

Sayısal Analiz

İletişim :

yyurtay@sakarya.edu.tr
www.cs.sakarya.edu.tr/yyurtay
(264) 295 58 99

Lineer Denklem Sistemlerinin
Çözüm Yöntemleri

- Ters Matris Yöntemi
- LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi
- Jacobi yineleme (iterasyon) Yöntemi
- GAUSS-SEIDEL yöntemi
- Aitken İterasyon yöntemi
- Örnekler

BSM

5.
Hafta

2.
Sayfa



Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ters Matris Alarak,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

olsun, denklem takımını matris formunda yeniden düzenleyecek olursak ;

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = c_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{veya kısaca} \quad \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \text{formundadır.}$$

\mathbf{A} matrisi katsayılar matrisidir.

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad \text{elde edilir.}$$

Burada \mathbf{A}^{-1} in $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{Adj} \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ ile bulunabileceğini hatırlamak gerekir.

Linear Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Örnek 1 :

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 8$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \quad \text{denklemler sistemini katsayı matrisinin tersini alarak bulalım.}$$

Katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ Buradan bu matrisin determinantı ve ek matrisi alarak ters matrisi bulduğumuzda ;

$$|A| = -5, \quad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 6 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & -0.8 \\ 1 & 1.6 & -1.2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & -0.8 \\ 1 & 1.6 & -1.2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Linear Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

```
>> A=[2 -3 2;1 1 -2;3 -2 -1]
```

```
A =
```

```
2 -3 2
1 1 -2
3 -2 -1
```

```
>> B=[-11 8 -1]'
```

```
-11
8
-1
```

```
>> AT=inv(A)
```

```
AT =
```

```
1.0000 1.4000 -0.8000
1.0000 1.6000 -1.2000
1.0000 1.0000 -1.0000
```

```
>> I=AT*A
```

```
I =
```

```
1.0000 0.0000 0.0000
0.0000 1.0000 0.0000
0.0000 0.0000 1.0000
```

```
>> X=AT*B
```

```
X =
```

```
1
3
-2
```

Matlab'ta Ters
Matris yardımıyla
Lin.Denk.Çözümü

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : $A=L.U$

Ayrıştırma Yöntemi

$AX=B$ ve $A=L.U \Rightarrow LUX=B$ şeklinde bir düzenleme ile...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} \quad , \quad u_{12} = a_{12} \quad , \quad u_{13} = a_{13} \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \quad , \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} \quad , \quad u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}$$

$$l_{32} = [a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}] / u_{22} \quad , \quad u_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23}$$

L ve U matrisleri elde edilmiş olur.

BSM

5.
Hafta

6.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : $A=LU$

$A.X=B$ sisteminde **A'** nın ayrıştırılması ile

$L.U.X=B$ şeklini gelir. İfadeye

$U.X = Z$ dönüşümü yapılarak

$L.Z=B$ şeklinde yeni bir denklem sistemi elde edilmiş olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ buradan } z_1 = b_1, z_2 = b_2 - l_{21} \cdot z_1, z_3 = b_3 - l_{31} \cdot z_1 - l_{32} \cdot z_2$$

sonuçları elde edilir, bu değerleri ;

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \text{ denkleminde yerine yazılarak ,}$$

$$x_1 = \frac{z_1 - u_{12} \cdot x_2 - u_{13} \cdot x_3}{u_{11}} = \frac{b_1 - u_{21} \cdot x_2 - u_{13} \cdot x_3}{u_{11}}$$

$$x_2 = \frac{z_2 - u_{23} \cdot x_3}{u_{22}} = \frac{b_2 - l_{21} \cdot z_1 - u_{23} \cdot x_3}{u_{22}}$$

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{33}} = \frac{b_3 - l_{31} \cdot z_1 - l_{32} \cdot z_2}{u_{33}}$$

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ayrıştırma Yöntemi

ÖRNEK
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$
 şeklinde verilen denklem sistemini LU yöntemi kullanarak çözünüz.

Cözüm: Bu denklem sistemini çözmede öncelikle A katsayılar matrisi, X bilinmeyenler matrisi ve Y değerler matrisini oluştururuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

Burada A katsayılar matrisini $A=L.U$ şeklinde ifade edecek olursak

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 1,5 & -0,2 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1,6 \end{bmatrix}$$

Bir önceki örnekle katsayılar aynı alındığından L ve U'nun yandaki değerleri aldığını hesaplamıştık.

L ve U yukarıdaki gibi hesaplandıktan sonra

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

BSM

5.
Hafta

8.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ayrıştırma Yöntemi

$$z_1 = y_1 = 4 ;$$

$$z_2 = y_2 - z_1 \cdot l_{2,1} = 6 - 4 \cdot (-0,5) = 8 \quad \text{ve}$$

$$z_3 = y_3 - z_1 \cdot l_{3,1} - z_2 \cdot l_{3,2} = 6 - 4 \cdot (1,5) - 8 \cdot (-0,2) = 1,6$$

olmak üzere Z matrisi oluşturulur.

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

eşitliğinde

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{3,3}} = \frac{y_3 - z_1 \cdot l_{3,1} - z_2 \cdot l_{3,2}}{u_{3,3}} = \frac{6 - 4 \cdot 1,5 - 8}{1,6} = 1$$

$$x_2 = \frac{z_2 - u_{2,3} \cdot x_3}{u_{2,2}} = \frac{y_2 - z_1 \cdot l_{2,1} - u_{2,3} \cdot x_3}{u_{2,2}} = \frac{6 - 4 \cdot (-0,5) - 0,5 \cdot 1}{2,5} = 3$$

$$x_1 = \frac{z_1 - u_{1,2} \cdot x_2 - u_{1,3} \cdot x_3}{u_{1,1}} = \frac{y_1 - u_{1,2} \cdot x_2 - u_{1,3} \cdot x_3}{u_{1,1}} = \frac{4 - 1 \cdot 3 - (-3) \cdot 1}{2} = 2$$

$$x_1 = 2 ; x_2 = 3 ; x_3 = 1$$

şeklinde denklem sistemi çözülmüş olunur.

BSM

5.
Hafta

9.
Sayfa

Uygulama :

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

Çözümünü Ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

...

BSM

5.
Hafta

10.
Sayfa

```
>> A=[4,1,1;2,-1,1;2,1,1]
```

```
      4      1      1
A =   2     -1      1
      2      1      1
```

```
>> B=[9,3,7]'
```

```
      9
B =   3
      7
```

```
>> [l,u]=lu(A)
```

```
      1.0000      0      0
l =   0.5000      1.0000      0
      0.5000     -0.3333      1.0000
```

```
      4.0000      1.0000      1.0000
u =       0     -1.5000      0.5000
          0      0      0.6667
```

```
>> z=inv(l)*B
```

```
      9.0000
z =  -1.5000
      2.0000
```

```
>> x=inv(u)*z
```

```
      1.0000
x =   2.0000
      3.0000
```



Uygulama :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Çözümünü Ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

...

BSM

5.
Hafta

11.
Sayfa

```
>> A=[1,-1,1;1,1,-1;-1,1,1]
      1      -1      1
A =   1       1     -1
      -1       1      1
>> B=[3,5,1]'
      3
B =   5
      1
>> [l,u]=lu(A)
      1      0      0
l =   1       1      0
      -1      0      1
      1     -1      1
u =   0       2     -2
      0       0      2
>> z=inv(l)*B
      3
z =   2
      4
>> x=inv(u)*z
      4
x =   3
      2
```

Uygulama :

$$\begin{aligned}6x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -5\end{aligned}$$

Çözümünü ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

...

BSM

5.
Hafta

12.
Sayfa

$$(x_1, x_2, x_3) = (-3, 4, 5)$$

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ayrıştırma Yöntemi

Uygulama :

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_2 + x_3 - x_4 = 5$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = -4$$

Çözümünü Choleski yöntemi ile bulunuz ?

Ayrıştırma Yöntemi

...

```
>> A=[1 1 -1 1;0 2 1 -1;1 0 -1 1;-1 -1 1 0]
```

```
A =
```

```
1 1 -1 1
0 2 1 -1
1 0 -1 1
-1 -1 1 0
```

```
>> B=[2 5 0 -4]'
```

```
B =
```

```
2
5
0
-4
```

```
>> [l,u]=lu(A)
```

```
l =
```

```
1.0000 0 0 0
0 1.0000 0 0
1.0000 -0.5000 1.0000 0
-1.0000 0 0 1.0000
```

```
u =
```

```
1.0000 1.0000 -1.0000 1.0000
0 2.0000 1.0000 -1.0000
0 0 0.5000 -0.5000
0 0 0 1.0000
```

```
>> z=inv(l)*B
```

```
z =
```

```
2.0000
5.0000
0.5000
-2.0000
```

```
>> x=inv(u)*z
```

```
x =
```

```
1
2
-1
-2
```

BSM

5.
Hafta

13.
Sayfa

Uygulama :

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5$$

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -5$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -6$$

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -10$$

$$2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 5$$

$$-x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (?, ?, ?, ?)$$

Çözümünü Choleski yöntemi ile bulunuz ?

...

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Jacobi
basit
iterasyon
yöntemi:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{C}$$

İşlemlerle bulunur ve işleme

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \mathbf{C}$$

...

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{C}$$

olarak devam ettirilir. \mathbf{X}_k bilinmeyen vektör elemanları

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i, \quad i = 1 : n$$

$$\max_{i \leq i \leq n} \frac{|x_i^k - x_i^{k-1}|}{x_i^k} \quad \text{Yakınsaklık kriteri ile belirlenir.}$$

BSM

5.
Hafta

15.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Jacobi
basit
iterasyon
yöntemi:

Örnek:

$$x + y = 3$$

$$2x - y = 3$$

Denklemler sistemini İterasyon Yöntemi ile çözünüz.
Sistemini iterasyon yapılabilecek forma getirelim.

$$x = (3+y)/2, \quad y = 3 - x$$

Başlangıç değerleri **$x=0$ veya $y=0$** vererek hesaplayalım.

İterasyonları gerçekleştirirsek;

$$x(1) = (3+0)/2 = 1.5, \quad y(1) = 3 - 1.5 = 1.5$$

$$x(2) = (3+1.5)/2 = 2.25, \quad y(2) = 3 - 2.25 = 0.75$$

...

Devam eden iterasyon değerleri tabloda verilmiştir.

Dolayısı ile kökler **$x = 2$, $y = 1$** değerlerine yakınsamaktadır.

Bu yöntem üzerinde çözüm yapılırken yakınsama gözleniyorsa çözüme ulaşılmış demektir.

Her zaman yakınsaklık söz konusu olmaz.

Jacobi İterasyon Yöntemi

| <u>x</u> | <u>y</u> |
|----------|----------|
| 1,5 | 1,5 |
| 2,25 | 0,75 |
| 1,875 | 1,125 |
| 2,0625 | 0,9375 |
| 1,96875 | 1,03125 |
| 2,015625 | 0,984375 |
| 1,992188 | 1,007813 |
| 2,003906 | 0,996094 |
| 1,998047 | 1,001953 |
| 2,000977 | 0,999023 |

BSM

5.
Hafta

16.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Jacobi
basit
iterasyon
yöntemi:

Büyük katsayılar matrisi içeren lineer denklem sistemlerinin eliminasyon yöntemleriyle çözümü çoğu zaman ekonomik olmaz. Bu gibi durumlarda iteratif yöntemler seçilir. Bunlardan en kolay olanlardan birisi de Jacobi yöntemi.

$A \cdot X = B$ lineer denklem takımı, A katsayılar matrisi $A = L + D + U$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde üç matrisin toplamı olmak üzere

$$L \cdot X + D \cdot X + U \cdot X = B \rightarrow X = D^{-1} \cdot [B - L \cdot X - U \cdot X] \text{ şekline getirilebilir.}$$

Bu durumda x_i bilinmeyenleri için uygun seçilecek başlangıç değerleri bulunan eşitliklerde kullanılarak yeni x_i değerleri hesaplanabileceği ve bu işlemlerin iteratif olarak devam ettirilebileceği görülmektedir. Jacobi basit iterasyon yöntemi olarak bilinen bu yöntemin herhangi bir iterasyon adımı için kapalı formda

BSM

5.
Hafta

17.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Jacobi
basit
iterasyon
yöntemi:

$$X^{(k+1)} = D^{-1} \cdot [B - L \cdot X^{(k)} - U \cdot X^{(k)}] \text{ veya açık biçimde}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_N^{(k+1)} \end{Bmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_N^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_N^{(k)} \end{Bmatrix}$$

yazılabilir. D diyagonal matrisinin tersinin

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{NN} \end{bmatrix}$$

Şeklinde olacağı gösterilebilir. Bu durumda eşitliğin herhangi bir i 'inci satırı için

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} \cdot x_j^{(k)}}{a_{ii}} ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

yazılarak iterasyon algoritması
açık biçimde elde edilebilir.

BSM

5.
Hafta

18.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Jacobi
basit
iterasyon
yöntemi:

Örnek:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = ?$$

Denklemler sisteminin direkt yöntemlerle çözümü $\mathbf{x} = [0.1667 \ 0.4167 \ -0.0833 \ 0.1667]^T$ dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklemler sistemini JACOBI iterasyonu ile çözelim. Denklemler sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyen k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $\max |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. $\varepsilon = 0.0001$ seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ alalım.

BSM

5.
Hafta

19.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Jacobi
basit
iterasyon
yöntemi:

| k | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.2500 | 0.5000 | 0 | 0.2500 |
| 2 | 0.1250 | 0.3750 | -0.1250 | 0.1250 |
| 3 | 0.1875 | 0.4375 | -0.0625 | 0.1875 |
| 4 | 0.1563 | 0.4063 | -0.0938 | 0.1563 |
| 5 | 0.1719 | 0.4219 | -0.0782 | 0.1719 |
| 6 | 0.1641 | 0.4141 | -0.0860 | 0.1641 |
| 7 | 0.1680 | 0.4180 | -0.0821 | 0.1680 |
| 8 | 0.1660 | 0.4160 | -0.0840 | 0.1660 |
| 9 | 0.1670 | 0.4170 | -0.0830 | 0.1670 |
| 10 | 0.1665 | 0.4165 | -0.0835 | 0.1665 |
| 11 | 0.1668 | 0.4168 | -0.0833 | 0.1667 |
| 12 | 0.1666 | 0.4166 | -0.0834 | 0.1666 |
| 13 | 0.1667 | 0.4167 | -0.0833 | 0.1667 |

Başlangıç değerleri

$\max |x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_4^2 - x_4^1| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$
olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1875 - 0.1250| = 0.0625 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1660 - 0.1680| = 0.0020 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1668 - 0.1665| = 0.0003 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyon durduruldu**

13. iterasyon sonunda bulunan çözüm

İterasyon no

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0833 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

BSM

5.
Hafta

20.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Gauss-Seidel Yöntemi

İterasyona başlamadan önce,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \rightarrow A x = b$$

denklemler sistemi diyagonal elemanları $a_{ii} \neq 0$ olacak şekilde düzenlenir. Bunun için gerekirse satırların yerleri değiştirilir. Bu sistemden x_1, x_2, \dots, x_n çekilerek

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \dots) \end{aligned}$$

Şeklinde yazılır

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Gauss-Seidel Yöntemi

İterasyona $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bilinmeyenleri için, fiziksel anlamına göre, bir başlangıç değeri tahmin edilerek başlanır. Herhangi bir tahmin yapılamıyorsa $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ veya

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

alınabilir.

x_1 değerleri çekilen denklemlerde 1. denkleminin sağ tarafında yerine konur, x_1 in yeni değeri bulunur.

x_1 in yeni değeri ve x_3, x_4, \dots, x_n nin önceki değerleri 2. denklemin sağ tarafında yerine konur, x_2 nin yeni değeri bulunur.

x_1 ve x_2 nin yeni değeri ile x_4, \dots, x_n nin önceki değerleri 3. denklemin sağ tarafında yerine konur, x_3 ün yeni değeri bulunur. ... x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in yeni değerleri n. denklemin sağ tarafında yerine konur, x_n nin yeni değeri bulunur.

İterasyonu sonlandırma koşulu kontrol edilir, sağlanıyorsa iterasyon sonlandırılır. Sağlanmıyorsa son x_i değerleri ile işlem tekrarlanır.

GAUSS-SEIDEL metodu ile JACOBI metodu temelde aynıdır.

Sadece GAUSS-SEIDEL metodunda x_i nin her yeni değeri hemen kullanılır.

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Örnek:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = ?$$

Denklemler sisteminin direkt yöntemlerle çözümü $x = [0.1667 \ 0.4167 \ -0.0833 \ 0.1667]$ dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklemler sistemini GAUSS-SEIDEL iterasyonu ile çözelim. Denklemler sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyen k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $\max |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. $\varepsilon = 0.0001$ seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ alalım.

BSM

5.
Hafta

23.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Örnek:

| k | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|---|--------|--------|---------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.2500 | 0.4375 | -0.0625 | 0.1563 |
| 2 | 0.1563 | 0.4219 | -0.0782 | 0.1641 |
| 3 | 0.1641 | 0.4180 | -0.0821 | 0.1660 |
| 4 | 0.1660 | 0.4170 | -0.0830 | 0.1665 |
| 5 | 0.1665 | 0.4168 | -0.0833 | 0.1666 |
| 6 | 0.1666 | 0.4167 | -0.0833 | 0.1667 |
| 7 | 0.1667 | 0.4167 | -0.0834 | 0.1667 |

Başlangıç değerleri

$\max |x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_1^2 - x_1^1| = |0.1563 - 0.2500| = 0.0937 > \varepsilon = 0.0001$
olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1641 - 0.1563| = 0.0078 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyonu durdur!**

İterasyon adımları

7. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0834 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel
Yöntemi

BSM

5.
Hafta

24.
Sayfa

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi, iterasyon gerçek çözüme oldukça yavaş yakınsamaktadır. JACOBI ve GAUSS-SEIDEL iterasyonları doğrusal yaklaşım sergilerler. Doğrusal yaklaşımlı iterasyon metotlarında AITKEN yöntemi kullanılarak iterasyon hızlandırılabilir. Herhangi bir x_i bilinmeyeninin birbirini izleyen üç iterasyon adımı sonunda bulunan

$x_i^{k-2}, x_i^{k-1}, x_i^k$ değerleri kullanılarak x_i^k değeri iyileştirilebilir. AITKEN'e göre x_i^k nin iyileştirilmiş değeri

$$x_i^k = x_i^k - \frac{(x_i^k - x_i^{k-1})^2}{x_i^k - 2x_i^{k-1} + x_i^{k-2}}$$

Formülü kullanarak aşağıdaki örneği JACOBI metodu ile çözümleyelim

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = ?$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

Lineer Denklemler Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Aitken
İterasyon
yöntemi

| k | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ |
|---|--------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.2500 | 0.5000 | 0 | 0.2500 |
| 2 | 0.1250 | 0.3750 | -0.1250 | 0.1250 |
| 3 | 0.1875 (0.1667) | 0.4375 (0.4167) | -0.0625 (-0.0833) | 0.1875 (0.1667) |
| 4 | 0.1563 (0.1667) | 0.4063 (0.4167) | -0.0938 (-0.0834) | 0.1563 (0.1667) |

Başlangıç değerleri

$\max |x_i^k - x_i^{k-1}| = 0.1250 - 0.2500 = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$
olduğundan iterasyona devam!

Aitken

$$0.1875 - \frac{(0.1875 - 0.1250)^2}{0.1875 - 2 \cdot 0.1250 + 0.2500} = 0.1667$$

İterasyon
adımları

4. iterasyon sonunda bulunan çözüm

$|-0.0834 - (-0.0833)| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$
iterasyonu durdur!

Parantez içinde koyu yazılmış değerler AITKEN formülü ile iyileştirilmiş değerlerdir.

Görüldüğü gibi yakınsama hızlanmış, 13 iterasyon yerine sadece 4 iterasyon yeterli olmuştur.

AITKEN yöntemi, formülün yapısı gereği, en erken 3. adım sonunda uygulanabilir. Ancak, ilk adımlarda değerler çok kaba olduğundan, büyük denklem sistemlerinde 5.-10. adımdan sonra uygulanması daha uygun olur.

(İterasyonun son adımlarında da yarar sağlamaz, çünkü sadece son hanelerde çok küçük değişiklikler olmaktadır.

$$\max |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq 10 \cdot \varepsilon$$

olduğunda AITKEN yönteminin kullanılmaması uygun olur.)

BSM

5.
Hafta

26.
Sayfa

Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar

A.Topçu, (Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz, OGÜ)

BSM

5.
Hafta

27.
Sayfa

Sonraki Hafta :

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri...

