



SAKARYA
ÜNİVERSİTESİ

BSM 101

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİNE GİRİŞ

İSMAİL ÖZTEL

~ Boole Cebri~

İÇERİK

- Boole cebri
- Mantıksal bağlaçlar
- Boole cebri teoremleri
- Doğruluk tabloları
- Lojik kapılar
- Lojik ifadelerin sadeleştirilmesi
- Maksimum – minimum terimler
- Karnaugh diyagramları



Boole Cebri

- Boole cebri, önermeleri yada nesneler arasındaki ilişkileri ortaya koyan simgesel ve matematiksel bir mantık sistemidir.
- İlk olarak 1854 yılında George Boole tarafından geliştirilmiştir.
- Dijital bilgisayarlardaki devre tasarımlarının temelini oluşturur.
- Sayısal değerlerin değil doğruluk değerlerinin kullanıldığı durumlarda geçerlidir.
 - Doğruluk değeri $\rightarrow 1$
 - Yanlışlık değeri $\rightarrow 0$

Mantıksal Bağlaçlar

- x ve y iki önerme olsun, önermelerin doğru olduğu durumları *doğru*, yanlış olduğu durumları *yanlış* ile gösterelim. Bu önermelerin $VE (\wedge)$ ile $VEYA (\vee)$ işlemine tabi tutulması ile olası tüm sonuçlar:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
doğru	doğru	doğru	doğru
doğru	yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	yanlış	doğru
yanlış	yanlış	yanlış	yanlış

Mantıksal Bağlaçlar

- Bilgisayarlarda sıfır ve birler kullanıldığı düşünülürse doğruluk tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Mantıksal Bağlaçlar

- Boole cebri mantıksal değişimler arasındaki ilişkiyi inceler.
- Giriş değişkenleri yalnızca iki durumda olabilir: 0, 1
- Bir eşitliğin giriş değişkenleri üzerindeki VE işlemi çarpımları, VEYA işlemi ise toplamları gösterir.
- Bir değişkenin tümleyeni ise DEĞİL işlemi ile gösterilir.

Boole Cebri Teoremleri

- Değişme kuralı
 - $x + y = y + x$
 - $x \cdot y = y \cdot x$
- Birleşme kuralı
 - $x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$
 - $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Dağılma kuralı
 - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
 - $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$

Boole Cebri Teoremleri

- Özdeşlik kuralı
 - $x + x = x$
 - $x \cdot x = x$
- VE kuralı
 - $x \cdot 1 = x$
 - $x \cdot 0 = 0$
- VEYA kuralı
 - $x + 1 = 1$
 - $x + 0 = x$

Boole Cebri Teoremleri

- Tamamlayıcı kuralı
 - $x + x' = 1$
 - $x \cdot x' = 0$
- Tersin tersi kuralı
 - $(x')' = x$
 - $((x + y)')' = x + y$
 - $((x \cdot y)')' = x \cdot y$

Boole Cebri Teoremleri

- De Morgan kuralı
 - $(x \cdot y)' = x' + y'$
 - $(x + y)' = x' \cdot y'$
- Yutma kuralı
 - $x + x \cdot y = x$
 - $x (x + y) = x$

Boole Cebri Teoremleri

- $x \cdot (x+y')$ ifadesinin eşdeğeri nedir?
 - $x \cdot (x+y') = x \cdot x + x \cdot y' = x + x \cdot y' = x (1 + y') = x$
- $x \cdot y + x \cdot y'$ ifadesinin eşdeğeri nedir?
 - $x \cdot y + x \cdot y' = x (y + y') = x$

Sadeleştirme örnekleri

- $F = x \cdot y + x' \cdot y + y' = y (x + x') + y' = y + y' = 1$
- $F = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z' + x' \cdot y = x \cdot y (z + z') + x' \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y = y \cdot (x + x') = y$
- $F = x \cdot (x' + y) = x \cdot x' + x \cdot y = x \cdot y$

Doğruluk Tabloları

- Girişlerin alabileceği farklı durumlarda çıkış durumlarını bulmak için doğruluk tablosu kullanılır.
- Tabloda VE, VEYA ve DEĞİL işlemlerinin doğruluk tablosu verilmiştir.

x	y	$x \cdot y$	$x + y$	x'
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Doğruluk Tabloları

- $x \cdot y + x$ fonksiyonunun doğruluk tablosu:

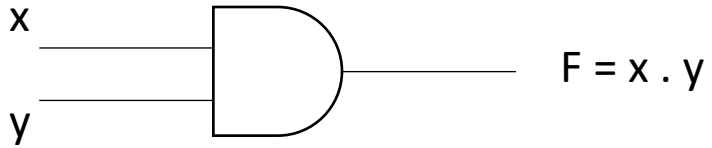
x	y	$x \cdot y$	$x \cdot y + x$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Lojik Kapılar

- Sayısal devrelerin temelini oluşturur.
- Diyot, transistör, direnç gibi devre elemanları içerirler.
 - VE kapısı
 - VEYA kapısı
 - DEĞİL kapısı
 - VE DEĞİL kapısı
 - VEYA DEĞİL kapısı
 - YA DA kapısı
 - YA DA DEĞİL kapısı

Lojik Kapılar

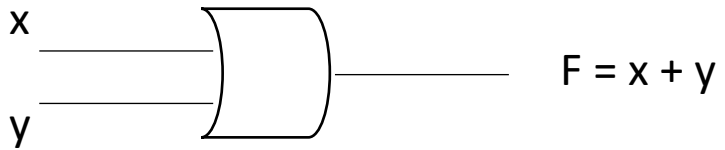
- VE kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Lojik Kapılar

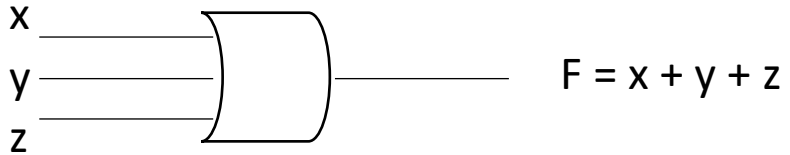
- VEYA kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Lojik Kapılar

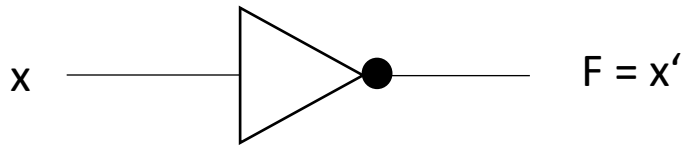
- Üç girişli VEYA kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Lojik Kapılar

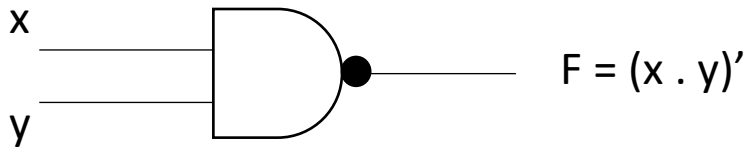
- DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu



x	F
0	1
1	0

Lojik Kapılar

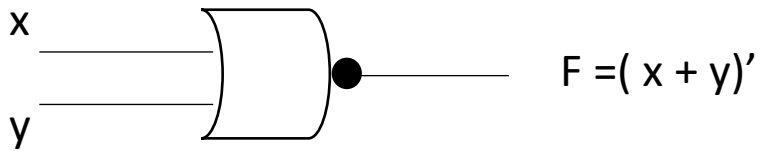
- VE DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Lojik Kapılar

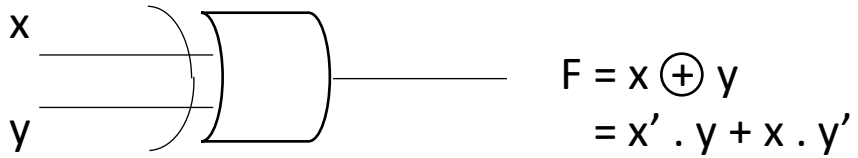
- VEYA DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Lojik Kapılar

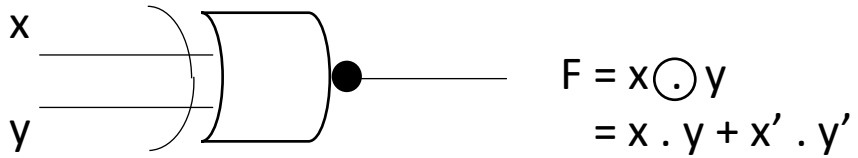
- YA DA kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Lojik Kapılar

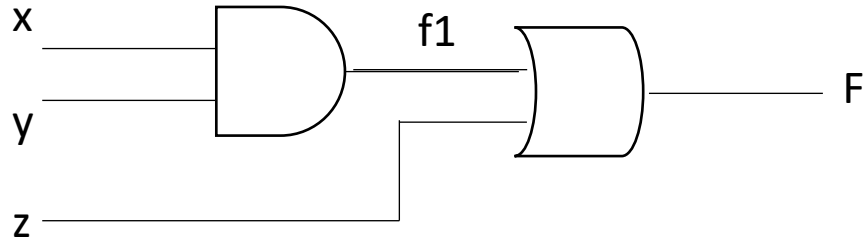
- YA DA DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Lojik Kapılar

- Lojik kapılardan matematiksel ifadelerin elde edilmesi

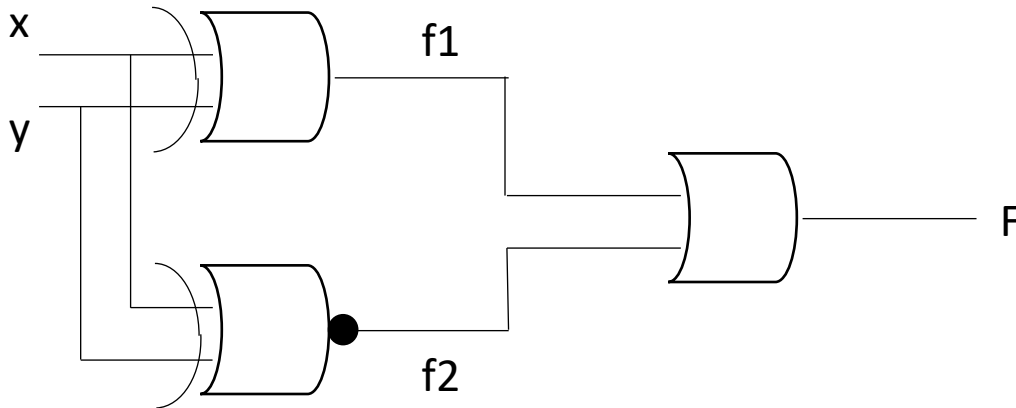


$$f1 = x \cdot y$$

$$F = f1 + z = x \cdot y + z$$

Lojik Kapılar

- Lojik kapılardan matematiksel ifadelerin elde edilmesi



$$f1 = x \oplus y = x' \cdot y + x \cdot y'$$

$$f2 = x \odot y = x \cdot y + x' \cdot y'$$

$$F = f1 + f2$$

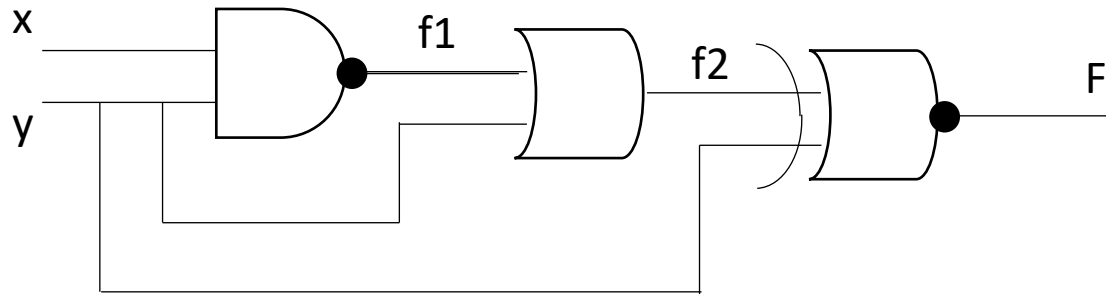
$$= x' \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y + x' \cdot y'$$

$$= x' (y + y') + x (y' + y)$$

$$= x' + x = 1$$

Lojik Kapılar

- Lojik kapılardan matematiksel ifadelerin elde edilmesi



$$f1 = (x \cdot y)'$$

$$f2 = f1 + y = x' + y' + y = x' + 1 = 1$$

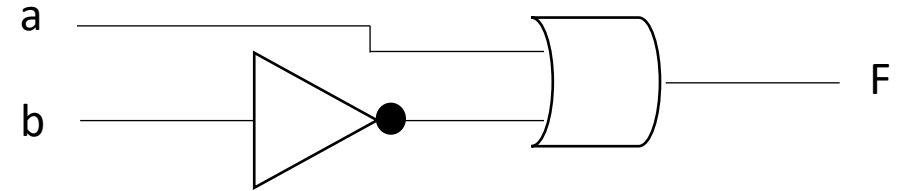
$$f3 = f2 \odot y = 1 \odot y$$

$$= 1 \cdot y + 1' \cdot y' = y + 0 = y$$

Lojik Kapılar

- Matematiksel ifadelerden lojik diyagram elde edilmesi

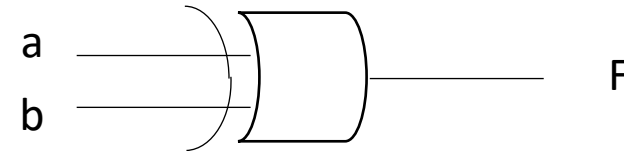
$$\begin{aligned} F &= (a' \cdot b)' \cdot (a + b') \\ &= ((a')' + b') \cdot (a + b') \\ &= (a + b') \cdot (a + b') = (a + b') \end{aligned}$$



Lojik Kapılar

- Matematiksel ifadelerden lojik diyagram elde edilmesi

$$\begin{aligned} F &= ((a' + a . b) . (b' + a . b))' \\ &= (a' + a . b)' + (b' + a . b)' \\ &= (a')' . (ab)' + (b')' . (ab)' \\ &= a . (a' + b') + b . (a' + b') \\ &= a . a' + a . b' + b . a' + b . b' \\ &= 0 + a . b' + b . a' + 0 = a \oplus b \end{aligned}$$



Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Mantıksal fonksiyonlar kullanılarak elde edilen mantıksal devrelerde devre elemanlarının sayısının azaltılması önemli bir problemdir.
- Mantıksal fonksiyonların eşdeğeri olan ve en az eleman içeren fonksiyonun bulunması gerekir.
- Aşağıdaki fonksiyon çarpımlar toplamı olarak ifade edilir ve eşdeğeri:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= x \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z \\ &= x \cdot z (y + y') = x \cdot z \end{aligned}$$

- İlk durumda birden fazla çarpma ve toplama işlemi varken eşdeğeri durumda sadece bir adet çarpma işlemi bulunmaktadır.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Mantıksal ifadelerin karmaşık olması durumunda Boole Cebri kuralları ile sadeleştirme yapmak zorlaşır.
- Bu durumda Karnaugh diyagramları sadeleştirme yapmak için daha kullanışlı bir yöntemdir.
- Karnaugh diyagramlarını öğrenmeden önce minimum terimler ve maksimum terimler kavramlarının bilinmesi gerekmektedir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Minimum terimler (minterm)
 - İkili değişkenler tümleyen formunda bulunabilirler : x, x'
 - VE işlemi ile birleştirilmiş iki adet ikili değişken düşünüldüğünde olası 4 kombinasyon vardır: $x \cdot y, x' \cdot y, x \cdot y', x' \cdot y'$
 - Bu dörtlünün her biri minterm ya da standart çarpım diye adlandırılır.
 - Benzer şekilde n adet ikili değişken birleştirilerek 2^n adet minterm elde edilir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Minimum terimler (minterm)
 - Tabloda x,y ikili değişkenleri için mintermler gösterilmiştir.
 - Değişkene karşılık gelen bit sıfır ise değişken tümleyen işareti ile gösterilir (x').
 - Her bir minterm için m_j şeklinde bir sembol kullanılır.

x . y	minterm	Minterm simgesi
00	$x' . y'$	m_0
01	$x' . y$	m_1
10	$x . y'$	m_2
11	$x . y$	m_3

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Minimum terimler (minterm)
 - Ör: $x \cdot y + x \cdot y'$ ifadesinin minterm karşılığı: $m_2 + m_3 = \sum(2,3)$
 - Ör: $x' \cdot y' + x \cdot y' + x \cdot y$ ifadesinin minterm karşılığı: $m_0 + m_2 + m_3 = \sum(0,2,3)$

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Maksimum terimler (maksterm)
 - İkili değişkenler tümleyen formunda bulunabilirler : x, x'
 - VEYA işlemi ile birleştirilmiş iki adet ikili değişken düşünüldüğünde olası 4 kombinasyon vardır: $x + y, x' + y, x + y', x' + y'$
 - Bu dörtlünün her biri maksterm ya da standart toplam diye adlandırılır.
 - Benzer şekilde n adet ikili değişken birleştirilerek 2^n adet maxterm elde edilir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Maksimum terimler (maksterm)
 - Tabloda x, y ikili değişkenleri için makstermler gösterilmiştir.
 - Değişkene karşılık gelen bit bir ise değişken tümleyen işareti ile gösterilir (x').
 - Her bir maksterm için M_j şeklinde bir sembol kullanılır.

$x + y$	maksterm	maksterm simgesi
00	$x + y$	M_0
01	$x + y'$	M_1
10	$x' + y$	M_2
11	$x' + y'$	M_3

Karnaugh Diyagramları

- Karnaugh diyagramları n adet değişken için 2^n adet hücre içerir.
- Her bir hücre, bir mintermi temsil eder.
- Örneğin x ve y ikilisi için karnaugh diyagramı

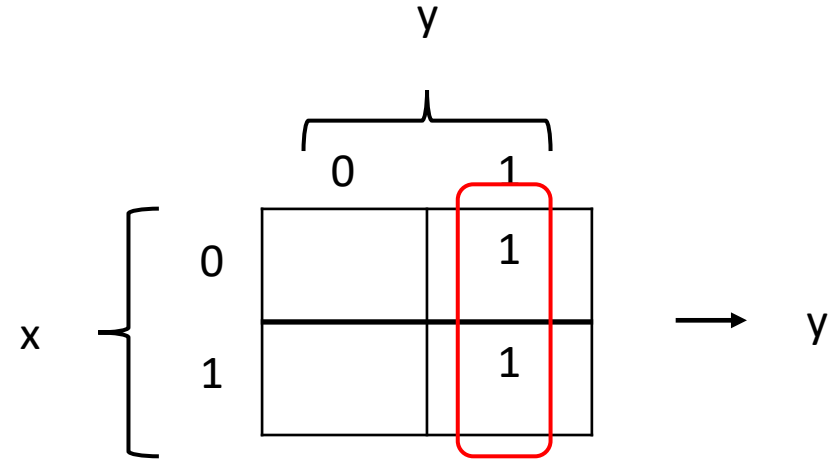
m_0	m_1
m_2	m_3

		y	
		$\begin{array}{ c c }\hline 0 & 1 \\\hline\end{array}$	
x	x/y	0	1
	0	$x' \cdot y'$	$x' \cdot y$
	1	$x \cdot y'$	$x \cdot y$

Karnaugh Diyagramları

- Ör: $x \cdot y + x' \cdot y$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

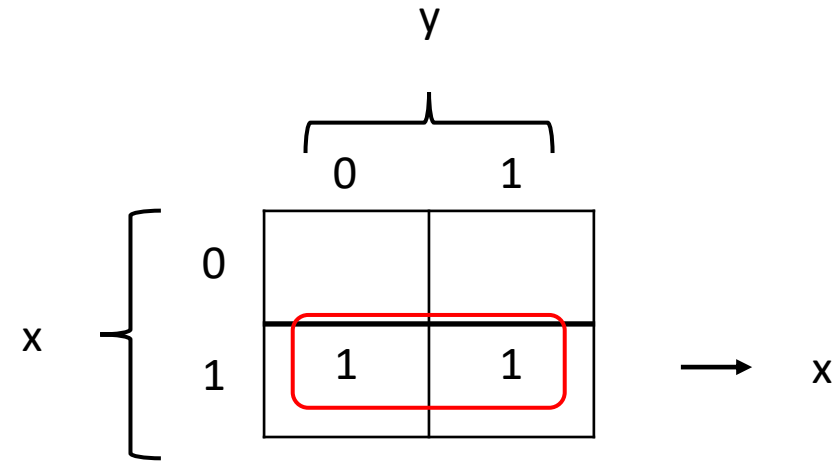
m_0	m_1
m_2	m_3



Karnaugh Diyagramları

- Ör: $x \cdot y' + x \cdot y$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

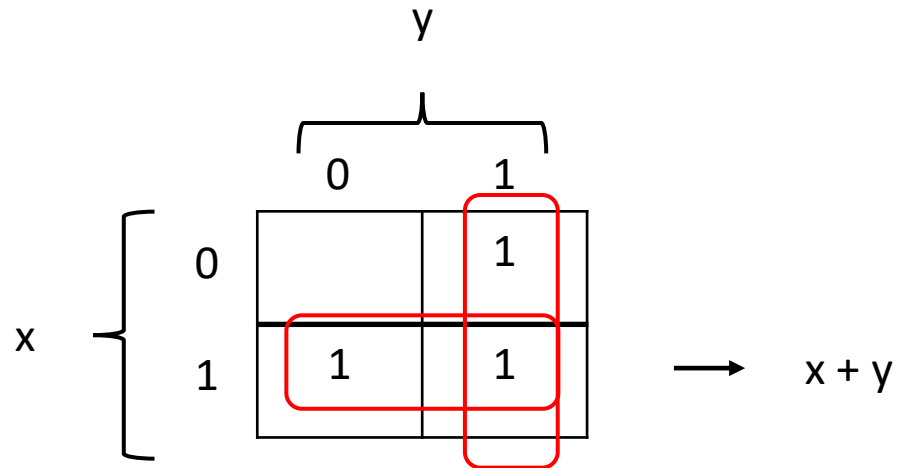
m_0	m_1
m_2	m_3



Karnaugh Diyagramları

- Ör: $x + x' \cdot y$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

$$x + x' \cdot y = x \cdot (y + y') + x' \cdot y = x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y$$



Karnaugh Diyagramları

- Üç değişkenli Karnaugh Diyagramları

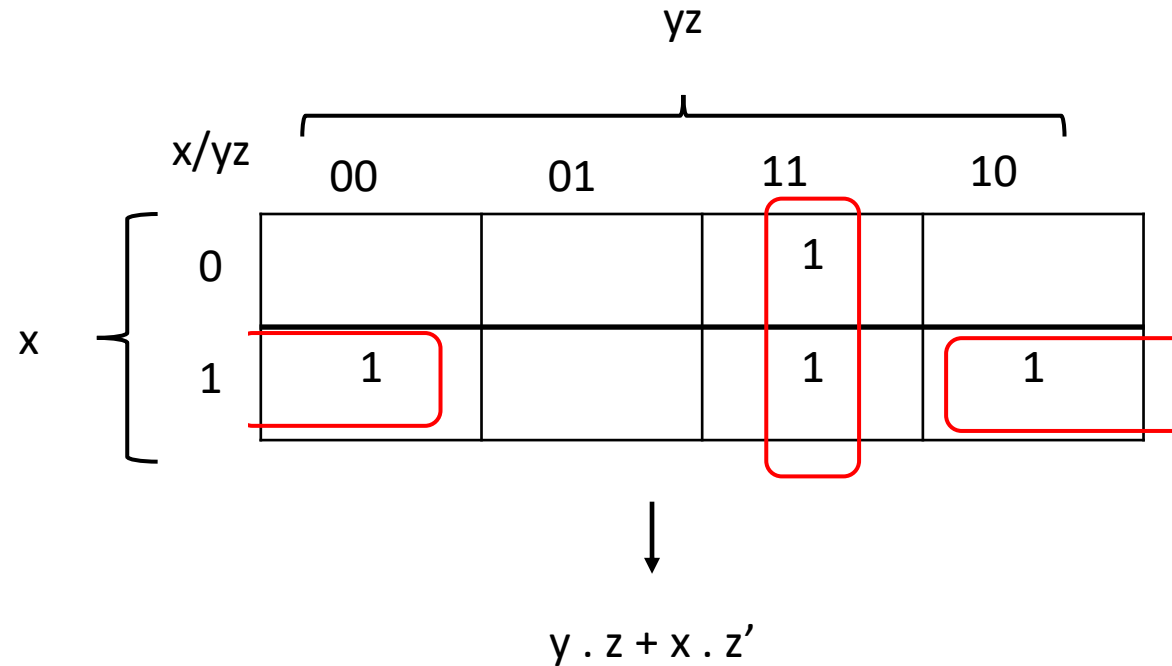
m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

		yz			
		x/yz			
		00	01	11	10
x	0	$x' \cdot y' \cdot z'$	$x' \cdot y' \cdot z$	$x' \cdot y \cdot z$	$x' \cdot y \cdot z'$
	1	$x \cdot y' \cdot z'$	$x \cdot y' \cdot z$	$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot y \cdot z'$

Karnaugh Diyagramları

- Ör: $x' . y . z + x . y . z + x . y' . z' + x . y . z'$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

m_0	m_1	m_2	m_3
m_4	m_5	m_6	m_7



Karnaugh Diyagramları

- Ör: $x \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y \cdot z$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

m_0	m_1	m_2	m_3
m_4	m_5	m_6	m_7

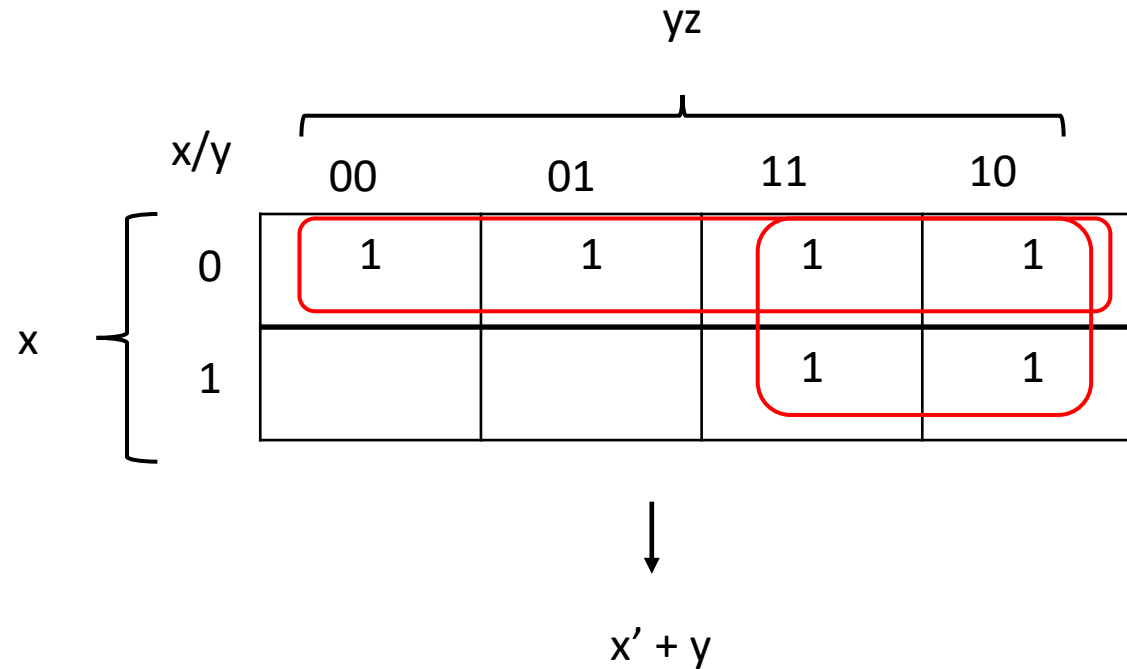
		yz			
		00	01	11	10
x	0			1	1
	1	1	1		

↓

$$x \cdot y' + x' \cdot y \longrightarrow x \oplus y$$

Karnaugh Diyagramları

- Ör: $x' + x \cdot y \cdot z' + y \cdot z$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:



Karnaugh Diyagramları

- Ör: $y \cdot z + x' \cdot y + x \cdot y' \cdot z + x' \cdot z$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

