

Examen du 8 janvier 2019

No. anonymat :

Durée : 1h30

Pages : 9

* Le barème est indicatif. Les documents, téléphones, tablettes etc. sont interdits.

* Les réponses doivent *obligatoirement* être fournies dans les cadres prévus. Elles doivent être justifiées, précises et concises.

* Les algorithmes du cours, s'ils ne sont pas modifiés, peuvent être utilisés en les appelant juste par leur nom.

Exercice 1. ¹

[8 pts, 40min]

Le centre informatique d'une grande banque dispose de 3 ordinateurs centraux (M1, M2, M3) de caractéristiques différentes, sur lesquels les terminaux peuvent lancer 4 types de tâches différentes (A, B, C et D). Les capacités des ordinateurs et la demande horaire pour chacun de ces types de tâches sont les suivantes.

Capacités disponibles de chaque ordinateur central :

Ordinateur central	M1	M2	M3
Capacité/heure	100	70	90

Ainsi l'ordinateur M1 peut traiter 100 tâches par heure quel que soit leur type.

Demande horaire pour chaque type de tâche :

Type de tâche	A	B	C	D
Demande/heure	50	70	60	80

Ainsi, la tâche A est demandée 50 fois par heure.

On cherche à distribuer les tâches en fonction des capacités des ordinateurs centraux, de manière à optimiser le coût global de fonctionnement (constitué des coûts d'exploitation, de pupitrage, de réseau, de contrôle ...). A cet effet, on a étudié en détail le coût d'exécution de chaque tâche sur chaque ordinateur central. La conclusion est que les coûts peuvent être décomposés suivant les coûts élémentaires suivants :

- Coût réseau
- Coût en accès disque
- Coût processeur.

Les tâches ont été décomposées comme suit :

Tâches	Réseau	Disque	Processeur
A	10%	30%	60%
B	20%	50%	30%
C	30%	30%	40%
D	50%	20%	30%

Les coûts élémentaires suivant les ordinateurs centraux sont :

Ordinateurs	Réseau	Disque	Processeur
M1	80	20	10
M2	30	60	10
M3	40	20	20

Le coût de l'exécution sur une machine d'une tâche donnée est obtenu en combinant les coûts partiels.

Exemples :

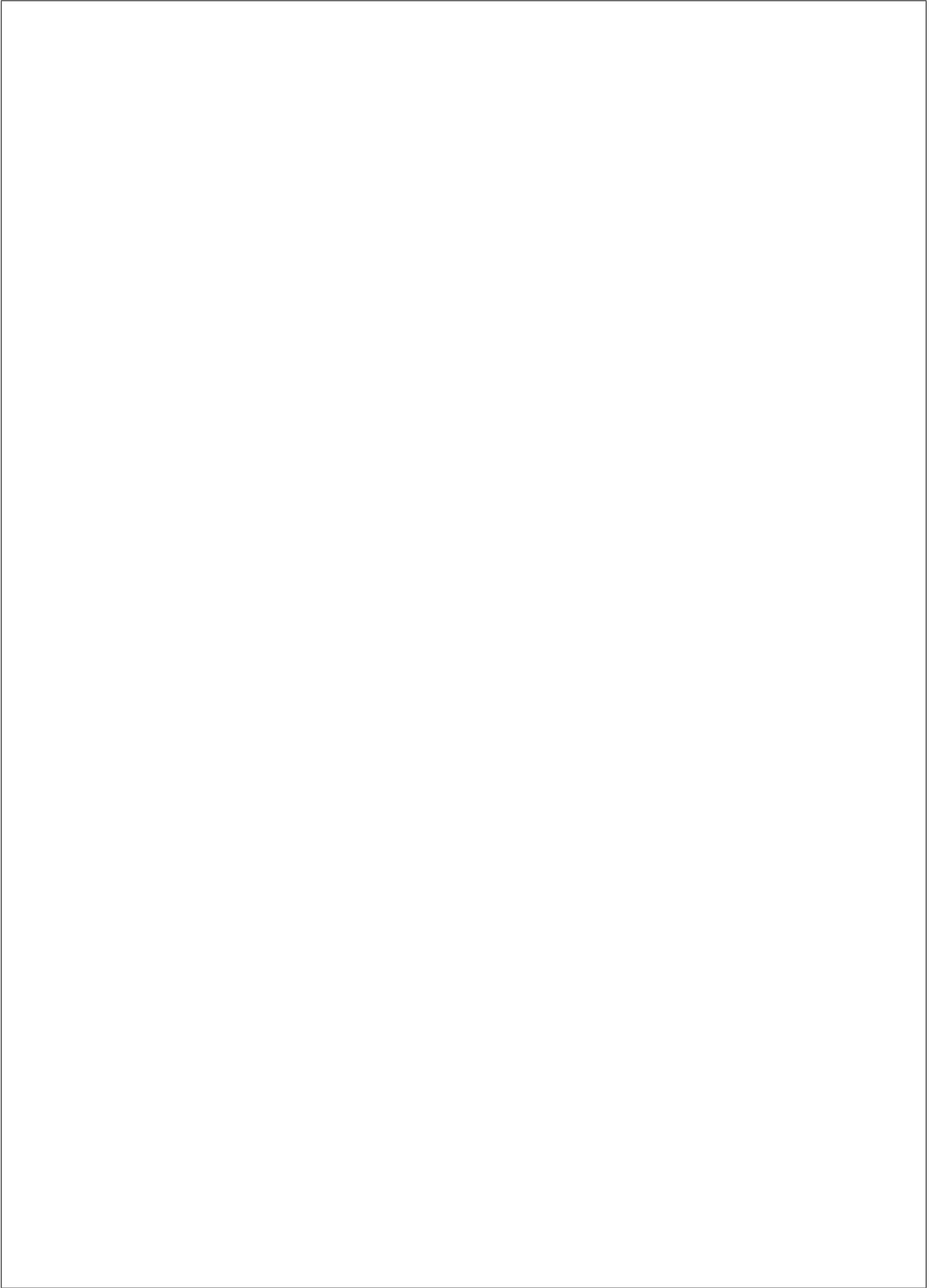
- Tâche A sur la machine M1 : Coût (M1, A) = (80 x 0,10) + (20 x 0,30) + (10 x 0,60) = 20
- Tâche C sur la machine M3 : Coût (M3, C) = (40 x 0,30) + (20 x 0,30) + (20 x 0,40) = 26

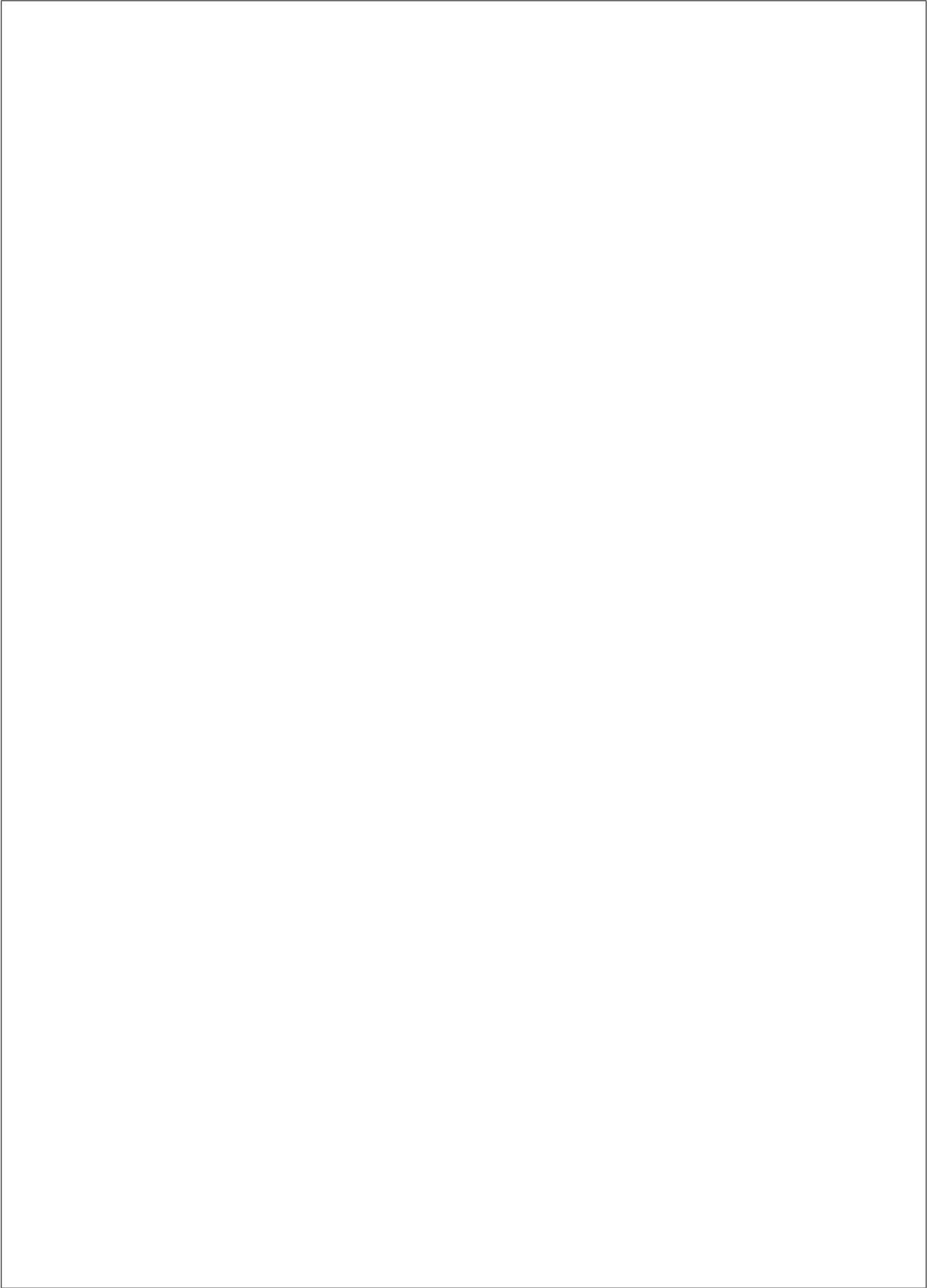
1. <http://deptinfo.cnam.fr/new/spip.php?pdoc359>

On demande :

1. Donner le tableau 3 x 4 des coûts de traitement, sur chaque ordinateur central, des différentes tâches.

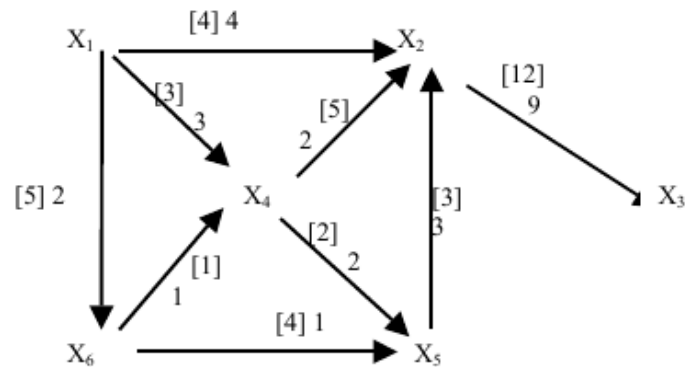
2. Trouver l'affectation qui minimise le coût total d'exécution. Indiquer le type de problème que vous avez reconnu ainsi que l'algorithme que vous allez appliquer, et donner tous les détails de l'exécution.





Exercice 2.¹**[6pts,20min]**

Considérons le réseau de transport suivant, où X_1 est la source, X_3 est le puits, les valeurs entre crochets sont les capacités et les valeurs sans crochet définissent un flot.



On demande :

1. Est-ce que le flot indiqué est maximum ? Justifiez votre réponse. Si le flot n'est pas maximum, appliquez l'un des algorithmes du cours pour trouver un flot maximum. Vous donnerez dans ce cas les détails de l'exécution. Dans tous les cas, indiquez la valeur du flot maximum.

2. Soient les coûts suivants sur les arcs du réseau :

	X_1X_2	X_1X_4	X_1X_6	X_6X_4	X_4X_2	X_4X_5	X_6X_5	X_5X_2	X_2X_3
coût	5	4	1	1	2	3	2	1	4

Appliquez un des algorithmes du cours pour calculer un flot maximum de coût minimum. Vous donnerez les détails de l'exécution.

Exercice 3. (Exercice de modélisation)

[4pts,25min]

Aux Etats-Unis, le jeu de baseball est organisé en deux ligues, chacune contenant trois divisions de 4-5 équipes chacune. Dans une division, chaque paire d'équipes se rencontre pour plusieurs matchs (pas seulement un comme on a l'habitude). Le but de chaque équipe est de se qualifier pour les barrages, ce qui est fait en gagnant sa division. Une équipe *gagne* sa division si aucune autre équipe de sa division ne gagne plus de matchs qu'elle. Autrement dit, elle fait partie des équipes qui ont gagné M matchs, où M est le maximum atteint dans sa division.. (Des ex-aequo peuvent apparaître, c'est-à-dire que plusieurs équipes peuvent gagner le même nombre M de matchs et donc gagner la même division). Un match est soit gagné soit perdu, sans égalité possible.

Au fur et à mesure de l'avancement du championnat, certaines équipes sont déjà *éliminées* : une équipe est éliminée si elle ne peut pas gagner sa division, quels que soient les matchs gagnés ou perdus par les autres équipes. Mais elle continue à jouer ses matchs.

Soit l'exemple suivant, où la colonne **Team** indique les équipes, la colonne **Wins** indique le nombre de matchs déjà gagnés (=victoires) par chaque équipe, la colonne **Remaining games** indique le nombre de matchs restants, alors que la colonne **Games against** indique contre quelles équipes il faut encore jouer, et quel nombre de

matches. Par exemple, Toronto Blue Jays a déjà 88 victoires, et a encore 7 matches à jouer, dont 6 contre New York Yankees et 1 contre Baltimore Orioles.

Team	Wins	Remaining Games	Games Against			
			NY	Bos	Tor	Bal
New York Yankees	93	8	-	1	6	1
Boston Red Sox	89	4	1	-	0	3
Toronto Blue Jays	88	7	6	0	-	1
Baltimore Orioles	86	5	1	3	1	-

Nous voulons savoir, à un moment donné du championnat représenté par une table comme celle ci-dessus, quelles équipes ont déjà été éliminées. Clairement, dans cet exemple Baltimore est éliminée parce qu'elle finira la saison avec au plus 91 victoires alors que les Yankees ont déjà 93 victoires. Il est moins évident que Boston est également éliminée. C'est vrai que Boston pourrait encore gagner 4 matches pour arriver à 93 victoires ... il semblerait donc qu'ils pourraient gagner à condition que les Yankees perdent le reste de leurs jeux. Cependant, si les Yankees perdent tous leurs matches, cela signifie que Toronto va gagner 6 matches contre les Yankees, ce qui donnera à Toronto les 94 victoires dont ils auraient besoin pour battre Boston.

L'objectif est de déterminer pour chaque équipe notée k si elle est déjà éliminée ou non, sur la base d'un tableau comme ci-dessus dont on supposera qu'il contient n équipes. Pour cela, il faut créer un réseau de transport pour chaque équipe k , et représenter le problème pour l'équipe k comme un problème de flot. (La même démarche est ensuite appliquée à chaque équipe, mais nous nous contenterons ici d'une seule équipe k).

Soit donc une équipe k fixée. La stratégie pour construire le réseau permettant de tester si k est éliminée ou non suit la logique suivante :

Affirmation de base : k n'est pas éliminée \Leftrightarrow il existe une distribution des victoires pour les matches restants (toutes équipes confondues) telle qu'aucune équipe n'ait plus de points que l'équipe k à la fin du championnat.

Soient les notations suivantes :

1. w_i = nombre de victoires pour l'équipe i
2. g_i = nombre de matches restant à jouer pour l'équipe i
3. g_{ij} = nombre de matches restants entre l'équipe i et l'équipe j .

Questions :

1. Imaginez une représentation locale, à l'aide de sommets reliés par des arcs et de flots entrants et sortants, de l'affirmation suivante pour un i et un j fixés ($i \neq j$, et les deux sont différents de k) :

Affirmation 1 : Tout match restant entre les équipes i et j doit être gagné soit par i soit par j .

Indiquez les sommets dont vous avez besoin, ainsi que les arcs et leurs capacités. Utilisez les notations ci-dessus.

2. Imaginez une représentation locale, à l'aide de sommets reliés par des arcs et de flots entrants et sortants, de l'affirmation suivante pour un i fixé ($i \neq k$) :

Affirmation 2 : Le nombre de matchs gagnés par l'équipe i à la fin du championnat ne doit pas dépasser le nombre de matchs total que k peut gagner.

(rappelez-vous que k est fixé, et que le réseau est construit pour k .) Indiquez les sommets dont vous avez besoin, ainsi que les arcs et leurs capacités. Utilisez les notations ci-dessus.

3. Dessinez le réseau de transport complet résultant de vos réponses aux questions 1 et 2.

4. Quelles conditions (nécessaires et suffisantes) doit satisfaire le flot maximum calculé dans le réseau de transport que vous avez construit pour que l'on puisse déduire que k n'est pas éliminée ?

Exercice 4. (Distanciel)

[2pts,5min]

1. Définissez un réseau petit-monde.

2. Décrivez le modèle de Kleinberg, aussi précisément que possible.