Tomasz Indeka

Metody numeryczne

Zadanie 1.20 – Sprawozdanie

Pkt 1. Dokładność maszynowa komputera

Do obliczenia dokładności maszynowej został wykorzystany algorytm obliczający kolejne ujemne potęgi dwójki. Moment, w którym liczba aktualna i kolejna zostały uznane za równe lub moment, w którym do obliczonej niedokładności dodanie 1 daje wynik równy 1, oznacza że obliczona wartość jest mniejsza niż dokładność maszynowa.

Warunki : $2^{-t} = 2^{-(t+1)}$, $1+2^{-t} = 1$

Wynik: eps = 2^{-t+1}

Otrzymany wynik: eps = 2.2204e-16
Wynik ten odpowiada liczbie 2^{-52}

Kod programu:

```
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt
%zadanie 1.20, pkt 1
%Wyznaczanie dokladnosci maszynowej

%t - liczba znakow mantysy
%eps - dokladnosc maszynowa

t=0;
while 2^(-t)~=2^(-(t+1)) && (1+2^(-t))~=1
    t=t+1;
end
eps = 2^(-t+1)
```

Pkt 2. Rozwiązywanie równań metodą Cholesky'ego-Banachiewicza

Do rozwiązania macierzy metodą Cholesky'ego-Banachowicza zostały wyznaczone macierze L i L^T wyznaczone ze wzoru : $A=LL^T$, gdzie:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} * l_{ik})/l_{ii}$, i = 1, 2, … , n, j = i+1, i+2, …, n

Wykorzystano równania Ly = b i L^Tx = y do obliczenia wektora x.

Norma residuum jest liczona jako norma Euklidesowa wektora r = Ax-b.

Dla danych:

a) $$a_{ij} = \begin{cases} 10, dla\ i = j \\ 2.5, dla\ i = j-1\ lub\ i = j+1 \\ 0, w.p.p. \end{cases}$$

$b_i = 4 - 0.5i$

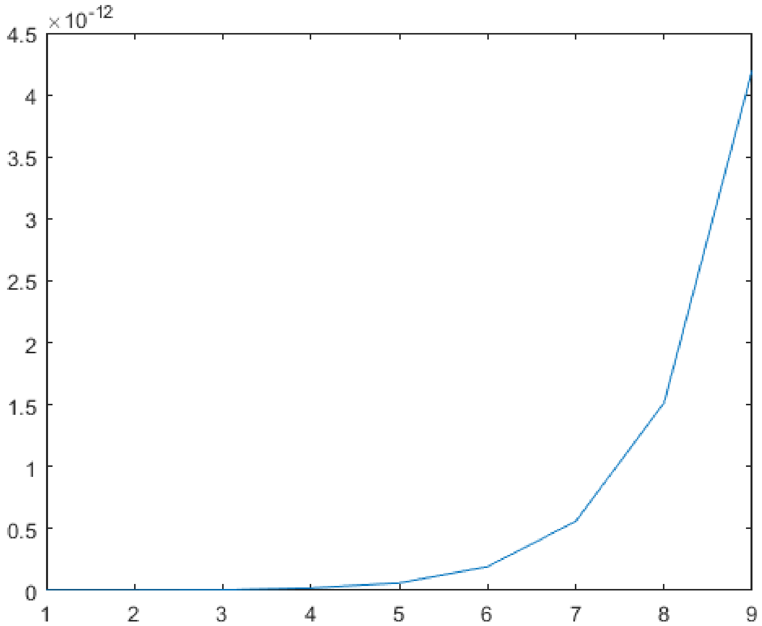
b) $a_{ij} = i + j + 1$
$a_{ii} = 3n^2 - i$
$b_i = 2.5 + 0.6i$

c) $a_{ij} = \frac{1}{6(i+j+1)}$
$a_{ii} = 0.1n + 0.3i$
$b_i = \frac{5}{3i}$

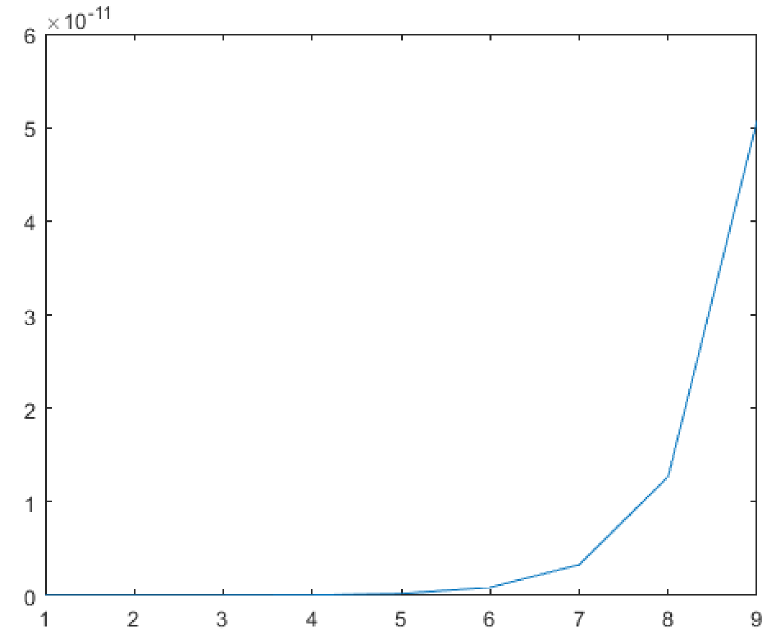
Wyniki:

Dla mojej konfiguracji sprzętowej maksymalna ilość równań w czasie do 3 minut wynosiła 2560 i na podstawie obliczonych w tym czasie danych utworzyłem wykresy normy residuum od liczny równań $n = 10 * m^2$:

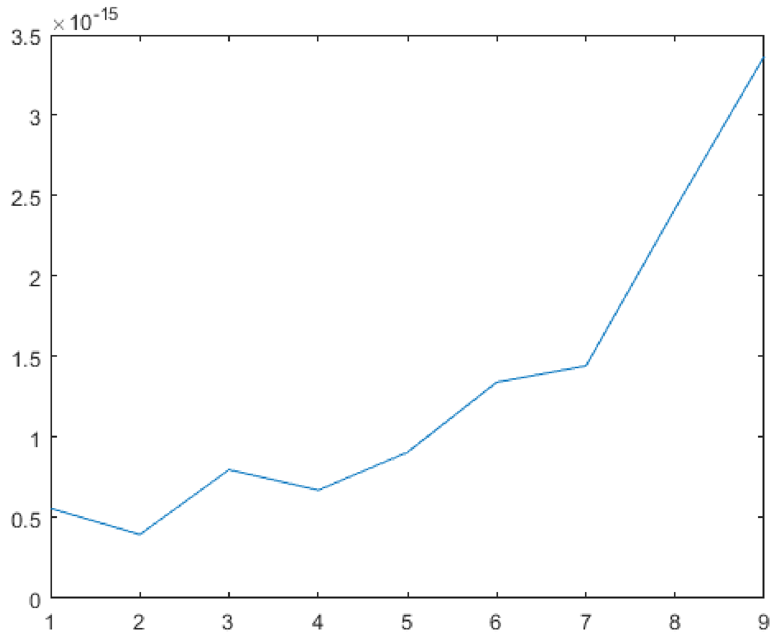
a)



b)



c)



Kod programu:

```
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt
%zadanie 1.20, pkt 2
%Rozwiązywanie równań metodą Choleskiego – Banachowicza

%n-wielkość macierzy pierwotnej
%A-macierz rownań liniowych
%b-rozwiązanie rownania Ax=b
%x-wektor rozwiązań macierzy A
```

```
%m-mnożnik wielkości macierzy pierwornej
%r-rożnica między wynikiem obliczonym, a prawidłowym
%res-norma z rożnicy r
```

a)

```
m=1;
while m<=9 % warunek na wielkośc macierzy zależny od posiadanego sprzętu i
czasu
n = 10*2^(m-1);
A = zeros(n);
i=1;
while i<=n %obliczanie macierzy A za pomocą podanego w treści zadania wzoru
    j=1;
    while j<=n
        if j==i
            A(j,i)=10;
        elseif i==(j+1) || i==(j-1)
            A(j,i)=2.5;
        end
        j=j+1;
    end
    i=i+1;
end
b = zeros(n,1);
i=1;
while i<=n %obliczanie wektora b za pomocą podanego w treści zadania wzoru
    b(i,1)=4-(i/2);
    i=i+1;
end
x = Choleski(n,A,b); % wywolanie funkcji obliczającej x
r=A*x-b;
res(m) = residuum(n,r); % wywolanie funkcji obliczającej residuum
m=m+1;
end
plot(res)
```

b)

```
m=1;
while m<=9 % warunek na wielkośc macierzy zależny od posiadanego sprzętu i
czasu
n = 10*2^(m-1);
A = zeros(n);
i=1;
while i<=n %obliczanie macierzy A za pomocą podanego w treści zadania wzoru
    j=1;
    while j<=n
        if j==i
            A(j,i)=3*n*n-i;
        else
            A(j,i)=i+j+1;
        end
        j=j+1;
```

```
    end
    i=i+1;
end
b = zeros(n,1);
i=1;
while i<=n %obliczanie wektora b za pomocą podanego w treści zadania wzoru
    b(i,1)=2.5+0.6*i;
    i=i+1;
end
x=Choleski(n,A,b); % wywolanie funkcji obliczającej x
r=A*x-b;
res(m) = residuum(n,r); % wywolanie funkcji obliczającej residuum
m=m+1;
end
plot(res)
```

c)

```
m=1;
while m<=9 % warunek na wielkość macierzy zależny od posiadanego sprzętu i
czasu
n = 10*2^(m-1);
A = zeros(n);
i=1;
while i<=n %obliczanie macierzy A za pomocą podanego w treści zadania wzoru
    j=1;
    while j<=n
        if j==i
            A(j,i)=0.1*n+0.3*i;
        else
            A(j,i)=1/(6*(i+j+1));
        end
        j=j+1;
    end
    i=i+1;
end
b = zeros(n,1);
i=1;
while i<=n %obliczanie wektora b za pomocą podanego w treści zadania wzoru
    b(i,1)=5/(3*i);
    i=i+1;
end
x=Choleski(n,A,b); % wywolanie funkcji obliczającej x
r=A*x-b;
res(m) = residuum(n,r); % wywolanie funkcji obliczającej residuum
m=m+1;
end
plot(res)
```

Kod funkcji `Choleski`:

```
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt
%zadanie 1.20
%Algorytm Choleskiego-Banachowicza

%n-wielkość macierzy pierwotnej
%A-macierz rownań liniowych
%b-rozwiązanie rownania Ax=b
%x-wektor rozwiązań macierzy A
%L-macierz poddiagonalna rozkładu A=LL'
%y-wektor pośredni rozwiązania Ly=b

function x = Choleski(n,A,b)

L = zeros(n);
i=1;
while i<=n %utworzenie macierzy L rozkładu LL'
    j=i;
    while j<=n
        if j==i
            k=1;
            l=0;
            while k<=i-1
                l=l+L(i,k)^2;
                k=k+1;
            end
            L(i,j) = sqrt(A(j,i)-l);
        else
            k=1;
            l=0;
            while k<=i-1
                l=l+L(j,k)*L(i,k);
                k=k+1;
            end
            L(j,i) = (A(j,i)-l)/L(i,i);
        end
        j=j+1;
    end
    i=i+1;
end
y = zeros(n,1); %obliczenie wektora y ze wzoru Ly=b
j=1;
while j<=n
    i=1;
    l=0;
    while i<j
        l = l + y(i,1)*L(j,i);
        i=i+1;
    end
    y(j,1)=(b(j,1)-l)/L(j,i);
    j=j+1;
end
x = zeros(n,1); %obliczenie wektora x, będącego rozwiązaniem układu) ze
wzoru L'x=y
i=n;
while i>=1
    j=n;
    l=0;
    while i<j
```

```
        l = l + x(j,1)*L(j,i);
        j=j-1;
    end
    x(j,1)=(y(j,1)-l)/L(j,i);
    i=i-1;
end
end
```

Kod funkcji `residuum`:

```
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt
%zadanie 1.20
%obliczanie residuum z rozwiązania

%n-wielkosc macierzy pierwotnej
%r-rożnica między wynikiem obliczonym, a prawidłowym
%res-norma z rożnicy r

function res = residuum (n,r)
i=1;
res=0;
while i<=n %obliczanie normy euklidesowej z wektora r
    res = res + r(i)^2;
    i = i+1;
end
res= sqrt(res);
end
```

Pkt 3. Rozwiązywanie równań metodą Gaussa-Seidela

Do rozwiązania macierzy metodą iteracyjną Gaussa-Seidela zostały wyznaczone macierze D, U i L wyznaczone ze wzoru : A=U+D+L , gdzie:

$D_{ji} = A_{ji}$, j = i

$U_{ji} = A_{ji}$, j < i

$L_{ji} = A_{ji}$, j > i

a reszta macierzy uzupełniona jest zerami. Wykorzystano równanie: $x_j^{i+1} = \sum_{k=1}^{j-1}\left(-l_{jk} * x_k^{i+1}\right) - Ux^i + b$ do obliczenia wektora x^{i+1}, przyjmując jako x^0 wektor zerowy. Błąd przybliżenie był liczony jako norma euklidesowa różnicy między kolejnymi iteracyjnymi przybliżeniami rozwiązania.

Dane macierzy były takie same jak dane w p(b) zadania powyżej, czas także był ograniczony do 3 minut.

Warunki ciągłości pętli iterowania:

```
i<1000
e>2^-50
```

Dodatkowo zastosowałem warunek, aby wykonał co najmniej 5 iteracji, aby nie zakończył od razu (wartość e była inicjowana zerem, a to nie spełniało warunku)

Wyniki:

n – ilość równań w macierzy

i – ilość iteracji, po których uzyskano wynik

e – uzyskany błąd przybliżenia

```
n = 10
i = 14
e = 4.6931e-16

n = 20
i = 14
e = 1.2945e-16

n = 40
i = 14
e = 1.1827e-16

n = 80
i = 13
e = 7.3252e-16

n = 160
i = 13
e = 4.1899e-16

n = 320
i = 13
e = 2.7090e-16

n = 640
i = 13
e = 1.8442e-16

n = 1280
i = 13
e = 1.2843e-16

n = 2560
i = 13
e = 9.0129e-17
```

Wnioski:

Taka zadziwiająco niska ilość iteracji najprawdopobniej wynika ze szczególnego rozkładu wartości w macierzy, gdzie wartości na diagonali były wielokrotnie większe niż w reszcie macierzy. Poskutkowało to bardzo szybkim zbieganiem wyniku do wyznaczonej dokładności czyli do wartości 2^{-50}.

Algorytm sprawiał wrażenie wydajniejszego od metody Cholesky'ego-Banachowicza, ponieważ dla tej samej liczby równań osiągał trochę niższy czas.

Kod programu:

```
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt
%zadanie 1.20, pkt 2
%Rozwiązywanie równań metodą Gaussa-Seidela
```

```
%i-ilość powtorzeń iteracyjnego poprawiania rozwiązania
%n-wielkość macierzy pierwotnej
%A-macierz rownań liniowych
%b-rozwiązanie rownania Ax=b
%x-wektor rozwiązań macierzy A
%D-macierz diagonalna macierzy A
%U-macierz naddiagonalna macierzy A
%L-macierz poddiagonalna macierzy A
%w-wektor Ux-b
%m-mnożnik wielkości macierzy pierwornej
%e-błąd przybliżenia

m=1;
while m<=9 % warunek na wielkośc macierzy zależny od posiadanego sprzętu i
czasu
n = 10*2^(m-1);
A = zeros(n);
k=1;
while k<=n %obliczanie macierzy A za pomocą podanego w treści zadania wzoru
    j=1;
    while j<=n
        if j==k
            A(j,k)=3*n*n-k;
        else
            A(j,k)=k+j+1;
        end
        j=j+1;
    end
    k=k+1;
end
b = zeros(n,1); %obliczanie wektora b za pomocą podanego w treści zadania
wzoru
k=1;
while k<=n
    b(k,1)=2.5+0.6*k;
    k=k+1;
end
x = Gauss_Seidel(n,A,b); % wywolanie funkcji obliczającej x
m=m+1;
end
```

Kod funkcji Gauss_Seidel:

```
%Tomasz Indeka
%MNUM-Projekt
%zadanie 1.20, pkt 2
%Algorytm Gaussa-Seidela

%i-ilość powtorzeń iteracyjnego poprawiania rozwiązania
%n-wielkość macierzy pierwotnej
%A-macierz rownań liniowych
%b-rozwiązanie rownania Ax=b
%x-wektor rozwiązań macierzy A
%D-macierz diagonalna macierzy A
%U-macierz naddiagonalna macierzy A
%L-macierz poddiagonalna macierzy A
```

```
%w-wektor Ux-b
%e-błąd przybliżenia

function x = Gauss_Seidel(n,A,b)

D = zeros(n);
L = zeros(n);
U = zeros(n);
k=1;
while k<=n %obliczanie macierzy D, L i U na podstawie macierzy A
    j=1;
    while j<=n
        if j==k
            D(j,k)=A(j,k);
        elseif j>k
            L(j,k)=A(j,k);
        else
            U(j,k)=A(j,k);
        end
        j=j+1;
    end
    k=k+1;
end

i=0;
e=0;
x = zeros(n,1); %założenie że rozwiązanie zerowe jest rowne wektorowi
zerowemu
while (i<1000  && e>2^(-50)) || i<5 % obliczanie kolejnych przybliżeń
rozwiązania
    xpom=x; % chwilowe zapamiętanie wektora rozwiązań do poźniejszych
porownań
    w=U*x - b;
    j=1;
    while j<=n
        k=1;
        l=-w(j);
        while k<=j
            l=l-L(j,k)*x(k);
            k=k+1;
        end
        x(j)=l/D(j,j);
    j=j+1;
    end
    xpom=xpom-x; %obliczenie rożnicy pomiędzy rozwiązaniami
    k=1;
    e=0;
    while k<=n % obliczenie błędu przybliżenia
        e = e + xpom(k)^2;
        k = k+1;
    end
    e = sqrt(e);
    i=i+1;
end
n
i
e
end
```