Tomasz Indeka

Metody numeryczne

Zadanie 2.18– Sprawozdanie

Pkt 1. Obliczanie wartości własnych macierzy nieosobliwych metodą QR

Do obliczenia wartości własnych macierzy najpierw wyznaczyłem rozkład QR wg wzorów:

$$q_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj} * q_k$$

$$r_{kj} = \frac{q_k^T * a_j}{q_k^T * q_k}$$

A później znormalizowałem:

$$q_{kj} = q_{kj}/w$$

$$a_{jk} = a_{jk} * w$$

$$w = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} q_{kj}^2} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Do obliczenia wartości własnych macierzy symetrycznych metodą bez przesunięć użyłem wzorów

$$A^k = Q * R$$

$$A^{k+1} = R * Q$$

I iterowałem aż do momentu kiedy wszystkie elementy macierzy A oprócz tych na diagonali były mniejsze od przyjętej tolerancji, osobiście przyjąłem 0,00001 lub do momentu przekroczenia maksymalnej ilości iteracji, którą wyznaczyłem na 1.000.000.

Do obliczenia wartości własnych macierzy symetrycznych i niesymetrycznych metodą z przesunięciami użyłem wzorów

Do wyznaczenia wartości własnej podmacierzy 2x2 z prawego dolnego rogu macierzy A

$$\lambda^2 + b * \lambda + c = 0$$

$$b = -(A_{k,k} + A_{k-1,k-1})$$

$$c = A_{k,k} * A_{k-1,k-1} - A_{k,k-1} * A_{k-1,k}$$

$$d = b^2 - 4 * c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2}$$

I jako wartość p_k przyjąłem wartość x bliższą do wartości $a_{k,k}$. Następnie użyłem wzorów:

$$A = A - p_k * I$$

$$A = R * Q + p_k * I \qquad I = diag(1)$$

Powtarzałem do momentu kiedy największa wartość bezwzględna (oprócz tej na diagonali) w k-tym wierszu będzie mniejsza od założonej tolerancji (0,00001). Wtedy zmniejszałem macierz A o ostatni wiersz i kolumnę i powtarzałem algorytm do momentu dojścia do pierwszego elementu macierzy.

Dla rozwiązanych macierzy porównałem wyniki z funkcją eig i wyniki były takie same z dokładnością do kolejności i do 4 miejsc po przecinku.

Średnia ilość iteracji dla różnych metod

Wymiar macierzy	Symetryczna bez przesunięć	Symetryczna z przesunięciami	Dowolna
5x5	45.8333	7.6667	11
	280.0667	7.9667	10
	74.7333	7.8000	10.1667
10x10	217.8000	16.3000	27.4667
	1.8496e+03	16.0667	25
	1.9667e+03	16.3667	25.9333
20x20	1.4409e+03	32.5667	57.6667
	3.1137e+03	33.1333	58.6000
	1.5847e+03	33.1333	57.5000

Zadanie 1 pkt a)

```
%
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt 2.18
%zadanie 1
%
%Oblicznie wektorów własnych macierzy nieosobliwych metodą QR
%macierz symetryczna bez przesunięć
%

% A-macierz wejściowa
% n-wymiar macierzy
% s-wartość średniej liczby iteracji
% v-wektor wartości własnych macierzy A

function s = zad1a(n)
k=1;
suma=0;
while k<=30
    A = rand(n);
    A = A + A';
    [i,v]=qr_b_prz (A,n);
    suma = suma+i;
    k=k+1;
end
s=suma/30;
end
```

Zadanie 1 pkt b)

```
%
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt 2.18
%zadanie 1
```

```
%
%Oblicznie wektorów własnych macierzy nieosobliwych metodą QR
%macierz symetryczna z przesunięciami
%

% A-macierz wejściowa
% n-wymiar macierzy
% s-wartość średniej liczby iteracji
% v-wektor wartości własnych macierzy A

function s = zad1b(n)
k=1;
suma=0;
while k<=30
    A = rand(n);
    A = A + A';

    [i,v]=qr_prz (A,n);
    suma = suma+i;
    k=k+1;
end
s=suma/30;
end
```

Zadanie 1 pkt c)

```
%
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt 2.18
%zadanie 1
%
%Oblicznie wektorów własnych macierzy nieosobliwych metodą QR
%macierz dowolna z przesunięciami
%

% A-macierz wejściowa
% n-wymiar macierzy
% s-wartość średniej liczby iteracji
% v-wektor wartości własnych macierzy A

function s = zad1c(n)
k=1;
suma=0;
while k<=30
    A = rand(n);
    [i,v]=qr_prz (A,n);
    suma = suma+i;
    k=k+1;
end
s=suma/30;
end
```

Rozkład QR

```
function [Q,R] = qr_moj(A,n)

% A-macierz wejściowa do rozkładu QR
% n-wymiar macierzy
% Q-macierz Q rozkładu QR
```

```
% R-macierz R rozkładu QR
% w-mnożnik do normalizacji macierzy QR

j=1;
R=zeros(n);
while j<=n % rozkład qr macierzy A
    k=1;
    r=zeros(n,1);
    R(j,j)=1;
    while k<j
        R(k,j)=(Q(:,k)'*A(:,j))/(Q(:,k)'*Q(:,k));
        r(:,1)=r(:,1)+R(k,j)*Q(:,k);
        k=k+1;
    end
    Q(:,j)=A(:,j)-r(:,1);
    j=j+1;
end
j=1;
while j<=n % normalizacja macierzy qr
    w=0;
    k=1;
    while k<=n
        w=w+Q(k,j)^2;
        k=k+1;
    end
    w=sqrt(w);
    k=1;
    while k<=n
        Q(k,j)=Q(k,j)/w;
        R(j,k)=R(j,k)*w;
        k=k+1;
    end
    j=j+1;
end

end
```

Metoda QR bez przesunięć

```
function [i,v] = qr_b_prz(A,n)

% A-macierz wejściowa do rozkładu QR
% n-wymiar macierzy
% Q-macierz Q rozkładu QR
% R-macierz R rozkładu QR
% v-wektor wartości własnych macierzy A

i=0;
while i<=1000000
[Q,R]=qr_moj(A,n);
A =R*Q;
w=1;
j=1;
while j<=n %sprawdzanie warunku dokładności wyniku
    k=1;
    while k<n
        if j~=k
            if A(j,k)>0.00001
                w=0;
            end
```

```
        end
        k=k+1;
    end
    j=j+1;
end
if w==1
    k=1;
    while k<=n
        v(k)=A(k,k);
        k=k+1;
    end
    break
end
i=i+1;
end
end
```

Metoda QR z przesunięciami

```
function [i,v] = qr_prz(A,n)

% A-macierz wejściowa do rozkładu QR
% n-wymiar macierzy
% Q-macierz Q rozkładu QR
% R-macierz R rozkładu QR
% v-wektor wartości własnych macierzy A
% b-ślad po podmacierzy 2x2 macierzy A
% c-wyznacznik podmacierzy 2x2 macierzy A
% d-delta równania l^2+bl+c=0
% x1,2 = pierwiastki równania l^2+bl+c=0
% e-wartość pk

v=0;
k=n;
i=0;
while k>1
    while i<1000 & max(abs(A(k,1:k-1)))>0.00001
        b=-(A(k,k)+A(k-1,k-1));
        c=(A(k,k)*A(k-1,k-1))-(A(k,k-1)*A(k-1,k));
        d=b^2-4*c;
        x1=(-b-sqrt(d))/2;
        x2=(-b+sqrt(d))/2;
        if (x1-A(k,k)) < (x2-A(k,k))
            e = x1;
        else
            e = x2;
        end
        A=A-e*eye(k);
        [Q,R]=qr_moj(A,k);
        A = R*Q+e*eye(k);
        i=i+1;
    end
    v(k)=A(k,k);
    A = A(1:k-1,1:k-1);
k=k-1;
end
v(k)=A(k,k);
end
```

Pkt 2. Aproksymacja danych do funkcji wielomianowych

Do rozwiązania problemu użyłem następujących wzorów:

$G * a = q$, gdzie a jest wektorem stałych przy kolejnych potęgach x

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_j^{j+k-2}$$

$$q_k = \sum_{j=1}^{n} y_j * x_j^{k-1}$$

, gdzie n jest równe rozmiarowi danych wejściowych

Dane wejściowe:

x_i	y_i
-5	-14,2376
-4	-7,7256
-3	-4,1949
-2	-2,4815
-1	-1,2683
0	-1,7885
1	-1,7269
2	-3,3830
3	-8,9977
4	-21,3130
5	-42,6544

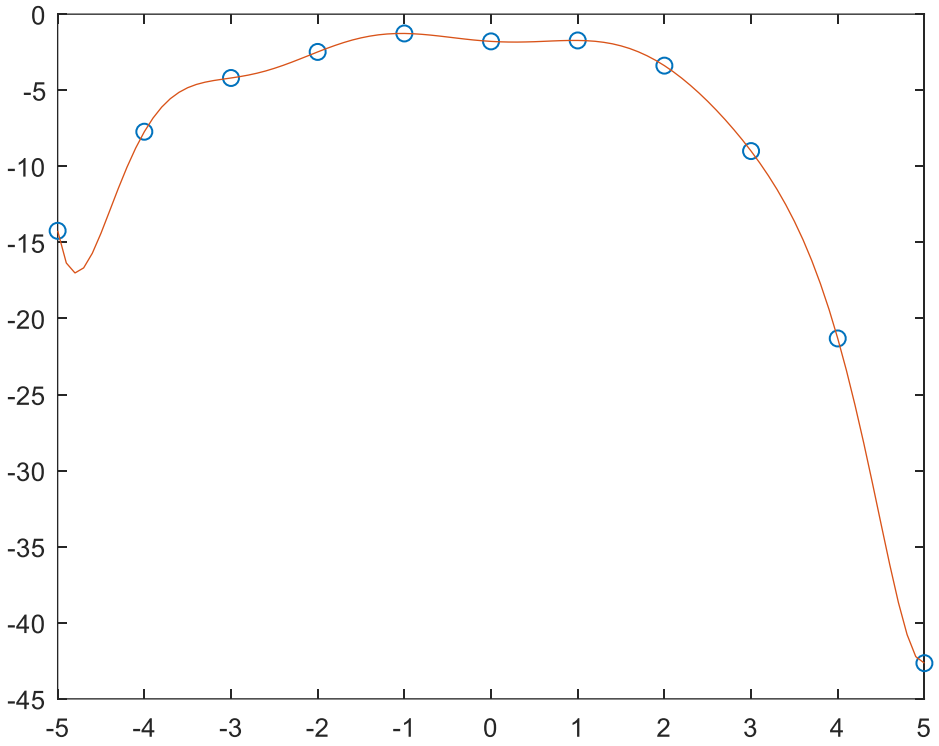
Wielomian przybliżający nie powinien mieć wyższej lub równej potęgi niż wejściowa ilość danych. Dlatego dla tych danych maksymalna potęga x wynosi 10.

Tabela norm dla obliczonych stopni wielomianów

Maksymalna potęga x w wielomianie	Typ normy	
	Czebyszewa	Euklidesowa
0	32.6752	39.5544
1	22.9887	33.9368
2	6.6532	11.5811
3	2.6996	6.2604
4	0.5208	0.8837
5	0.5008	0.8117
6	0.4669	0.6298
7	0.3139	0.5013
8	0.2975	0.4627
9	0.2254	0.3845
10	1.0027e-08	1.2402e-08

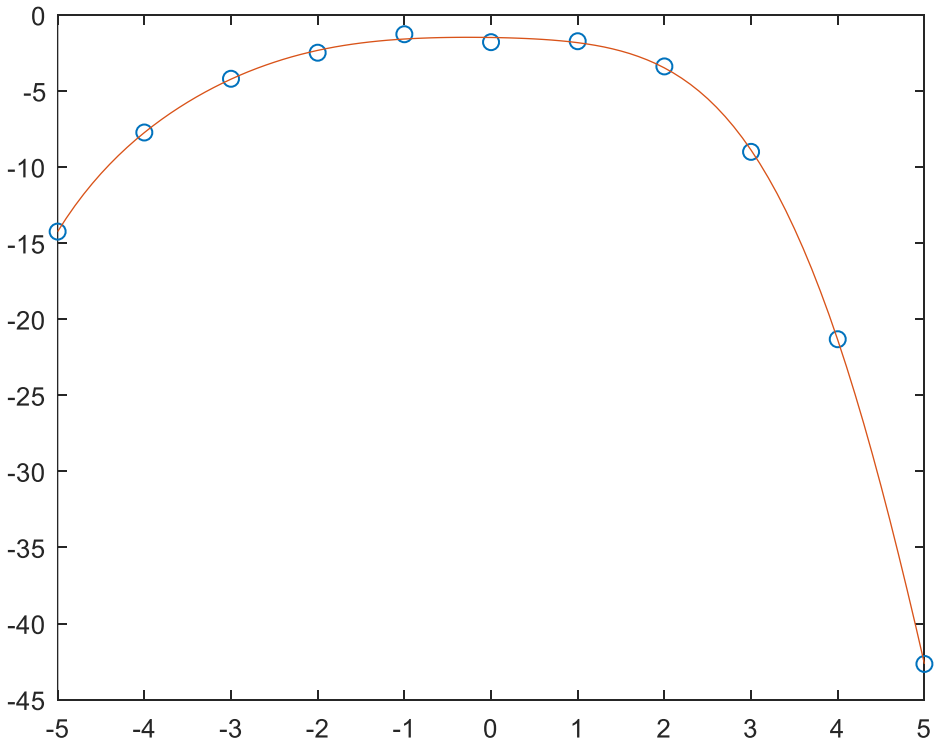
Jak można zauważyć najdokładniejszą funkcję otrzymaliśmy w przypadku zastosowania wielomianu 10 stopnia. Jak można zauważyć nie oddaje on jednak całkowicie funkcji jakiej mogliśmy się na początku spodziewać, ponieważ posiada ekstremum lokalne pomiędzy x=-5, a x=-4, czego nie jest się w stanie przewidzieć patrząc na rozkład punktowy funkcji aproksymowanej. Dlatego też oprócz przybliżenia wielomianem 10 stopnia przybliżyłem również wielomianem 8 stopnia, który również ma dobre właściwości

Wykres funkcji aproksymującej 10 stopnia:



Maksymalna potęga x w wielomianie	Wartość stałej przy x
0	-1.7885
1	-0.3412
2	0.6211
3	0.1466
4	-0.3737
5	-0.0366
6	0.0459
7	0.0019
8	-0.0025
9	-3,4973e-05
10	4,5545e-05

Wykres funkcji aproksymującej 8 stopnia:



Maksymalna potęga x w wielomianie	Wartość stałej przy x
0	-1.5631
1	-0.0900
2	-0.0492
3	-0.0225
4	-0.0756
5	-0.0074
6	0.0024
7	0.0002
8	-4,1509e-05

Zadanie 2

```
%
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt 2.18
%zadanie 2
%
%Metoda najmniejszych kwadratów przy wyznaczaniu funkcji
%układ równań normalnych
%

% x-wektor danych x
% y-wektor danych y
```

```
% a-wektor aproksymacji w bazie wielomianów
% h-rozmiar wektorów danych
% m-maksymalny stopień wielomianu przybliżającego


function a = zad2a()

x = [-5:1:5];
y = [-14.2376 -7.7256 -4.1949 -2.4815 -1.2683 -1.7885 -1.7269 -3.3830 -
8.9977 -21.3130 -42.6544];
h=11;
m=9;

a = aproksymacja(x,y,h,m);

end
```

Kod części aproksymującej

```
function a = aproksymacja(x,y,h,m)

% x-wektor danych x
% y-wektor danych y
% a-wektor aproksymacji w bazie wielomianów
% G-macierz pomocnicza
% q-wektor pomocniczy
% xa-wektor x funkcji aproksymującej
% ya-wektor y funkcji aproksymującej
% h-rozmiar wektorów danych
% cz-norma Czebyszewa (maksimum) obliczonej funkcji
% e-norma euklidesowa obliczonej funkcji
% m-maksymalny stopień wielomianu przybliżającego

n=1;
while n<=m % obliczanie wektora aproksymacji dla kolejnych h-1 maksymalnych
potęg x
    k=1;
    while k<=n % obliczenie macierzy pomocniczej G
        i=1;
        while i<=n
            j=1;
            G(i,k) = 0;
            while j<=h
                G(i,k) = G(i,k) + x(j)^(i+k-2);
                j=j+1;
            end
            i=i+1;
        end
        q(k)=0;
        j=1;
        while j<=h % obliczenie wektora pomocniczego q
                q(k)=q(k)+y(j)*x(j)^(k-1);
                j=j+1;
        end
            k=k+1;
    end
    a=q*G^(-1);
    xa = [-5:0.1:5];
    i=1;
```

```
    while i<=(10/0.1)+1 % obliczanie wartości funkcji aproksymującej do
narysowania wykresu
        j=1;
        ya(i)=0;
        while j<=n
            ya(i)= ya(i) + a(j)*xa(i)^(j-1);
            j=j+1;
        end
        i=i+1;
    end
    plot (x,y,'o',xa,ya);
    i=1;
    while i<=h % obliczanie wartości funkcji aproksymującej do obliczenia
odpowiednich norm
        j=1;
        yb(i)=0;
        while j<=n
            yb(i)= yb(i) + a(j)*x(i)^(j-1);
            j=j+1;
        end
        i=i+1;
    end
    n=n+1;
    cz = max(abs(y-yb)) % norma Czebyszewa (maksimum) obliczonej funkcji
    e = norm(y-yb) % norma euklidesowa obliczonej funkcji

end
end
```