



BSM 101

Bilgisayar Mühendisliğine Giriş

BOOL CEBRİ

HAZIRLAYAN: DR. ÖĞR. ÜYESİ M. FATİH ADAK

Ben Kimim?

► İletişim Bilgileri

- <http://www.fatihadak.sakarya.edu.tr/>
- fatihadak@sakarya.edu.tr
- 0264 295 7049

► Öğrenim Bilgileri

- **Lisans** – Dokuz Eylül Üniversitesi – Bilgisayar Mühendisliği
- **Yüksek Lisans** – Kocaeli Üniversitesi – Bilgisayar Mühendisliği
- **Doktora** – Sakarya Üniversitesi – Bilgisayar ve Bilişim Mühendisliği

Ben Kimim?

- ▶ Öğretim
 - ▶ BSM207 – Veri Yapıları
 - ▶ BSM208 – Programlama Dillerinin Prensipleri
 - ▶ BSM427 – Bulanık Mantık ve Yapay Sinir Ağlarına Giriş
 - ▶ BSM462 – Yazılım Testi
- ▶ Araştırma
 - ▶ Makine Öğrenmesi
 - ▶ Optimizasyon
 - ▶ Koku Sınıflandırma
 - ▶ Yazılım Kalitesi
 - ▶ Yazılım Testi

İçerik

- ▶ Bool Cebri (Giriş)
- ▶ Temel İşlemler
- ▶ Bool İfadeleri ve Gerçekleme Tabloları
- ▶ Temel Teoremler
- ▶ Değişme, Birleşme ve Dağılma Yasaları
- ▶ Sadeleştirme Teoremleri
- ▶ Çarpımların Toplamı ve Toplamların Çarpımı Formları
- ▶ De Morgan Yasası

Bool Cebri

- ▶ Mantık devreleri ile tasarım için temel matematik
- ▶ Bilgisayar Matematiği olarak ta ifade edilebilir.
- ▶ 1 ve 0'ın kabul edildiği iki değer bulunmaktadır.
- ▶ X, Y, \dots bool değişkenleri 1 veya 0 değerlerinden birini alabilirler
- ▶ Doğru ve Yanlış, 1 ve 0 ile ifade edilir.
 - ▶ 1: Doğru
 - ▶ 0: Yanlış

Temel İşlemler

► VE İşlemi

► Sadece her iki değerin de 1 olduğu durumda 1 sonucunu üretir.

► $0.0=0$

► $1.0=0$

► $0.1=0$

► $1.1=1$

Gerçekleme Tablosu

X	Y	Z=X.Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Temel İşlemler

▶ VEYA İşlemi

▶ Herhangi bir değerin 1 olduğu durumda 1 sonucunu üretir.

▶ $0+0=0$

▶ $1+0=1$

▶ $0+1=1$

▶ $1+1=1$

Gerçekleme Tablosu

X	Y	Z=X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Temel İşlemler

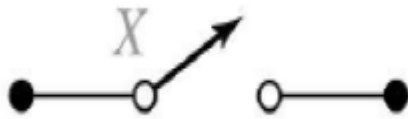
- ▶ DEĞİL İşlemi
 - ▶ Herhangi bir değeri tersine çevirir.
 - ▶ $0' = 1$
 - ▶ $1' = 0$

Örnek:

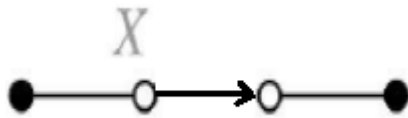
$$\begin{aligned} A=0 & \Rightarrow A' = 1 \\ B=1 & \Rightarrow B' = 0 \end{aligned}$$

Temel İşlemler

► Anahtar Üzerindeki Etkisi

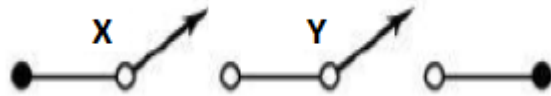


Anahtar açık $X=0$

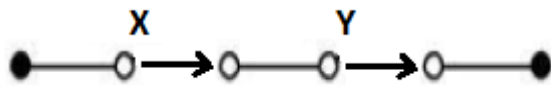


Anahtar kapalı $X=1$

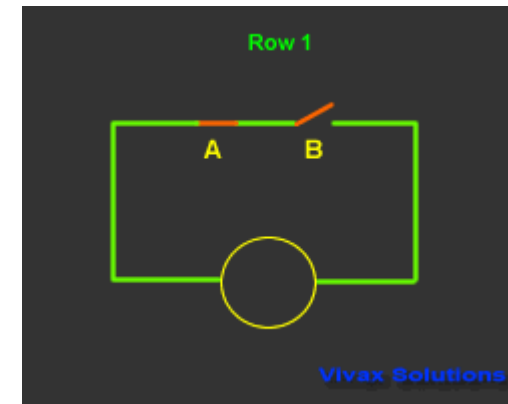
$Z=X.Y$ VE İşlemi



X veya Y açık $Z=0$ $X=0$ veya $Y=0$



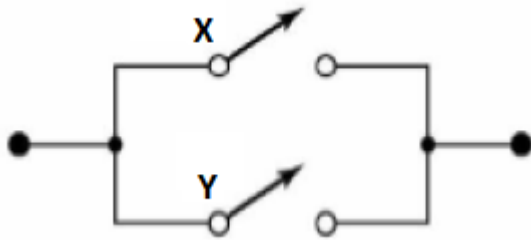
X ve Y kapalı $Z=1$ $X=1$ ve $Y=1$



Temel İşlemler

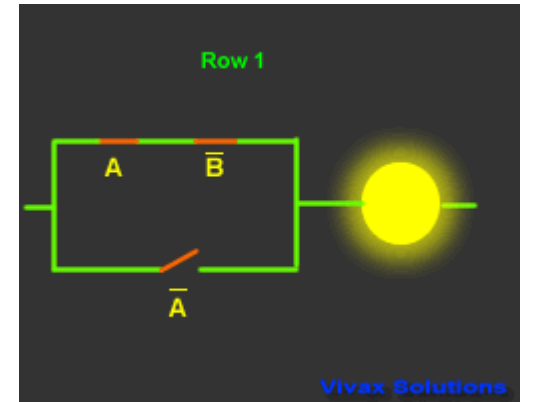
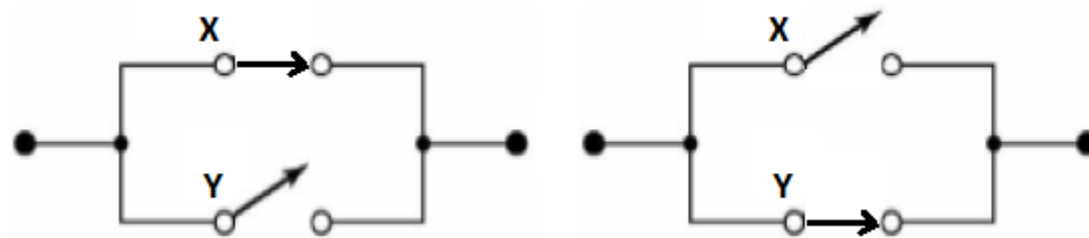
► Anahtar Üzerindeki Etkisi

$Z = X + Y$ VEYA işlemi



X ve Y açık $Z=0$ $X=0$ veya $Y=0$

X veya Y kapalı $Z=1$ $(X=1 \text{ ve } Y=0) \text{ veya } (X=0 \text{ ve } Y=1)$



Bool İfadeleri

- ▶ Bool Değişkenleri ile Gösterilen İfadeler

- ▶ Örnek

$$[(X+Y) Z] ' + AB$$

A=B=X=Z=1,Y=0 olduğu düşünüldüğünde

- ▶ Değerlendirme

$$\begin{aligned} [(X+Y) Z] ' + AB &= [(1+0) . 1] ' + 1 . 1 \\ &= [1 . 1] ' + 1 . 1 \\ &= [1] ' + 1 . 1 \\ &= 0 + 1 . 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bool İfadeleri ve Gerçekleme Tablosu

- ▶ $Z = X + Y'$
- ▶ Gerçekleme tablosu bool ifadesindeki değerlerin tüm olası kombinasyonları için ifadenin değerini belirtir.
- ▶ n adet değişken için 2^n adet satıra ihtiyaç vardır.

Z ye ait gerçekleme tablosu

X	Y	Y'	Z=X+Y'
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Bool İfadeleri ve Gerçekleme Tablosu

- Gerçekleme Tablosunu Kullanarak İspat

$$XY' + Z = (X + Z) \cdot (Y' + Z)$$

X	Y	Z	Y'	XY'	XY'+Z	X+Z	Y'+Z	(X+Z). (Y'+Z)
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1

Temel Teoremler

$$A+0=A$$

$$A+1=1$$

$$A+A=A$$

$$(A')'=A$$

$$A+A'=1$$

$$A.1=A$$

$$A.0=0$$

$$A.A=A$$

$$A.A'=0$$

Örnek

$$(XY' + Z)W + 1 = 1$$

$$(XY' + Z) \cdot (XY' + Z)' = 0$$

Değişme Birleşme ve Dağılma Yasaları

► Değişme Yasası

► $AB=BA$ $A+B=B+A$

► Birleşme Yasası

► $A(BC)=(AB)C=ABC$ $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$

► Dağılma Yasası

► $A(B+C)=AB+AC$

$A+BC=(A+B)(A+C)$ →

Sadece bool cebirinde geçerlidir.
Normal cebirde geçerli değildir.

İspat

$$(A+B)(A+C)=A(A+C)+B(A+C)=AA+AC+BA+BC$$

$$=A+AC+BA+BC=A.1+AC+BA+BC=A(1+C+B)+BC=A.1+BC=\mathbf{A+BC}$$

Sadeleştirme Teoremleri

- ▶ Ne kadar sade bool ifadesi → O kadar az mantık kapısı → O kadar ucuz Tasarım
- ▶ Faydalı Teoremler
 - ▶ $AB + AB' = A$ $(A+B)(A+B') = A$
 - ▶ $A + AB = A$ $A(A+B) = A$
 - ▶ $(A+B')B = AB$ $AB' + B = A + B$
- ▶ İspatlar
 - ▶ $A + AB = A1 + AB = A(1+B) = A1 = A$
 - ▶ $A(A+B) = AA + AB = A + AB = A1 + AB = A(1+B) = A1 = A$
 - ▶ $AB' + B = (B+A)(B+B') = (B+A).1 = A+B$

Sadeleştirme Teoremleri

► Örnekler

► $Z = X(X' + Y) = XY$

► $W = \underbrace{XZ + XZ'}_X + (X + Y')Y + \underbrace{(X' + Z)(X' + Z')}_{X'}(X' + Y)$

$$= X + \underbrace{(X + Y')Y}_{XY} + \underbrace{X'(X' + Y)}_{X'}$$

$$= \underbrace{X + XY + X'}_X$$

$$= X + X' = 1$$

Çarpımların Toplamı

- ▶ Bir bool ifadesini çarpımların toplamı (veya toplamların çarpımı) haline getirmek, daha düzenli bir devre tasarımı sağlar.
 - ▶ Çarpımların Toplamı
 - ▶ $XY' + ZW'V + XZ'$
- $(X+Y)ZW + XY$ -----> Çarpımların toplamı değildir.

Çarpımların Toplamı

- ▶ Çarpımların toplamını elde etmek için parantezlerin açılıp fazla terimlerin yok edilmesi gerekir.

- ▶ Örnek

$$\begin{aligned}
 &(X+YZ)(X+W+V) \quad \text{Parantezleri aç} \\
 &= X+XW+XV+YZX+YZW+YZV \quad \text{fazlalıkları yoker} \\
 &= X(1+W+V+YZ)+YZW+YZV \\
 &= X+YZW+YZV \quad \text{-----> Çarpımların Toplamı}
 \end{aligned}$$

Toplamların Çarpımı

- Bool ifadeleri toplamların çarpımı şeklinde yazarak devre tasarlamak ortaya düzenli bir devrenin çıkmasını sağlar.

► Örnek

$$(X+Y)(X+Y+Z')(Z+W)$$

Başka bir örnek

$XY'(Z+Y') \rightarrow (XY'+0)(Z+Y')$ şeklinde yazılabileceği için toplamların çarpımı olarak kabul edilir.

De Morgan Yasası

- ▶ Paranteze dağılır ve toplamları çarpım, çarpımları toplam yapar.
 - ▶ $(A+B)'=A'B'$
 - ▶ $(AB)'=A'+B'$
 - ▶ 2'den fazla değişken için de geçerlidir.

$$(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n)' = X_1' X_2' X_3' \dots X_n'$$

$$(X_1 X_2 X_3 \dots X_n)' = X_1' + X_2' + X_3' + \dots + X_n'$$

De Morgan Yasası

► Örnek

$$\begin{aligned}(X'Y + XY')' &= (X'Y)'(XY')' = (X + Y')(X' + Y) = XX' + XY + Y'X' + Y'Y = 0 + XY + Y'X' + 0 \\ &= XY + Y'X'\end{aligned}$$

Sözel Terimlerin bool İfadelerine Çevrilmesi

- ▶ X ve Y doğru ise Z doğrudur
 - ▶ $Z=XY$
- ▶ Eğer alarm düğmesine basılmış (**X**) **ve** kapı kapalı **değil** (**Y'**) **veya** akşam 8'i geçmiş (**Z**) **ve** pencere kapalı **değilse** (**V'**) alarm çalar (**W**)

$$W=XY'+ZV'$$

'Boolean türü için söylenecek en iyi şey yanlış olsan bile
doğrudan bir bit uzaktasın'
Anonim

Dinlediğiniz için Teşekkürler