^2)\cdot(1-x+x^3)\right)$$

$$= (1+x+x^2)\cdot\left(1-2x^2+\cancel{x^4}+2x^3-2x^5+x^6-x+x^2-\cancel{x^4}+x^2-x^3+x^5\right)$$

$$= (1+x+x^2)\cdot\left(1+x^3-x-x^5+x^6\right)$$

$$= 1+\cancel{x^3}-\cancel{x}-\cancel{x^5}+\cancel{x^6}+\cancel{x}+x^4-\cancel{x^2}-\cancel{x^6}+\cancel{x^7}+\cancel{x^2}+\cancel{x^5}-\cancel{x^3}-\cancel{x^7}+x^8$$

$$= 1+x^4+x^8 \checkmark$$

Sor. $\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&a&b&c\\1&a^2&b^2&c^2\\1&a^3&b^3&c^3\end{bmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)(c-b)$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm $-C_1+C_2\to C_2$, $-C_1+C_3\to C_3$, $-C_1+C_4\to C_4$

$$=\det\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&a-1&b-1&c-1\\1&a^2-1&b^2-1&c^2-1\\1&a^3-1&b^3-1&c^3-1\end{bmatrix}$$

$$\underset{(-1)^{1+1}\cdot 1}{=}\det\begin{bmatrix}a-1&b-1&c-1\\a^2-1&b^2-1&c^2-1\\a^3-1&b^3-1&c^3-1\end{bmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\a+1&b+1&c+1\\a^2+a+1&b^2+b+1&c^2+c+1\end{bmatrix}$$

$$\underset{-C_1+C_3\to C_3}{\overset{-C_1+C_2\to C_2}{=\!=}}(a-1)(b-1)(c-1)\det\begin{bmatrix}1&0&0\\a+1&b-a&c-a\\a^2+a+1&b^2-a^2+b-a&c^2-a^2+c-a\end{bmatrix}$$

$$\underset{-R_2+R_3\to R_3}{\overset{-R_1+R_2\to R_2}{=\!=}}(a-1)(b-1)(c-1)\det\begin{bmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{bmatrix}$$

$$=(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)\det\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&1\\a^2&b+a&c+a\end{bmatrix}$$

$$=(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)\left[\underbrace{c+a-(b+a)}_{c-b}\right]$$

Soru $\det\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm
$C_2+C_1 \to C_1$
$C_3+C_1 \to C_1$
$C_4+C_1 \to C_1$
$C_5+C_1 \to C_1$

$= \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 1. sütun tamamen 0 olduğundan determinant sıfırdır.

Soru.
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$-2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1$$
$$2x_1 + ax_2 + 2x_3 = -1$$
denklem sisteminin çözümlerini a nın durumuna göre inceleyiniz.

Çözüm.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & a & 2 & -1 \end{array}\right] \underset{-2R_1+R_3\to R_3}{\overset{2R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4+a & -1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\overset{-R_2+R_1\to R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4+a & -1 & -5 \end{array}\right] \overset{2R_2+R_3\to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a & 1 & 5 \end{array}\right]$$

!! Eğer soru, "denklem sisteminin bir tek çözümünün olduğu bilindiğine göre" olarak sorulsaydı, son iki satıra bakarak $a \neq -2$ derdik. Çünkü $a=-2$ olunca, en alt satırı sıfırlayabiliriz. Tümü birden 0 olan satır varsa, sonsuz çözüm olur çünkü.

Soruya devam: Tüm çözüm durumlarını inceleyelim.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{-R_2+R_3\to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{a+2=0 \text{ için iki durum}}{\overset{a+2\neq 0 \text{ ve}}{\Longrightarrow}}$$

$a+2 \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{a+2}R_3 \to R_3]{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 5 \\ x_1 = -13 \end{array}$$

olur → tek çözüm.

$a+2=0$ olsun. Bu durumda,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{5}{2} \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{array} \xrightarrow{x_3 = t \text{ diyelim}} \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2} = \frac{t-5}{2} \\ x_1 = -3-2t. \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3-2t \\ x_2 = \frac{t-5}{2} \\ x_3 = t \end{cases}$$ olarak sonsuz çözüm.

Tutarsız olduğu bir durum yok.

— Çözümlü Örnekler —

① $\mathbb{R}^4$ uzayında $S=\{(1,-1,0,4),(2,0,4,6),(-1,2,2,-5),(3,1,8,8)\}$

kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını test ediniz

Çözüm.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & -5 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, ilk iki sütun elementer vektör olduğundan $\{v_1,v_2\}$ lineer bağımsızdır. $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ kümesi lineer bağımlı olup, $v_3=-2v_1+\frac{1}{2}v_2$ ve $v_4=(-1).v_1+2v_2$ dir.

② $\mathbb{R}^3$ uzayında $\{(3,-1,1),(2,4,-1),(-1,2,2)\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını test ediniz.

Çözüm.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 14 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -24 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & -11 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -41 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

her bir sütun elementer vektör old.dan küme lineer bağımsız

③ $\mathbb{R}^4$ uzayında $S=\{\underset{v_1}{(1,0,3,2)},\underset{v_2}{(1,-4,-5,-2)},\underset{v_3}{(-2,1,-4,-3)},\underset{v_4}{(3,-2,5,4)}\}$ ile üretilen alt uzayın tabanını (bazını) bulunuz. Bu uzayın boyutunu belirleyiniz.

Çözüm

$$\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\0&-4&1&-2\\3&-5&-4&5\\2&-2&-3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\0&-4&1&-2\\0&-8&2&-4\\0&-4&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\0&-4&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\0&1&-1/4&1/2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-7/4&5/2\\0&1&-1/4&1/2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Sadece ilk iki sütun, farklı elementer vektöre dönüştüğünden $\{(1,0,3,2),(1,-4,-5,-2)\}$ lineer bağımsızdır. Dolayısıyla tabanda sadece bu iki vektör vardır. Böylece boyut 2 dir.
(S nin üretici küme olduğu soruda veriliyor zaten. Bu kümeden lineer bağımlı olanları attık. Geriye kalan küme baz oluşturur)

④ Yukarıdaki soruda, v_3 ve v_4 vektörlerini, v_1 ve v_2 vektörlerinin lineer bileşimi şeklinde yazınız.

Çözüm $\quad v_3=-\frac{7}{4}v_1-\frac{1}{4}v_2\,,\quad v_4=\frac{5}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2$

⑤ $\{(2,-1),(-5,3)\}$ lineer bağımsız kümesi veriliyor. $w=(-4,3)$ vektörünü, bu kümedeki elemanların lineer bileşimi şeklinde yazınız.

Çözüm

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&-5&-4\\-1&3&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}0&1&2\\-1&3&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}0&1&2\\-1&0&-3\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}0&1&2\\1&0&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&2\end{array}\right]$$ olup, $(-4,3)=3.(2,-1)+2(-5,3)$ şeklinde yazılabilir.

⑥ $A=\begin{bmatrix}-3 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir midir?

Çözüm $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix}-3-\lambda & -4 & -4\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}=(-1)^{2+2}.(1-\lambda).\det\begin{bmatrix}-3-\lambda & -4\\ 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}$

$=(1-\lambda).(\lambda^2-1)$

$=(1-\lambda).(\lambda-1).(\lambda+1)=0$

A matrisinin özdeğerleri: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$ dir.

$\lambda_1=\lambda_2=1$ özdeğeri $\underline{\underline{2}}$ katlı olduğundan, bu özdeğere ilişkin $\underline{\underline{2}}$ tane lineer bağımsız özvektör bulunmalıdır ki bu matris köşegenleştirilebilir olsun. Aksi halde köşegenleştirilemez.

$\lambda_1=\lambda_2=1$ özdeğerleri için özvektörler,

$(A-I)x=0$ denklem sisteminin çözümü ile belirlenir.

Yani $\left[\begin{array}{ccc|c}-4 & -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$

$\begin{cases}x_1=t\\ x_2=s\end{cases}$ denirse, $x_3=-t-s$ olur $(t,s\in\mathbb{R})$

Böylece $\lambda_1=\lambda_2=1$ özdeğerine ilişkin özvektörler $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\s\\-t-s\end{bmatrix}$

yani $x=t\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ şeklindedir. Böylece aranan $\underline{\text{iki}}$ lineer bağımsız özvektör $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ dir. Bu vektörler S matrisinin ilk iki sütununu oluşturacaktır.

Şimdi de $\lambda_3=-1$ için özvektör bulalım;

$(A+I)x=0$ denklem sistemini çözeceğiz.

$\left[\begin{array}{ccc|c}-2 & -4 & -4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$\begin{matrix}x_1+2x_3=0\\ x_2=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}x_3=t\in\mathbb{R} \text{ denirse}\\ x_1=-2t \text{ olur.}\end{matrix}$

Böylece $\lambda_3=-1$ e ilişkin özvektörler $X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2t\\ 0\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

şeklindedir. $\begin{bmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ vektörü, S matrisinin 3. sütununu oluşturacaktır.

Böylece $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ve $S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ şeklinde olup,

A matrisi köşegenleştirilebilirdir.

<u>Sağlama</u>: $\det S=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=-1\neq 0$

old. dan S tersinirdir. $S^{-1}AS=D$ midir?

S matrisinin tersini bulalım:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1\end{array}\right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{S^{-1}}$

$$\underline{S^{-1}AS}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\underline{D}\ \checkmark$$

⑦ $\begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir midir?

Çözüm. $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} -4-\lambda & -3 & \boxed{0} \\ -1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot(-1-\lambda)\det\begin{bmatrix} -4-\lambda & -3 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix}$

$=(-1-\lambda)\cdot\left(8+4\lambda+2\lambda+\lambda^2-3\right)=0$

$\Rightarrow (-1-\lambda)(\lambda^2+6\lambda+5)=0 \Rightarrow (-1-\lambda).(\lambda+1).(\lambda+5)=0$

$\begin{matrix} +5 \\ +1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1, \quad \lambda_3=-5$

Bu matrisin köşegenleştirilebilir olması için $\lambda_1=\lambda_2=-1$ e ilişkin 2 tane lineer bağımsız özvektör bulunabilmeli (2 kere tekrar ettiği için)

$\lambda_1=\lambda_2=-1$ için özvektörler $(A+I)x=0$ denklem sistemini çözmek suretiyle elde edilir.

$(A+I)x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=t\in\mathbb{R} \end{matrix} \Rightarrow x=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$

$=t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1=\lambda_2=-1$ e ilişkin tüm özvektörler $t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Bunların hepsi $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in skaler katları olduğundan lineer bağımlıdır

Yani 2 tane lineer bağımsız özvektör bulunamaz. Böylece

A matrisi köşegenleştirilemez.

(8) $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ olduğuna göre $A^6=?$

Çözüm Önce A matrisinin köşegenleştirilebilir olup olmadığına bakalım

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda & 0\\ 3 & -1-\lambda\end{bmatrix}=(2-\lambda).(-1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$$

Farklı özdeğerler mevcut old. dan A matrisi köşegenleştirilebilirdir.
$\lambda_1=2$ ye ilişkin özvektörler $(A-2I)x=0$ denklem sisteminin çözümü ile bulunur.

$$(A-2I)x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l}x_1-x_2=0\\ \Rightarrow x_1=x_2=t\in\mathbb{R}\end{array}$$

Yani $x=\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ şeklindedir.

$\lambda_2=-1$ e ilişkin özvektörler $(A+I)x=0$ denklem sisteminin çözümü ile bulunur.

$$(A+I)x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l}x_1=0\\ x_2=t\in\mathbb{R}\end{array}$$

$$\Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

Böylece $S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ dir. $S^{-1}AS=D$ mi?

$$S^{-1}=\frac{1}{1.1-1.0}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$=D$ ✓

$S^{-1}AS = D \Rightarrow A = SDS^{-1} \Rightarrow A^6 = SD^6S^{-1}$ dir.

$\left(A = SDS^{-1} \Rightarrow A^n = SD^nS^{-1} \text{ olur} \right)$

$$A^6 = SD^6S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & (-1)^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 64 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 63 & 1 \end{bmatrix}$$

---

(9) Cayley Hamilton Teoremi yardımıyla $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini hesaplayınız.

Çözüm $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;\;\;\; J_1 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3-\lambda \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 4-\lambda \\ 3-\lambda \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 4-\lambda \end{matrix} \end{bmatrix} \end{array}$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (3-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 4-\lambda \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3-\lambda & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)\left(16 - 8\lambda + \lambda^2 - 6 + 2\lambda\right) + 8 - 2\lambda + 3 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 10) + 11 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 - 18\lambda + 30 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 11 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 31\lambda + 41 = 0 \Rightarrow -A^3 + 9A^2 - 31A + 41I = 0$$

Cayley Hamilton $\quad A(-A^2 + 9A - 31I) = -41I$

$\Rightarrow$

$$A\left(\frac{1}{41}A^2-\frac{9}{41}A+\frac{31}{41}I\right)=I \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{41}A^2-\frac{9}{41}A+\frac{31}{41}I$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{41}\left(A^2-9A+31I\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{41}\left\{\begin{bmatrix}3&2&-1\\-1&4&2\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&-1\\-1&4&2\\1&-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}27&18&-9\\-9&36&18\\9&-9&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}31&0&0\\0&31&0\\0&0&31\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{41}\left\{\begin{bmatrix}6&15&-1\\-5&12&13\\6&-4&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-18&9\\9&-5&-18\\-9&9&13\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}10&-3&8\\4&7&-5\\-3&5&14\end{bmatrix}$$

Sağlama: $AA^{-1}=I$ mı?

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\-1&4&2\\1&-1&2\end{bmatrix}\frac{1}{41}\begin{bmatrix}10&-3&8\\4&7&-5\\-3&5&14\end{bmatrix}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}41&0&0\\0&41&0\\0&0&41\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ ✓

---

(10) Cayley Hamilton Teo. yardımıyla $A=\begin{bmatrix}-4&2&2\\3&1&6\\-1&1&2\end{bmatrix}$ matrisinin tersinin mevcut olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-4-\lambda&2&2\\3&1-\lambda&6\\-1&1&2-\lambda\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\boxed{-4-\lambda}&2&2\\\boxed{0}&4-\lambda&12-3\lambda\\\boxed{-1}&1&2-\lambda\end{bmatrix}$

$$=(-1)^{1+1}(-4-\lambda)\det\begin{bmatrix}4-\lambda&12-3\lambda\\1&2-\lambda\end{bmatrix}+(-1)^{3+1}(-1)\det\begin{bmatrix}2&2\\4-\lambda&12-3\lambda\end{bmatrix}$$

$= (-4-\lambda)\left(8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2-12+3\lambda\right)-\left(24-6\lambda-8+2\lambda\right)$

$= (-4-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda-4\right)-\left(-4\lambda+16\right)$

$= -4\lambda^2+12\lambda+16-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+4\lambda-16$

$= -\lambda^3-\lambda^2+20\lambda$

Cayley Hamilton Teo. ya göre $-A^3-A^2+20A \overset{+0.I}{=} 0$ olup I nın katsayısı 0 olduğundan A matrisinin tersi yoktur.

(NOT: Bir matrisin 0 özdeğeri varsa zaten o matris tersinir olamaz.) (Yukarıdaki örnekte $-\lambda^3-\lambda^2+20\lambda=\lambda(-\lambda^2-\lambda+20)=0$ dan bir kök zaten 0 dır)

Özdeğer - Özvektör (Çözümlü Sorular)

① $A=\begin{bmatrix}-3 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri, özvektörlerini ve her bir öz-değer için öz uzayın bazlarını bulunuz.

Çözüm $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-3-\lambda & -4 & -4\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}=(-1)^{2+2}(1-\lambda).\det\begin{bmatrix}-3-\lambda & -4\\ 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}$

$=(1-\lambda)\left(-9+\cancel{3\lambda}-\cancel{3\lambda}+\lambda^2+8\right)$

$=(1-\lambda).(\lambda^2-1)$

$=(1-\lambda).(\lambda-1).(\lambda+1)$

Yani: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$ olur. (1 sayısı çift katlı bir özdeğer oldu)

Dolayısıyla $\lambda=1$ ve $\lambda=-1$ için özvektör bulunacak.

$\lambda=1$ için $Ax=1.x$ denklem sistemi çözülmelidir

$\begin{bmatrix}-3 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=1.\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} \Rightarrow$
$-3a-4b-4c=a \Rightarrow 4a+4b+4c=0 \Downarrow a+b+c=0$
$b=b$
$2a+2b+3c=c \Rightarrow a+b+c=0$

Yani sadece $a+b+c=0$ eşitliği bulduk. $b=t$ ve $c=s$ denirse, $a=-t-s$ olur. Böylece $\lambda=1$'e ilişkin özvektörler $\begin{bmatrix}-t-s\\ t\\ s\end{bmatrix}$ şeklindedir.

$\lambda=1$ için özuzay $\{(-t-s,t,s): t,s\in\mathbb{R}\}$ dir. Öz uzayın bazı $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ şeklindedir.

Şimdi de $\lambda=-1$ için özvektör bulalım

$Ax=(-1)x$ denklem sisteminin çözümleri bulunmalıdır

$\begin{bmatrix}-3 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$
$-3a-4b-4c=-a \Rightarrow -4b-4c=2a$
$b=-b \Rightarrow b=0$
$2a+2b+3c=-c \Rightarrow 2a+2b+4c=0$

$\Rightarrow \boxed{a=-2c,\ b=0}$

$c=t$ denirse, $a=-2t$ olur. Böylece $\lambda=-1$ için özvektörler $\begin{bmatrix}-2t\\0\\t\end{bmatrix}$ şeklinded

$\lambda=-1$'e ilişkin öz uzay $\{(-2t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$ dir. Öz uzayın bazı

$\{(-2,0,1)\}$ dir.

② $A=\begin{bmatrix}2&3&3\\4&2&4\\-4&-3&-5\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini, özvektörlerini, öz uzayları ve özuzayların bazını bulunuz.

<u>Çözüm</u> $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda&3&3\\4&2-\lambda&4\\-4&-3&-5-\lambda\end{bmatrix}=0$ denkleminin köklerini bulmalıyız

$$\det\begin{bmatrix}2-\lambda&3&3\\4&2-\lambda&4\\-4&-3&-5-\lambda\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}2-\lambda&3&3\\4&2-\lambda&4\\0&-1-\lambda&-1-\lambda\end{bmatrix}=(-1)^{3+2}(-1-\lambda)\cdot\det\begin{bmatrix}2-\lambda&3\\4&4\end{bmatrix}+$$

$$(-1)^{3+3}(-1-\lambda)\cdot\det\begin{bmatrix}2-\lambda&3\\4&2-\lambda\end{bmatrix}=(\lambda+1)\cdot\left(8-4\lambda-12\right)-(\lambda+1)\cdot\left(4-4\lambda+\lambda^2-12\right)$$

$$=(\lambda+1)(-4\lambda-4)-(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda-8)$$

$$=(\lambda+1)(-\cancel{4\lambda}-4-\lambda^2+\cancel{4\lambda}+8)$$

$$=(\lambda+1)\cdot(-\lambda^2+4)$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda^2-4)=-(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)=0$$

Böylece $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ ve $\lambda_3=-2$ bulunur.

$\lambda_1=-1$'e ilişkin özvektörler $Ax=(-1)x$ denklem sisteminin çözümüyle elde edilir.

$$\begin{bmatrix}2&3&3\\4&2&4\\-4&-3&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \text{ ya da } \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}3&3&3\\4&3&4\\-4&-3&-4\end{bmatrix}}_{(A-(-1)I)}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}_{0}$$

Katsayılar matrisinde satır indirgeme yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

yani $a+c=0$ olur. $c=t$

$b=0$

denirse, $a=-t$ olur.

Böylece $\lambda_1=-1$ için özvektörler $\begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Öz uzay $\rightarrow \{(-t,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$; öz uzayın bazı $\rightarrow \{(-1,0,1)\}$

$\lambda_2=2$ için $(A-2I)x=0$ denklem sistemi çözülmelidir.

$$A-2I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a+c=0 \Rightarrow a=-c$ $\quad$ $c=t$ denirse

$b+c=0 \Rightarrow b=-c$ $\quad$ $a=b=-t$ olur.

Böylece $\lambda_2=2$ ye ilişkin özvektörler $\begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Öz uzay $\rightarrow \{(-t,-t,t) : t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ öz uzayın bazı $\rightarrow \{(-1,-1,1)\}$

$\lambda_3=-2$ için $(A-(-2)I)x=0$ yani $(A+2I)x=0$ denklem sistemi çözülmelidir

$$A+2I = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b+c=0 \\ b=-c \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=-t \\ c=t \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix}$$

$\lambda_3=-2$ için öz uzay $\{(0,-t,t): t\in\mathbb{R}\}$ dir.

Öz uzayın bazı $\{(0,-1,1)\}$ dir.

Örn $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir midir? Köşegenleştirilebilirse, köşegenleştiriniz.

Çözüm. Önce özdeğerleri bulalım.

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-1-\lambda&0&0\\-1&1-\lambda&0\\3&0&1-\lambda\end{bmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot(1-\lambda).\det\begin{bmatrix}-1-\lambda&0\\-1&1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\Big((-1-\lambda).(1-\lambda)\Big)=(1-\lambda)^2.(-1-\lambda) \Rightarrow p(\lambda)=0 \text{ dan } \begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=1\\ \lambda_3=-1\end{cases}$$

bulunur.

Şimdi $\lambda_1=\lambda_2=1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörleri bulalım

$Ax=1.x \Rightarrow (A-I)x=0$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulmalıyız.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2&0&0&0\\-1&0&0&0\\3&0&0&0\end{array}\right]\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&0\\-2&0&0&0\\3&0&0&0\end{array}\right]\underset{(+3).R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-2)R_1+R_2\to R_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\overset{R_1\leftrightarrow -R_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{l}x_1=0\\x_2=t\\x_3=s\end{array} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}0\\t\\s\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ özdeğeri iki defa tekrar etti ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörler 2 parametre içeriyor. Artık A matrisinin köşegenleştirebildiği garanti.

Şimdi $\lambda_3 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım

$Ax = -1 \cdot x \Rightarrow (A+I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{3R_1+R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{6}R_3 \to R_3}{\overset{-R_1 \to R_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{array}$$

$$x_1 = 2x_2$$
$$x_2 = -\frac{1}{3}x_3$$

$$x_3 = t \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}t \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}t \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Böylece $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

$$A \overset{?}{=} SDS^{-1}$$

S nin tersini bulalım

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{2}R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{3}R_3+R_1 \to R_1}{\overset{-R_3+R_2 \to R_2}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$SDS^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Örn $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir midir? Köşegenleştirilebilirse, köşegenleştiriniz.

Çözüm $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & -4 & -3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (1-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \cdot \left((2-\lambda) \cdot (-3-\lambda) + 4 \right)$$

$$= (1-\lambda) \cdot \left(-6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 \right)$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 + \lambda - 2)$$

$$\begin{matrix} +2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 2)$$

$p(\lambda) = 0$ dan kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ dir.

Şimdi $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ özdeğerine ilişkin özvektör bulalım.

$Ax = 1 \cdot x$ yani $(A - I)x = 0$ denklemi çözülmelidir.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{3R_2 + R_1 \to R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{-R_2 \to R_2}{\overset{-R_1 \to R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 2\overset{-t}{x_2} - \overset{t}{x_3} = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \underset{\text{denirse}}{x_3 = t} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -t \\ x_1 = -t \end{array} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$$

olur. Yani $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ özdeğeri 2 defa tekrar etmesine rağmen, buna karşılık gelen özvektör 1 tane parametre içeriyor. O halde A matrisi KÖŞEGENLEŞMEZ!

<u>ÖRN</u> Önceki sorudaki matrisin tersini Cayley-Hamilton Teoremi ile hesaplayınız.

<u>Çözüm</u> ~~Önceki örnekte~~ $\cancel{p(\lambda) = (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+2)}$ ~~idi.~~

$$\cancel{p(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^3 + 2\lambda - 2\lambda^2 - 4\lambda + \lambda + 2}$$

$$\cancel{= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2}$$

$\cancel{p(A) = 0 \Rightarrow A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0}$ ~~olur.~~

Çözüm: Önceki örnekte $p(\lambda) = (1-\lambda).(\lambda-1).(\lambda+2)$ idi.

$$p(\lambda) = (\lambda - 1 - \lambda^2 + \lambda)(\lambda+2) = (-\lambda^2 + 2\lambda - 1).(\lambda+2)$$

$$= -\lambda^3 - \cancel{2\lambda^2} + \cancel{2\lambda^2} + 4\lambda - \lambda - 2$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda - 2$$

$$p(A) = 0 \Rightarrow -A^3 + 3A - 2I = 0$$

$$\Rightarrow -A^3 + 3A = 2I$$

$$\Rightarrow A\left(-A^2 + 3I\right) = 2I$$

$$\Rightarrow A\left(+\frac{1}{2}\left(-A^2 + 3I\right)\right) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 3I\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left\{-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sağlaması yapıldı $AA^{-1} = I$ oldu.

S.

(1)

$$x+y+2z=8$$
$$-x+2y+3z=1 \qquad \text{lineer denklem sistemini çözünüz}$$
$$3x-7y+4z=10$$

Çözüm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_1+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{R_3}{2}\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_1\to R_1]{-3R_3+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11}R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{11} \end{array}\right] \qquad z=\frac{12}{11}$$

$$y-2z=-1$$

$$x+4z=9$$

$$y-\frac{24}{11}=-1 \Rightarrow y=-1+\frac{24}{11}=\frac{13}{11}, \quad x=9-4z=9-\frac{48}{11}=\frac{51}{11}$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

(3) $\det \begin{bmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{bmatrix} = 0$ old göst.

3'e eşdeğer başka $\rightarrow$ $\det \begin{bmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{bmatrix} = 4a^2b^2c^2$ old göst

ya da $\det \begin{bmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{bmatrix} = 4abc$ old. göst.

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı?

(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\cancel{X(A+B)=}$ $XA + XB = I$

$\Rightarrow X = ?$

HAZİRAN JUNE

H	Pzt	Sal	Çar	Per	Cum		
22							1
23	2	3	4	5	6	7	8
24	9	10	11	12	13	14	15
25	16	17	18	19	20	21	22
26	23	24	25	26	27	28	29
27	30						

Soru $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$AC = C - B$ eşitliğini sağlayan C matrisini bulunuz.

Çözüm $AC = C - B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= x_1 + 3 \\ -2x_1 - x_2 &= x_2 - 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \cancel{2x_1} + x_2 &= 3 \\ \cancel{-2x_1} - 2x_2 &= -2 \end{aligned} \Rightarrow -x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$2x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\underset{+2}{\downarrow} \quad \underset{-1}{\downarrow}$$

$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bulunur.

Soru $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $A \cdot B = B \cdot A$ ise $x = ?$

Çözüm $AB = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ -x-6 & 3 \end{bmatrix}$ eşitse,

$BA = \begin{bmatrix} x & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$-x-6=-5$

$-1 = x$

olmalı