M1 INFORMATIQUE | **Graphs and Networks** | 2018-2019
F.S.T. de Nantes

Examen du 7 janvier 2019

No. anonymat :

Durée : 1h30 // Pages : 8
* Le barème est indicatif. Les documents, téléphones, tablettes etc. sont interdits.
* Les réponses doivent *obligatoirement* être fournies dans les cadres prévus. Elles doivent être justifiées, précises et concises.
* Les algorithmes vus en CM (et seulement eux !), s'ils ne sont pas modifiés, peuvent être utilisés en les appelant juste par leur nom. S'ils subissent la moindre modification, ils doivent être réécrits.
* **NOTE.** Lorsque vous exécutez des algorithmes du cours, **il faut impérativement** utiliser les conventions qui ont été établies en CM/TD.

Exercice 1. **[10pts]**

Une société d'autoroutes gère un réseau d'autoroutes représenté comme un graphe non-orienté connexe $G = (S, A)$, dont les sommets sont les villes et chaque arête représente une autoroute entre deux villes. L'hiver étant particulièrement rigoureux, la fréquentation des autoroutes est en baisse alors que leur entretien est coûteux. La question se pose de fermer certaines autoroutes. Pour cela, la société d'autoroutes a évalué le bénéfice produit par chaque autoroute a, comme la différence entre le montant des recettes et celui des dépenses sur cette autoroute, et a reporté ce bénéfice (qui peut avoir des valeurs négatives sur certaines autoroutes) comme un poids $w(a)$ sur l'arête a correspondante du graphe $G = (S, A)$. Une arête a est dite *bénéficiaire* si $w(a) \geq 0$, et *déficitaire* si $w(a) < 0$.

Le but de l'entreprise est de garder ouvert un sous-ensemble A' d'autoroutes de A tel que toutes les villes soient encore desservies, que le réseau restant ouvert soit connexe et que le bénéfice obtenu par le réseau restant ouvert soit maximum.

Nous supposons que $S = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Questions :

1. Puisque la société d'autoroutes a intérêt à garder toutes les autoroutes bénéficiares ouvertes, elle commence par identifier les régions (une région étant un ensemble de villes) qui sont connectées en utilisant seulement des autoroutes bénéficiaires. Ces régions seront appelées $R_1, R_2, \ldots, R_k$, où k dénote le nombre de régions ainsi trouvées. Quel est, en terminologie "graphes", l'interprétation d'une région ?

2. Ecrire un algorithme $CalculeRegions(G)$ qui, étant donné un graphe $G = (S, A, w)$ représentant un réseau d'autoroutes avec leurs poids, calcule les régions définies au point 1 et attribue à chaque ville le numéro de sa région.

3. Quelle est la complexité de votre algorithme *CalculeRegions* ? Pourquoi ?

Par la suite, il faut connecter les régions entre elles, avec des autoroutes déficitaires minimisant le déficit. Pour cela, l'approche retenue (pas forcément optimale), est d'utiliser un algorithme de recherche de couplage de cardinalité maximum pour calculer un couplage de cardinalité maximum entre régions. Les régions couplées sont alors connectées par l'arête de poids maximum (c'est-à-dire la moins déficitaire) reliant un sommet d'une région à un sommet de l'autre région. Ainsi ils forment une région plus grande, réunissant les deux précédentes régions. Tant qu'il reste des régions non-connectées, le même algorithme est appliqué.

4. Soit le graphe H dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont fournis ci-dessous.

(a) les sommets $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$

(b) les arêtes
$\{R_1R_2(-3), R_2R_3(-2), R_3R_4(-4), R_3R_6(-2), R_4R_6(-3), R_4R_5(-4), R_2R_5(-1), R_1R_5(-1)\}$.

Nous supposons que ce graphe représente les régions $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ calculées à partir d'un graphe $G = (S, A, w)$ avec l'algorithme $CalculeRegions(G)$ que vous avez proposé. Les arêtes entre les régions représentent les autoroutes les moins déficitaires entre des sommets de ces régions, et l'entier entre parenthèses indique le poids (c'est-à-dire le bénéfice) de l'autoroute représentée par l'arête.

Appliquer l'algorithme proposé ci-dessus pour joindre les régions $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ à l'aide d'autoroutes déficitaires. Vous utiliserez impérativement l'un des algorithmes du cours (que vous indiquerez) pour calculer le couplage de cardinalité maximum autant de fois que nécessaire. Vous vous rappelerez et vous appliquerez strictement les conventions vues en CM/TD.

5. Est-ce que cet algorithme minimise le déficit des autoroutes ajoutées, comme souhaité ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. [1] **[5pts]**

Sire Gwendal, paludier a Guérande, en Bretagne [2], désire aller vendre sa récolte de sel dans l'une des quatre grandes foires de sa région : soit à Rennes (ville 11), soit à Loudéac (ville 12), soit à Pontivy (ville 13), soit a Lorient (ville 14). Il connaît les gains qu'il peut faire dans chacune de ces quatre villes, a savoir respectivement 550 écus à Rennes, 580 à Loudéac, 590 à Pontivy et 600 écus à Lorient. Il connaît aussi (Figure 1) les différents itinéraires pouvant le mener de Guérande (ville notée 0) à chacune des quatre villes, mais a chaque village, ville ou pont, il doit s'acquitter d'un droit de passage :

Ville	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Péage(écus)	10	10	15	5	15	10	3	10	5	20	4	5	20	7

Le but du paludier est de maximiser son bénéfice.

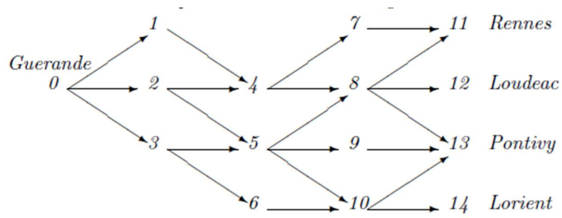

FIGURE 1 –

Questions :

1. En ajoutant éventuellement des sommets et/ou arêtes au graphe, exprimer ce problème comme un problème de recherche de chemin optimal.

1. ©http ://www-lipn.univ-paris13.fr/ culus/IUT/Td_iut.pdf
2. A une époque

2. Résoudre ce problème à l'aide de l'un des algorithmes du cours. Indiquer sous quelles conditions l'algorithme fonctionne correctement, pourquoi ces conditions sont satisfaites et donner tous les détails de l'exécution.

Exercice 3. **[5pts]**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Un graphe orienté est fortement connexe si, et seulement si, il admet une arborescence couvrante, c.à.d. une arborescence dont les sommets sont tous les sommets du graphe et les arcs sont des arcs du graphe.

2. Un graphe non-orienté G à n sommets est un arbre si, et seulement si, en lui enlevant l'un après l'autre les sommets de degré 1 on obtient le graphe vide (sans sommets, sans arêtes).

3. L'algorithme de Kosaraju-Sharir peut être utilisé pour calculer les composantes connexes d'un graphe non-orienté. De plus, il est optimal en temps d'exécution, puisqu'il est en $O(m + n)$ (avec les notations habituelles).

4. L'algorithme de Gale-Shapley pour le calcul du mariage stable peut être utilisé pour calculer un couplage de cardinalité maximum dans un graphe biparti.