Deterministik Sonlu Özdevinirler (DFA)

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

Q: Sonlu sayıda durum içeren durumlar kümesi

Σ: Sonlu sayıda giriş simgesinden oluşan Giriş Alfabesi

q_0: Başlangıç durumu ($q_0 \in Q$)

F: Kabul durumları kümesi ($F \subseteq Q$)

δ: Durum geçiş işlevi ($\delta(q_i, a) = q_j$) $q_i, q_j \in Q$ ve $a \in \Sigma$

örnek

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$F = \{q_2\}$

δ: $\delta(q_0, 0) = q_0$

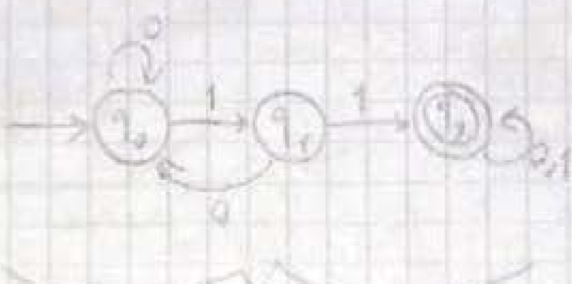
$\delta(q_0, 1) = q_1$

$\delta(q_1, 0) = q_0$

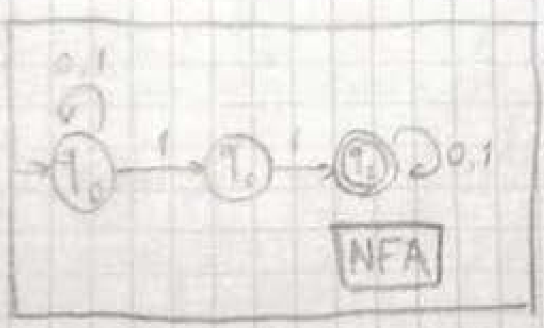
$\delta(q_1, 1) = q_2$

$\delta(q_2, 0) = q_2$

$\delta(q_2, 1) = q_2$



içerisinde en az bir defa "11" altkatarı barındıran tüm stringler kabul

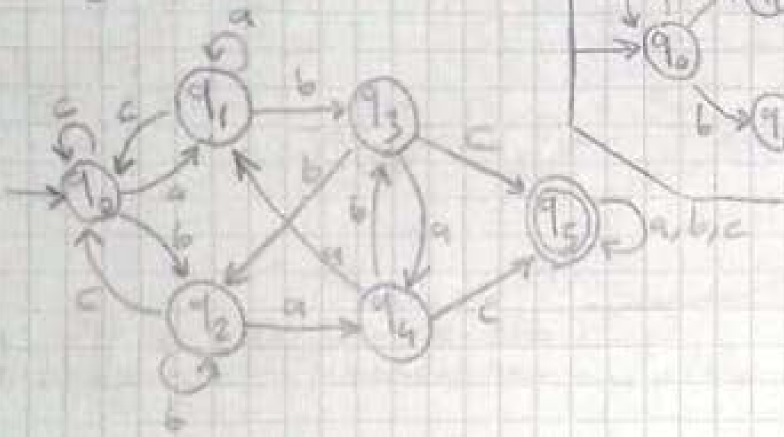


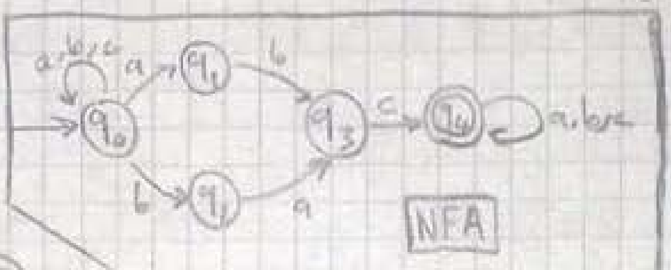
Deterministik Olmayan Sonlu Özdevinirler (NFA)

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

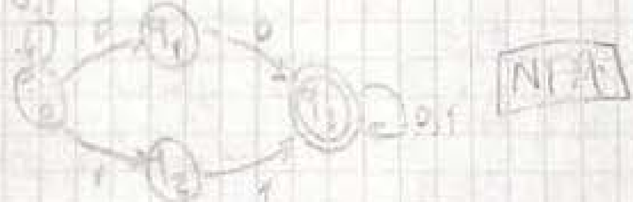
*İki model arasındaki tek fark geçiş işlevinin tanımındadır. DFA'da geçiş işlevi $(Q \times \Sigma)$'dan Q'ya bir eşleme olarak tanımlanırken NFA'da geçiş işlevi $(Q \times \Sigma)$'dan Q'nun alt kümelerine bir eşleme olarak tanımlanır.

Örnek: $\Sigma = \{a, b, c\}$'den ve içinde "abc" ve ya "bac" alt katarlarından en az biri en az bir defa bulunan katarlar kümesini tanıyan DFA'yı çiziniz.





Örnek: $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$



$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$F = \{q_3\}$

$\delta: \ \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_2\}$

$\delta(q_1, 0) = \{q_3\}$

$\delta(q_1, 1) = \{\} = \emptyset$

$\delta(q_2, 0) = \emptyset$

$\delta(q_2, 1) = \{q_3\}$

$\delta(q_3, 0) = \{q_3\}$

$\delta(q_3, 1) = \{q_3\}$

*DFA'dan farklı olarak NFA'da bazı geçişler birden çok duruma gidebilmektedir. Bu nedenle uygulanan giriş dizgisinin götüreceği son durum belirsiz olabilir.

λ (Lambda - Boşluk) Geçişi

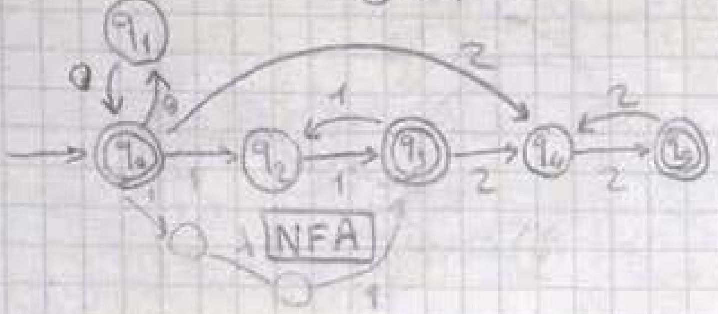
Hiçbir giriş simgesi uygulanmadan gerçekleşen durum geçişidir.

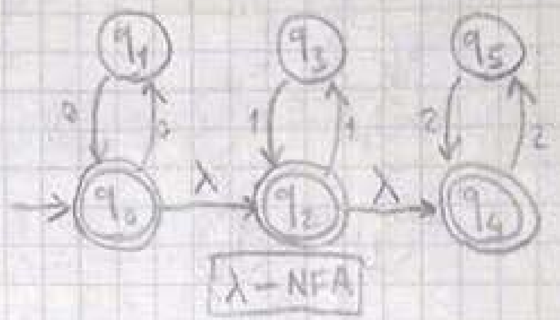
$\delta(q_1, \lambda) = q_2$ $\quad q_1 \xrightarrow{\lambda} q_2$

Örnek

$\Sigma = \{0, 1, 2\}$ $\quad T(M) = \{0^{2n} 1^{2m} 2^{2k} \mid n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0\}$

NFA ve λ geçişli NFA





λ-NFA'dan NFA'ya Dönüşüm

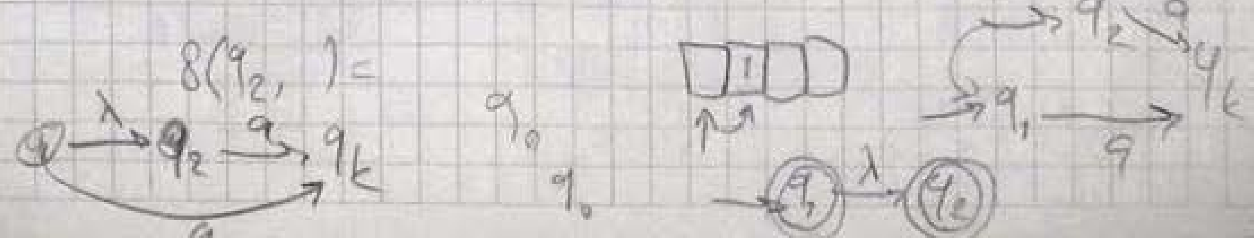
* Tüm λ-Geçişli NFA'ların λ-Geçişsiz NFA karşılığı vardır.

Eğer $\delta(q_1, \lambda) = q_2$ ise

- q_2 durumundan başlayan her durum geçişine ($\delta(q_2, a) = q_k$) karşılık q_1 durumundan başlayan ve aynı giriş simgesi ile aynı duruma ulaşan bir durum geçişi ($\delta(q_1, a) = q_k$) eklendikten

- Eğer q_1 durumu başlangıç durumu ise, q_2 durumu da başlangıç durumu yapıldıktan ve

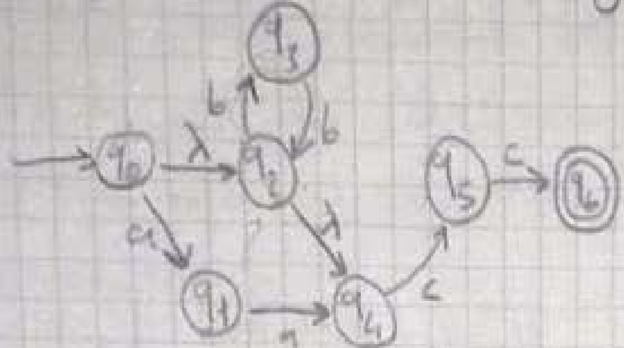
- Eğer q_2 durumu bir uç durum ise, q_1 durumu da uç durum yapıldıktan sonra λ-Geçişi silinebilir.



örnek

$\Sigma = \{a, b, c\}$ 0 ya da 2 tane a ve ya çift sayıda b ile başlayıp cc ile biten katarları tanıyan makinenin λ-geçişli NFA'dan NFA'ya dönüşümü

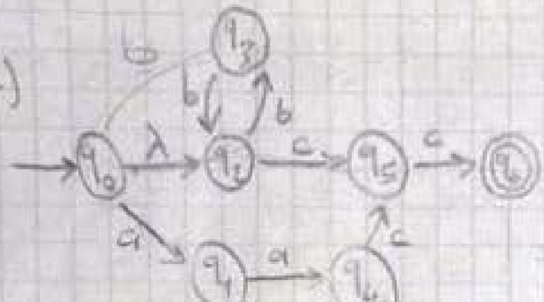
1)



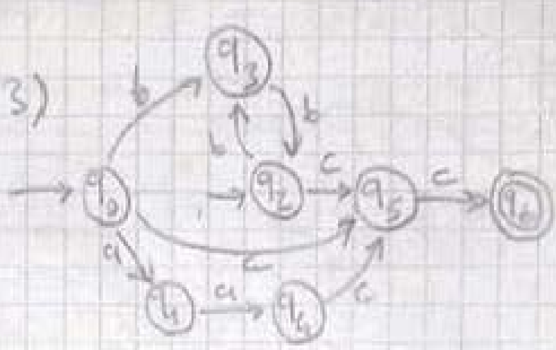
* Boşluk geçişleri sondan başa doğru teker teker çıkartılır.

cc
aacc
b^{2n}cc $n \geq 1$

2)



3)



DFA ve NFA Modellerinin Denkliği

örnek

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

$Q = \{A, B, C\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$q_0 = A$

$F = \{C\}$

δ: $\delta(A,0) = \{A\}$

$\delta(A,1) = \{B, C\}$

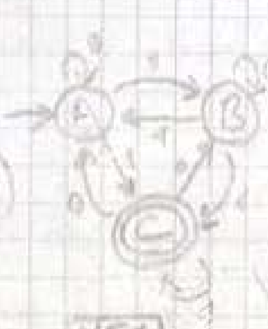
$\delta(B,0) = \{B\}$

$\delta(B,1) = \{A, C\}$

$\delta(C,0) = \{A, B\}$

$\delta(C,1) = \{C\}$

1)



NFA

2)

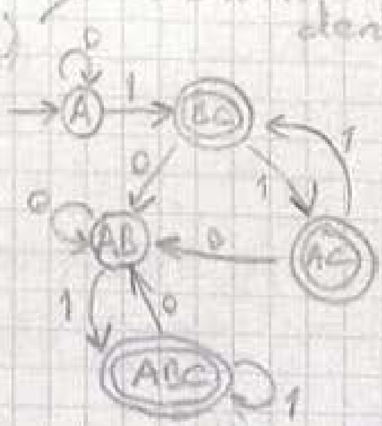
	0	1
→A	A	B,C
B	B	A,C
C	A,B	C

Bu NFA ve DFA denktir.

3)

	0	1
→A	A	BC
BC	AB	AC
AB	AB	ABC
AC	AB	BC
ABC	AB	ABC

4)



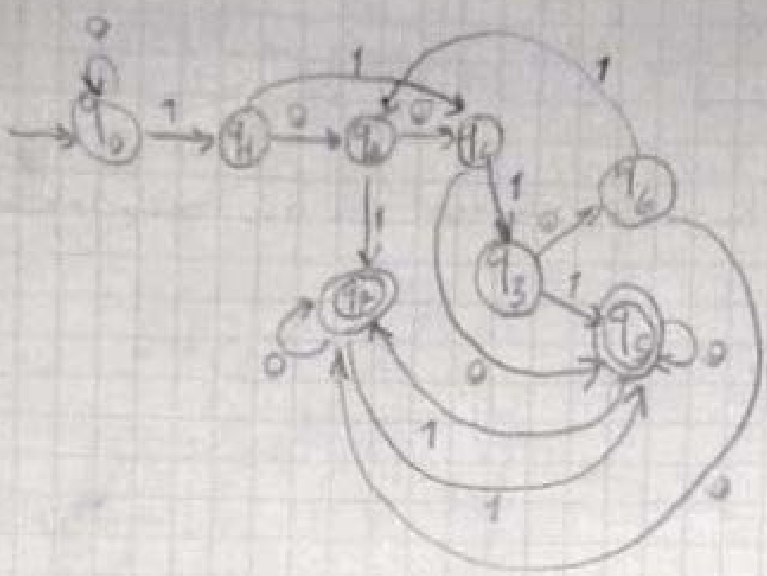
DFA

DFA İndirgenmesi

Geç

örnek

SD	SD: x=0	x=1
→ q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_4
q_2	q_4	q_7
q_3	q_6	q_5
q_4	q_5	q_3
q_5	q_5	q_7
q_6	q_7	q_2
q_7	q_7	q_5



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1							
q_2							
q_3							
q_4							
q_5	X	X	X	X	X		
q_6						X	
q_7	X	X	X	X	X	X	X

indirgenme:

$$P_0 = (q_0 q_1 q_2 q_3 q_4 q_6)(q_5 q_7)$$

$q_0 q_1 q_2 q_3 q_4 q_6$ — 0: $q_0 q_2 q_4 q_6 q_5 q_7$ — 1: $q_1 q_4 q_7 q_5 q_3 q_2$

$q_5 q_7$ — 0: $q_5 q_7$ — 1: $q_7 q_5$

$$P_1 = (q_0 q_1)(q_2 q_3)(q_4 q_6)(q_5 q_7)$$

$q_0 q_1$ — 0: $q_0 q_2$ — 1: $q_1 q_4$

$q_2 q_3$ — 0: $q_4 q_6$ — 1: $q_7 q_5$

$q_4 q_6$ — 0: $q_5 q_7$ — 1: $q_3 q_2$

$q_5 q_7$ — 0: $q_5 q_7$ — 1: $q_7 q_5$

$$P_2 = (q_0)(q_1)(q_2 q_3)(q_4 q_6)(q_5 q_7) \qquad P_3 = P_2$$

$$P = (q_0)(q_1)(q_2 q_3)(q_4 q_6)(q_5 q_7)$$

$S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4$

SD'	SD: x=0	x=1
→ S_0	S_0	S_1
S_1	S_2	S_3
S_2	S_3	S_4
S_3	S_4	S_2
S_4	S_4	S_4

Regüler kümeler ve ifadeler

Sonlu özdevinirler tarafından tanınan kümelere regüler kümeler denir.

Regüler kümeleri biçimsel olarak tanımlamak için kullanılan anlatım aracına (dil) regüler ifadeler denir.

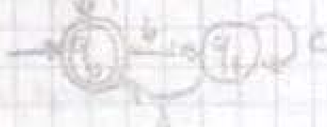
* Alfabedeki her simge, λ ve $\emptyset$ birer regüler ifadedir.
* P ve Q birer regüler ifade ise

  $P+Q$ PQ P^* ifadeleri de regüler ifadelerdir.

  $(P \cup Q)$ $(P \cdot Q)$ (Y.U.c kapanması)

Regüler İfadelere karşılık gelen Özdevinirlerin Bulunması

örnek $P=(a+bc^*)^*$ $\longrightarrow$

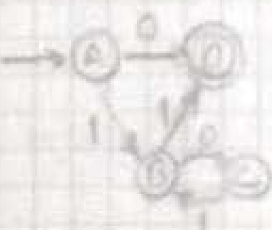


a
b
b c c ...

$\lambda, \emptyset$
a
b
ab
bc
abc

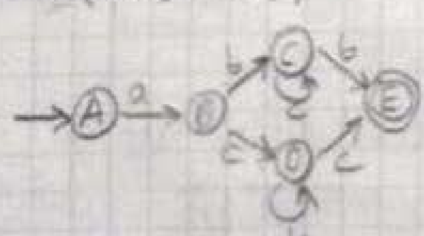
örnek $P=0+1(01)^*1$

0
11
1011
101011

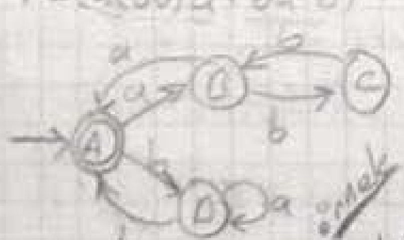


örnek $P=(0+10^*1)^*$

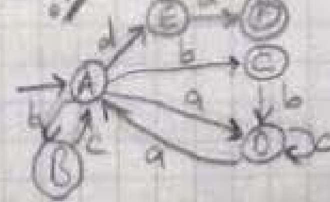
örnek $P=a(bc^*b+cb^*c)$



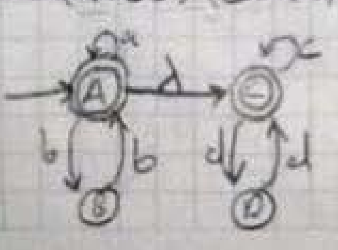
örnek $P=(a(bb)^*a+ba^*b)^*$



örnek $P=(bc+(a+bb)c^*a)^*dd$



örnek $P=(a+bb)^*(c+dd)^*$



Sonlu Özdevinimlerin Tanıdığı Kümelerin Regüler İfadeye Dönüşümü

P, Q ve R aynı alfabede tanımlanmış regüler ifadeler ise ve P λ içermiyorsa

$$R = Q + RP \text{ denkleminin tek çözümü } R = QP^{*} \text{'dir.}$$

örnek

Şekildeki sonlu özdeviniminin tanıdığı kümeyi bir regüler ifade olarak bulalım.

1) $A = \lambda + A0 + B1$

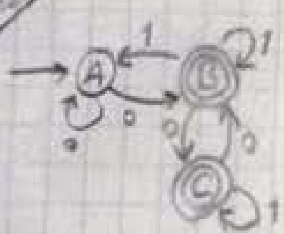
2) $B = A0$

3) $A = \lambda + A0 + A01 = \lambda + A(0+01)$

4) $A = \lambda(0+01)^{*} = (0+01)^{*}$

5) $B = A0 = (0+01)^{*}0 \Longrightarrow T(M) = (0+01)^{*}0$

örnek



Regüler İfadeyi bulunuz.

1) $A = \lambda + A0 + B1$

2) $B = A0 + B1 + C0$

3) $C = B0 + C1$

4) $C = B01^{*} \quad (R = Q + RP)$

5) $B = A0 + B1 + B01^{*}0 = A0 + B(1+01^{*}0)$

6) $B = A0(1+01^{*}0)^{*} \quad (R = Q + RP)$

7) $A = \lambda + A0 + A0(1+01^{*}0)^{*}1 = \lambda + A(0+0(1+01^{*}0)^{*}1)$

8) $A = \lambda(0+0(1+01^{*}0)^{*}1)^{*} = (0+0(1+01^{*}0)^{*}1)^{*}$

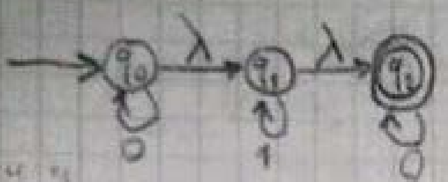
9) $B = (00(1+01^{*}0)^{*}1)^{*}0(1+01^{*}0)^{*}$

10) $C = (00(1+01^{*}0)^{*}1)^{*}0(1+01^{*}0)^{*}01^{*}$

11) $T(M) = B + C = B + B01^{*} = B(\lambda + 01^{*})$

12) $T(M) = (0+0(1+01^{*}0)^{*}1)^{*}0(1+01^{*}0)^{*}(\lambda + 01^{*})$

Boşluk geçişli NFA'dan DFA'ya dönüşüm (Örnek)



Çözüm

$\delta^*(q_0,0)=\lambda(\delta(q_0,0)\cup\delta(q_1,0)\cup\delta(q_2,0))=\lambda\{q_0,q_2\}=\{q_0,q_1,q_2\}$

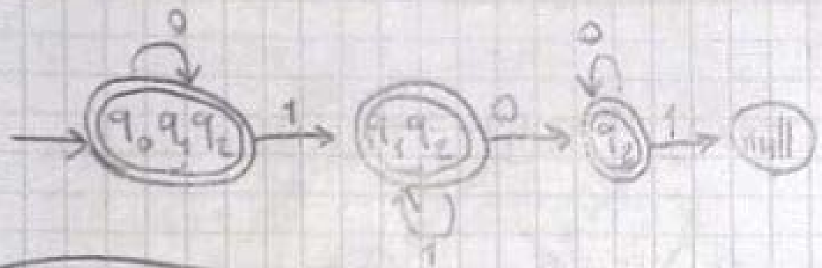
$\delta^*(q_0,1)=\lambda(\delta(q_0,1)\cup\delta(q_1,1)\cup\delta(q_2,1))=\lambda\{q_1\}=\{q_1,q_2\}$

$\delta^*(q_1,0)=\lambda(\delta(q_1,0)\cup\delta(q_2,0))=\lambda\{q_2\}=\{q_2\}$

$\delta^*(q_1,1)=\lambda(\delta(q_1,1)\cup\delta(q_2,1))=\lambda\{q_1\}=\{q_1,q_2\}$

$\delta^*(q_2,0)=\lambda(\delta(q_2,0))=\lambda\{q_2\}=\{q_2\}$

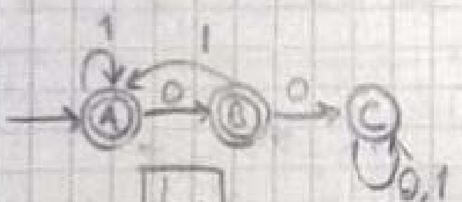
$\delta^*(q_2,1)=\lambda(\delta(q_2,1))=\emptyset=\text{null}$



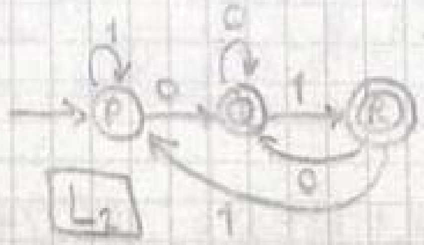
Birleşim ve Kesişim Kümesinin DFA'sının Bulunması (Örnek)

$L_1=\{x\in(0,1)^* \mid x \text{ katarı } 00 \text{ içermez}\}$

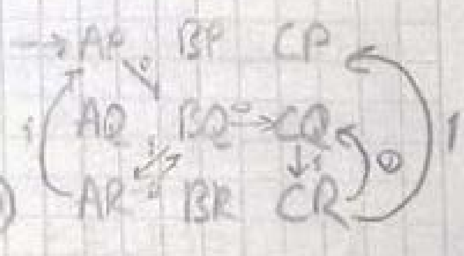
$L_2=\{x\in(0,1)^* \mid x \text{ katarı } 01 \text{ ile biter}\}$

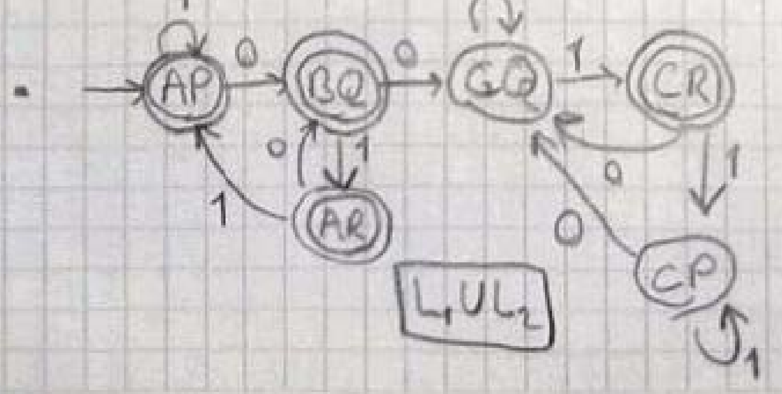


$\boxed{L_1}$



$\boxed{L_2}$

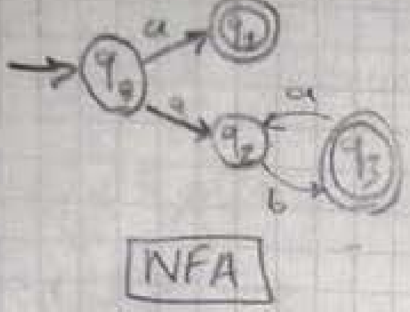


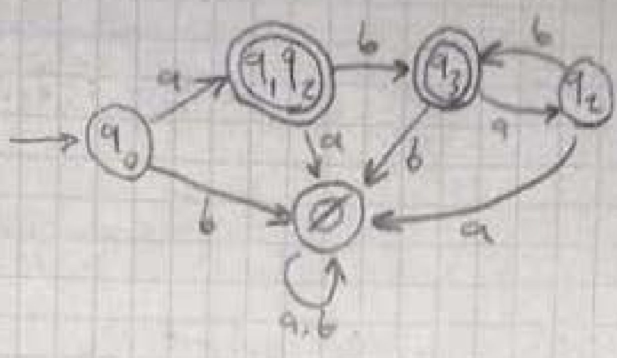


$\boxed{L_1 \cup L_2}$

örnek

$a+(ab)$ regüler ifadesinin tanımlanmış olduğu dili tanıyan NFA'yı çiziniz. Bu NFA'ya eşdeğer DFA'yı çiziniz.





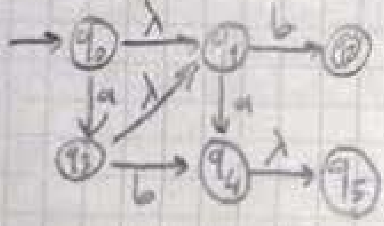
$\delta(q_0,a)=\{q_1,q_2\}$ $\quad\delta(\{q_1,q_2\},a)=\emptyset$ $\quad\delta(\emptyset,a)=\delta(\emptyset,b)=\emptyset$

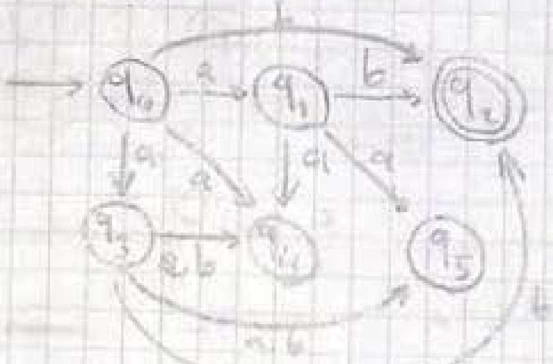
$\delta(q_0,b)=\emptyset$ $\quad\delta(\{q_1,q_2\},b)=\{q_3\}$ $\quad\delta(q_3,a)=\{q_2\}$

$\delta(q_3,b)=\emptyset$ $\quad\delta(q_2,a)=\emptyset$ $\quad\delta(q_2,b)=\{q_3\}$

örnek

Boşluk geçişli NFA'dan NFA'ya dönüşüm





$\lambda(q_0)=\{q_0,q_1\}$

$\delta(q_0,a)=\delta(\{q_0,q_1\},a)=\delta(q_0,a)\cup\delta(q_1,a)=\{q_3,q_4\}$

$\lambda(\{q_3,q_4\})=\{q_1,q_3,q_4,q_5\}$

$\lambda(q_0)=\{q_0,q_1\}$

$\delta(q_0,b)=\delta(\{q_0,q_1\},b)=\delta(q_0,b)\cup\delta(q_1,b)=\{q_2\}$

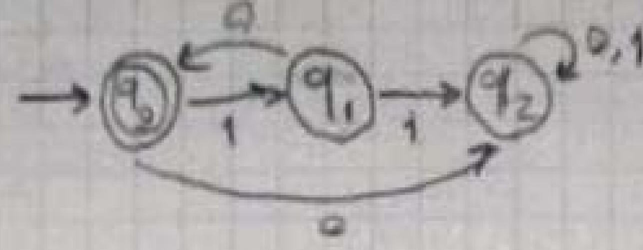
$\lambda(q_2)=\{q_2\}$

örnek

$L(M_1) = \{1,0\}^*$

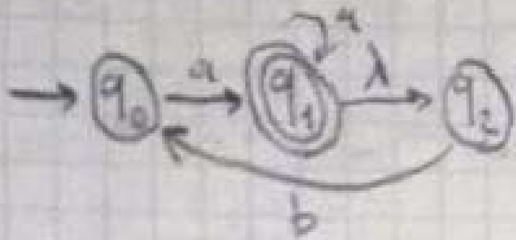
(NFA M_1)

$L(M_2) = \{1,0\}^*$

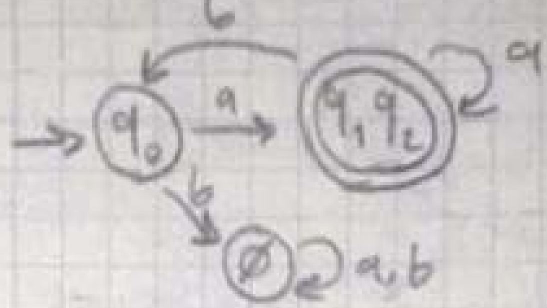


örnek

NFA → DFA



$\boxed{L(M)=L(M')}$



$\boxed{\text{NFA } M}$

$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$ $\qquad$ $\delta(\{q_1, q_2\}, a) = \{q_1, q_2\}$

$\delta(q_0, b) = \emptyset$ $\qquad$ $\delta(\{q_1, q_2\}, b) = \{q_0\}$

$\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$ $\qquad$ $\delta(\emptyset, a) = \delta(\emptyset, b) = \emptyset$

$\delta(q_1, b) = \emptyset$

$\delta(q_2, a) = \emptyset$

$\delta(q_2, b) = \{q_0\}$

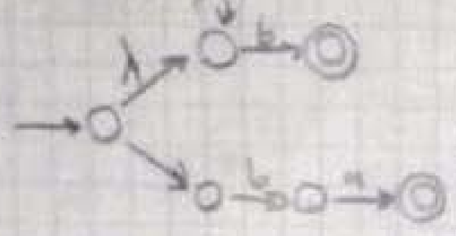
NFA'nın tek kabul durumlu eşdeğeri

Regüler İfadeler

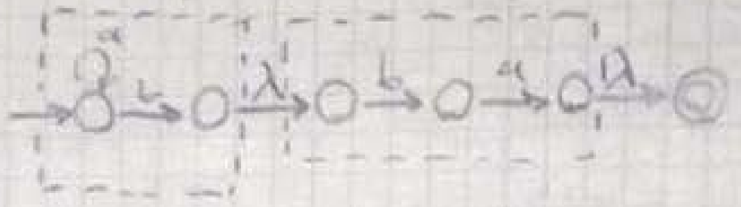
$n \geq 0$ $L_1=\{a^n b\}$  M_1

$L_2=\{ba\}$  M_2

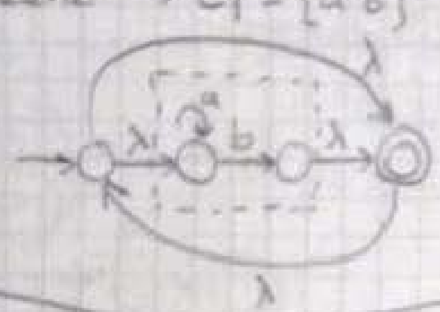
örn/ Birleşim → $L_1 \cup L_2$



örn/ Bitiştirme → $L_1 L_2$



örn/ Kleene → $L_1^* = \{a^n b\}^*$



örn/ Reverse → $L_1^R = \{b a^n\}$

örn/ $L_1=\{a^n b\}$

$\overline{L_1} = \{a,b\}^* - \{a^n b\}$

 L_1

 $\overline{L_1}$

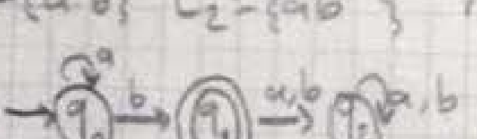
Kesişim

örn/ $L_1=\{a^n b\}$

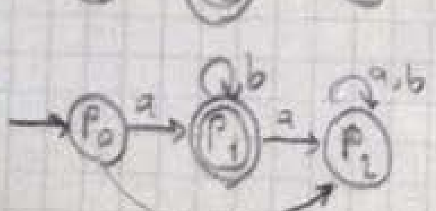
$L_2=\{ab, ba\}$

$L_1 \cap L_2 = \{ab\}$

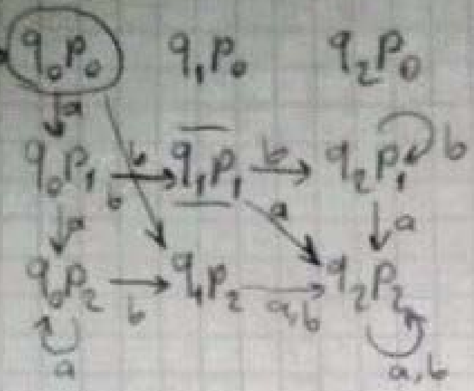
örn/ $L_1=\{a^n b\}$ $L_2=\{ab^m\}$ $n,m \geq 0$

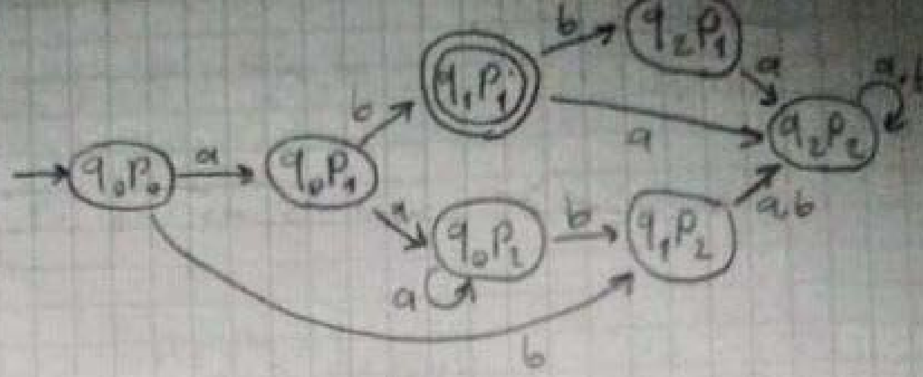
M_1 

$L_1 \cap L_2 = \{ab\}$

M_2 

DFA'sını çiz





Pumping Lemma

Pumping Lemma sonsuz uzunlukta katar içeren bir dilin regüler olup olmadığını belirlemek için kullanılır.

Örn: $L=\{vv^R : v\in\Sigma^*\}$ $\Sigma=\{a,b\}$ dili regüler midir?

L dili regüler olsun, m Pumping Lemma'daki tamsayı olsun.

Katar uzunluğu $|w|\geq m$ $(w\in L)$ olacak biçimde bir w ele alalım.

$w=a^m b^m b^m a^m$ olsun ve $a^m b^m b^m a^m = xyz$ olarak yazalım.

Pumping Lemma'dan $|xy|\leq m$, $|y|\geq 1$ olacaktır.

$xyz = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a}_{z}}^{m}\underbrace{\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{a\ldots a}^{m}}_{z}$ $y=a^k$, $k\geq 1$

Pumping Lemma'ya göre $xy^iz\in L$ $i\geq 0 \Rightarrow xy^2z\in L$

$xy^2z = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a}_{y}a\ldots a}^{m+k}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{a\ldots a}^{m} \in L$ $a^{m+k}b^m b^m a^m \in L$ $k\geq 1$

oysaki $L=\{vv^R : v\in\Sigma^*\}$ ve $a^{m+k}b^m b^m a^m \notin L$ ve L regüler değildir.

örn/

$L=\{a^n b^l c^{n+l} : n,l \geq 0\}$ Pumping Lemma'daki tam sayı m

$w \in L \quad |w| \geq m \quad w=a^m b^m c^{2m}$ bunu da $=xyz$ olarak yazalım

$|xy| \leq m \quad |y| \geq 1 \quad xyz=\overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\ldots a}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{c\ldots c\ldots c}^{2m}$ (where z = the rest, from the remaining $a\ldots a$ through $c\ldots c$)

$y=a^k, \; k \geq 1$

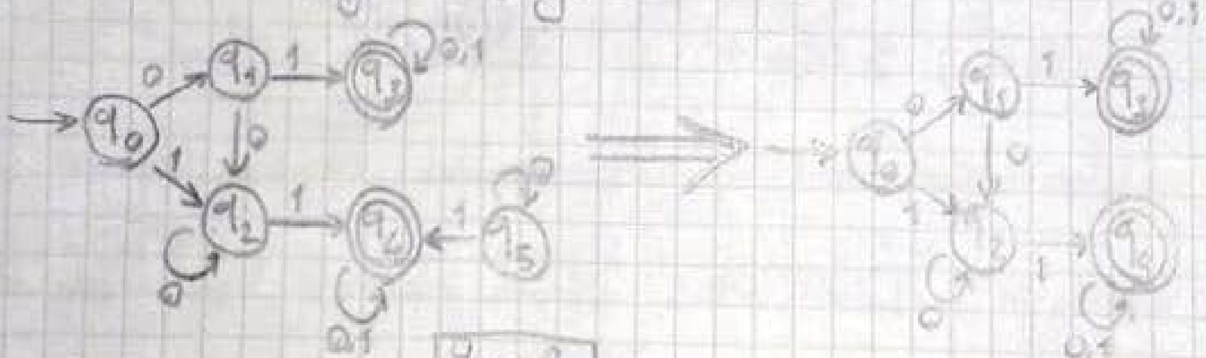
$xyz=a^m b^m c^{2m}$

$xy^iz \in L \quad i \geq 0$ ve $xy^0z=xz \in L$

$xz=\overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}a\ldots a}^{m-k}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{c\ldots c\ldots c}^{2m} \in L$ ve $a^{m-k}b^m c^{2m} \in L \quad k \geq 1$

$L=\{a^n b^l c^{n+l} : n,l \geq 0\} \Longrightarrow a^{m-k}b^m c^{2m} \notin L$

örn/ DFA durum sayısı indirgeme



$\boxed{q_5 = q_2}$

q_1	X			
q_2	X	✓		
q_3	X	X	X	
q_4	X	X	X	X
	q_0	q_1	q_2	q_3