

**2018-2019 Güz Makine Müh. MAT-I Final Soruları**

07.01.2019

- S.1)** a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = ?$  (15 p.) , b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{2/x^2} = ?$  (15 p.) limitlerini hesaplayınız.
- S.2)**  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$  fonksiyonunun  $n$ . mertebeden türevini ve  $f^{(4)}(0)$  türev değerini bulunuz. (20 p.)
- S.3)**  $x^3 y^2 - 2xy^2 + x + 3y + 3 = 0$  fonksiyonunun  $(1, -1)$  noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz. (15 p.)
- S.4)**  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  fonksiyonunun grafiğini tüm adımlarını izleyerek çiziniz. (35 p.)

**NOT:** Süre 70 dakikadır. Nereden geldiği belli olmayan bilgilere not verilmeyecektir.

18-19 Güz Makine MAT-I Final Çözümleri 07.01.2019

$$\textcircled{1} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \stackrel{\%}{=} \lim_{\text{Hsp. } x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{1 \cdot \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} =$$

$$\stackrel{\%}{=} \lim_{\text{Hsp. } x \rightarrow 0} \frac{+\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1 \cdot (1+x) - x}{(1+x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1^2}} = \frac{1}{2} // \text{ bulunur.}$$

$$\textcircled{1} \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}} \stackrel{\infty}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \ln(\cos x)} \stackrel{\infty \cdot 0}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\cos x)}{x^2}} \text{ olup}$$

burada  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln \cos x}{x^2} \stackrel{\%}{=} \lim_{\text{Hsp. } x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -1$

den  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e} // \text{ bulunur.}$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{2x-1} = (2x-1)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1) \cdot (2x-1)^{-2} \cdot 2 = (-1)^1 \cdot 2^1 \cdot 1! (2x-1)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1) \cdot (-2) (2x-1)^{-3} \cdot 2^2 = (-1)^2 \cdot 2^2 \cdot 2! (2x-1)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (2x-1)^{-4} \cdot 2^3 = (-1)^3 \cdot 2^3 \cdot 3! (2x-1)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) (2x-1)^{-5} \cdot 2^4 = (-1)^4 \cdot 2^4 \cdot 4! (2x-1)^{-5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot n! (2x-1)^{-(n+1)} = \boxed{\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2x-1)^{n+1}}}, \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için.}$$

bu son formülde  $n=4$  ve  $x=0$  için

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-1)^4 \cdot 2^4 \cdot 4!}{(2 \cdot 0 - 1)^5} = -2^4 \cdot 4! = -16 \cdot 24 = -384 // \text{ bulunur.}$$

③  $y=f(x)$ ,  $F(x,y)=x^3y^2-2xy^2+x+3y+3=0$  ise

$$\frac{d}{dx}(x^3y^2-2xy^2+x+3y+3)=\frac{d}{dx}0 \text{ dan}$$

$$3x^2y^2+2x^3y \cdot y' - 2 \cdot 1 \cdot y^2 - 4xy \cdot y' + 1 + 3y' = 0 \text{ dan}$$

$$(2x^3y-4xy+3)y' = -(3x^2y^2-2y^2+1) \Rightarrow y' = -\frac{3x^2y^2-2y^2+1}{2x^3y-4xy+3} \text{ dir.}$$

$$m_t = y' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = -\frac{3 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2 - 2(-1)^2 + 1}{2 \cdot 1^3(-1) - 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 3} = -\frac{3-2+1}{-2+4+3} = -\frac{2}{5} \text{ teget eğimi.}$$

teget doğru denklemini:  $y-y_0=m_t(x-x_0) \Rightarrow y-(-1)=-\frac{2}{5}(x-1)$  den

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} - 1 = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}} \text{ veya}$$

$$\boxed{2x+5y+3=0} \text{ aranan teget doğrunun denkleimidir.}$$

④  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

1° T.A. =  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

2°  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \pm\infty$  eğik asimp. olabilir.  $\frac{x^2+x+1}{x^2+x} \Big| \frac{x+1}{x}$   
Yatay asimp. yok.  $\frac{x+1}{x} \rightarrow \boxed{y=x}$  eğik asimp.

$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$  dikey (dikey) asimp. ( $x=-1$  için pay  $\neq 0$ )

3°  $f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - 1 \cdot (x^2+x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+3x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x_0=0, x_1=-2$

4°  $f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)}{(x+1)^3}$



(4) soruya devam....

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} \quad x_2 = x_3 = x_4 = -1 \text{ kritik nokta.}$$

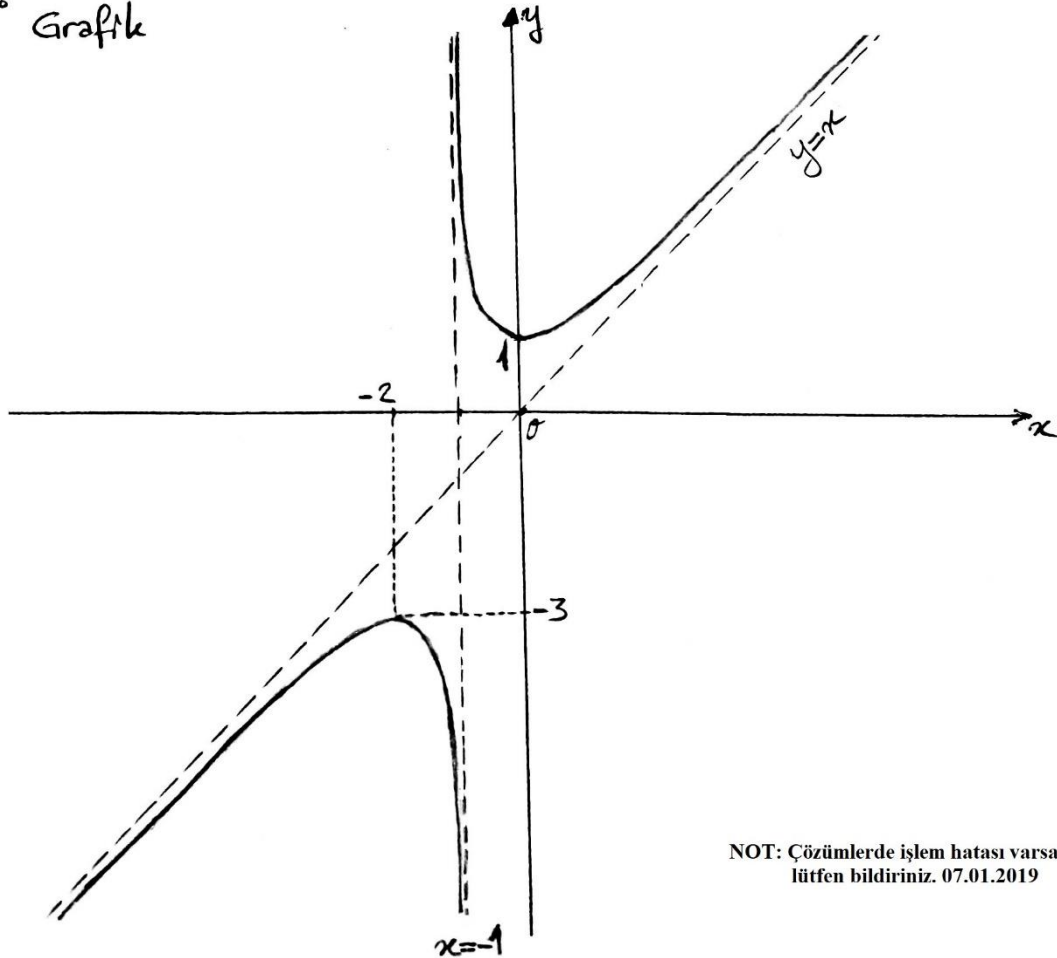
5°  $x=0$  için  $f(0) = \frac{1}{1} = 1$  ; fonksiyon  $(0,1)$  den geçer. $y=0$  için  $x^2+x+1=0$  'ın reel kökü yok. Fonk.  $O_x$ -eksenini kesmez.

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + (-2) + 1}{-2+1} = \frac{5-2}{-1} = -3 \text{ olup fonk. } (-2,-3) \text{ den geçer.}$$

6° Tablo:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	+	+	-	-	+
$f(x)$	$x$	$-3$ max	$+\infty$	$1$ min.	$x$

7° Grafik

NOT: Çözümlerde işlem hatası varsa  
lütfen bildiriniz. 07.01.2019