


COLLEGE F.X. VOGT		Année scolaire 2023-2024
Département de Mathématiques	CONTROLE	Date : Samedi 23 septembre 2023
Classe : TD-TTI	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Coef : 4 ; Durée : 4h00

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 Points)

Exercice 1 : (3,25 points)

- A-** Résoudre dans \mathbb{C}^2 le système : $\begin{cases} -iz + 2iz' = 3 - i \\ (3 + 2i)z - iz' = 1 - i \end{cases}$ (0,75 pt)
- B-** On considère le nombre complexe $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$ où $z \neq i$.
- Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour que le complexe Z soit réel. (0,75 pt)
 - Montrer que Z est imaginaire pur si $z\bar{z} = 1$. (0,5 pt)
- C-** 1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $z^3 = 1$. (0,5 pt)
- 2) Sachant que $(1 + i)^3 = -2 + 2i$, déterminer les racines cubiques de $-2 + 2i$. (0,75 pt)

Exercice 2 : (6,25 points)

- A-** Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i)$.
- Montrer qu'il existe un nombre imaginaire pur z_0 tel que $P(z_0) = 0$. (0,75 pt)
 - Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$. (0,75 pt)
 - Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$ dans \mathbb{C} . (0,75 pt)
- B-** Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées de $-15 - 8i$. (0,75 pt)
- C-** On considère le nombre complexe $X = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - i\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.
- Calculer X^2 . (0,5 pt)
 - En déduire le module et un argument de X . (0,75 pt)
 - Déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{11\pi}{8})$ et $\sin(\frac{11\pi}{8})$. (0,5 pt)
- D-** Soit le Q le polynôme défini par $Q(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.
- Démontrer que si z_0 est racine de Q alors il en est de même que \bar{z}_0 , $\frac{1}{z_0}$. (0,5 pt)
 - Vérifier que $1 + i$ est une racine de Q . (0,25 pt)
 - En déduire la résolution dans \mathbb{C} de $Q(z) = 0$. (0,75 pt)

Exercice 3 : (5,5 points)

- A-** On considère $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_2^3}{z_1}$.
- Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants z_2^3 et Z . (0,75 pt)
 - Donner les formes trigonométriques de z_1 , z_2 et Z . (1,5 pt)
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$. (1 pt)
 - Montrer que z_1^{5100} est un nombre entier naturel. (0,5 pt)

B- On pose $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\alpha = z_0 + z_0^4$

- 1) Calculer z_0^5 . (0,25 pt)
- 2) Déduire que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$. (0,5 pt)
- 3) Déduire que α est solution de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$. (0,5 pt)
- 4) Montrer que $\alpha = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. (0,5 pt)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (05 points).

Monsieur ELONO possède deux parcelles de terrain dont il veut sécuriser. Pour cela, il décide d'acheter du fil en alliage d'aluminium pour clôturer ses trois parcelles. Ce type de fil est vendu dans les grandes quincailleries par rouleau de 8 mètres et à 7500 francs le rouleau.

- La première parcelle est formée de l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe vérifiant : $|iz + 1 - 4i| = 4$.
- La deuxième parcelle quant à elle est formée de l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que la partie imaginaire de $\frac{z-3}{iz+2}$ soit nulle.

Raul, fils de M. ELONO est en classe de terminale scientifique. Lors de la première évaluation sur les nombres complexes, on leur demande « Déterminer les nombres complexes qui sont les solutions de l'équation (E): $z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$: ». Raul, étant un élève distrait en classe, est incapable de résoudre cette équation.

Les distances dans tous les terrains sont exprimées en hectomètres.

- 1- Déterminer le montant à dépenser par M. ELONO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer la première parcelle. (1,5 pt)
- 2- Déterminer le montant à dépenser par M. ELONO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer la deuxième parcelle. (1,5 pt)
- 3- Déterminer les formes algébriques des solutions de l'équation (E). (1,5 pt)

Présentation : 0,5 pt