M1 INFO | **Graphes** | 2017-2018
F.S.T. de Nantes

Examen du 8 janvier 2018

No. anonymat :

Durée : 1h30 **Pages : 9**
* Le barème est indicatif. Les documents sont interdits.
* Les réponses doivent *obligatoirement* être fournies dans les cadres prévus. Elles doivent être justifiées, précises et concises.
* Les algorithmes du cours, s'ils ne sont pas modifiés, peuvent être utilisés en les appelant juste par leur nom.

Exercice 1. **[8pts]**
Soit l'arbre T suivant :
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$
$E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (4, 10), (5, 11), (6, 12), (8, 13), (8, 14), (9, 15), (14, 16)\}$.

On demande :

1. Quel est l'algorithme du cours le plus efficace pour trouver un couplage maximum dans un arbre ? Justifier votre réponse.

2. Appliquer rigoureusement l'algorithme que vous avez indiqué au point 1 pour trouver un couplage maximum dans l'arbre donné. Donner tous les détails de l'exécution.

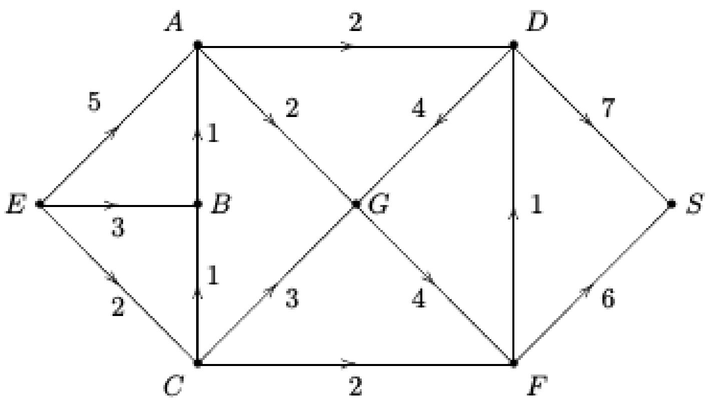
3. Est-ce que l'arbre T', obtenu de T en enlevant le sommet 10 et son arête incidente, a un couplage parfait, ou non ? Justifier votre réponse.

4. L'algorithme demandé dans cette section *ne doit utiliser ni les algorithmes de couplage vus en cours ni leurs principes - en particulier aucune notion de chemin de croissance et/ou de transfert le long d'un tel chemin.* Proposer un algorithme, écrit en pseudo-code, pour décider si un arbre donné a un couplage parfait. Si la réponse est positive, l'algorithme doit retourner un couplage parfait. Justifier la correction de votre algorithme.

5. Appliquer votre algorithme, en donnant tous les détails de l'exécution, pour décider si l'arbre T' a un couplage parfait ou non, et indiquer un couplage parfait le cas échéant.

6. Montrer qu'un arbre a au plus un couplage parfait.

Exercice 2. [1] **[12pts]**
Considérons le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, qui correspond à des parcours possibles pour aller d'un point E à un point S.



On demande :

1. Calculer le plus court chemin de E à S dans $\mathcal{G}$ en utilisant l'un des algorithmes du cours. Expliquer votre choix d'algorithme. Donner tous les détails de l'exécution.

1. ©Figure issue de http ://www.math.u-psud.fr/∼montcouq/Enseignements/Apprentis/feuille3.pdf

2. Supposons maintenant que le graphe indique des parcours dans la montagne, et que le poids sur chaque arc indique la difficulté de parcourir l'arc (plus le poids de l'arc est grand, plus la difficulté est élevée). On souhaite déterminer le chemin dont la difficulté maximum, calculée comme le maximum des difficultés sur les arcs, est la plus faible possible. Par exemple, la difficulté maximum du chemin $EADS$ est égale à $max\{5, 2, 7\} = 7$. Pour cela, adapter l'algorithme de Bellman-Ford pour proposer un algorithme résolvant notre problème. (Donner juste l'algorithme, sans l'appliquer. Expliquer pourquoi il résout le problème.

3. Soit $\mathcal{G}'$ le graphe obtenu de $\mathcal{G}$ en inversant à la fois le sens de l'arc (D, G) (qui devient donc l'arc (G, D)) et le signe du poids (qui devient -4 au lieu de 4). Le graphe $\mathcal{G}'$ étant sans circuit, il est possible de calculer un plus long chemin de E à S, qui est défini comme un chemin dont la somme des poids sur les arcs est aussi grande que possible. Donner, en vous basant sur l'un des algorithmes du cours, un algorithme pour calculer le plus long chemin d'un graphe valué sans circuits. Justifier sa correction.

4. Soit maintenant $\mathcal{H}$ le graphe obtenu de $\mathcal{G}'$ en ne gardant que les sommets C, G, D, F, S, ainsi que tous les arcs dont les deux extrémités sont dans cet ensemble. Appliquer l'algorithme de Johnson sur $\mathcal{H}$ pour calculer les plus courts chemins de C à tous les autres sommets. Donner tous les détails de l'exécution. (Note. L'algorithme de Johnson calcule les plus courts chemins entre toutes les paires de sommets. Pour ne pas alourdir les calculs, on se limitera ici seulement aux chemins à partir de C.)