Soru $\det \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{array}{l} C_2 + C_1 \to C_1 \\ C_3 + C_1 \to C_1 \\ C_4 + C_1 \to C_1 \\ C_5 + C_1 \to C_1 \end{array} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. sütun tamamen 0 olduğundan determinant sıfırdır.

Soru.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerini a nın durumuna göre inceleyiniz.

Çözüm.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & a & 2 & -1 \end{array}\right] \underset{-2R_1 + R_3 \to R_3}{\overset{2R_1 + R_2 \to R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4+a & -1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\overset{-R_2 + R_1 \to R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4+a & -1 & -5 \end{array}\right] \overset{2R_2 + R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Eğer soru, "denklem sisteminin bir tek çözümünün olduğu bilindiğine göre" olarak sorulsaydı, son iki satıra bakarak $a \neq -2$ derdik. Çünkü $a = -2$ olunca, en alt satırı sıfırlayabiliriz. Tümü birden 0 olan satır varsa, sonsuz çözüm olur çünkü.

Soruya devam: Tüm çözüm durumlarını inceleyelim.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{-R_2 + R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$a+2 \neq 0$ ve $a+2 = 0$ için iki durum.

$a+2 \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{a+2}R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 5 \\ x_1 = -13 \end{matrix}$$

olur → tek çözüm.

$a+2=0$ olsun. Bu durumda,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{2}R_2 \to R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{5}{2} \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{matrix} \quad \xRightarrow{x_3 = t \text{ diyelim}} \quad \begin{matrix} x_2 = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2} = \frac{t-5}{2} \\ x_1 = -3-2t \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3-2t \\ x_2 = \dfrac{t-5}{2} \\ x_3 = t \end{cases}$$ olarak sonsuz çözüm.

Tutarsız olduğu bir durum yok.