1)

a) S = { (x'in alacağı değerler, zarın alacağı değerler) }

$S = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (-6,6), (-6,5), (-6,4), (-6,3), (-6,2), (-6,1)\}$

b) A: Gönderilen sinyalin kesinlikle +6 Volt olduğu olay.

A olayının olması için sonucun 1,2,3,4 ve 5 olması gerekir. "0" olamaz. Çünkü {-6,6} durumunda sonuç sıfır olur.

$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

c) $P(A) = \frac{n_A}{n_S} = \frac{5}{12} = \%41,\overline{6}$

d) B: Alınan sinyalin 0 olduğu olay.

B olayı sadece iki durumda gerçekleşir: {(6,6), (-6,6)}. Bu olayda sinyalin +6 Volt ya da -6 Volt olduğu, zarın kaç geldiği bilinse dahi, bilinemez.

e) $P(B) = \frac{n_B}{n_S} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \%16,6$

f) z: zarın değerini gösteren rastgele değişkeni

$P(z = \text{Tek Sayı}) = p \Rightarrow P(z=1) = P(z=3) = P(z=5) = \frac{p}{3} = \frac{1}{9}$

$P(z = \text{Çift Sayı}) = 2p \Rightarrow P(z=2) = P(z=4) = P(z=6) = \frac{2p}{3} = \frac{2}{9}$

$3p = 1$

$p = \frac{1}{3}$

C: x'in -6 volt olması olayı

k: Y'nin değerini gösteren rastgele değişkeni $\Rightarrow \{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$

$k=0 \Rightarrow P(z=6|C) = \frac{P((z=6)\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9} \Rightarrow P(k=0|C) = P(k=-2|C) = P(k=-4|C) = \frac{2}{9}$

$k=-1 \Rightarrow P(z=5|C) = \frac{P((z=5)\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9} \Rightarrow P(k=-1|C) = P(k=-3|C) = P(k=-5|C) = \frac{1}{9}$

g) Eğer k, -1, -2, -3, -4 ve -5 değerlerini alıyorsa x'in +6 volta eşit olması olanaksızdır.

Eğer k, 1, 2, 3, 4 ve 5 değerlerini alıyorsa x kesinlikle +6 volttur.

Eğer k, sıfıra eşit ise x ya +6 volt ya da -6 volt olur.

$\Rightarrow P(x=+6 \mid k=1,2,3,4,5) = 1$ $\quad \Rightarrow P(x=+6 \mid k=-1,-2,-3,-4,-5) = 0$

$\Rightarrow P(x=+6 \mid k=0) = 0,5$

2)

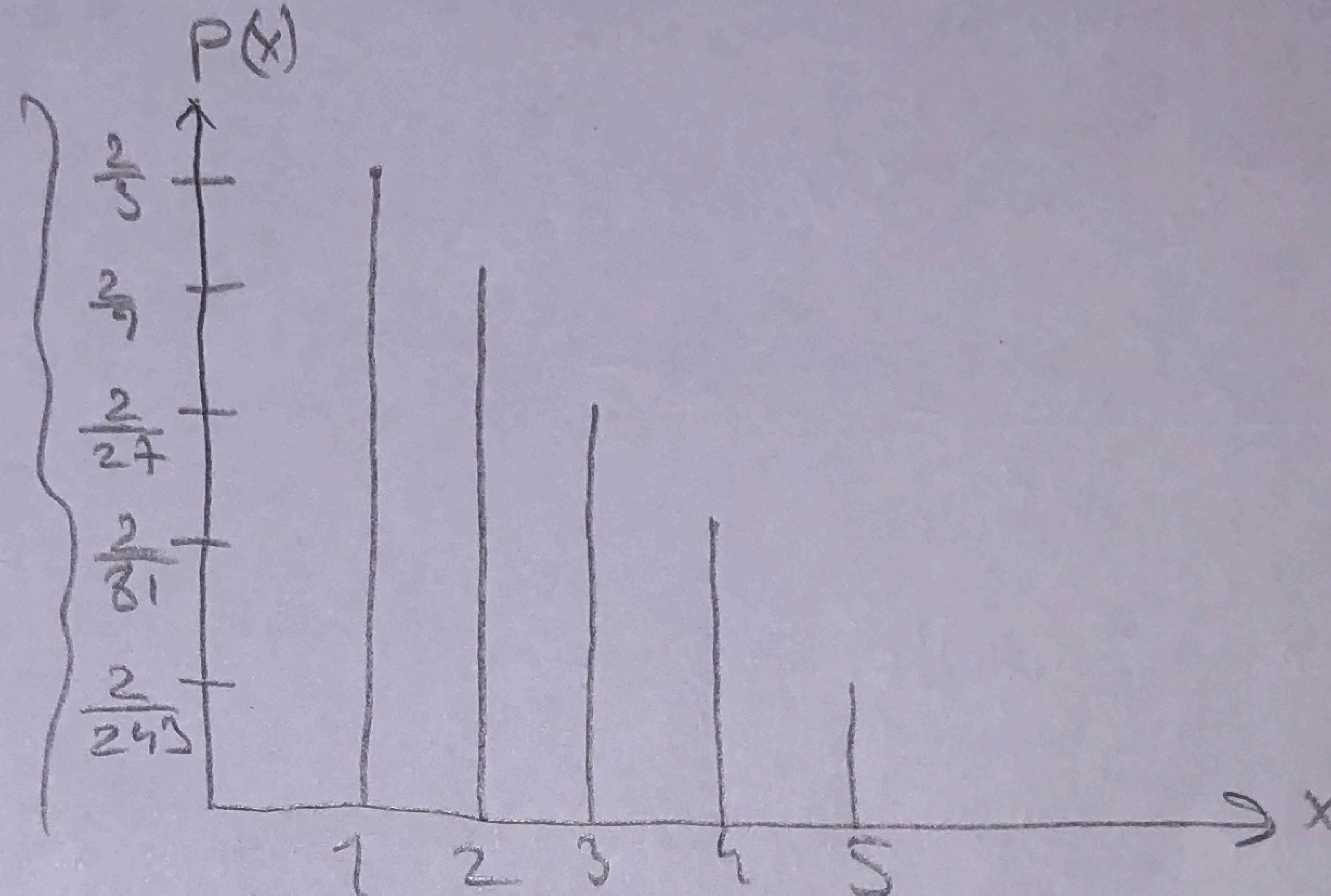
a) $P(x=1) = \frac{2}{3}$

$P(x=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

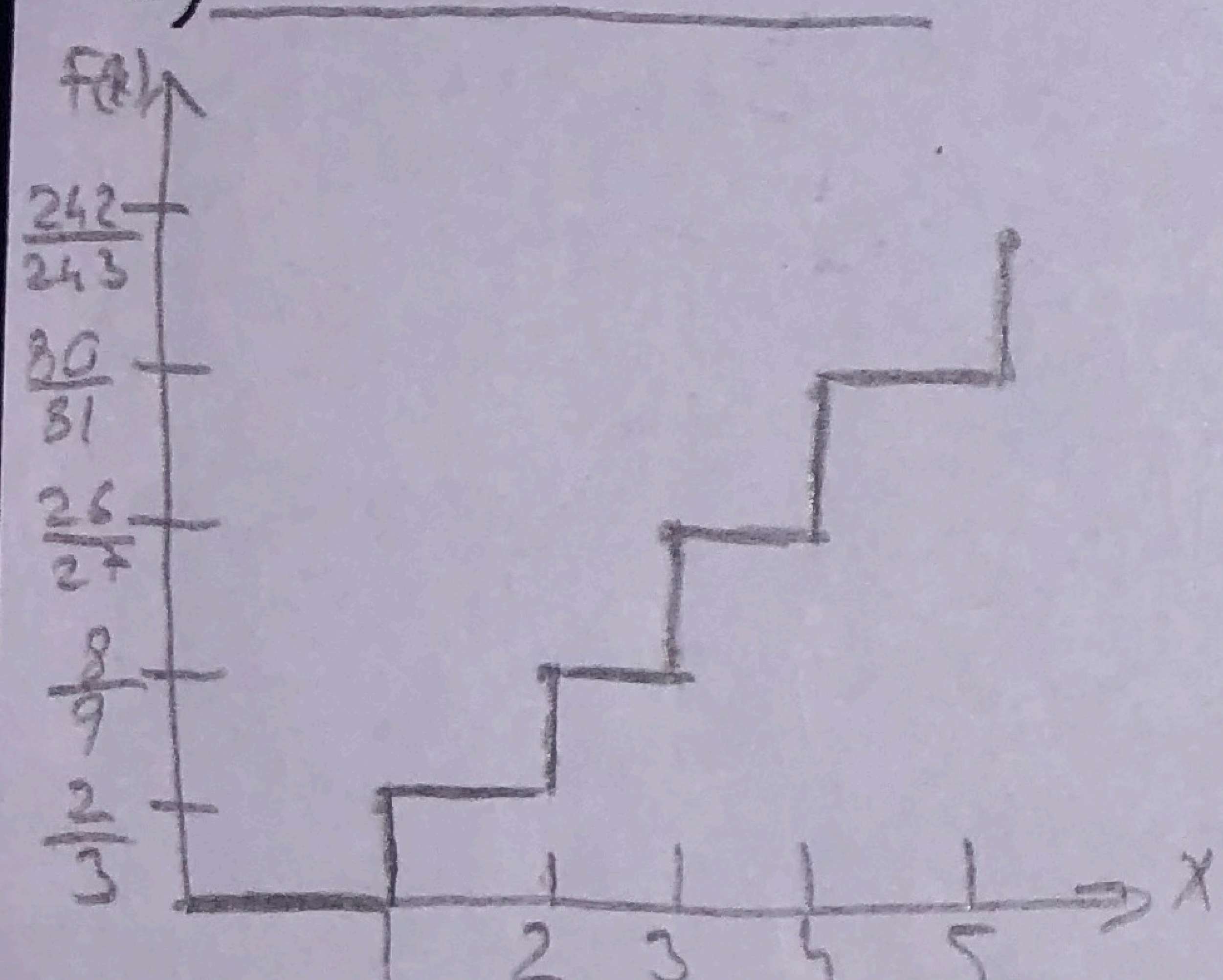
$P(x=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

$P(x=4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$

$P(x=5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{243}$



b) $F(5) = P(x<5)$



c) $\underset{\text{Gönderilmesi gereken mesaj sayısı}}{F(N)} = 0,99$ olmalı

$F(N) = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots\right) = 0,99$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots\right)$

$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{3}} - 1$

$F(N) = 0,99 = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{3}} - 1$ $\quad \frac{2}{3}$

$\underbrace{\left(\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) + 200}_{\frac{299}{200}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} = \overbrace{\frac{300}{300} - \left(\frac{299}{200} \cdot \frac{2}{3}\right)}^{\frac{1}{300}}$

$\Rightarrow N = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{300} - 1 = \log_3 300 - 1 = 4,19$

$\Rightarrow$ N en az 4,19 olması gerektiğinden N=5 tir.

$\Rightarrow N \cdot \underset{\text{Cevap alma süresi}}{10} = 5 \cdot 10 = 50\,s$

3)

a) $E[X] = \sum_{i}^{n} x_i \cdot p(x_i)$

x_i → i'nci kuyrukta bekleme süresi

$p(x_i)$ → i'nci kuyruğa yerleşme olasılığı

$\Rightarrow x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) + x_4 \cdot p(x_4) + x_5 \cdot p(x_5)$

$2 \cdot (0{,}5087)^1 + 10 \cdot (0{,}5087)^2 + 6 \cdot (0{,}5087)^3 + 20 \cdot (0{,}5087)^4 + 10 (0{,}5087)^5$

$= 6{,}0749$ milisaniye

b) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$\Rightarrow E[X^2] = (x_1)^2 \cdot p(x_1) + (x_2)^2 \cdot p(x_2) + (x_3)^2 \cdot p(x_3) + (x_4)^2 \cdot p(x_4) + (x_5)^2 \cdot p(x_5)$

$= 2^2 \cdot (0{,}5087)^1 + 10^2 \cdot (0{,}5087)^2 + 6^2 \cdot (0{,}5087)^3 + 20^2 \cdot (0{,}5087)^4 + 10^2 \cdot (0{,}5087)^5$

$= 62{,}8438$

$Var[X] = 62{,}8438 - \underbrace{(6{,}0749)^2}_{36{,}9044} = \underline{25{,}9394}$