IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

GİRİŞ

İçindekiler

Olasılık

Bir kişi şunu söylesin: “Bir bölgede önümüzdeki bir yılda deprem olma olasılığı %10’dur.” Bunu iki şekilde anlayabiliriz.

- Kişisel, öznel yorum
  - Kişi ilgili bölgede deprem olmayacağına daha çok inanmaktadır.
  - Tecrübeye dayalı kanaat bildirir.
- Frekans yorumu
  - Yapmış olduğu çalışmalar ve deneyler sonucunda ilgili bölgede deprem olma olasılığının %10 olduğunu hesaplamıştır.
  - Olasılık, deney sonuçlarının bir özelliğidir.
  - Bilim insanları kullanır.

Olasılık

Olasılık, sonuçlarını önceden bilemediğimiz olayların gerçekleşip gerçekleşmeme durumları hakkında çıkarım yapmamıza yardımcı olan matematiksel kurallarla ilgili bilim dalıdır.

İstatistik

İstatistik, verileri kullanarak bilgi edinme işidir.

İstatistik temelde şu konular ile ilgilenir:

- Verilerin toplanması
- Verilerin düzenlenmesi ve betimlenmesi
- Verilerin analizi

Olasılık ve İstatistiğin Kullanım Alanı

Sosyoloji

Ekonomi

Eğitim

Spor

Tıp

Mühendislik

Olasılık ve İstatistiğin Kullanım Alanı

Yazılım testleri

Görüntü işleme

Bilgisayar grafikleri

Veri madenciliği

Bilgisayar ağları

Büyük veri

Örnek Uzayı ve Olay

Doğacak bir çocuğun cinsiyetini araştıran bir deney düşünelim.

Doğacak çocuğun cinsiyeti kız veya erkek olabilir.

$$S = \{kız, erkek\}$$

$$\Downarrow$$

Örnek Uzayı: Bir deneyin bütün muhtemel sonuçlarını içeren küme.

Örnek uzayı, S ile gösterilir.

Örnek Uzayı ve Olay

$$E = \{kız\}$$

$$\Downarrow$$

Örnek uzayının her bir alt kümesine bir **olay** denir.

Yukarıdaki örnekte E, bir olaydır.

Benzer şekilde $F = \{erkek\}$ kümesi de bir olaydır.

Örnek Uzayı ve Olay

Bir olayın meydana gelme **olasılığı** $P(F) = \frac{\eta_F}{\eta_S}$

Olasılık, $P(Olay)$ ile gösterilir.

Doğacak çocuğun kız olması olasılığı nedir?

- $E = \{kız\}$ kümesinde 1 adet eleman vardır.
- Örnek uzayında 2 adet eleman vardır.
- $P(E) = \frac{\eta_E}{\eta_S} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = \%50$

Örnek 1

3 koşucunun yarıştığı bir yarış düşünelim. Koşucuların her birisi 1, 2 ve 3 numaraları ile temsil edilsin. 3 numaralı koşucunun yarışı kazanma olasılığı nedir?

Örnek 1

3 koşucunun yarıştığı bir yarış düşünelim. Koşucuların her birisi 1, 2 ve 3 numaraları ile temsil edilsin. 3 numaralı koşucunun yarışı kazanma olasılığı nedir?

Bu yarışın muhtemel bütün sonuçlarını içeren örnek uzayı aşağıdaki gibidir.

$$S = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$$

Örnek 1

3 koşucunun yarıştığı bir yarış düşünelim. Koşucuların her birisi 1, 2 ve 3 numaraları ile temsil edilsin. 3 numaralı koşucunun yarışı kazanma olasılığı nedir?

3 numaralı koşucunun yarışı kazandığı olayı temsil eden alt küme aşağıdaki gibidir.

$$F = \{(3,1,2), (3,2,1)\}$$

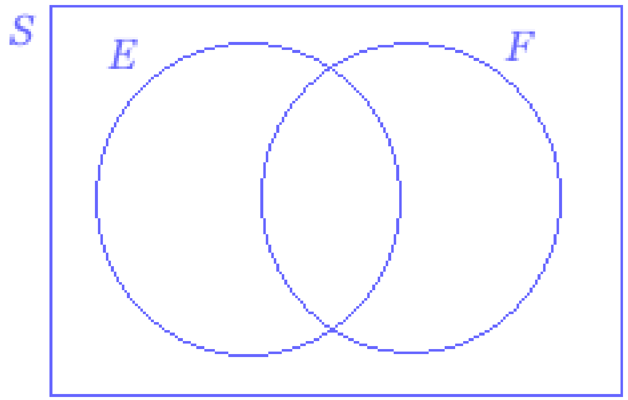
$$P(F) = \frac{2}{6} \cong 0,333 \cong \%33,3$$

Örnek Uzayı ve Olay

Örnek uzayı ve olaylar Venn diyagramları ile gösterilebilirler.

Aşağıdaki Venn diyagramında S örnek uzayı temsil eder.

E ve F de olayları temsil eder.



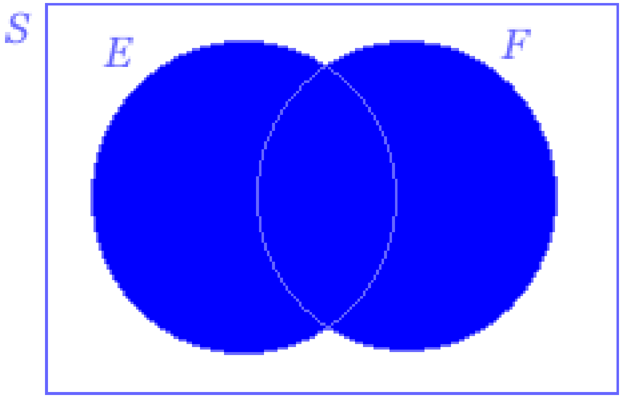
Örnek Uzayı ve Olay

E ile F kümelerinin birleşimi, $E\ veya\ F$ olayı olarak adlandırılır.

E veya F olaylarından herhangi birisi gerçekleştiğinde

$E\ veya\ F$ olayı gerçekleşir.

$E\ veya\ F$ olayı $E \cup F$olarak da gösterilir.
$$P(E\ veya\ F) = P(E \cup F)$$



Örnek Uzayı ve Olay

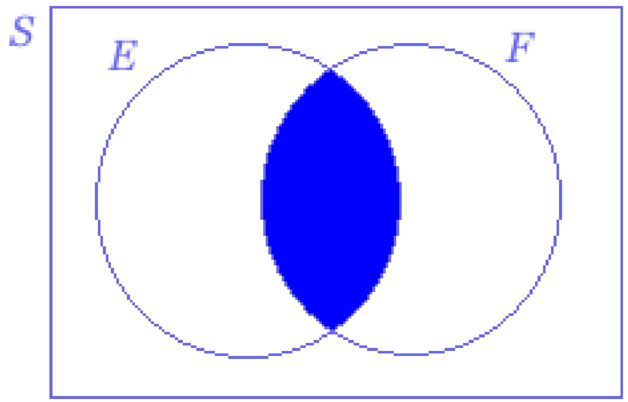
E ile F kümelerinin kesişimi, $E\ ve\ F$ olayı olarak adlandırılır.

E ve F olaylarının ikisi de gerçekleştiğinde (aynı anda),

$E\ ve\ F$ olayı gerçekleşir.

$E\ ve\ F$ olayı $E \cap F$ olarak veya EF olarak da gösterilir.

$$P(E\ ve\ F) = P(E \cap F) = P(EF)$$



Örnek Uzayı ve Olay

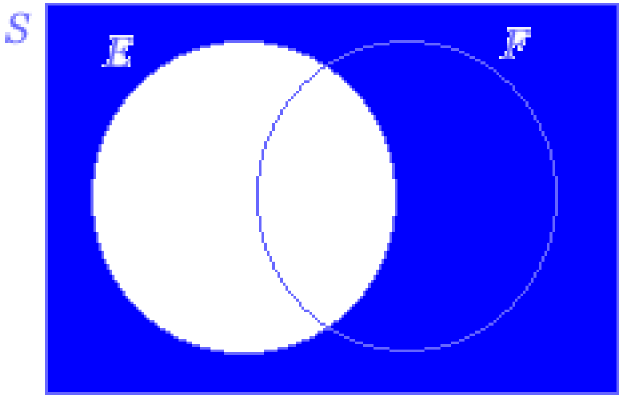
E kümesinin tümleyeni, E' olayı olarak adlandırılır.

E' olayı, E olayının meydana gelmemesi olayıdır.

E' olayı $\bar{E}$ olarak veya E^c olarak da gösterilir.

$$P(E') = P(\bar{E}) = P(E^c)$$

$$P(E') = 1 - P(E)$$



Tekrarlanabilir Deney

Gerçek hayatta karşılaştığımız durumlar genellikle karmaşık ve büyüktür.

Bu durumlarda örnek uzayının ve ilgilendiğimiz olayların eleman sayısını hesaplayamamayabiliriz.

Bu durumda ne yapabiliriz?

- Aynı şartlar altında tekrar edebileceğimiz deneyler tasarlarız.
- Aynı deneyi aynı şartlarda mümkün olduğunca çok tekrar eder (uzun koşumlu) ve sonuçlarını kaydederiz.
- İlgilendiğimiz olayın gerçekleştiği deneylerin sayısını bütün deneylerin sayısına bölerek olasılığı hesaplarız.

Diğer bir deyişle yaklaşım yaparız.

Olay ve Rastgele Değişken

Kırmızı ve mavi renkte iki zarın atıldığı bir deney düşünelim.

Kırmızı zarın üstte gelen sayısı K harfi ile gösterilsin.

Mavi zarın üstte gelen sayısı M harfi ile gösterilsin.

$K = 3$ bir olaydır. Kırmızı zarın üstte gelen sayısının 3 olması olayı.

$K + M = 4$ bir olaydır. Kırmızı ve mavi zarların üstte gelen sayılarının toplamının 4 olması olayı.

Olay ve Rastgele Değişken

Örnek uzayın elemanlarına karşılık gelen, sayısal değerlere sahip ilgilendiğimiz niceliklere **rastgele değişken** denir.

Bir rastgele değişkenin değeri, deneyin sonucu tarafından belirlenir.

Yukarıdaki K ve M değişkenleri birer rastgele değişkendir.

Rastgele değişkenlerin fonksiyonları da rastgele değişkendir.

- Örneğin $K, K+M, K-M, Cos(M), 3K$ birer rastgele değişkendir.

$P(K+M)$ bir anlam ifade etmez.

Rastgele değişkenin belirli bir değere sahip olması olasılığı, ilişkili olduğu örnek uzay elemanlarının olasılığına karşılık gelir.

$P(K+M=4)$ anlamlıdır. $K+M$ rastgele değişkeninin 4'e eşit olma olasılığını ifade eder.

Temel Olasılık Bilgileri

$P(E)$ olasılığı, $P[E]$ olarak veya $P\{E\}$ olarak da gösterilebilir.

Olasılık 0 ile 1 arasında değer alır. $0 \leq P(E) \leq 1$

F olayı E olayını kapsıyorsa ($E \subset F$ ve $E \neq F$ ise) $P(F) > P(E)$

$P(A\ veya\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ ve\ B)$

$EF = FE$, $E \cup F = F \cup E$ Değişme kuralı

$(EF)G = E(FG)$, $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ Birleşme kuralı

$EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$, $(E \cup F)G = EG \cup FG$ Dağılma kuralı

Temel Olasılık Bilgileri

$P(S) = 1$

$P(E) = 1 - P(E')$

De Morgan kuralı

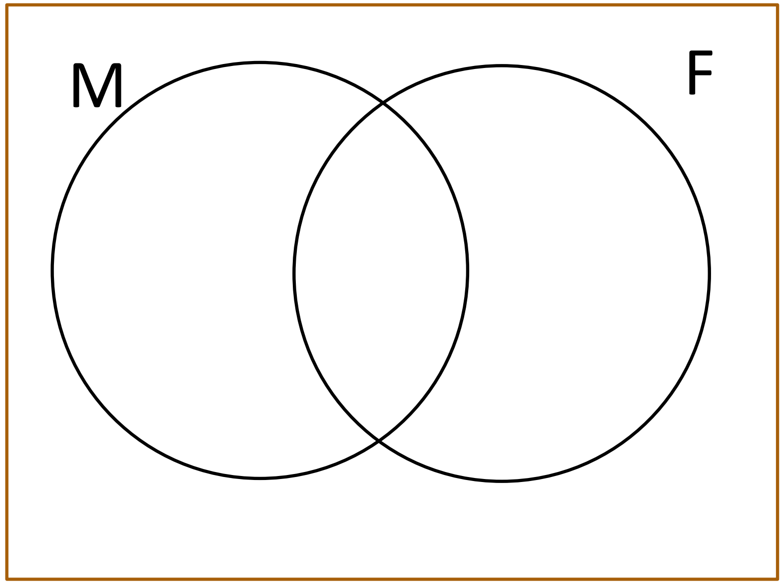
- $(E \cup F)' = E'F'$
- $(EF)' = E' \cup F'$

Örnek 2

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?

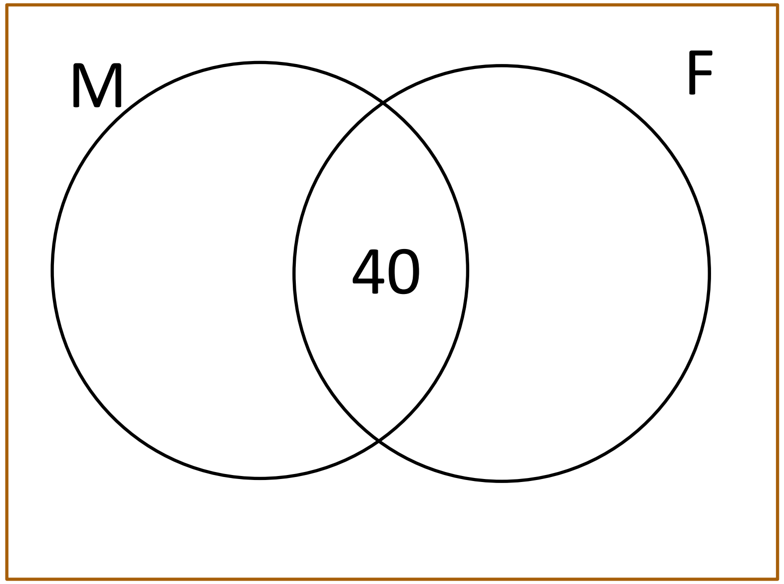
Örnek 2

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?



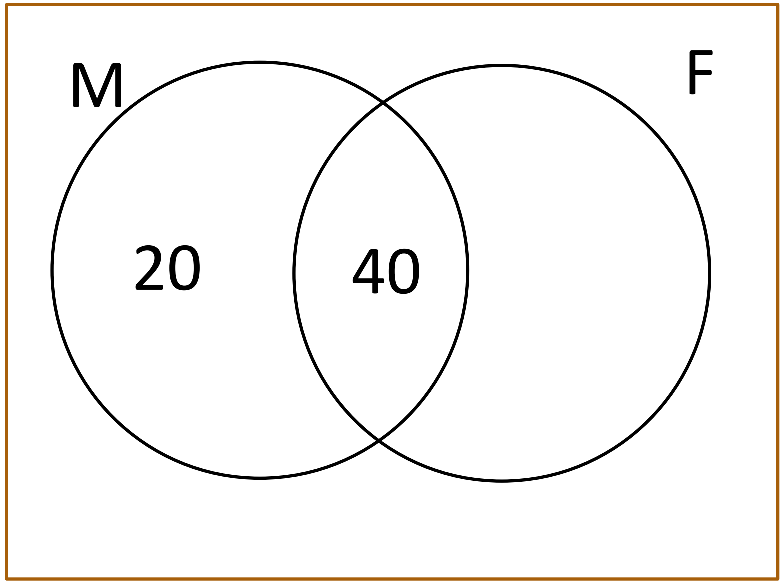
Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?



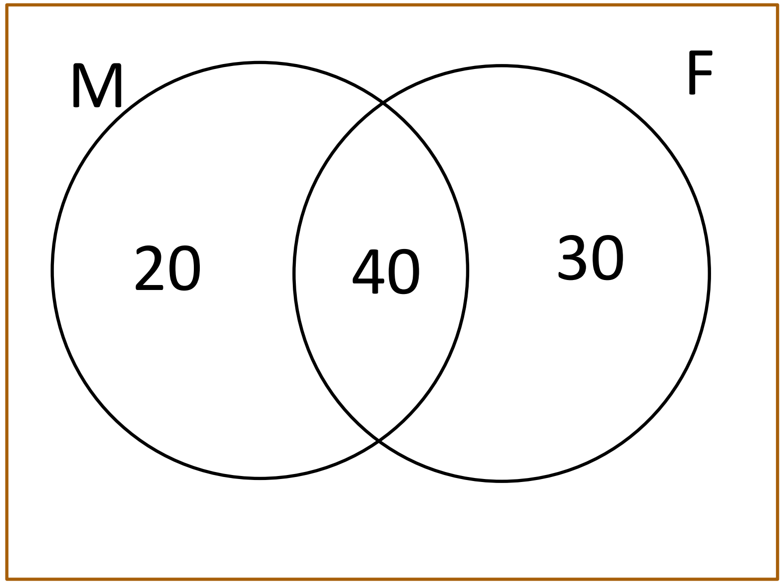
Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?



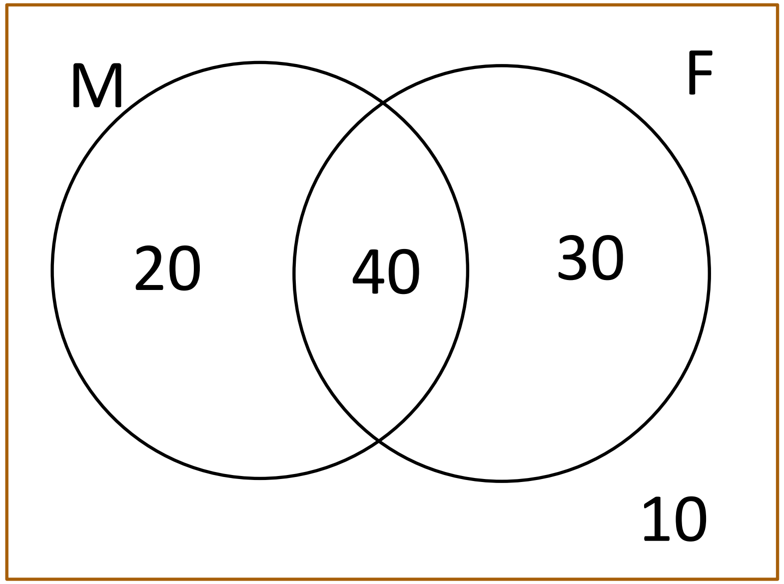
Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?



Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60’ı matematikte, %70’i fizikte ve %40’ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?



Örnek 3

6 yüzlü bir zarda çift gelme olasılığı tek gelme olasılığının üç katı ise 1, 2 veya 3 gelme olasılığı nedir?

Örnek 3

6 yüzlü bir zarda çift gelme olasılığı tek gelme olasılığının üç katı ise 1, 2 veya 3 gelme olasılığı nedir?

T : Tek gelme olayı ve $Ç$: Çift gelme olayı olsun.

$P(T) = a \quad P(Ç) = 3a$

3 tek ve 3 çift yüz var.

$3a + 9a = 1$

$a = \frac{1}{12}$

Örnek 3

6 yüzlü bir zarda çift gelme olasılığı tek gelme olasılığının üç katı ise 1, 2 veya 3 gelme olasılığı nedir?

$$P(\{1,2,3\}) = P(1) + P(2) + P(3) = P(T) + P(Ç) + P(T)$$

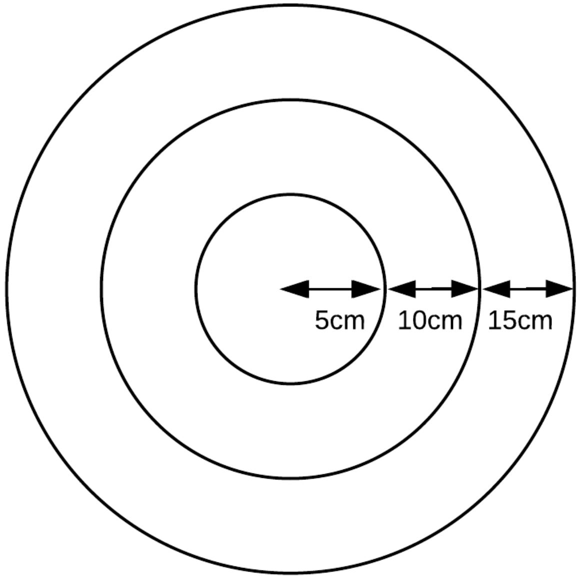
$$P(\{1,2,3\}) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

Örnek 4

Bir dart oyununda 30 cm yarıçapındaki hedef tahtası merkezden itibaren 5, 10 ve 15 cm aralıklarla 3 bölmeye ayrılmıştır. Tahta üzerinde herhangi bir yere atma olasılığı eşitse;

A) Merkeze en yakın bölmeye atma olasılığı nedir?

B) Ara bölmeye atma olasılığı nedir?



Örnek 4

Bir dart oyununda 30 cm yarıçapındaki hedef tahtası merkezden itibaren 5, 10 ve 15 cm aralıklarla 3 bölmeye ayrılmıştır. Tahta üzerinde herhangi bir yere atma olasılığı eşitse;

A) Merkeze en yakın bölmeye atma olasılığı nedir?

E, merkeze en yakın bölmeye atma olayı olsun.

$$P(E) = \frac{Bölmenin\ Alanı}{Toplam\ Alan} = \frac{\pi 5^2}{\pi 30^2} = \frac{25}{900} = \frac{1}{36}$$

Örnek 4

Bir dart oyununda 30 cm yarıçapındaki hedef tahtası merkezden itibaren 5, 10 ve 15 cm aralıklarla 3 bölmeye ayrılmıştır. Tahta üzerinde herhangi bir yere atma olasılığı eşitse;

B) Ara bölmeye atma olasılığı nedir?

F, ara bölmeye atma olayı olsun.

$$P(F) = \frac{Ara\ Bölmenin\ Alanı}{Toplam\ Alan} = \frac{\pi 15^2 - \pi 5^2}{\pi 30^2} = \frac{200}{900} = \frac{2}{9}$$

Saymanın İlkeleri

Permüstasyon;

n adet farklı eleman için $n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ farklı permütasyon vardır.

Yani bu n adet eleman $n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ kadar farklı şekilde sıralanabilir.

Saymanın İlkeleri

n tane elemanın içinde birbiriyle aynı elemanlar olduğunu düşünelim.

Örneğin n_1 adet eleman birbiri ile aynı, n_2 adet eleman birbiri ile ayını, n_3 adet eleman birbiri ile aynı, …, ve n_r adet eleman birbiri ile aynı olsun. Bu durumda yapılabilecek farklı sıralama sayısı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{n!}{(n_1!\, n_2! \ \dots \ n_r!)}$$

Örnek 5

6 beyaz ve 5 siyah top içeren bir kaptan sırayla rastgele 2 top çekilsin. Çekilen toplardan birinin beyaz ve diğerinin siyah olma ihtimali nedir?

Örnek 5

6 beyaz ve 5 siyah top içeren bir kaptan sırayla rastgele 2 top çekilsin. Çekilen toplardan birinin beyaz ve diğerinin siyah olma ihtimali nedir?

$$\frac{6}{11} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}$$

Örnek 6

Bir kişi, 10 tane kitabını kitaplık rafına dizmek istiyor. Kitapların 4 tanesi olasılık, 3 tanesi matematik, 2 tanesi programlama ve 1 tanesi ise tarih kitabıdır. Aynı konuyla ilgili kitaplar yan yana gelecek şekilde kaç farklı dizilim mümkündür?

Örnek 6

Bir kişi, 10 tane kitabını kitaplık rafına dizmek istiyor. Kitapların 4 tanesi olasılık, 3 tanesi matematik, 2 tanesi programlama ve 1 tanesi ise tarih kitabıdır. Aynı konuyla ilgili kitaplar yan yana gelecek şekilde kaç farklı dizilim mümkündür?

Kitaplar olasılık, matematik, programlama ve tarih olarak sıralanırsa toplam $4! \times 3! \times 2! \times 1!$ farklı dizilim olur.

Fakat kitaplar farklı sırada da düzenlenebilir. Bundan dolayı toplam $4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 6912$ farklı dizilim olur.

Örnek 7

Olasılık ve İstatistik dersini 4 kız ve 6 erkek öğrenci almaktadır. Bu öğrenciler ara sınav puanlarına göre sıralanmak istenmektedir. Ara sınavdan tüm öğrenciler farklı puanlar almıştır. Bu durumda;

A) Öğrencileri kaç farklı şekilde sıralayabiliriz?

B) Yapılan sıralamalar içerisinde kız öğrencilerin ilk 4 sırada olması olasılığı nedir?

Örnek 7

Olasılık ve İstatistik dersini 4 kız ve 6 erkek öğrenci almaktadır. Bu öğrenciler ara sınav puanlarına göre sıralanmak istenmektedir. Ara sınavdan tüm öğrenciler farklı puanlar almıştır. Bu durumda;

A) Öğrencileri kaç farklı şekilde sıralayabiliriz?

Her öğrencinin puanı farklı olduğundan ve toplam 10 öğrenci bulunduğundan dolayı $10! = 3628800$ farklı sıralama yapılabilir.

Örnek 7

Olasılık ve İstatistik dersini 4 kız ve 6 erkek öğrenci almaktadır. Bu öğrenciler ara sınav puanlarına göre sıralanmak istenmektedir. Ara sınavdan tüm öğrenciler farklı puanlar almıştır. Bu durumda;

B) Yapılan sıralamalar içerisinde kız öğrencilerin ilk 4 sırada olması olasılığı nedir?

Kız öğrenciler ilk 4 sırada bulunacak şekilde toplam $4! \times 6! = 17280$ farklı sıralama yapılabilir.

Bunun olasılığı ise şu şekildedir: $\frac{4! \times 6!}{10!} = \frac{17280}{3628800} = \frac{1}{210}$

Saymanın İlkeleri

Kombinasyonu;

n adet eleman içeren bir kümeden r adet eleman içeren gruplar oluşturmak isteyelim.

Kaç farklı grup oluşturabiliriz?

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

Örnek 8

5 kişiden oluşan bir kurul oluşturulacaktır. Bu kurula katılacak kişiler 9 kadın ve 6 erkek aday arasından seçilecektir. Seçimin rastgele yapıldığı varsayılırsa kurulun 2 kadın ve 3 erkekten oluşma olasılığı nedir?

Örnek 8

5 kişiden oluşan bir kurul oluşturulacaktır. Bu kurula katılacak kişiler 9 kadın ve 6 erkek aday arasından seçilecektir. Seçimin rastgele yapıldığı varsayılırsa kurulun 2 kadın ve 3 erkekten oluşma olasılığı nedir?

Kurul kaç farklı şekilde oluşturulabilir? → $\binom{15}{5} = \frac{15!}{(15-5)!5!}$

Kadın adaylar içerisinden $\binom{9}{2}$ farklı ikişer kişilik grup oluşturulabilir.

Erkek adaylar içerisinden $\binom{6}{3}$ farklı üçer kişilik grup oluşturulabilir.

Örnek 8

5 kişiden oluşan bir kurul oluşturulacaktır. Bu kurula katılacak kişiler 9 kadın ve 6 erkek aday arasından seçilecektir. Seçimin rastgele yapıldığı varsayılırsa kurulun 2 kadın ve 3 erkekten oluşma olasılığı nedir?

$$Olasılık = \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

Örnek 9

Bir basketbol takımı 12 oyuncudan oluşmaktadır. Oyuncular otelde iki kişilik odalarda kalacaktır. Eğer eşleştirme rastgele yapılırsa, oyuncular odalara kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

Örnek 8

Bir basketbol takımı 12 oyuncudan oluşmaktadır. Oyuncular otelde iki kişilik odalarda kalacaktır. Eğer eşleştirme rastgele yapılırsa, oyuncular odalara kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

12 oyuncu ilk odaya $\binom{12}{2}$ farklı şekilde yerleştirilebilir.

İlk odaya oyuncular yerleştikten sonra kalan 10 oyuncu ikinci odaya $\binom{10}{2}$ farklı şekilde yerleşebilir.

Örnek 8

Bir basketbol takımı 12 oyuncudan oluşmaktadır. Oyuncular otelde iki kişilik odalarda kalacaktır. Eğer eşleştirme rastgele yapılırsa, oyuncular odalara kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

Bu şekilde devam ederek, aşağıdaki gösterildiği gibi sonuç bulunur.

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{2^6} = 7484400$$