HAFTA 2

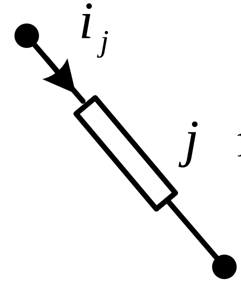
DEVRE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

KİRCHOFF UN AKIM DENKLEMLERİ

- **Düğümler için akım denklemleri**

$$\sum_{j=1}^{n_e} a_{kj}.i_j = 0 \qquad k = 1,2,3........n_d$$

k nci düğüm



- *j* nci eleman *k* ncı düğüme bağlı değil ise, $a_{kj} = 0$

- *j* nci eleman *k* ncı düğüme bağlı ve eleman akım yönü düğümden dışarı doğru ise, $a_{kj} = +1$

- *j* nci eleman *k* ncı düğüme bağlı ve eleman akım yönü düğümden dışarı doğru ise, $a_{kj} = -1$

$$a_{kj} = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases}$$

Aynı denklemleri vektörel bir biçimde ifade edecek olursak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

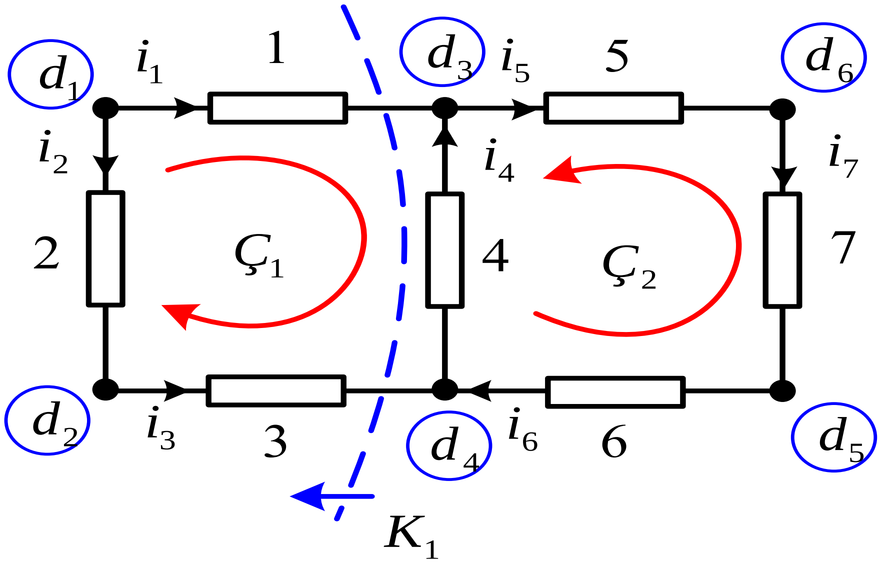
$$A_b . I_e(t) = \Theta$$

,

$$A_b = [a_{kj}]_{n_d \times n_e}$$

$$I_e(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_{n_e}(t) \end{bmatrix}_{n_e \times 1} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n_d \times 1}$$

Örnek: Aşağıdaki devrede *D1* ve *D2* düğümleri ve *K1* kesitlemesi için akım denklemlerini yazınız.



$$d_1 : i_1 + i_2 = 0$$

$$d_2 : -i_2 + i_3 = 0$$

$$K_1 : -i_1 - i_3 = 0$$

$$d_1 + d_2 : i_1 + i_3 = 0$$

$$d_1 + d_2 : -K_1$$

KİRCHOFF UN GERİLİM DENKLEMLERİ

$$\sum_{j=1}^{n_e} b_{kj}.v_j = 0 \qquad k = 1,2,3........n_ç \qquad b_{kj} = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases}$$

- *j* nci eleman *ç* nci çevreye girmiyorsa, $b_{kj} = 0$

- *j* nci eleman, *ç* nci çevreye giriyor ve eleman gerilim referans yönü çevre yönünde ise, $b_{kj} = +1$

- *j* nci eleman *ç* nci çevreye giriyor ve eleman gerilim referans yönü çevre yönünün tersinde ise, $b_{kj} = -1$

Aynı denklemleri vektörel bir biçimde ifade edecek olursak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

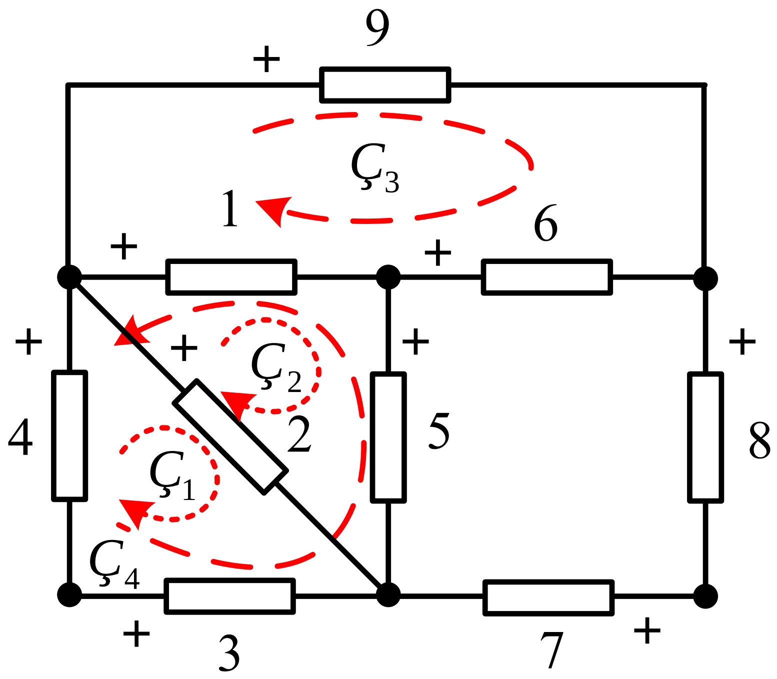
$$B_b . V_e(t) = \Theta$$

,

$$B_b = [b_{kj}]_{n_ç \times n_e}$$

$$V_e(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_{n_e}(t) \end{bmatrix}_{n_e \times 1} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n_ç \times 1}$$

Örnek: Aşağıdaki devrenin *Ç1*, *Ç2* ve *Ç4* çevreleri için akım denklemlerini yazınız.



$$Ç_1 : v_2 - v_3 - v_4 = 0$$

$$Ç_2 : v_1 - v_2 + v_5 = 0$$

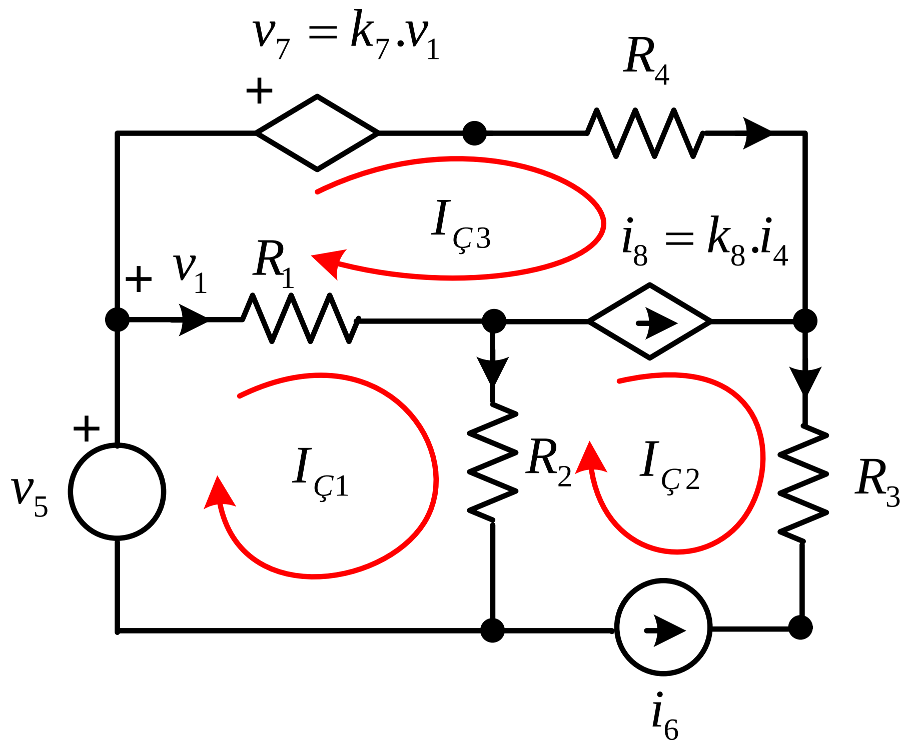
$$Ç_4 : -v_1 + v_3 + v_4 - v_5 = 0$$

$$Ç_1 + Ç_2 : v_1 - v_3 - v_4 + v_5 = 0$$

$$Ç_1 + Ç_2 = -Ç_4$$

Bağımsız çevrelere ilişkin çevre denklemleri

Örnek: Aşağıdaki devrenin çevre denklemlerini bağımsız çevreler için adım adım yazınız.



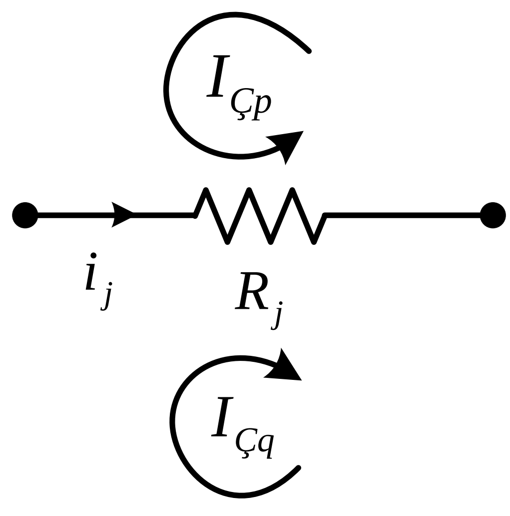
1. Bağımsız çevrelere ilişkin çevre denklemleri ve ardından direnç elemanlarının gerilimleri yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$v_1 + v_2 - v_5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_1.i_1 + R_2.i_2 - v_5 = 0$$

$$-v_2 + v_3 - v_6 + v_8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -R_2.i_2 + R_3.i_3 - v_6 + v_8 = 0$$

$$-v_1 + v_4 - v_8 + v_7 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -R_1.i_1 + R_4.i_4 - v_8 + v_7 = 0$$

Açıklama: Herhangi bir devre elemanının (direnç, endüktans, kapasite, bağımlı ve bağımsız gerilim ve akım kaynağı v.b) akımı, çevre akımları cinsinden, çevre akımlarının yönleri esas alınmak suretiyle, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade edilir.



$$i_j = I_{Çp} + I_{Çq}$$

2. Daha sonra, direnç elemanının akımları çevre akımları cinsinden ifade edilir ve hemen ardından çevre akımları parantezine alındıklarında denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$R_1.(I_{Ç1} - I_{Ç3}) + R_2.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) = v_5 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2).I_{Ç1} - R_2.I_{Ç2} - R_1.I_{Ç3} = v_5$$

$$-R_2.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + R_3.I_{Ç2} = v_6 - v_8 \quad \Rightarrow \quad -R_2.I_{Ç1} + (R_2 + R_3).I_{Ç2} + 0.I_{Ç3} = v_6 - v_8$$

$$-R_1.(I_{Ç1} - I_{Ç3}) + R_4.I_{Ç3} = v_8 - v_7 \quad \Rightarrow \quad -R_1.I_{Ç1} + 0.I_{Ç2} + (R_1 + R_4).I_{Ç3} = v_8 - v_7$$

Sonuçta elde edilen denklemleri matrisel forma sokacak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_1 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ I_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_6 - v_8 \\ v_8 - v_7 \end{bmatrix}$$

Burada üç adet bağımsız denkleme sahibiz. Bununla birlikte $I_{Ç1}$, $I_{Ç2}$, $I_{Ç3}$, v_6, v_7 ve v_8 bilinmiyor. Yani altı adet bilinmeyenimiz var. Bu nedenle üç adet ek denkleme daha ihtiyaç duyarız. Bu ek denklemler aşağıda verilmiştir.

v_5 bilinen bir fonksiyondur.

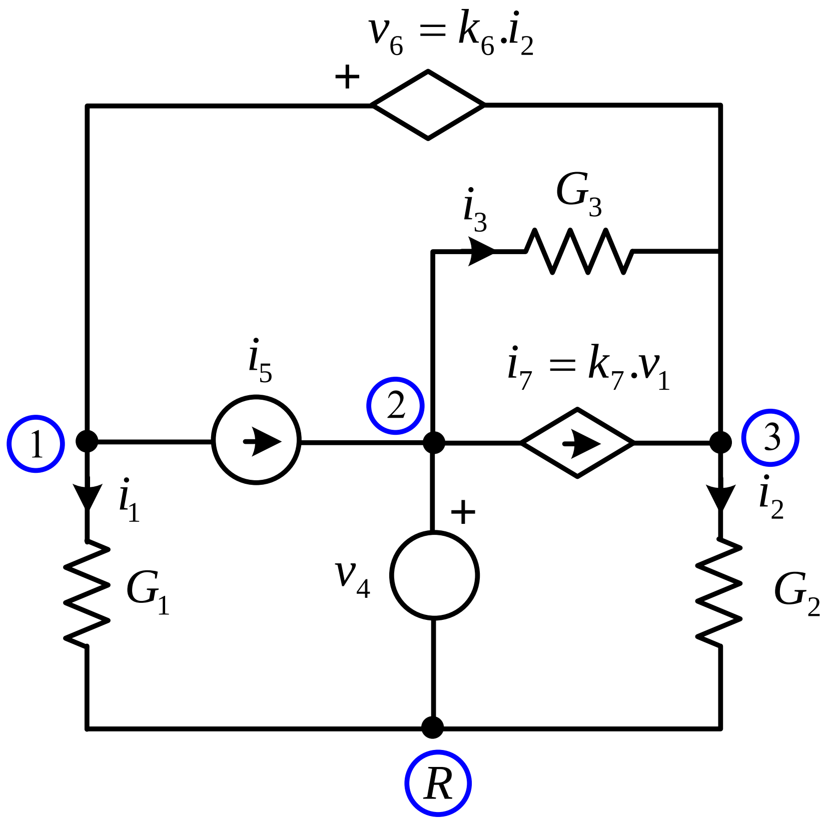
$i_6 = i_k(t) = -I_{Ç2}$ olur. Bu nedenle $I_{Ç2}$ artık biliniyor demektir.

$v_7 = k_7.v_1 = k_7.R_1.i_1 = k_7.R_1.(I_{Ç1} - I_{Ç3})$

$i_8 = k_8.i_4 \quad \Rightarrow \quad I_{Ç2} - I_{Ç3} = k_8.I_{Ç3} \quad \Rightarrow \quad I_{Ç2} = (1+k_8).I_{Ç3}$

Düğüm Denklemleri

Örnek: Aşağıdaki devrenin düğüm denklemlerini bağımsız düğümler için adım adım yazınız.



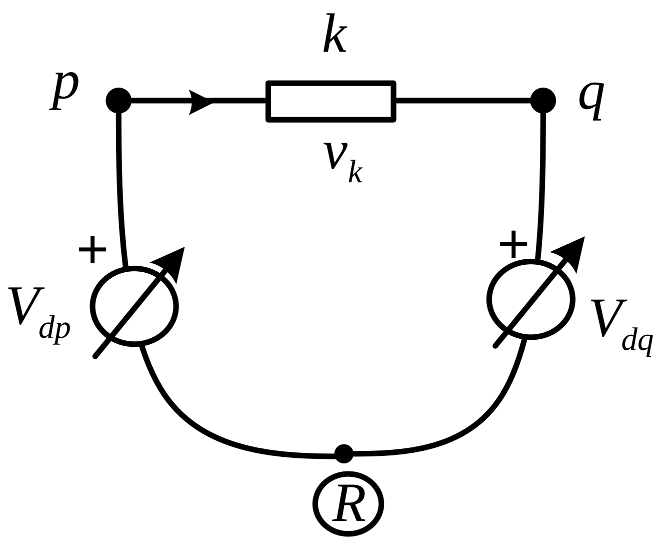
1. Bağımsız düğümlere ilişkin düğüm denklemleri ve ardından direnç elemanlarının akımları yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$i_1 + i_5 + i_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}_1.v_1 = -i_5 - i_6$$

$$-i_5 + i_4 + i_3 + i_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}_3.v_3 = i_5 - i_4 - i_7$$

$$i_2 - i_3 - i_6 - i_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}_2.v_2 - \mathrm{G}_3.v_3 = i_6 + i_7$$

Açıklama: Herhangi bir devre elemanının (direnç, endüktans, kapasite, bağımlı ve bağımsız gerilim ve akım kaynağı v.b) gerilimi, düğüm gerilimleri cinsinden, eleman akımlarının yönleri esas alınmak suretiyle, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade edilir.



$$v_k = V_{dp} - V_{dq}$$

q referans düğümü ise $\quad v_k = V_{dp}$

p referans düğümü ise $\quad v_k = -V_{dq}$

2. Daha sonra, direnç elemanının gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden ifade edilir ve hemen ardından düğüm gerilimleri parantezine alındıklarında denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$\mathrm{G}_1.V_{d1} = -i_5 - i_6$$

$$\mathrm{G}_3.V_{d2} - \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7$$

$$\mathrm{G}_2.V_{d3} - \mathrm{G}_3.V_{d2} + \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_6 + i_7$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{G}_1.V_{d1} + 0.V_{d2} + 0.V_{d3} = -i_5 - i_6$$

$$\Rightarrow \quad 0.V_{d1} + \mathrm{G}_3.V_{d2} - \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7$$

$$\Rightarrow \quad 0.V_{d1} - \mathrm{G}_3.V_{d2} + (G_2 + \mathrm{G}_3).V_{d3} = i_6 + i_7$$

Sonuçta elde edilen denklemleri matrisel forma sokacak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_2+G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \\ V_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_5-i_6 \\ i_5-i_4-i_7 \\ i_6+i_7 \end{bmatrix}$$

3. Ek denklemler

$i_7 = k_7.v_1 = k_7.V_{d1}$ bilinir hale gelir.

$V_{d2} = v_4$ bilinir hale gelir.

$$v_6 = k_6.i_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.V_{d3}$$

$$\Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6.G_2).V_{d3}$$

4. Bilinmeyenler

i_6

V_{d3}

i_4

5. Bilinenler

$$V_{d2} = v_4$$

$$i_7 = k_7 . v_1 = k_7 . V_{d1}$$

$$v_6 = k_6 . i_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6 . G_2 . v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6 . G_2 . V_{d3}$$

$$\Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6 . G_2) . V_{d3}$$

Tellegen Teoremi

Bir elektrik devresindeki tüm elemanların güçlerinin cebirsel toplamı sıfırdır.

$$\sum_{k=1}^{n_e} p_k(t) = \sum_{k=1}^{n_e} v_k(t).i_k(t) = 0$$

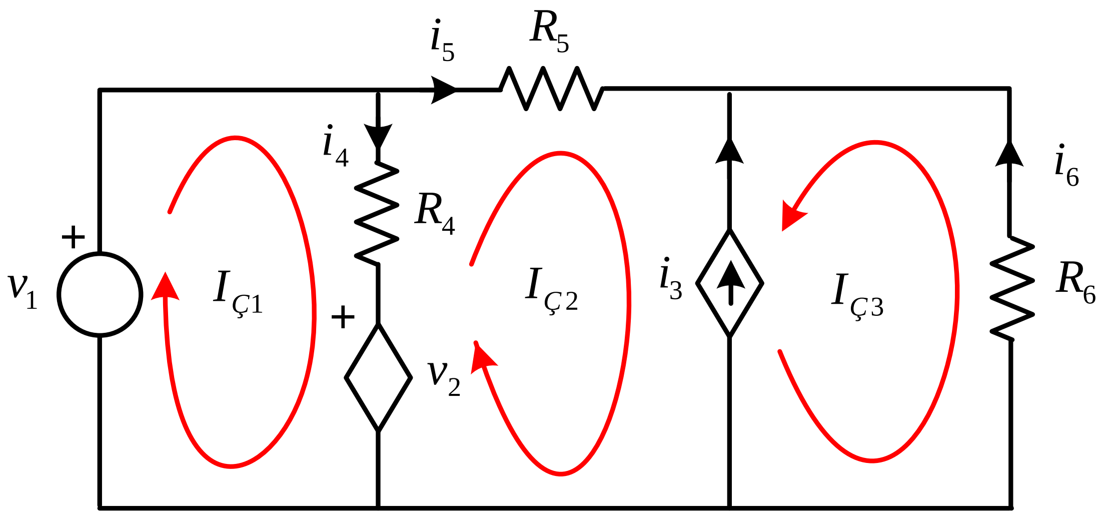
Örnek 1. Aşağıdaki devrenin;

a) Çevre denklemlerini adım adım çıkarınız.

b) Bu denklemleri çözerek çevre akımlarını bulunuz.

c) Çevre akımlarından yararlanarak eleman akım ve gerilimlerini bulunuz.

d) Tellegen teoreminin yani $\sum_{i=1}^{n_e=6} p_i(t) = 0$ ifadesinin sağlandığını gösteriniz.



$v_1 = 2 \text{ Volt}$

$v_2 = \mu . v_6$

$i_3 = \beta . i_4$

$\mu = 2$

$\beta = 10$

$R_4 = 5\,\Omega$

$R_5 = 4\,\Omega$

$R_6 = 1\,\Omega$

a.) Her üç çevreye ait çevre denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-v_1 + v_4 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_1 + R_4 . i_4 + v_2 = 0$$

$$-v_2 - v_4 + v_5 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_2 - R_4 . i_4 + R_5 . i_5 - v_3 = 0$$

$$v_6 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 . i_6 - v_3 = 0$$

Eleman akımları çevre akımları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$i_4 = I_{Ç1} - I_{Ç2}$$

$$i_5 = I_{Ç2}$$

$$i_6 = I_{Ç3}$$

Çevre akımları cinsinden yazılan bu eleman akımları, yukarıdaki çevre denklemlerinde yerine konacak ve matrisel bir biçime sokulacak olursa aşağıdaki sonuca gelinir.

$$-v_1 + R_4.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + v_2 = 0$$

$$-v_2 - R_4.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + R_5.I_{Ç2} - v_3 = 0$$

$$R_6.I_{Ç3} - v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ I_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 + v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

b) Ek denklemleri yeniden düzenlemek suretiyle aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$i_3 = \beta.i_4 \quad \Rightarrow \quad -(I_{Ç2} + I_{Ç3}) = \beta.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) \quad \Rightarrow \quad I_{Ç3} = -10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2}$$

$$v_2 = \mu.v_6 = \mu.R_6.i_6 = \mu.R_6.I_{Ç3} = 2.I_{Ç3} = -20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2}$$

Bu ifadeleri ve eleman değerlerini çevre denklemlerinde yerine yazmak ve matrisel bir biçime sokmak suretiyle aşağıdaki sonuçlara gelinir.

$$-2+5.(I_{Ç1}-I_{Ç2})-20.I_{Ç1}+18.I_{Ç2}=0$$
$$20.I_{Ç1}-18.I_{Ç2}-5.(I_{Ç1}-I_{Ç2})+4.I_{Ç2}-v_3=0$$
$$-10.I_{Ç1}+9.I_{Ç2}-v_3=0$$

$$\begin{bmatrix} -15 & 13 & 0 \\ 15 & -9 & -1 \\ -10 & 9 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklem takımından görüleceği üzere artık elimizde üç bilinmeyen ve üç denklem vardır. Bu denklem takımı çözülmek suretiyle bilinmeyenler aşağıdaki gibi bulunur.

$$I_{Ç1} = 0.655 \text{ Amper}$$

$$I_{Ç2} = 0.909 \text{ Amper}$$

$$v_3 = 1.636 \text{ Volt}$$

Bu değerlerden faydalanmak suretiyle,

$$I_{Ç3} = -10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2} = -10 \times 0.655 + 9 \times 0.909 \qquad I_{Ç3} = 1.636 \text{ Amper}$$

olarak bulunur.

c.) Eleman akım ve gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$i_1 = -I_{Ç1} = -0.655 \text{ Amper}$$

$$v_1 = 2 \text{ Volt}$$

$$i_2 = I_{Ç1} - I_{Ç2} = 0.655 - 0.909 = -0.254 \text{ Amper}$$

$$v_2 = -20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2} = -20 \times 0.655 + 18 \times 0.909 = -3.272 \text{ Volt}$$

$$i_3 = 10.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) = 10.(0.655 - 0.909) = -2.545 \text{ Amper}$$

$$v_3 = 1.636 \text{ Volt}$$

$$i_4 = I_{Ç1} - I_{Ç2} = 0.655 - 0.909 = -0.254 \text{ Amper}$$

$$v_4 = R_4.i_4 = 5 \times (-0.254) = -1.27 \text{ Volt}$$

$$i_5 = I_{Ç2} = 0.909 \text{ Amper}$$

$$v_5 = R_5.i_5 = 4 \times (0.909) = 3.636 \text{ Volt}$$

$$i_6 = I_{Ç3} = 1.636 \text{ Amper}$$

$$v_6 = R_6.i_6 = 1 \times (1.636) = 1.636 \text{ Volt}$$

d.) Aşağıdaki tabloya bakarak Tellegen teoremini sağlandığını gösterebiliriz.

Eleman	i **(Amper)**	v **(Volt)**	p **(Watt)**
1	-0.655	2	-1.31
2	-0.254	3.272	-0.83
3	-2.545	1.636	-4.163
4	-0.254	-1.27	0.323
5	0.909	3.636	3.305
6	1.636	1.636	2.676
Toplam			**0.0014**