1. A) $y = Acos2x + Bsin2x$ *eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferansiye denklemini bulunuz ve bulduğunuz denklemi mertebe, derece ve lineerlik yönünde inceleyiniz.*

b) *Diferansiyel denklemlerin çözüm tanımından hareketle* $x^2 + y^2 = 25$ *fonksiyonunun* $x + yy' = 0$ *denkleminin çözüm olduğunu gösteriniz.* (10)

1) a) $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ (1)

$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ (2) 5

$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ (3)

$y'' = -4(A\cos 2x + B\sin 2x)$ 5

$y'' = -4y \Rightarrow \boxed{y'' + 4y = 0}$

2. mrt
1. drc
lineer 5

---

1) b) $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0$

$\Rightarrow yy' = -x$ 5

$x + yy' = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$x - x = 0$ old. dan denklemi sağlar. 5

Bu nedenle denklemin çözümüdür.

---

2. $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ denklemini homojen hale getirip çözümünü bulunuz.

Daha sonra ise $y(3) = 1$ şartını sağlayan özel çözümünü bulunuz. (25)

2) $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ $\quad \left.\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}$

$x = X+1$ $\quad dx = dX$ $\Rightarrow Y' = \frac{X-Y}{X+Y}$ Homojen 5

$y = Y+2$ $\quad dy = dY$

$Y = VX \Rightarrow Y' = V'X + V$

$V'X + V = \frac{X - VX}{X + VX} \Rightarrow V'X + V = \frac{1-V}{1+V}$

$\Rightarrow V'X = \frac{1-2V-V^2}{1+V} \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{1+V}{1-2V-V^2} dV$ 5

$\ln X = -\frac{1}{2}\ln(1-2V-V^2) + \ln C$ 5

$X\sqrt{1-2V-V^2} = C$ $\quad V = \frac{Y}{X}$ ile

$\sqrt{X^2-2XY-Y^2} = C$ veya $X^2-2XY-Y^2 = C_1$

$X = x-1$ $\quad Y = y-2$ ile

$\boxed{(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2 = C}$ 5

$y(3)=1$ den geçen eğri ise

$\boxed{(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2 = 7}$ dir. 5

2

3. $(x^2 + xy^2)dx + 2ydy = 0$ *denkleminin genel* çözümü *uygun bir integrasyon çarpanı yardımıyla bulunuz.* (25)

4. $6x^2dy - y(2y^3 + x)dx = 0$ *şeklinde verilen Bernoulli denkleminin genel* çözümü *bulunuz.*

4) $6x^2\,dy - y(2y^3 + x)\,dx = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{6x}y = \frac{1}{3x^2}y^4$ $\qquad z = y^{-3}$ 5

$\frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$

İle denklem 5 (lineer) denklemine

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2x}z = -\frac{1}{x^2}$$

dönüşür. $\quad \lambda = e^{\int \frac{1}{2x}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\underbrace{x^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z} = -x^{-\frac{3}{2}} \quad 5$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}z\right)' = -x^{-\frac{3}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}z = 2x^{-\frac{1}{2}} + c \quad 5$$

$$x^{\frac{1}{2}}y^{-3} = 2x^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{-3} = 2x^{-1} + cx^{-\frac{1}{2}}} \quad 5$$

4

Süre 70 dk'dır.

Düzenleyen: Barış Şenyerli