

STP projekt 2, zadanie 13

Tomasz Indeka

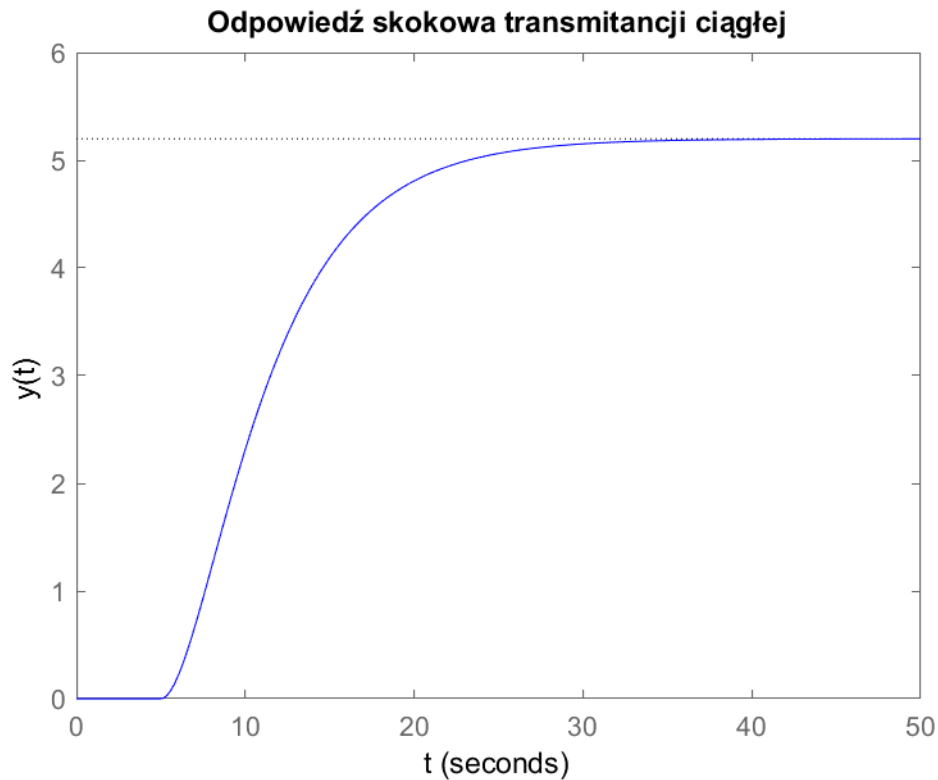
1 Transmitancja ciągła i dyskretna

1.1 Transmitancja ciągła

Transmitancja ciągła $G(s)$ obiektu regulacji opisanego w zadaniu ma postać:

$$G(s) = \frac{5.2e^{-5s}}{(2.16s + 1)(4.7s + 1)} = \frac{5.2e^{-5s}}{10.15s^2 + 6.86s + 1}$$

Odpowiedź skokowa tego obiektu ma postać:

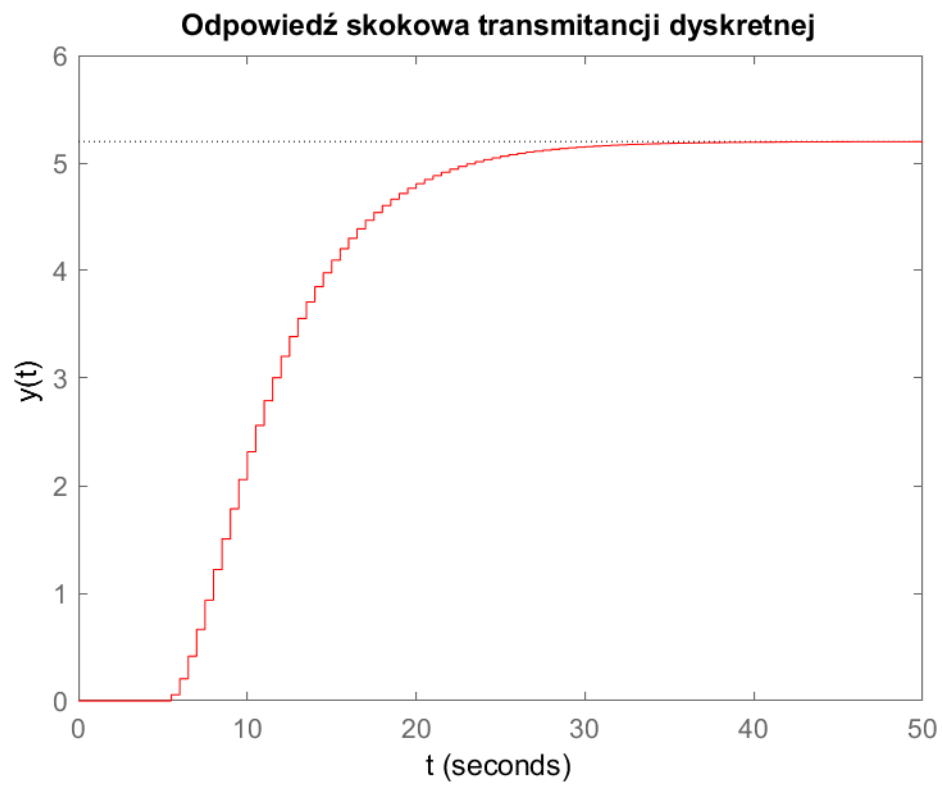


1.2 Transmitancja dyskretna

Transmitancja dyskretna $G(z)$ obiektu regulacji z ekstrapolatorem zerowego rzędu i częstotliwości próbkowania $T_p = 0.5s$ ma postać:

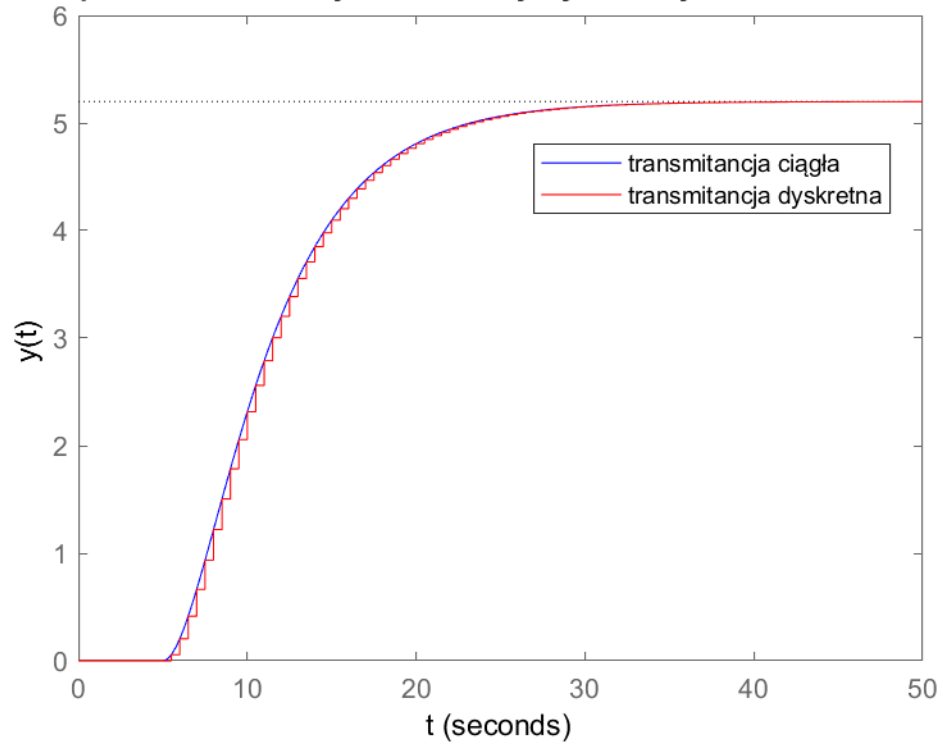
$$G(z) = z^{-10} \frac{0.05727z + 0.05117}{z^2 - 1.692z + 0.7133}$$

Odpowiedź skokowa tego obiektu w sferze dyskretniej ma postać:



1.3 Porównanie transmitancji ciągłej i dyskretnej

Wykres odpowiedzi skokowej transmitancji dyskretnej na tle transmitancji ciąg



Obie transmitancje przyjmują bardzo podobny kształt, różnią się one jedynie tym, że transmitancja dyskretna ma wygląd schodkowy. Współczynnik wzmocnienia statycznego obu transmitancji jest identyczny i wynosi 5.2.

2 Równania różnicowe modelu

Aby otrzymać równanie różnicowe typu:

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^m b_i u(k-i)$$

Należy skorzystać z zależności:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

i dalszych przekształceń, które wyglądały tak:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-10} \frac{0.05727z + 0.05117}{z^2 - 1.692z + 0.7133}$$

$$Y(z)(z^2 - 1.692z + 0.7133) = z^{-10}U(z)(0.05727z + 0.05117)$$

$$Y(z)z^2 - Y(z)1.692z + Y(z)0.7133 = U(z)0.05727z^{-9} + U(z)0.05117z^{-10}$$

$$y(k+2) - 1.692y(k+1) + 0.7133y(k) = 0.05727u(k-9) + 0.05117u(k-10)$$

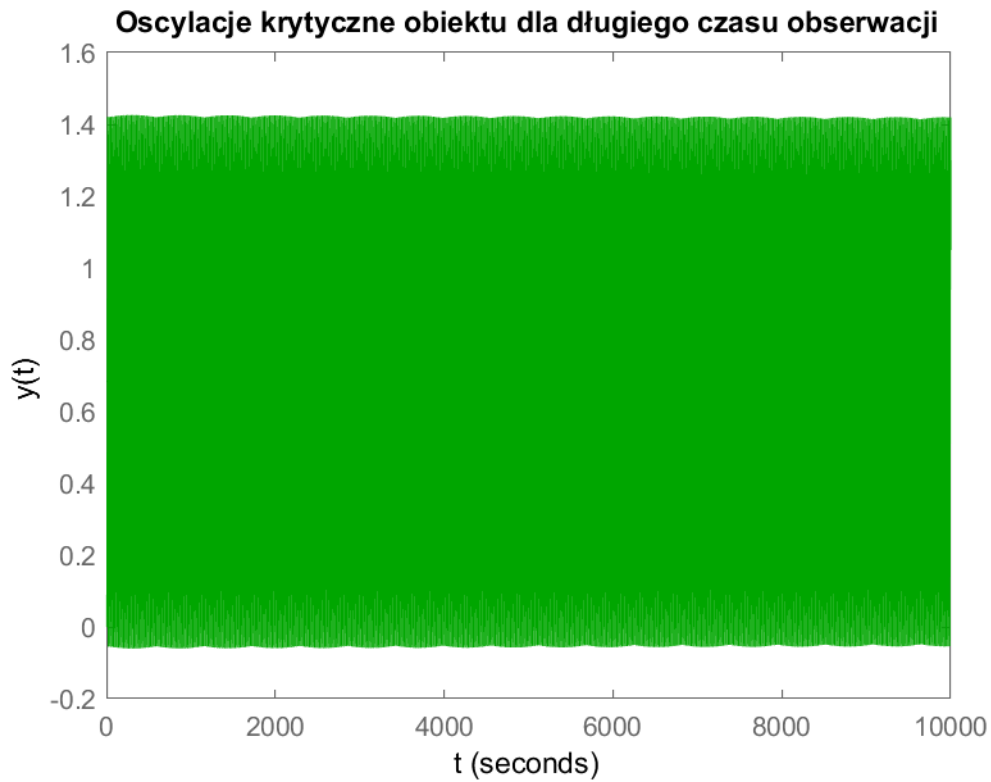
$$y(k) - 1.692y(k-1) + 0.7133y(k-2) = 0.05727u(k-11) + 0.05117u(k-12)$$

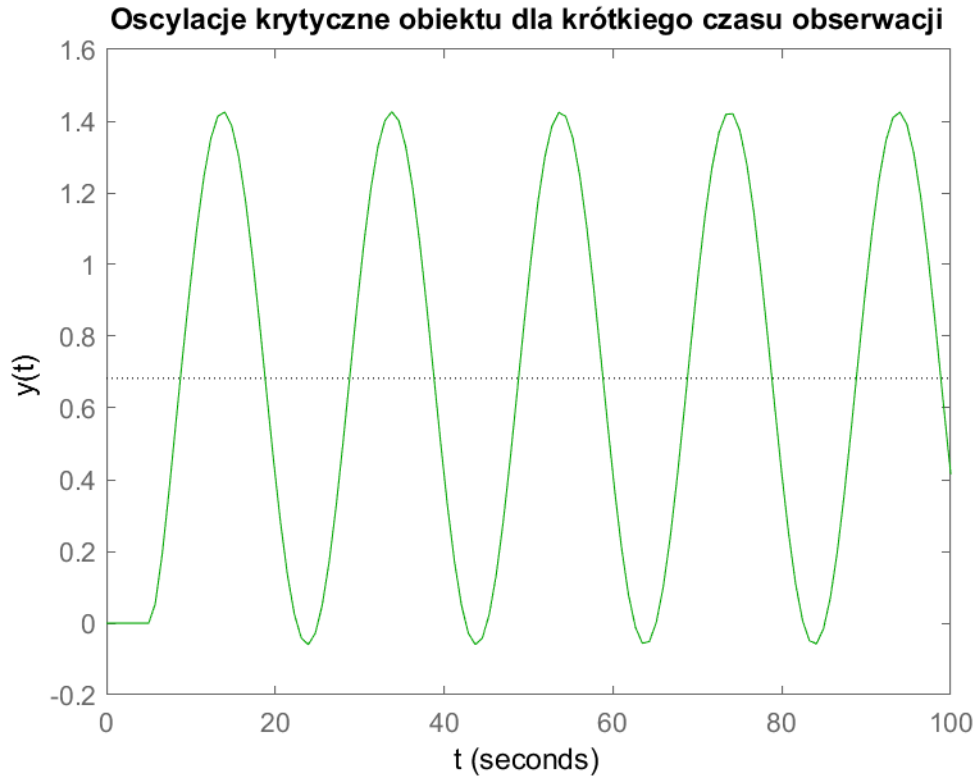
$$y(k) = 1.692y(k-1) - 0.7133y(k-2) + 0.05727u(k-11) + 0.05117u(k-12)$$

3 Regulator PID

3.1 Wzmocnienie krytyczne

Do wyznaczenia parametrów regulatora PID metoda Zieglera-Nicholsa należy najpierw wprowadzić obiekt w niegasnące oscylacje krytyczne za pomocą sprzężenia zwrotnego. W tym celu należy doświadczalnie wyznaczyć wzmocnienie tego sprzężenia, przy którym obiekt wpada w oscylacje krytyczne.





Dokładne wyznaczenie wzmocnienia krytycznego jest ważne, aby w późniejszych obliczeniach zmniejszyć potencjalny błąd, dlatego też najpierw pokazałem wzmocnienie dla tak długiego czasu próbkowania. Na wykresie z krótszym czasem możemy dokładnie wyznaczyć Okres oscylacji.

Ostatecznie okres oscylacji odczytany z wykresu wyniósł $T_k = 20.08$, dla wzmocnienia $K_k = 0.4144$

Nastawy regulatora wyznaczone z pomocą odczytanych danych wynosiły: Dla regulatora ciągłego:

$$K_r = 0.6K_k = 0.2487$$

$$T_i = 0.5T_k = 10.0200$$

$$T_d = 0.12T_k = 2.4048$$

Dla regulatora dyskretnego:

$$r_0 = K\left(\frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T} + 1\right) = 1.4508$$

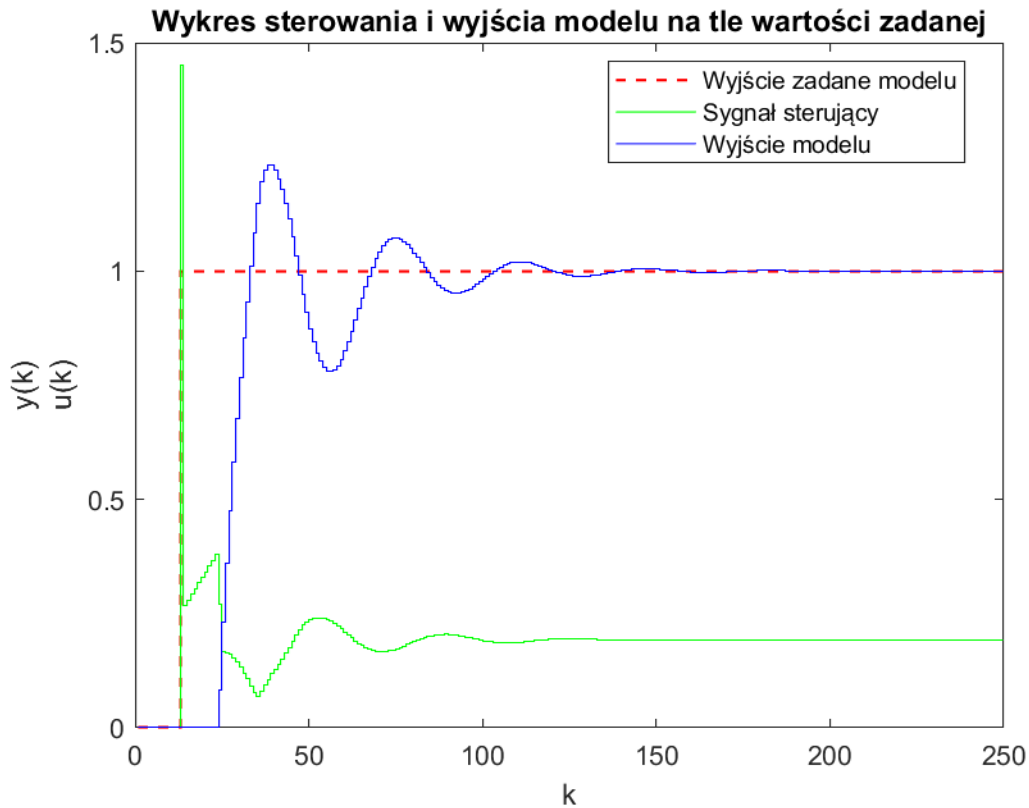
$$r_1 = K\left(\frac{T}{2T_i} - 2\frac{T_d}{T} - 1\right) = -2.634$$

$$r_2 = \frac{KT_d}{T} = 1.1959$$

4 Symulacja algorytmu PID i DMC

4.1 PID

Model PID obliczony w powyższym zadaniu został potraktowany wartością zadaną o wartości 1



Możemy zauważyć, że PID działa, ma bardzo duży skok sterowania na początku i delikatne oscylacje sygnału sterującego i wyjścia obiektu, ale trzeba pamiętać, że został on zestrojony tylko wstępnie. Po dokładniejszym dostrojeniu i dobraniu lepszych parametrów regulator poprawi trochę swoje działanie

4.2 DMC

Tutaj przedstawię ogólną metodę obliczania modelu DMC, dobieranie parametrów pracy ma miejsce w kolejnym podpunkcie. Najpierw należy dobrać dla obiektu pewien horyzont dynamiki (D), horyzont predykcji (N), horyzont sterowania (N_u) i karę za zmiany sterowania (λ). Kolejnym krokiem jest obliczenie macierzy i wektorów potrzebnych do obliczeń (parametry a i b pochodzą z równania różnicowego):

$$s_{D \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 - a_1 s_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M b_i - \sum_{i=1}^{M-1} a_i s_{M-i} \end{bmatrix}, M_{N \times N_u} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N-1} & \dots & s_{N-N_u+1} \end{bmatrix},$$

$$M_{N \times D-1}^P = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \dots & s_D - s_{D-1} \\ s_3 - s_1 & s_4 - s_2 & \dots & s_{D+1} - s_{D-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N+1} - s_1 & s_{N+2} - s_2 & \dots & s_{N+D-1} - s_{D-1} \end{bmatrix}$$

pomocniczo wyznaczamy także macierze:

$$\Psi_{N_x N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \Lambda_{N_u x N_u} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

Wszystko po to aby finalnie wyliczyć macierz wzmocnień, dla obiektu o zadanych parametrach

$$K = (M^T \Psi M + \Lambda)^{-1} M^T \Psi$$

Następnie przystępujemy do obliczeń wykonywanych w każdej kolejnej iteracji obliczania sterowania i wyjścia obiektu regulacji. Do tego celu potrzebujemy wektora wartości zadanej (w naszym przypadku stałe w całym czasie obliczeń), wektora wyjścia obliczonego z równań różnicowych i wektora zmian sterowania w poprzednich chwilach.

$$Y_{N_x 1}^{zad}(k) = \begin{bmatrix} y^{zad}(k) \\ \vdots \\ y^{zad}(k) \end{bmatrix}, Y_{N_x 1}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}, \Delta U_{D-1 x 1}^P(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k-(D-1)) \end{bmatrix}$$

Na tej postawie możemy obliczyć odpowiedź swobodną obiektu:

$$Y^0(k) = Y(k) + M^P \Delta U^P(k)$$

Odpowiedź swobodna pozwala nam w bardzo prosty sposób dotrzeć do wektora optymalnych przyrostów sygnału sterującego.

$$\Delta U_{N_u x 1}(k) = K(Y^{zad}(k) - Y^0(k)) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1|k) \end{bmatrix}$$

Wartościami, które z naszego punktu widzenia są przydatne to sygnał sterujący i odpowiedź obiektu. Odpowiedź obiektu możemy wyliczyć z wyznaczonego wcześniej równania różnicowego, natomiast wyjście obiektu z wektora przyrostów za pomocą wzoru:

$$u(k) = \Delta u(k|k) + u(k-1)$$

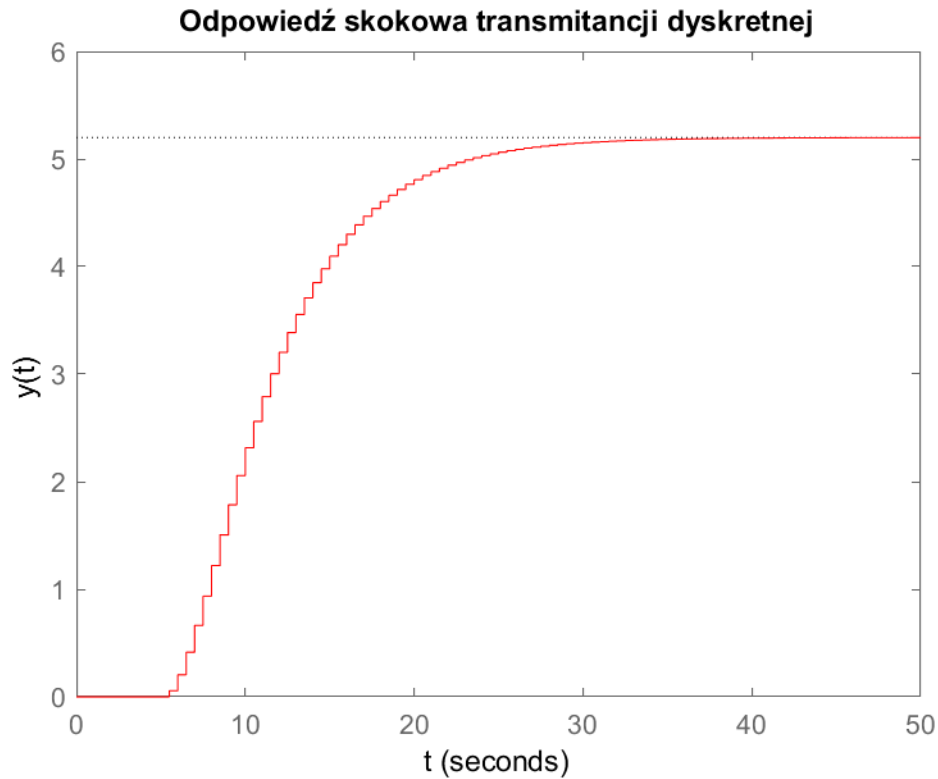
5 Dobieranie parametrów algorytmu DMC

Przy wszystkich wykresach występuje mały błąd polegający na tym, że obiekt jest pobudzony wartością zadaną $y^{zad} = 1$ od chwili 0 co jest widoczne przez brak linii rozpoczynającej wykresy od wartości 0. Jest to szczególnie widoczne przy wykresie sterowania. Wartość zadana również powinna rosnąć skokowo od 0 do 1. Ten sam błąd jest też powielony w zadaniu poszukiwania stabilności regulatorów, ponieważ oba zadania opierają się na tym samym zamodelowaniu algorytmu.

5.1 D - horyzont dynamiki

Horyzont dynamiki może zostać określony na podstawie wzmocnienia statycznego i okresu próbkowania, ze wzoru:

$$D = \frac{K_{stab}}{T_p}$$

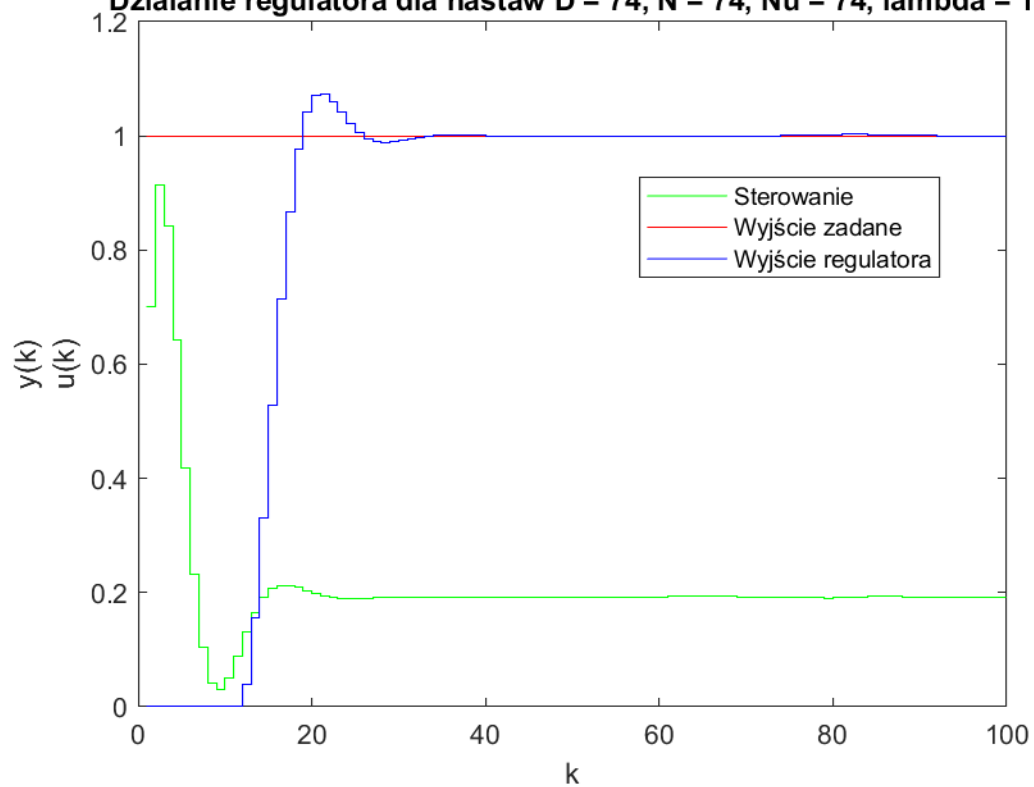


Odczyt wartości czasu powinniśmy dokonać w momencie ustabilizowania się obiektu regulacji, kiedy nie zmienia się on już znacznie. Na powyższym wykresie możemy zauważyć, że w chwili $t = 37s$ odpowiedź skokowa obiektu praktycznie przestaje się zmieniać. Dlatego do dalszych obliczeń przyjąłem $D = 74$.

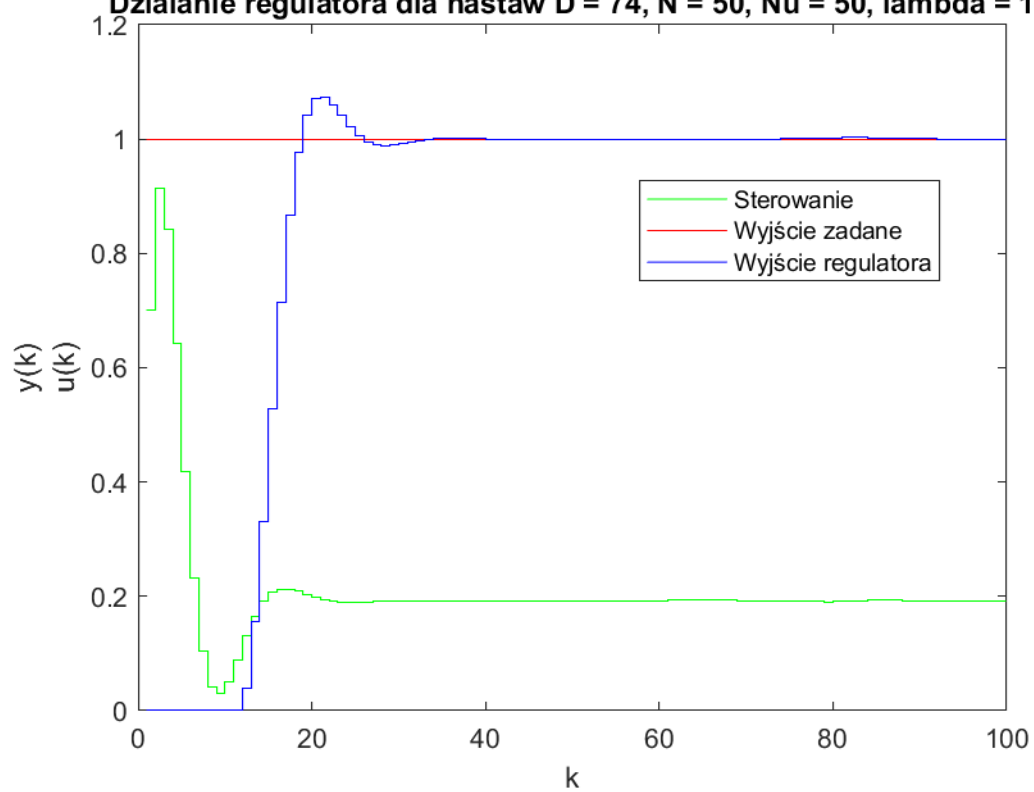
5.2 N - horyzont predykcji

Do wyznaczenia optymalnego horyzontu predykcji zmniejszałem jego wartość od wartości D aż do wartości powodującej oscylacje, w praktyce do wartości rzędu opóźnienia sygnału sterującego).

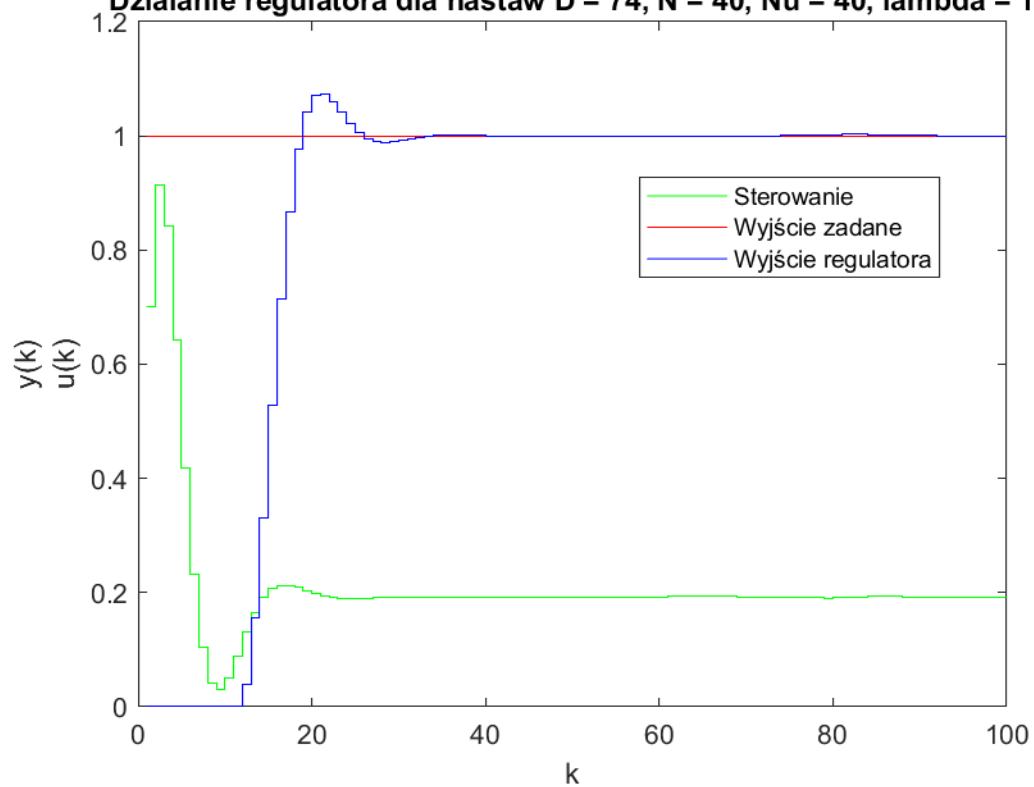
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 74$, $Nu = 74$, $\lambda = 1$



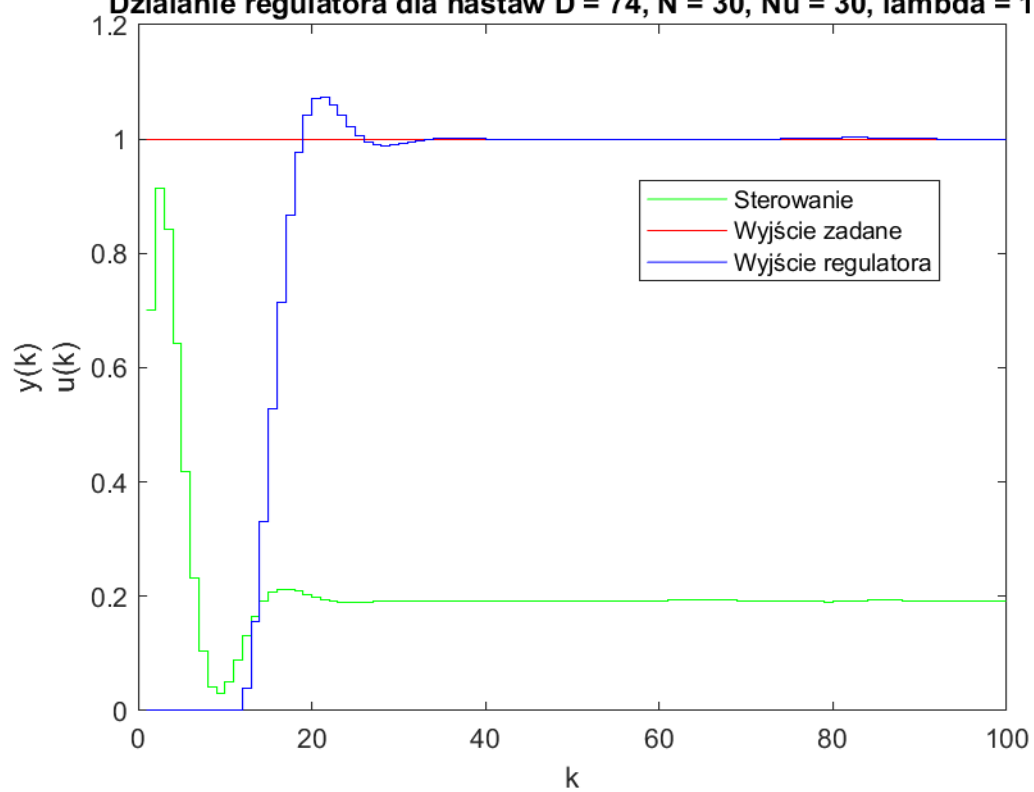
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 50$, $Nu = 50$, $\lambda = 1$



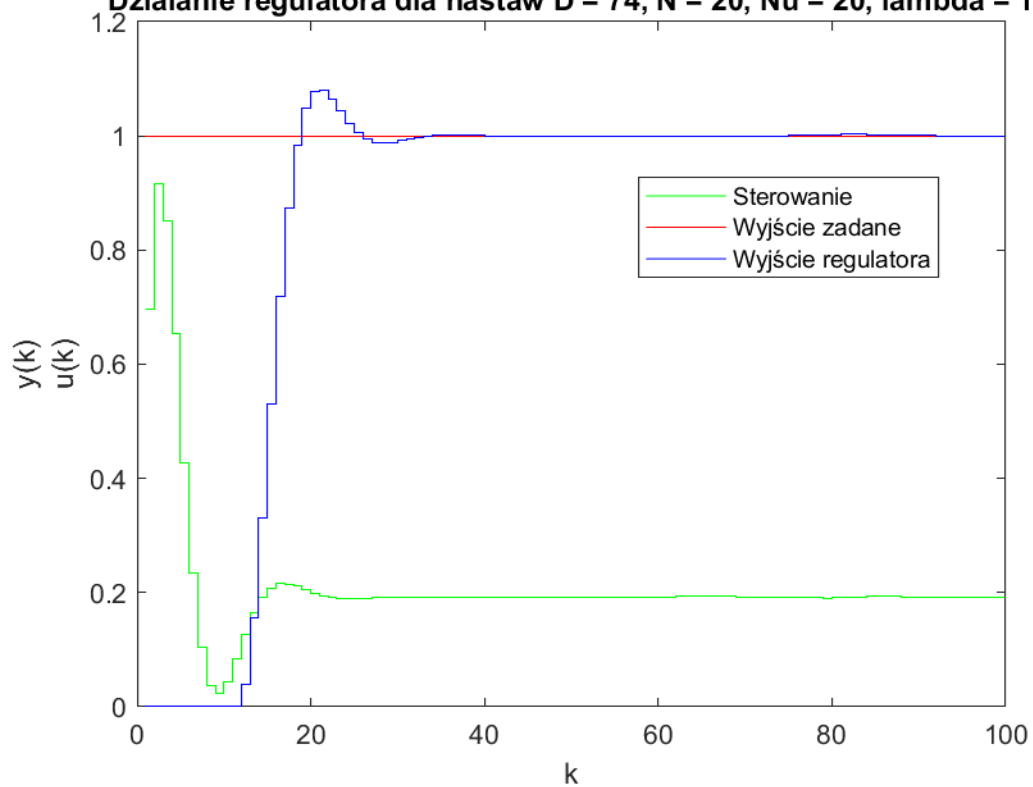
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 40$, $Nu = 40$, $\lambda = 1$



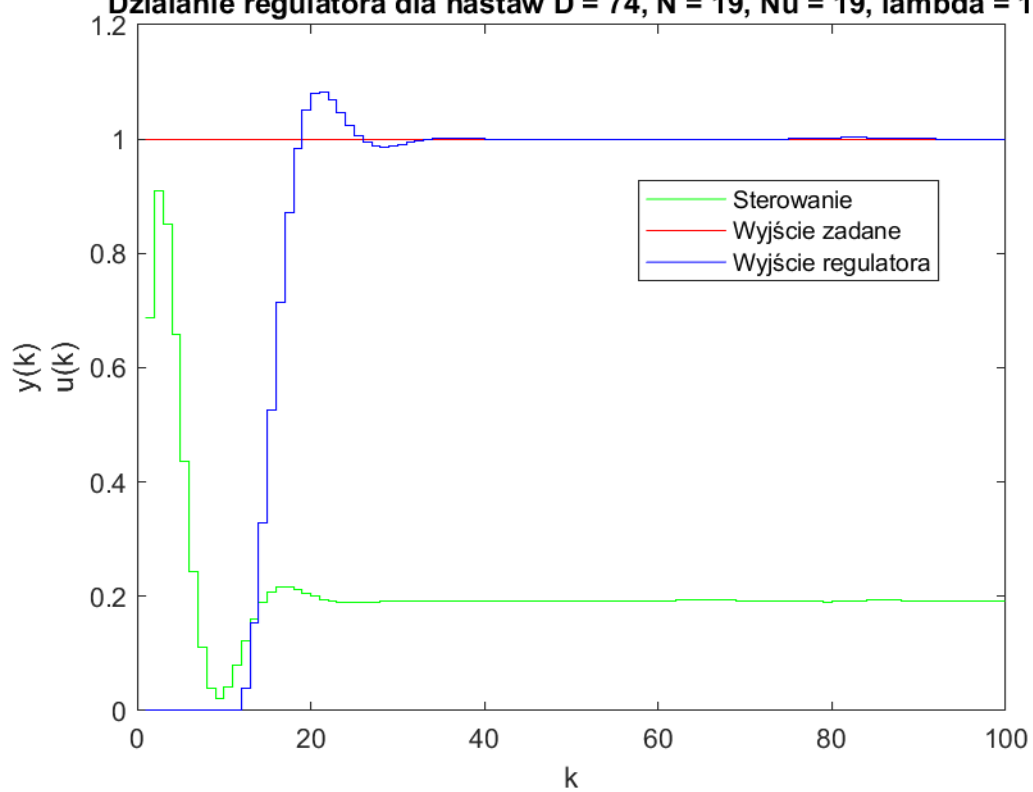
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 30$, $Nu = 30$, $\lambda = 1$



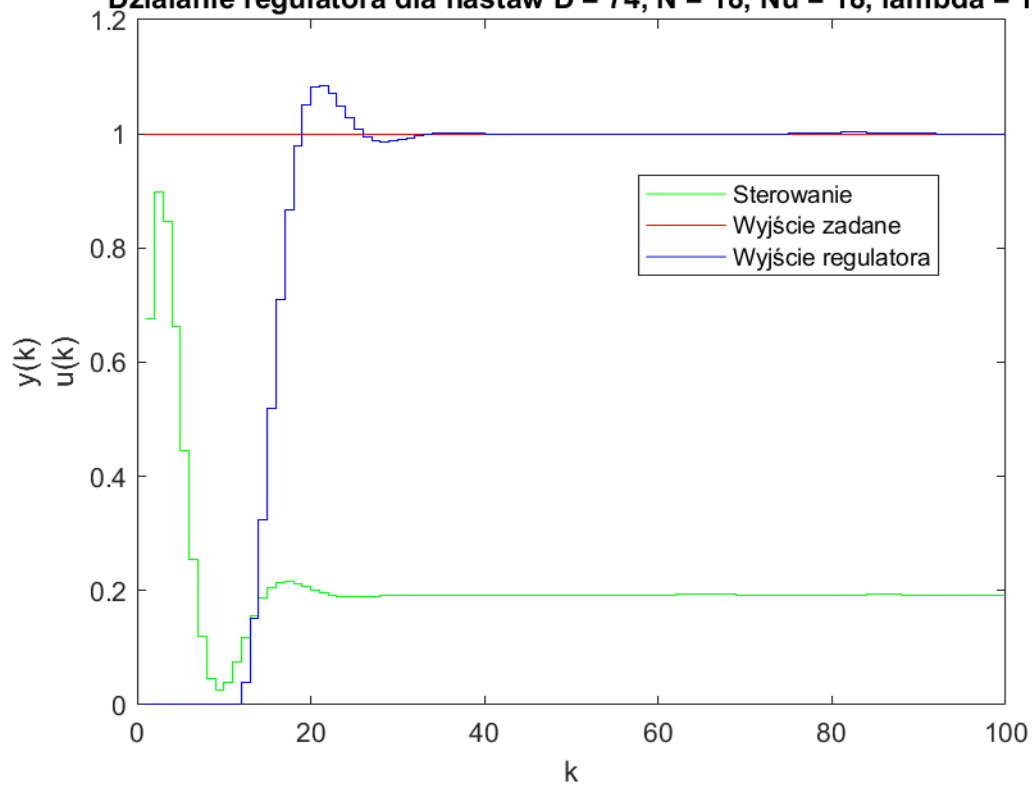
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 20$, $Nu = 20$, $\lambda = 1$



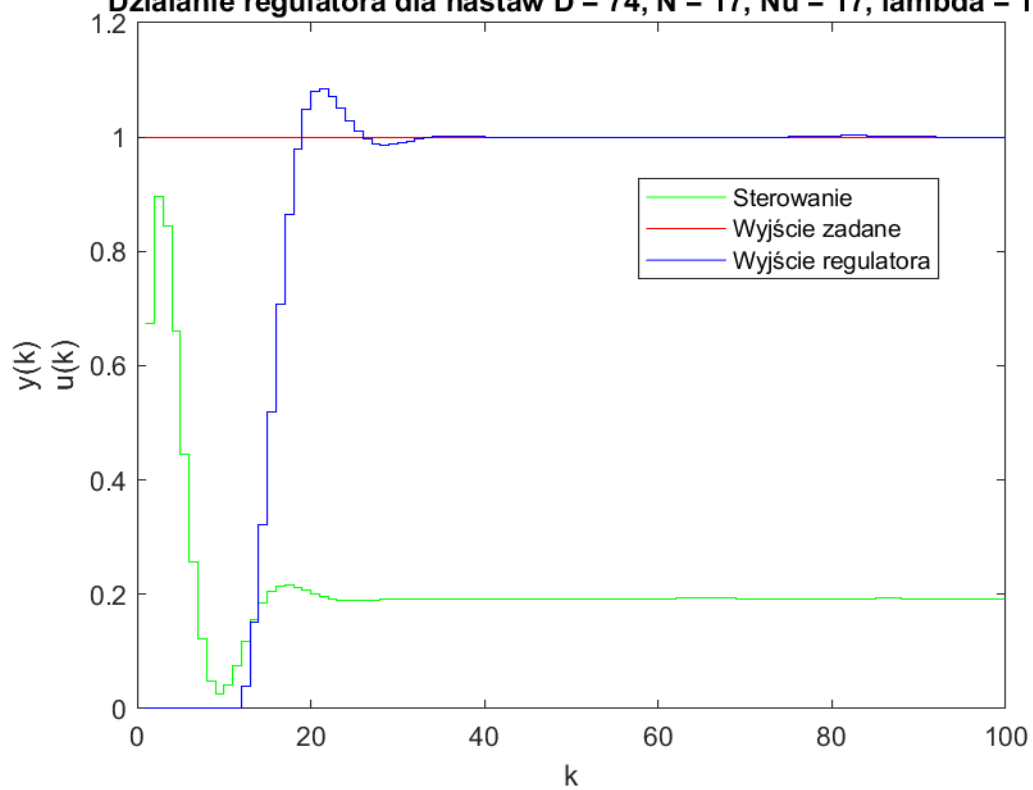
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 19$, $Nu = 19$, $\lambda = 1$



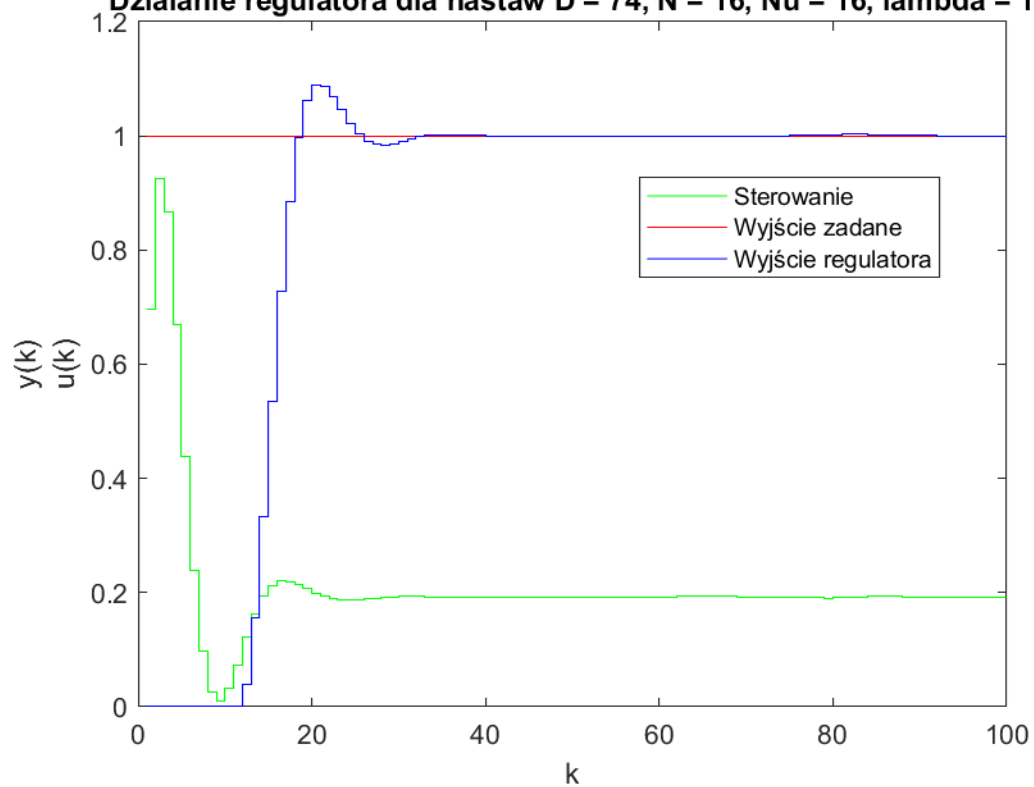
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 18$, $Nu = 18$, $\lambda = 1$



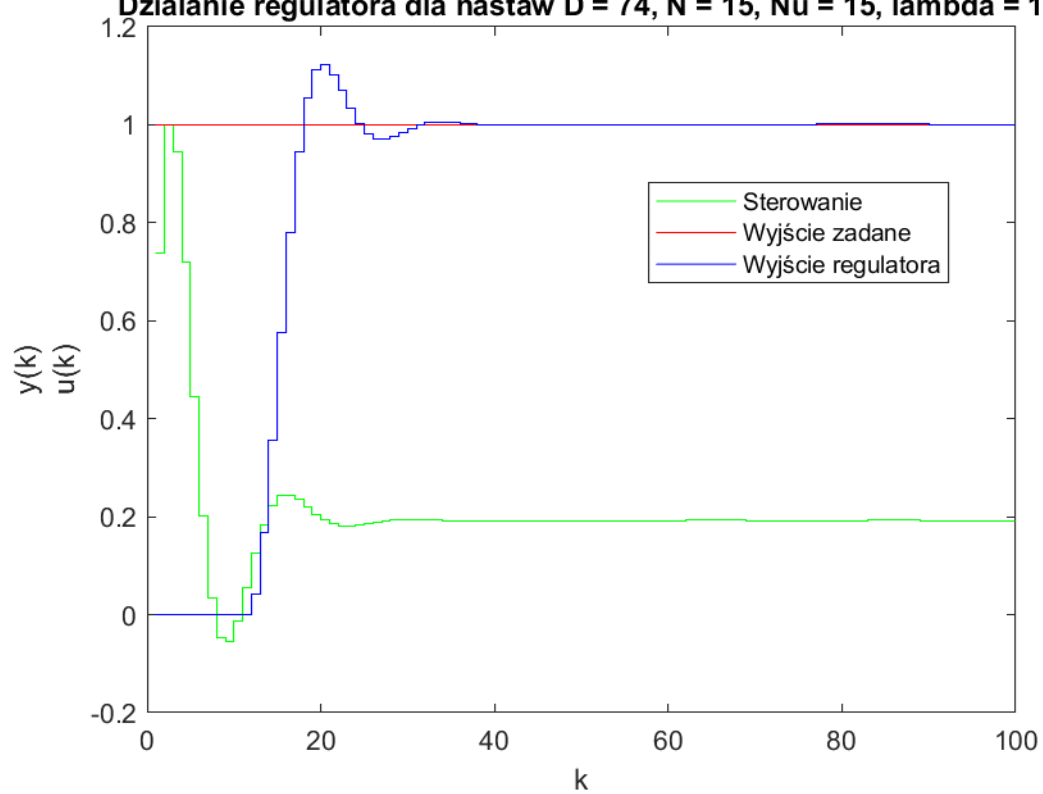
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 17$, $Nu = 17$, $\lambda = 1$

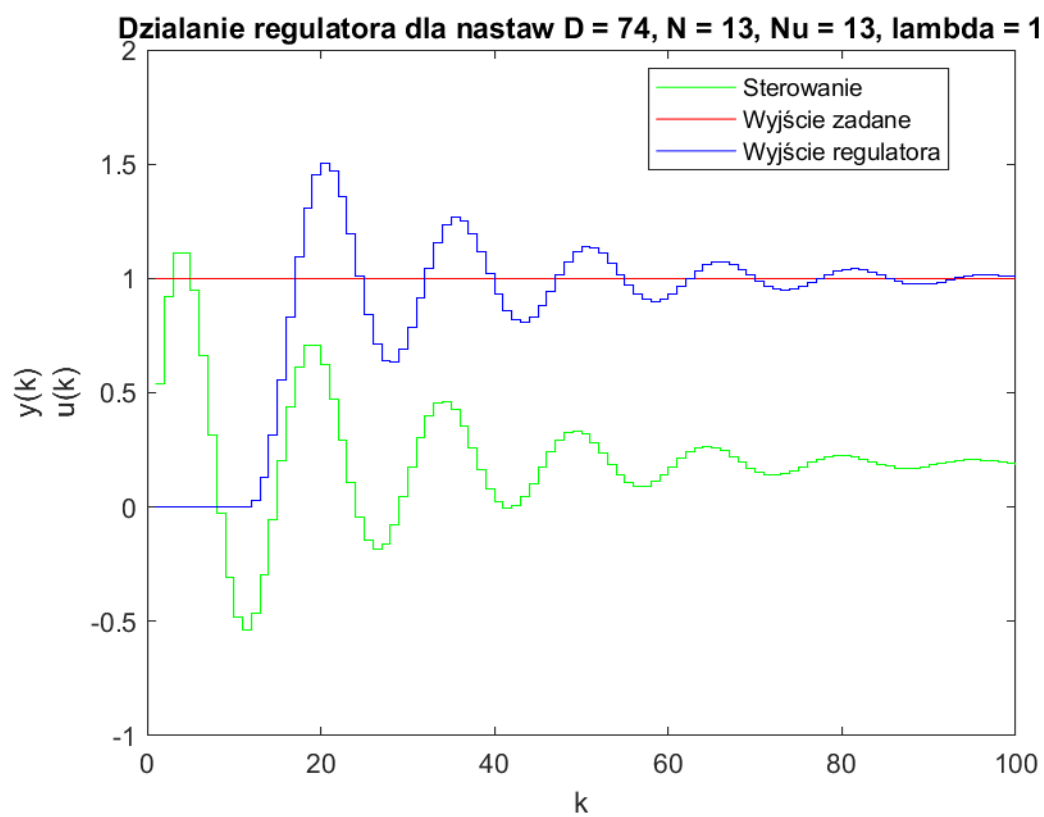
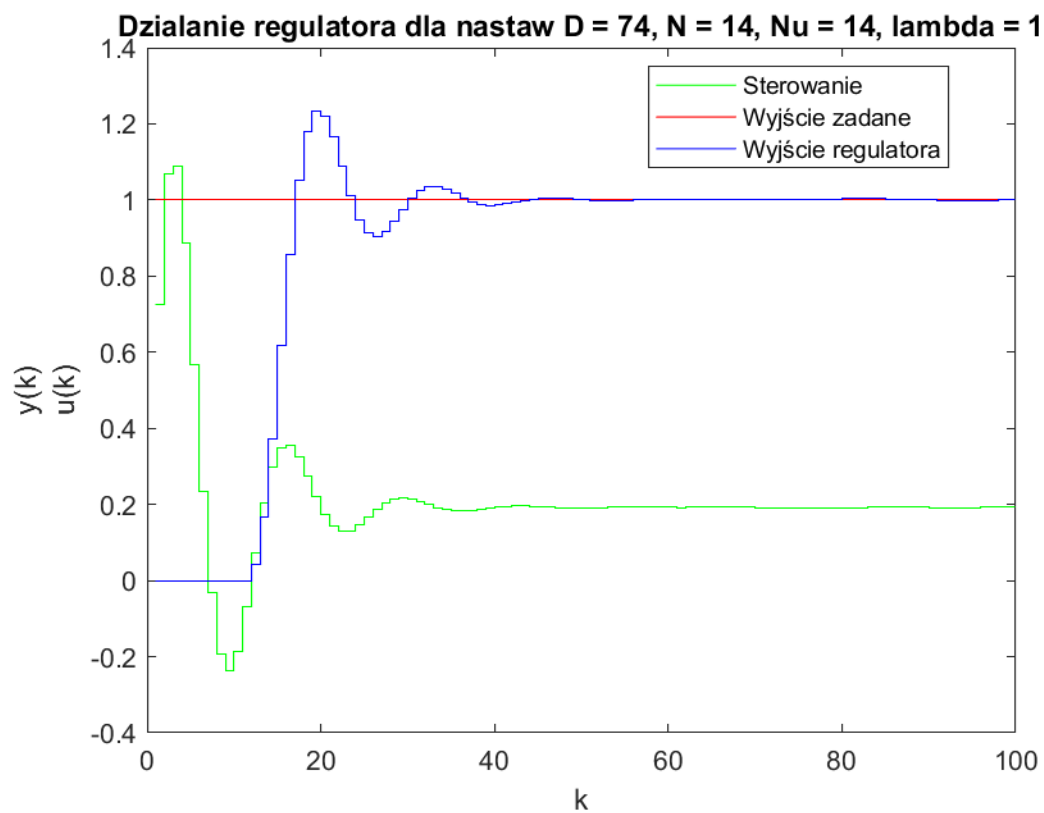


Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 16$, $\lambda = 1$

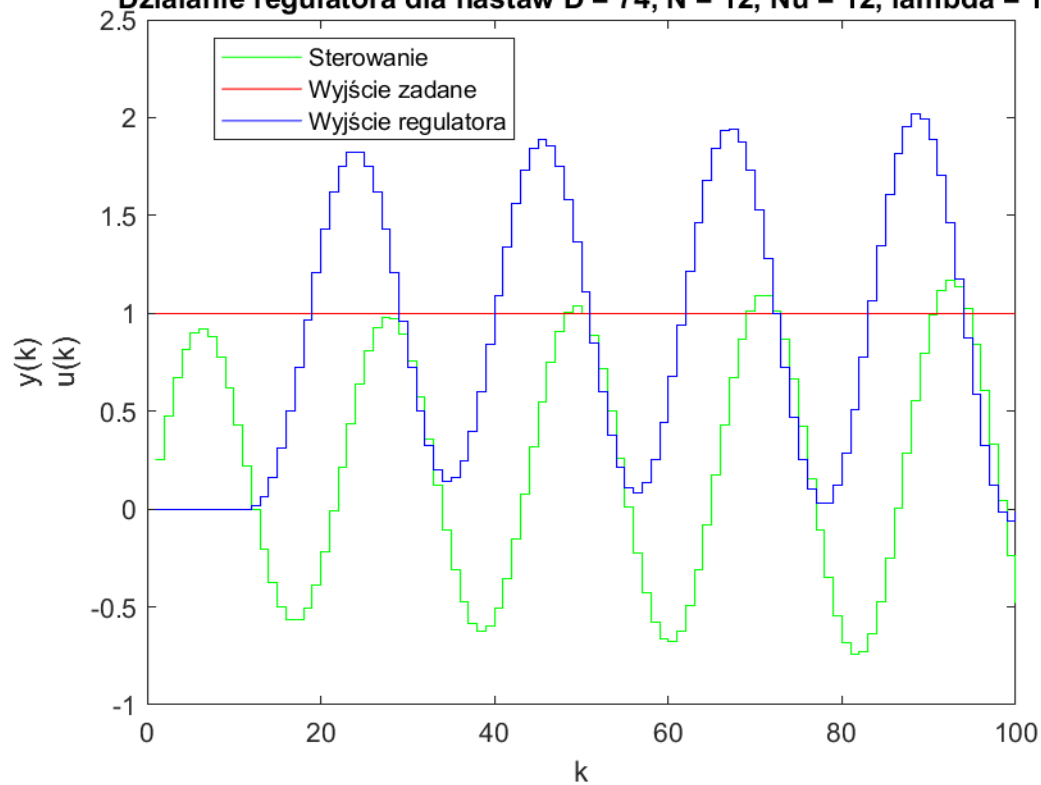


Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 15$, $Nu = 15$, $\lambda = 1$

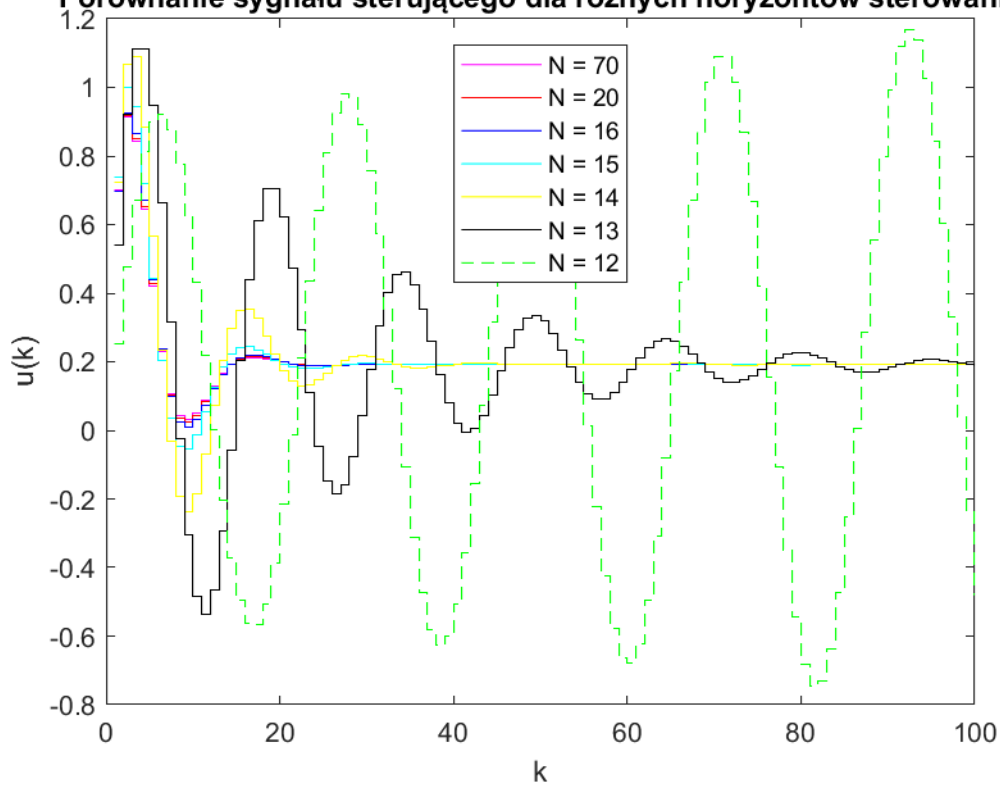


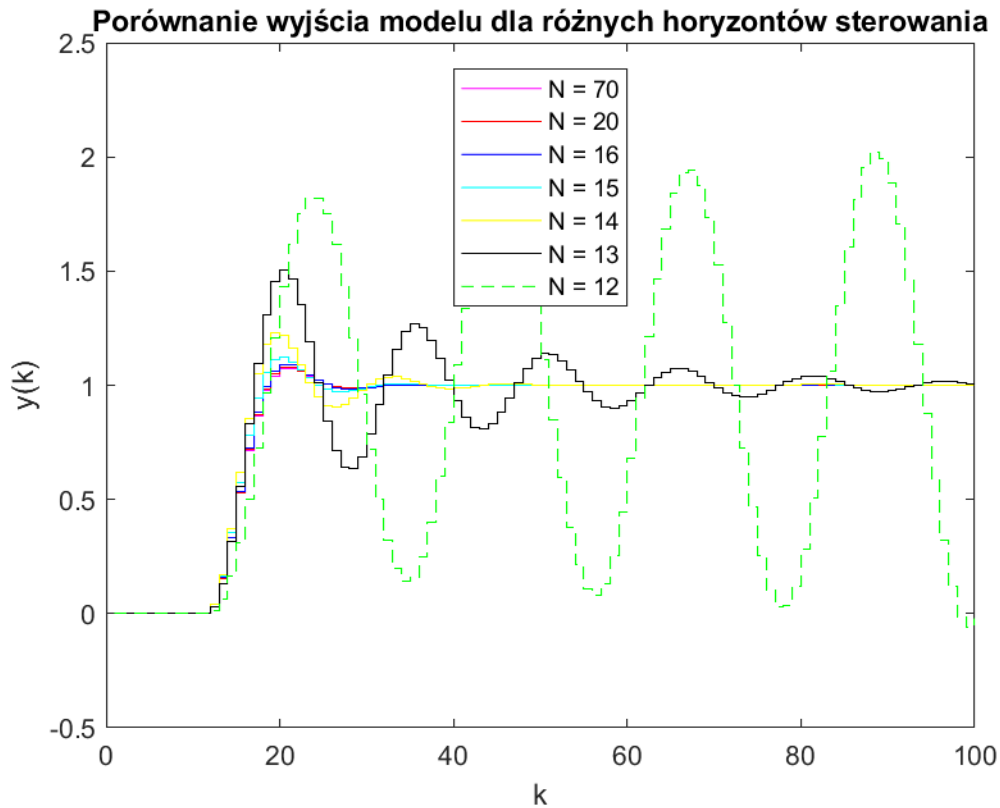


Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 12$, $N_u = 12$, $\lambda = 1$



Porównanie sygnału sterującego dla różnych horyzontów sterowania





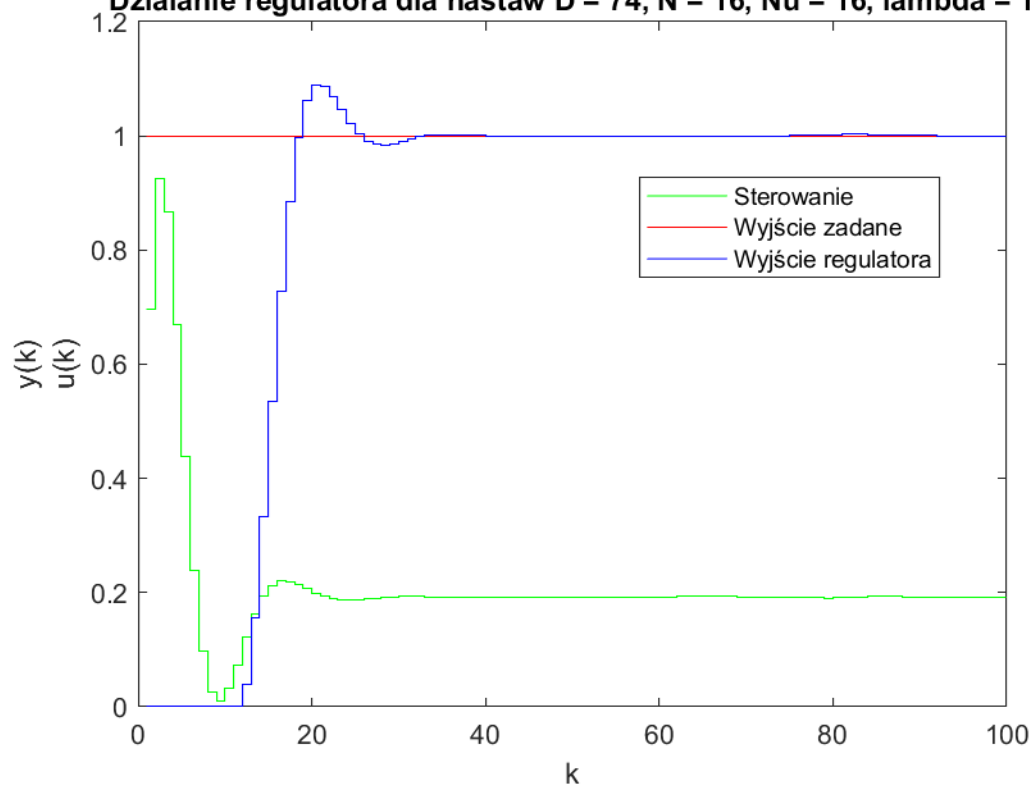
Możemy zauważyć, że odpowiedź układu początkowo, nawet dla bardzo dużych zmian horyzontu, nie zmienia się prawie wcale. Zmiany zaczynają być widoczne przy horyzoncie predykcji około 20. od tego momentu obiekt zaczyna wpadać w delikatne oscylacje. Przy $N=14$ oscylacje stają się już wyraźne, a przy $N=12$ możemy zaobserwować, że nie ich amplituda stale rośnie.

Jako wartość horyzontu predykcji wybrałem najmniejszy horyzont niepowodujący znaczących oznak oscylacji. Dla tego przypadku było to $N=16$, ponieważ jest idealnym kompromisem pomiędzy jak najmniejszym horyzontem predykcji (co zmniejsza nakład obliczeniowy), a oscylacjami (które znacząco utrudniają sterowanie obiektem).

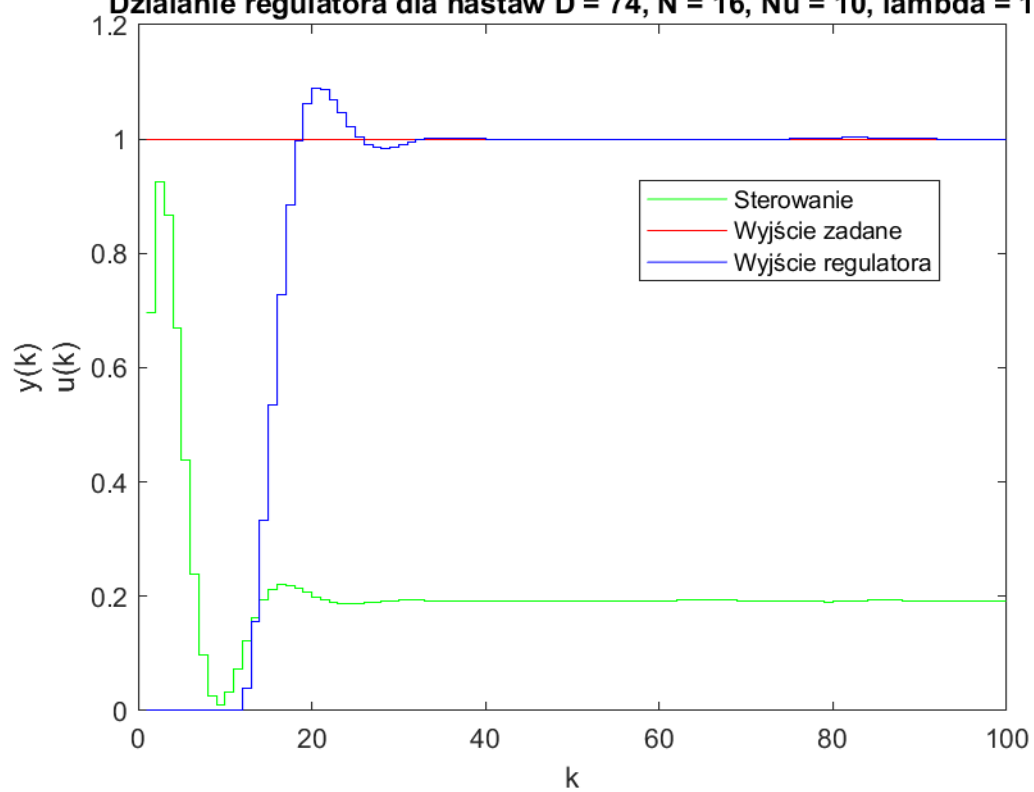
5.3 N_u - horyzont sterowania

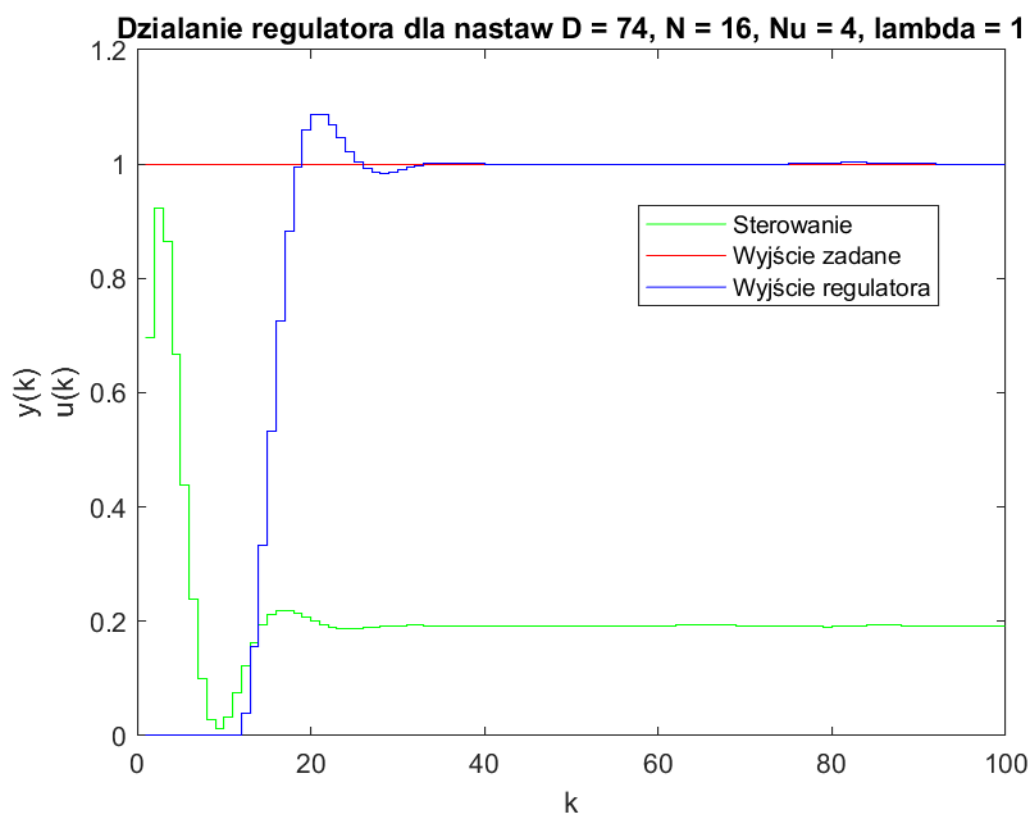
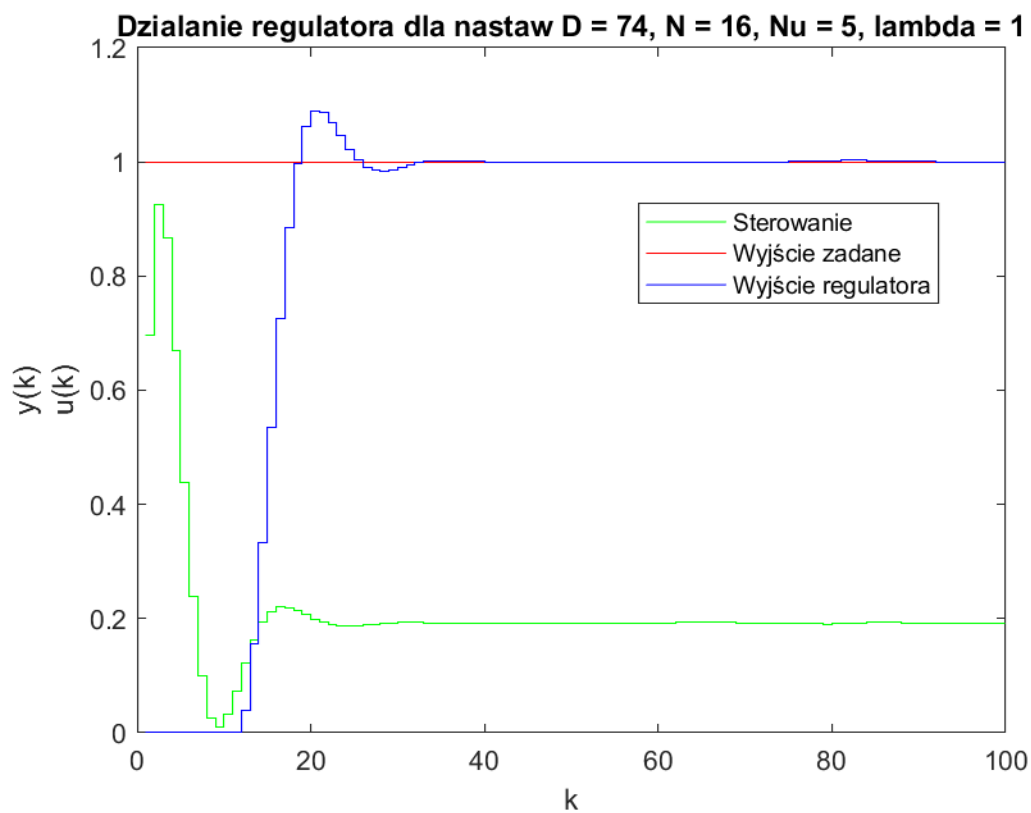
Do wyznaczenia optymalnego horyzontu sterowania zmniejszałem jego wartość od wartości horyzontu predykcji do momentu, kiedy zaczął nie zaczął pogarszać działania regulatora.

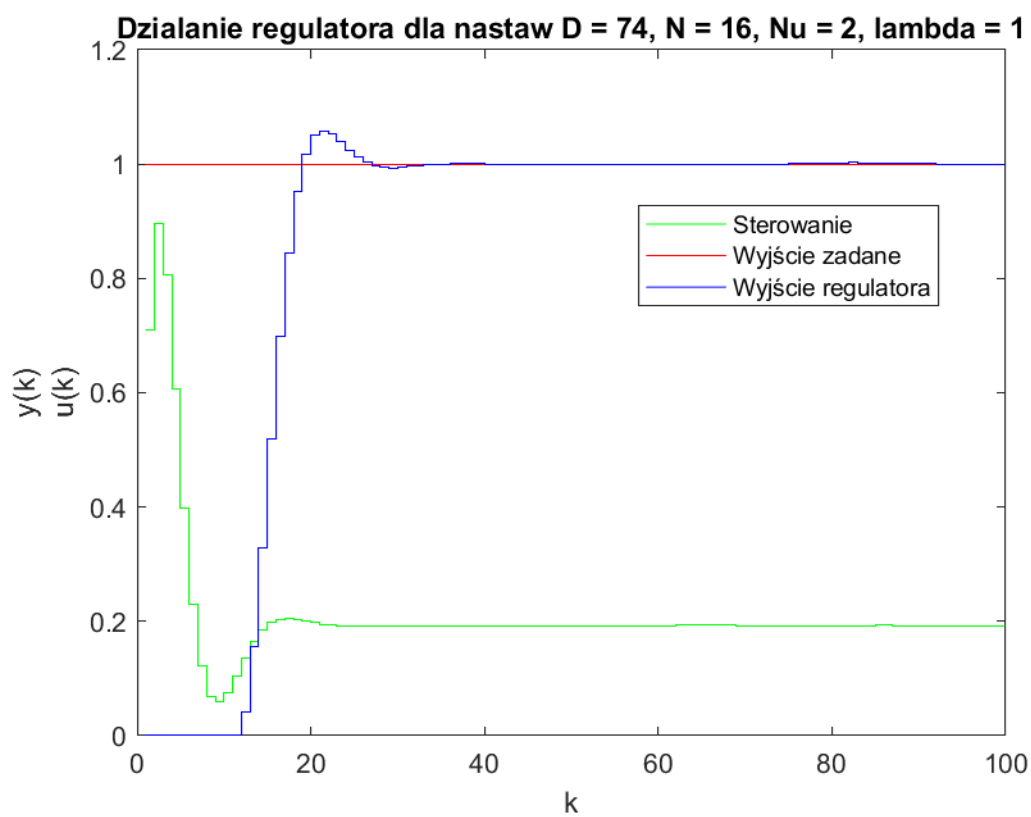
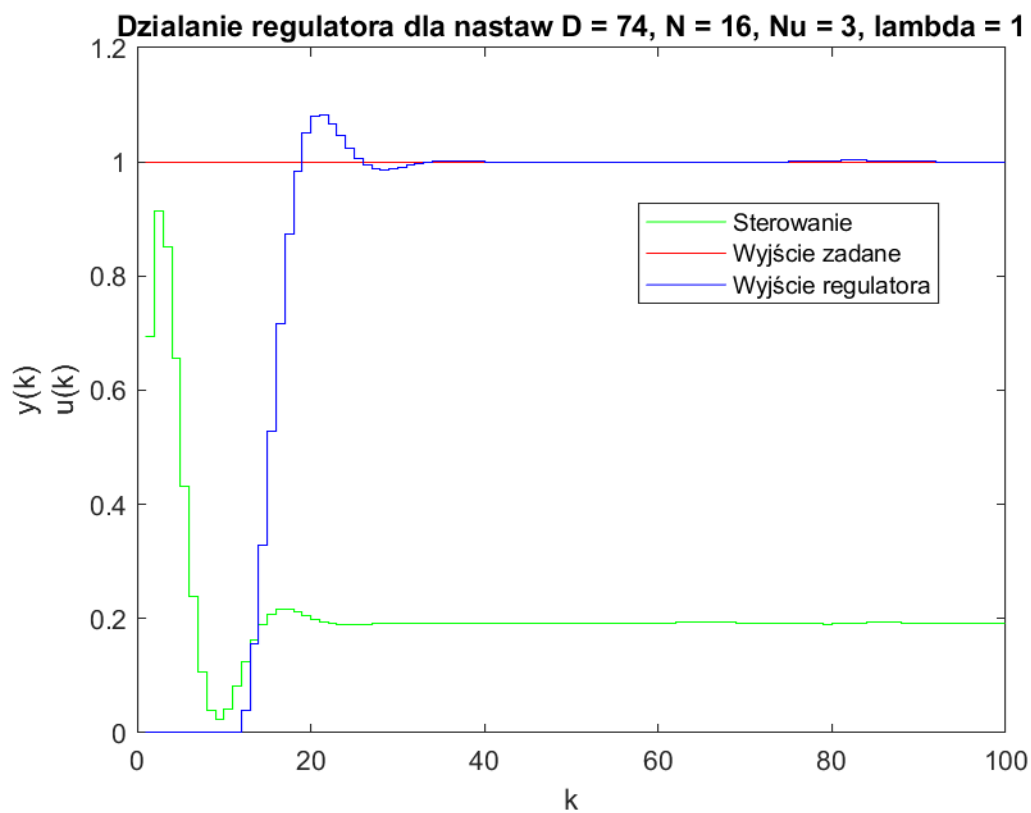
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 16$, $\lambda = 1$



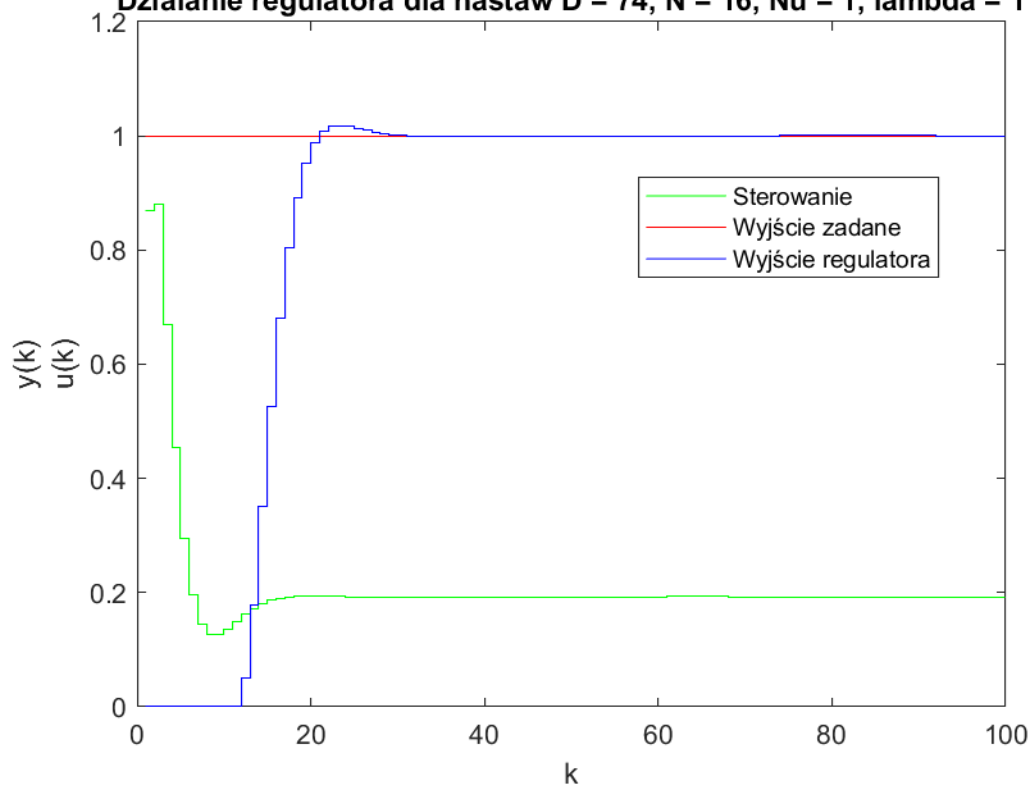
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 10$, $\lambda = 1$



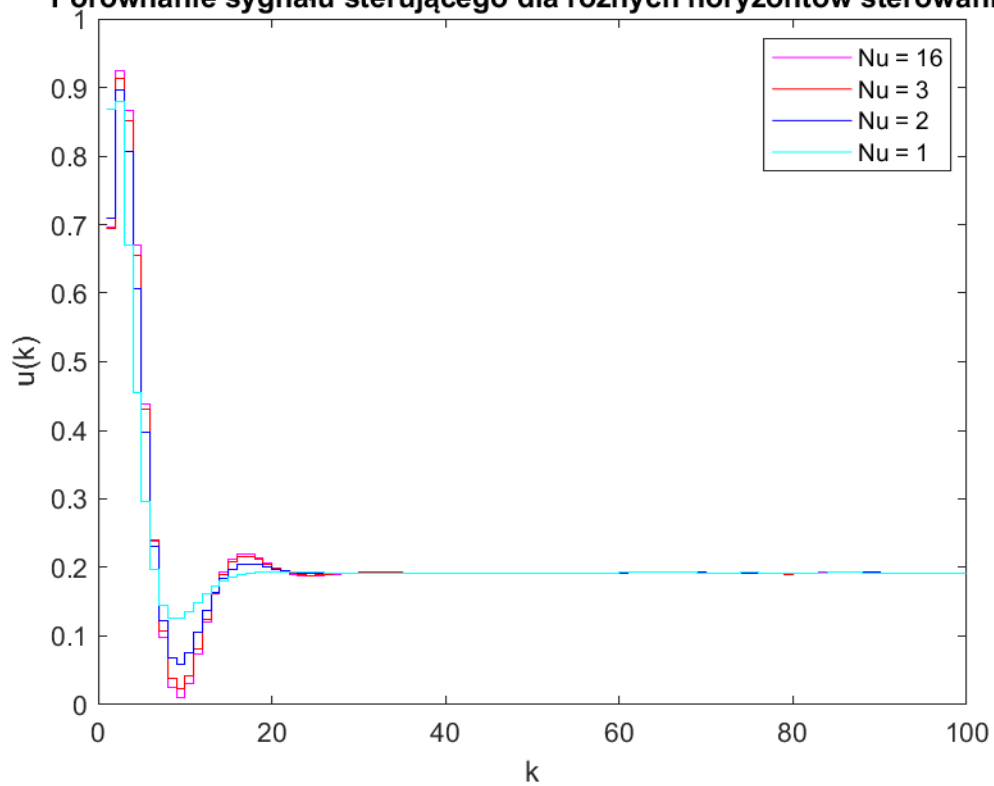


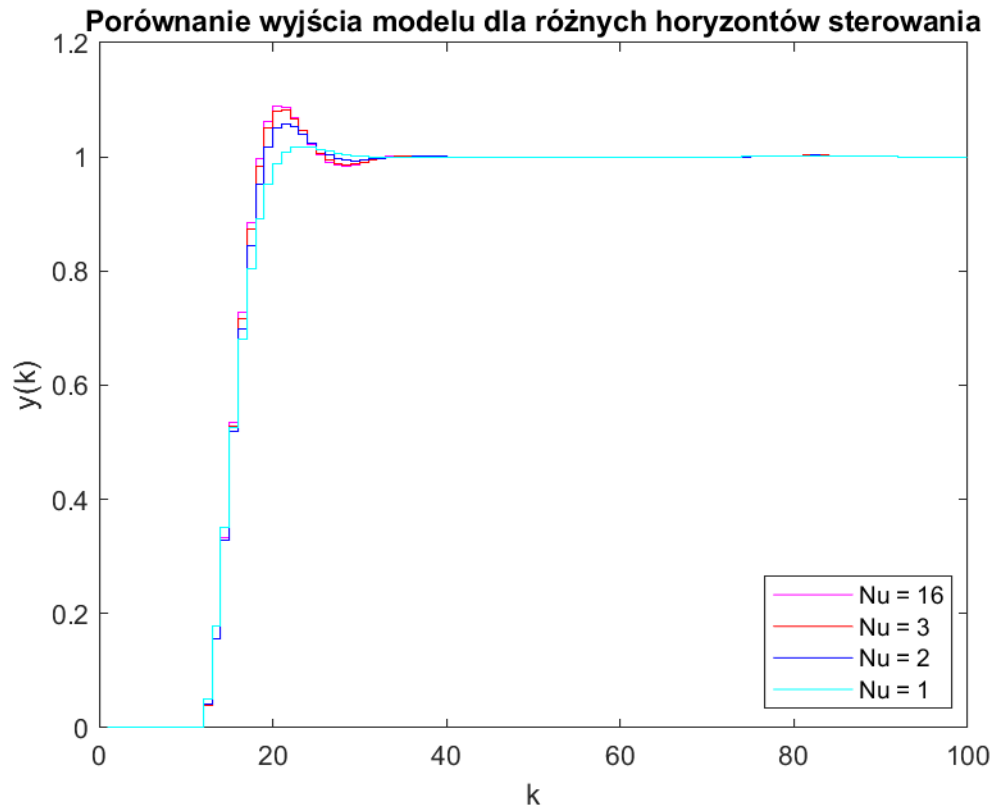


Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 1$



Porównanie sygnału sterującego dla różnych horyzontów sterowania

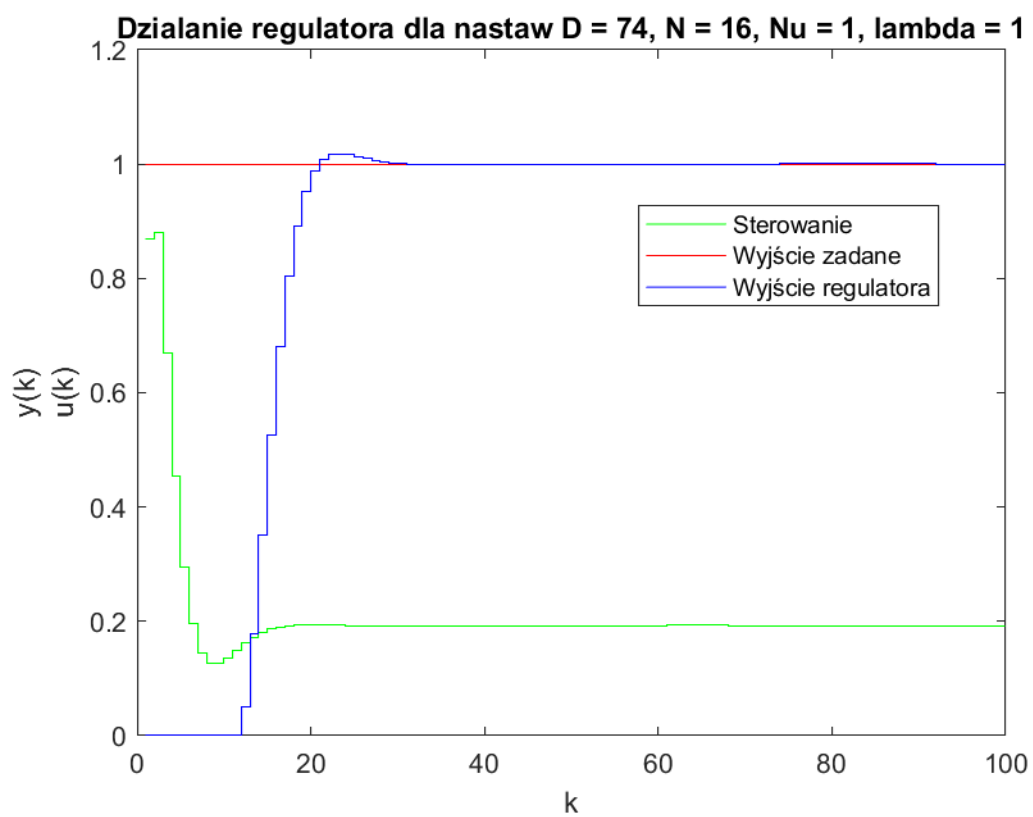
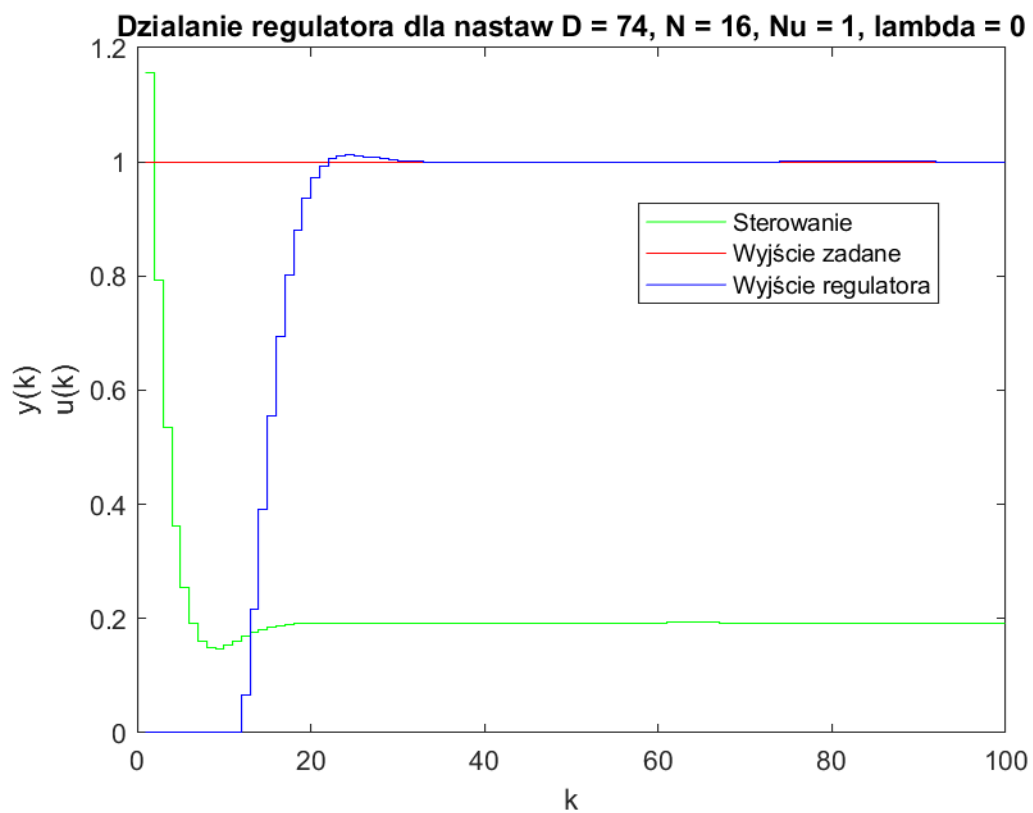




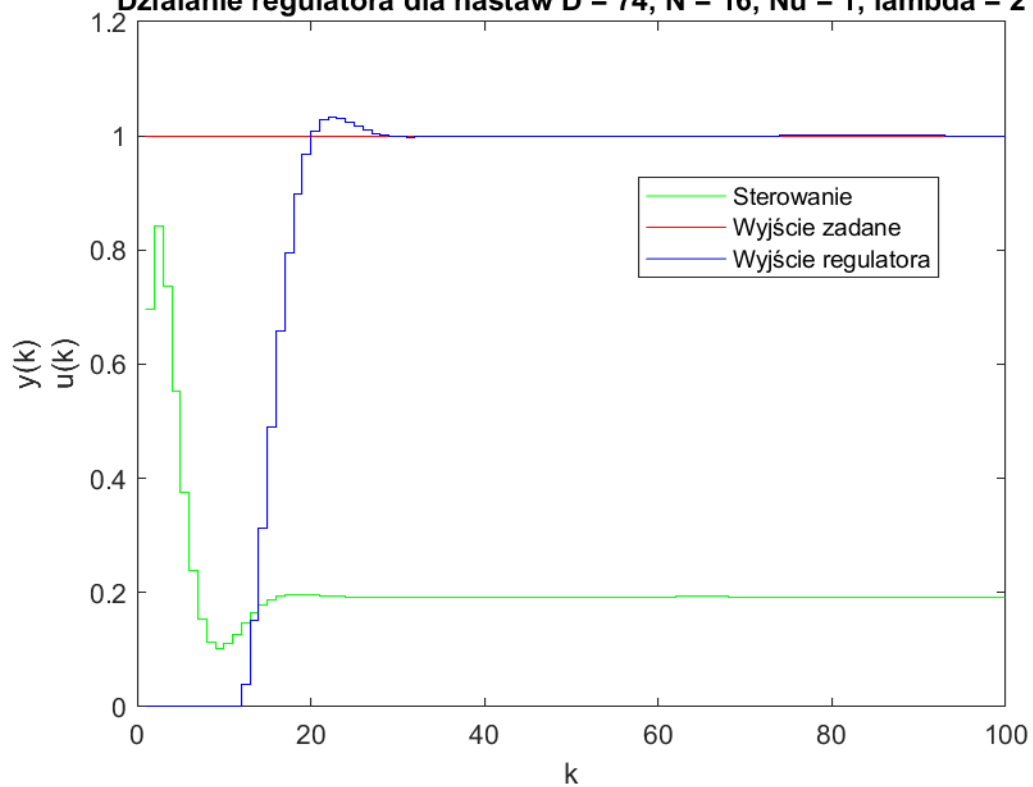
Jak można zauważyć zmniejszanie horyzontu sterowania nie wpłynęło negatywnie na wyjście obiektu, a nawet znacznie poprawiło jego trajektorię - wyjście obiektu szybciej uzyskuje i stabilizuje się na wartości zadanej. Sygnał sterujący również uległ nieznacznym zmianom również poprawiając charakterystykę sygnału sterowania. Dlatego uważam, że w testach najlepiej wypada sygnał o horyzoncie sterowania $Nu = 1$ i tej wartości użyję w dalszych obliczeniach.

5.4 λ - współczynnik kary za szybkość zmian sterowania

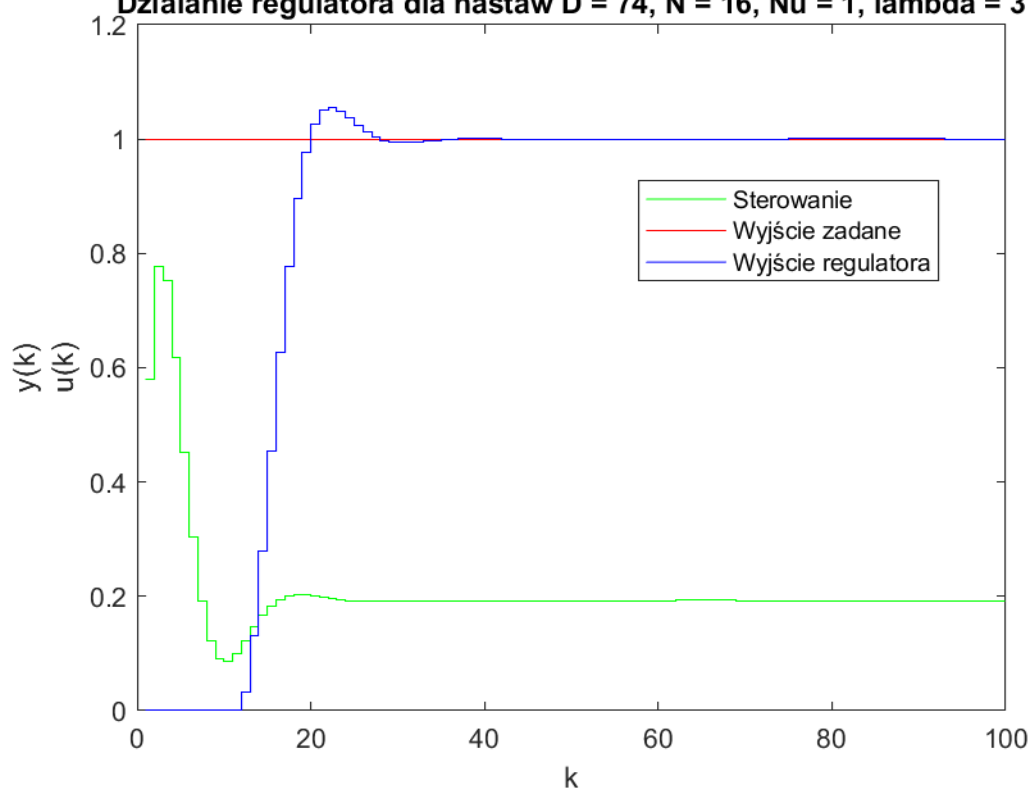
Poszukiwania odpowiedniej λ odbywały się na zakresie od zera w górę, aż do osiągnięcia zadowalającej wartości. Warto też zwrócić uwagę, że przy większych wartościach λ zmienia się czas symulacji.



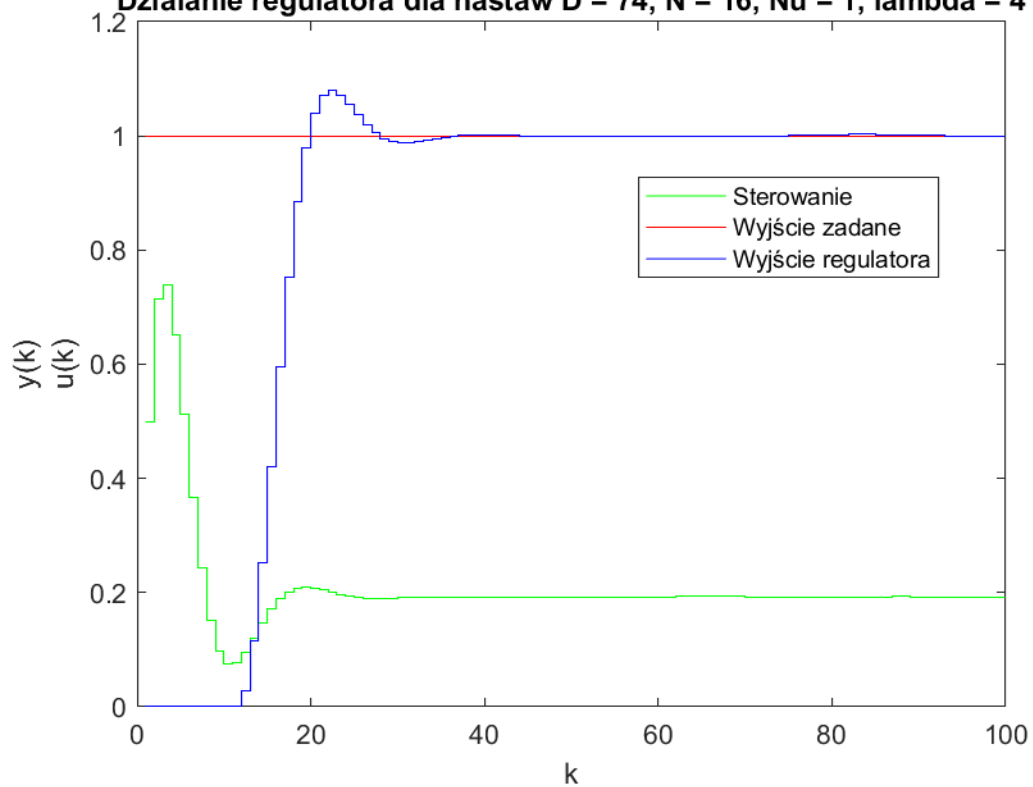
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 2$



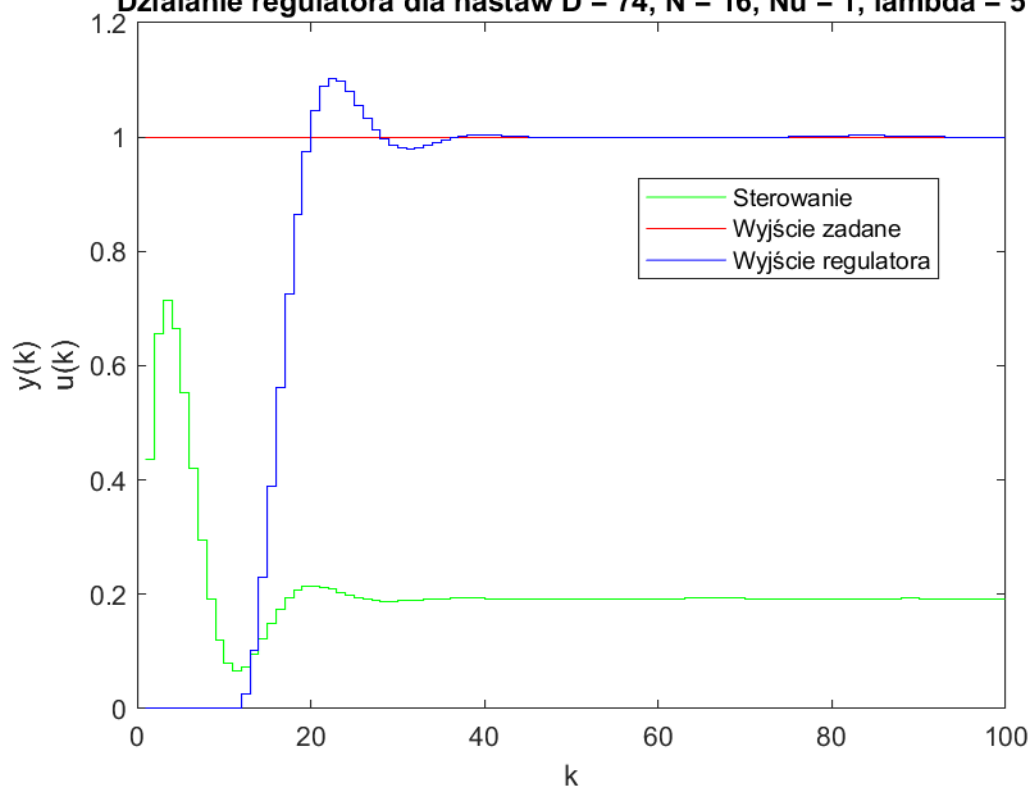
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 3$

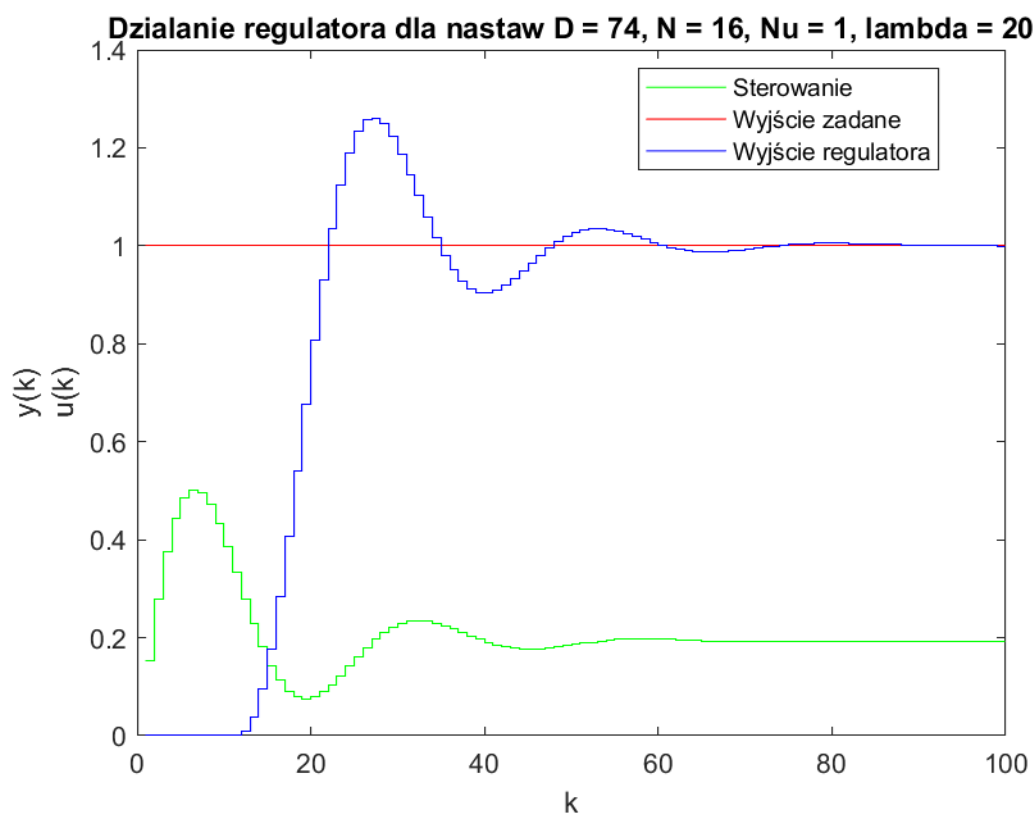
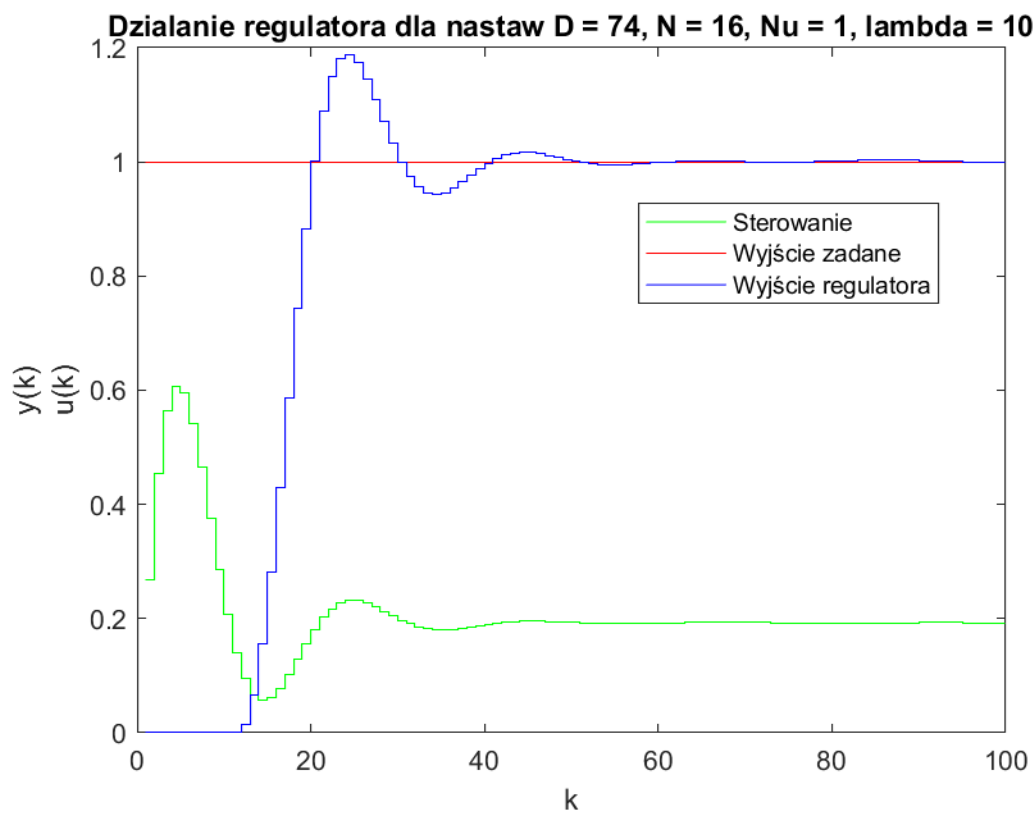


Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 4$

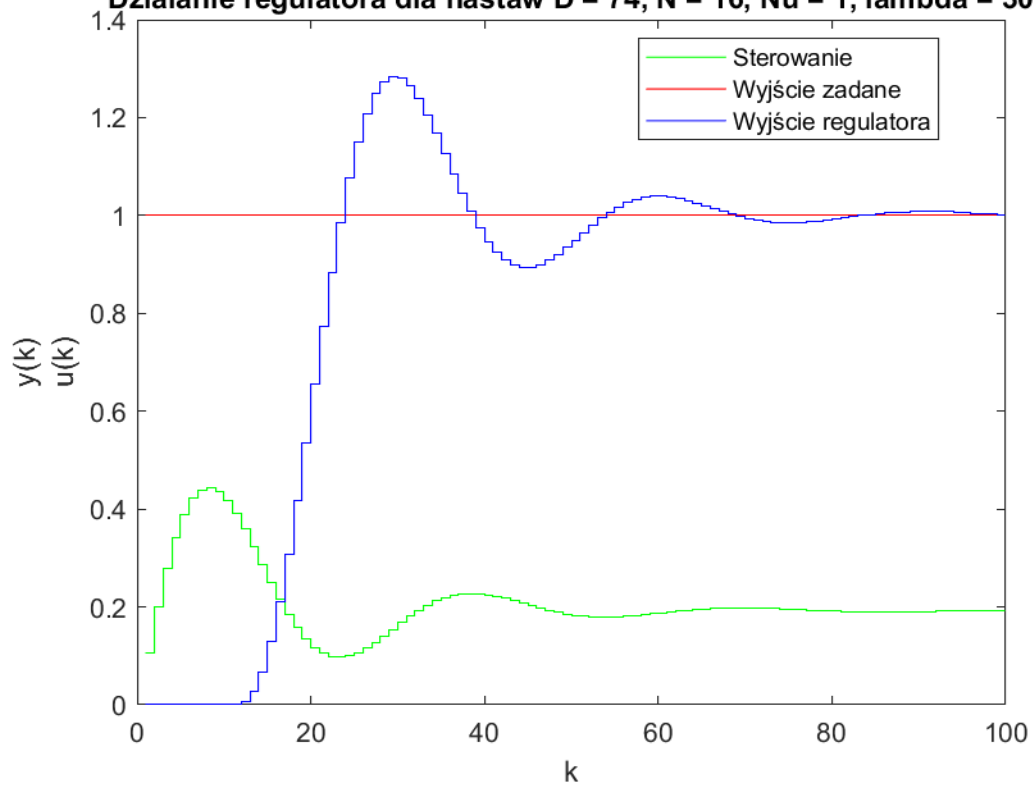


Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 5$

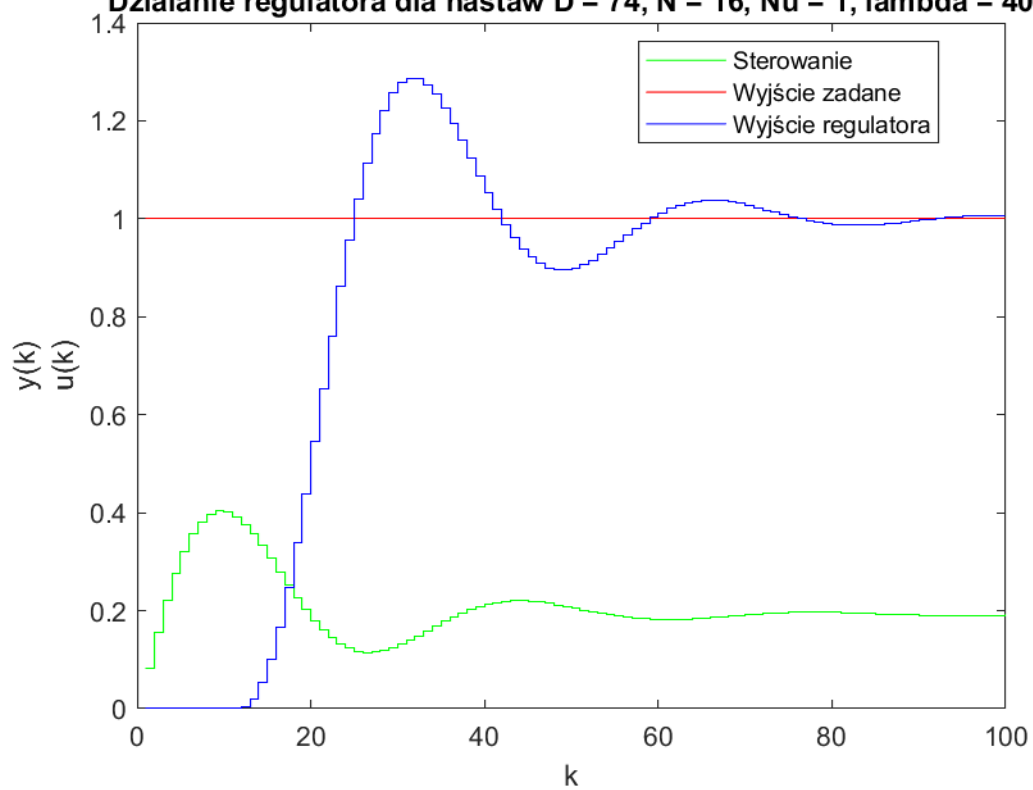




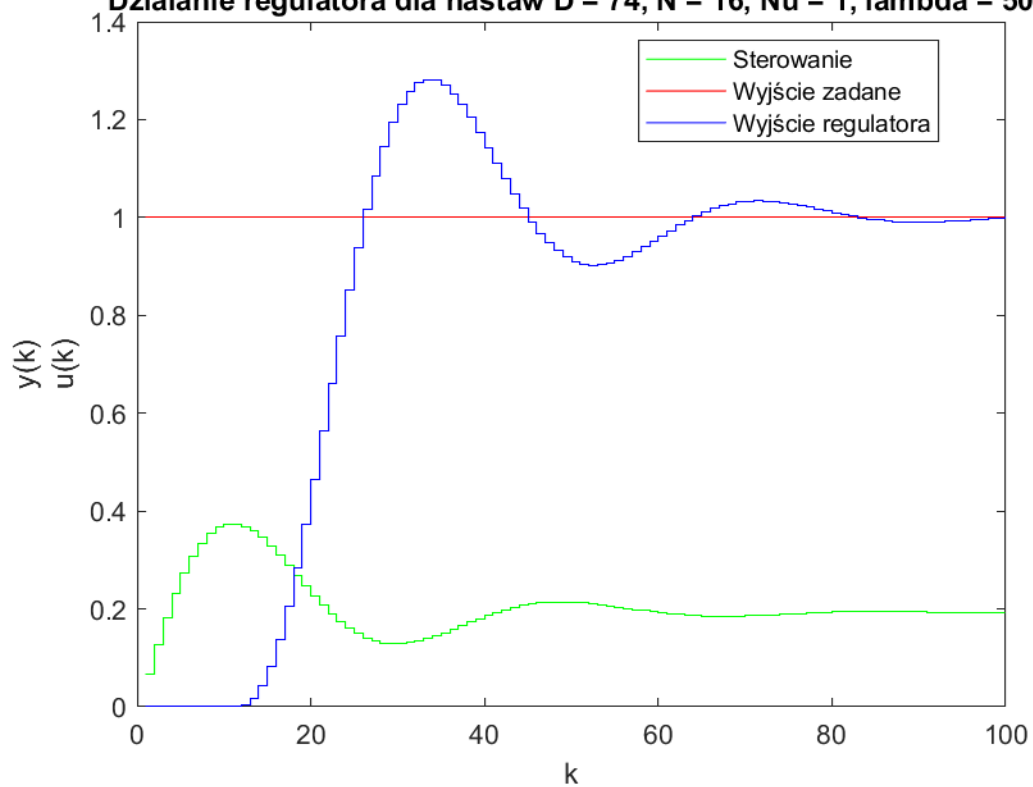
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 30$



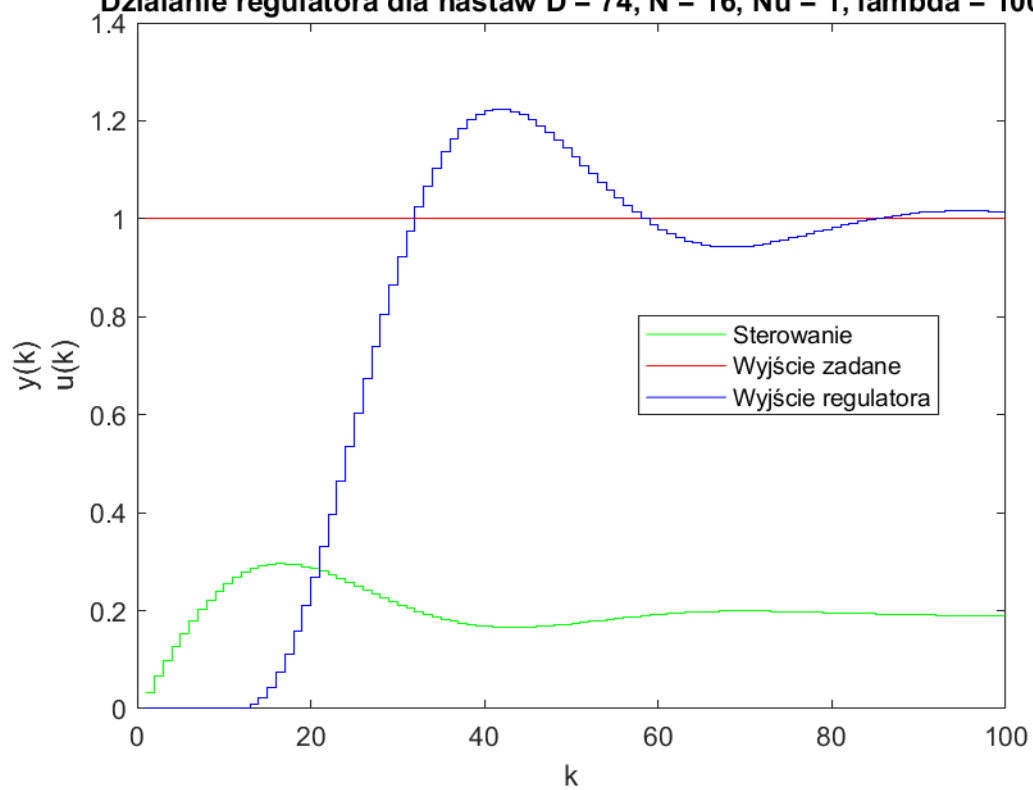
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 40$



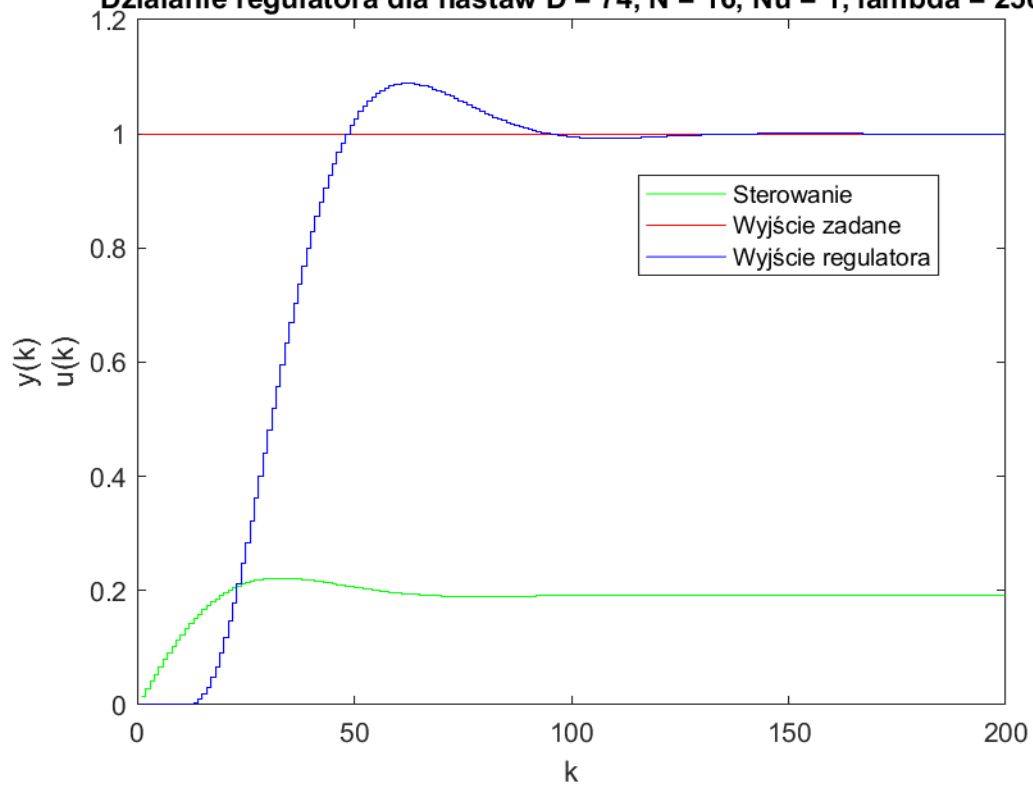
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 50$



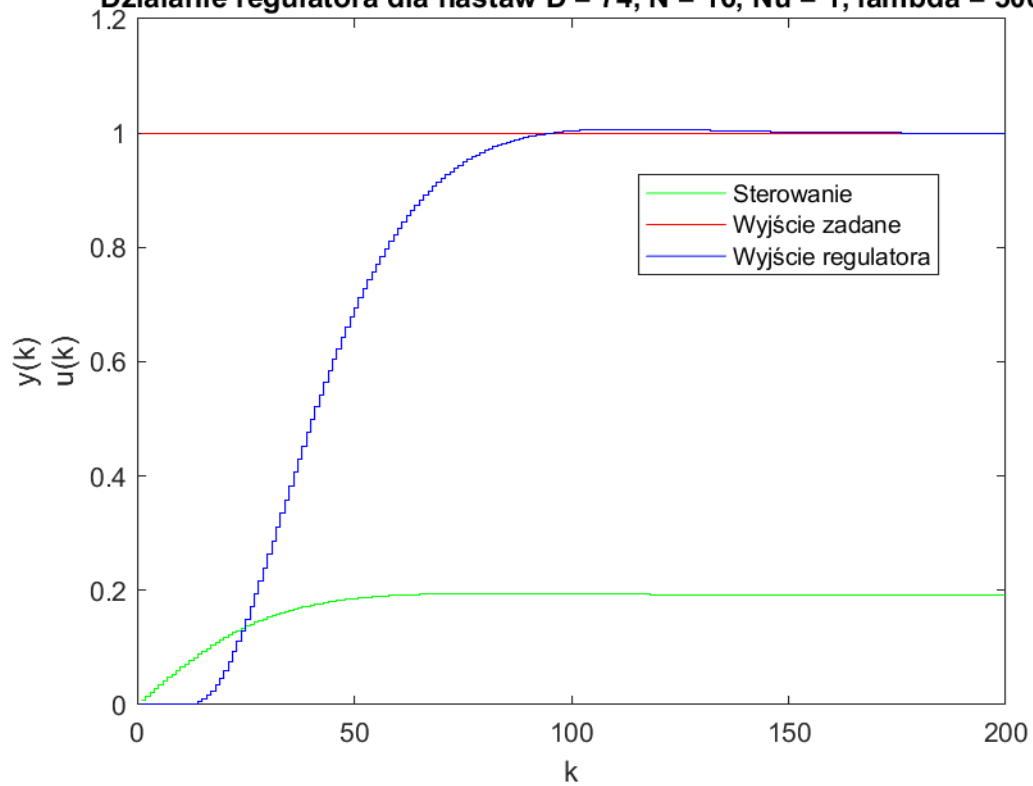
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 100$



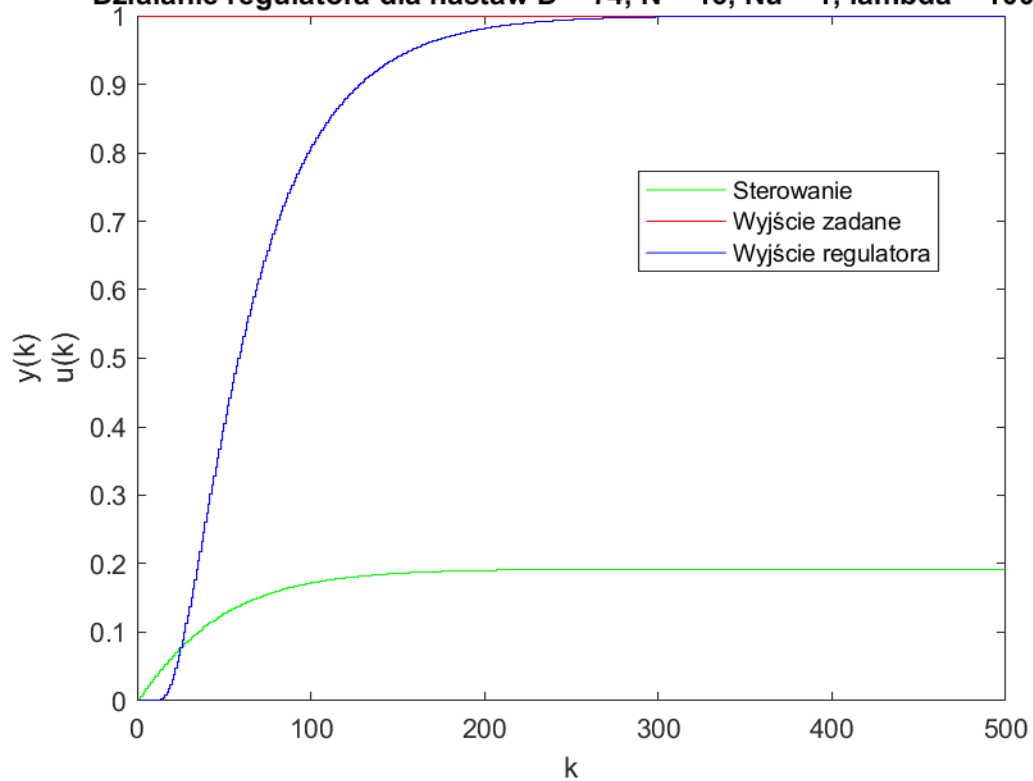
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 250$



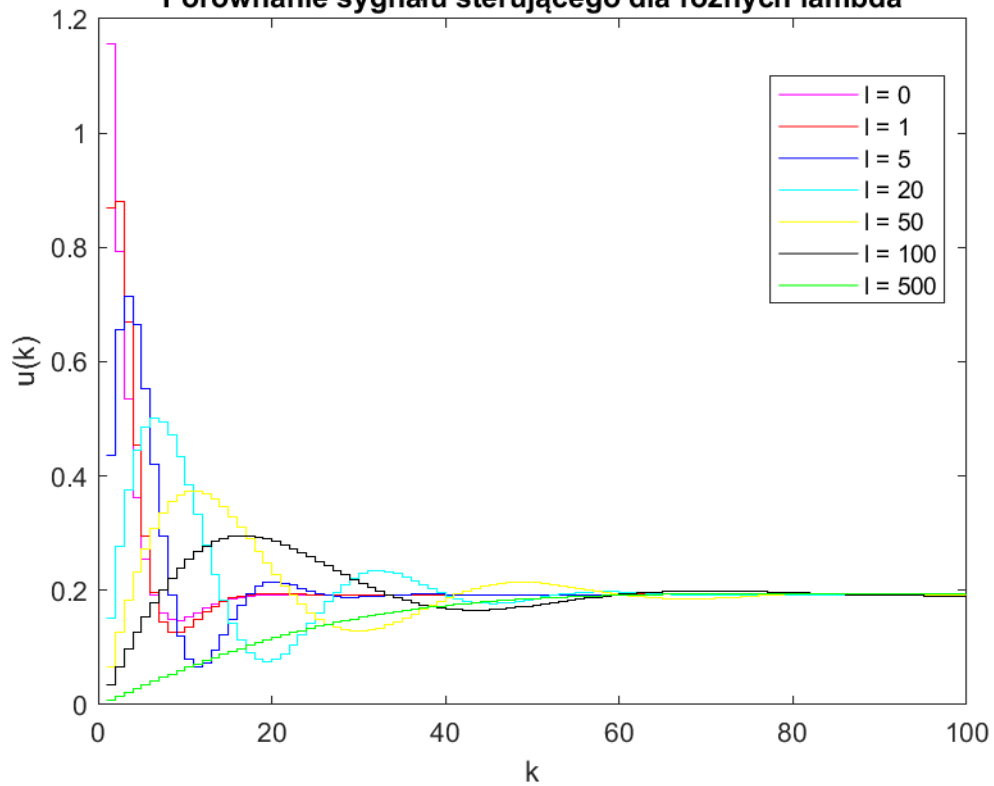
Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 500$

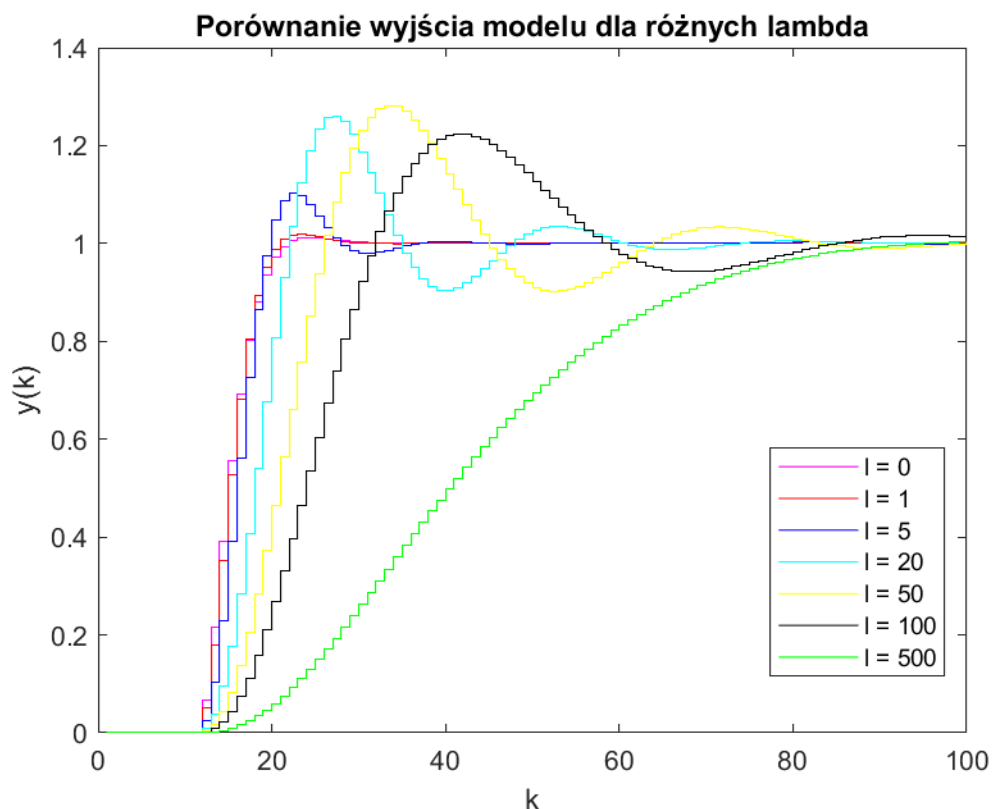


Działanie regulatora dla nastaw $D = 74$, $N = 16$, $Nu = 1$, $\lambda = 1000$



Porównanie sygnału sterującego dla różnych λ





Na powyższych wykresach możemy zaobserwować jak duży wpływ pa parametr λ na wyjście obiektu. Małe λ daje nam bardzo krótki czas stabilizacji regulacji, ale bardzo duże zmiany wartości sygnału sterującego, który w pierwszej chwili przekracza pięciokrotnie wartość końcową regulacji (osiągnął ją od wartości 0, czego nie widać na wykresie), a w kolejnych gwałtownie opada. Zwiększenie wartości λ znacznie wygładza sygnał sterujący, lecz również wydłuża czas stabilizacji obiektu. Dla dużych wartości sygnał sterujący zmienia się powoli, a wyjście obiektu nie wpada w żadne oscylacje, ale czas ustabilizowania się jest kilkukrotnie dłuższy niż dla małych wartości.

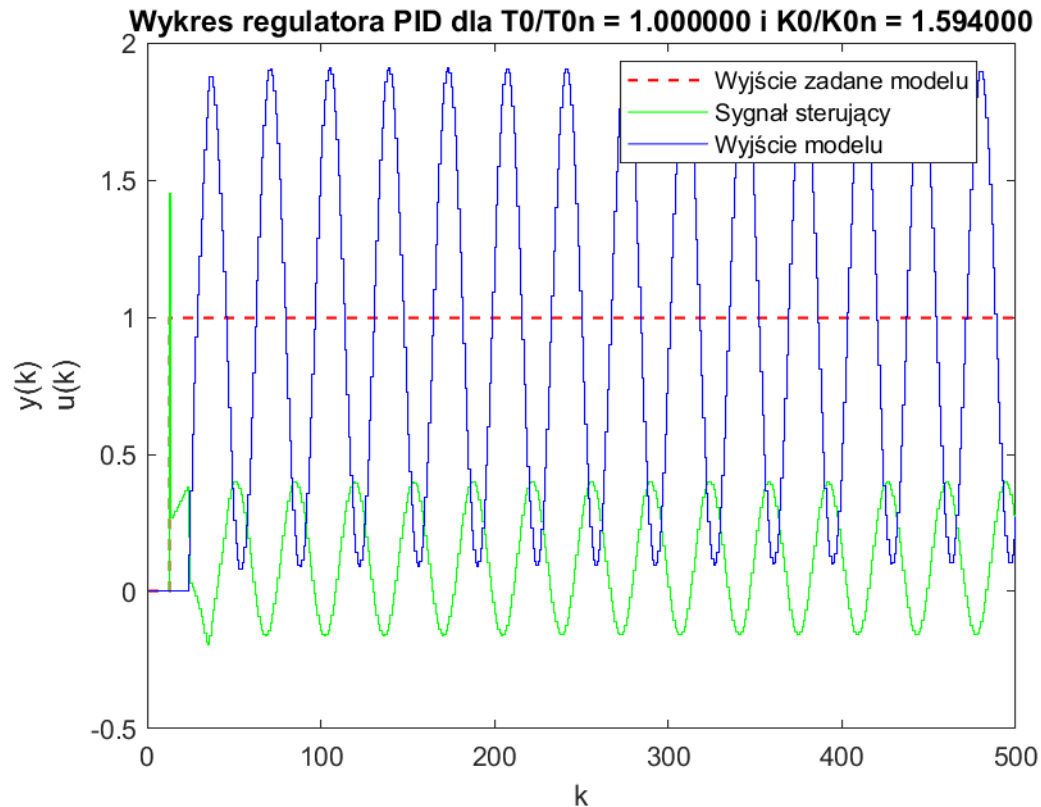
Mając to wszystko na uwadze zdecydowałem się wybrać $\lambda = 50$ jako najlepszą. Sterowanie z taką λ zapewnia idealny kompromis pomiędzy gwałtownością zmian sterowania, a czasem stabilizacji regulatora. Zdaję sobie sprawę, że nie jest to najszybszy regulator, ale za to zapewnia niskie i łagodne skoki sygnału sterującego. Ważną wartością przy tym wyborze było nie przekroczenie dwukrotności docelowej wartości sygnału sterującego.

6 Stabilność regulatorów PID i DMC

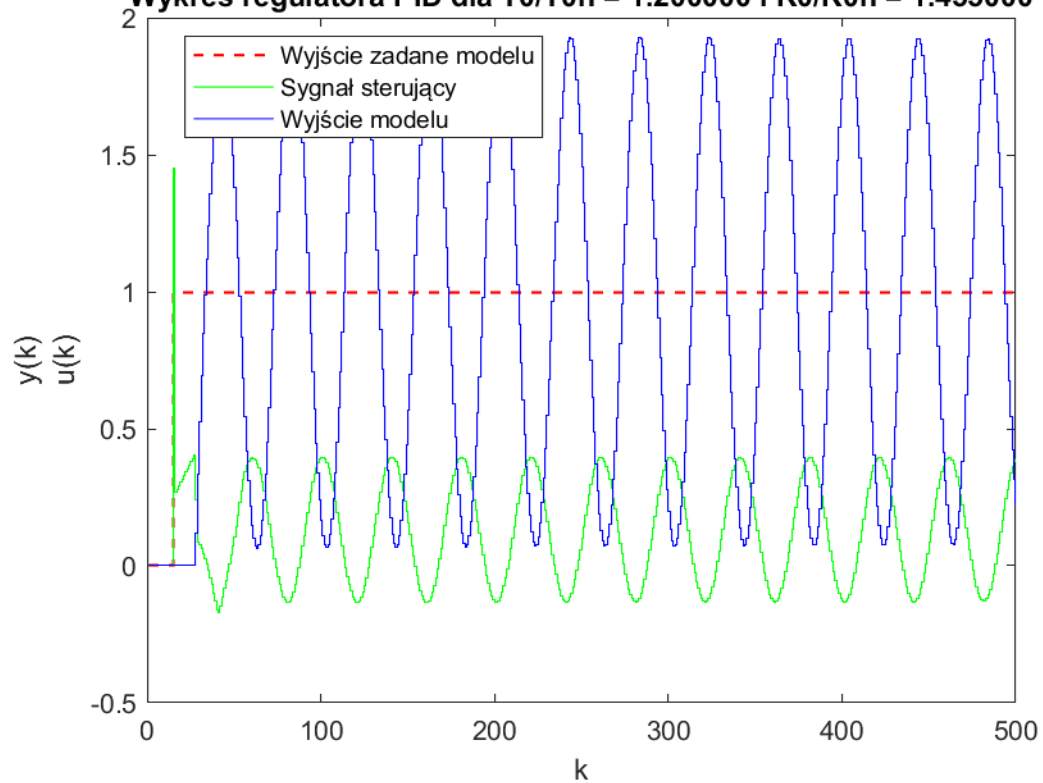
Aby zbadać kryterium stabilności należy dla kolejnych opóźnień modelu, których stabilność testujemy, doprowadzić obiekt z regulatorem do oscylacji krytycznych modyfikując wzmocnienie na wejściu modelu bez zmiany parametrów samego regulatora. W szczególności nie wolno nam na nowo obliczać jego współczynników.

Algorytm PID pobiera współczynniki ze wcześniej wyliczonego modelu. Algorytm DMC liczy te współczynniki na bieżąco w skrypcie, ale nie uwzględnia wtedy jeszcze zmienionych parametrów, w szczególności wzmocnienie pozostaje takie w równaniu pierwotnym obiektu.

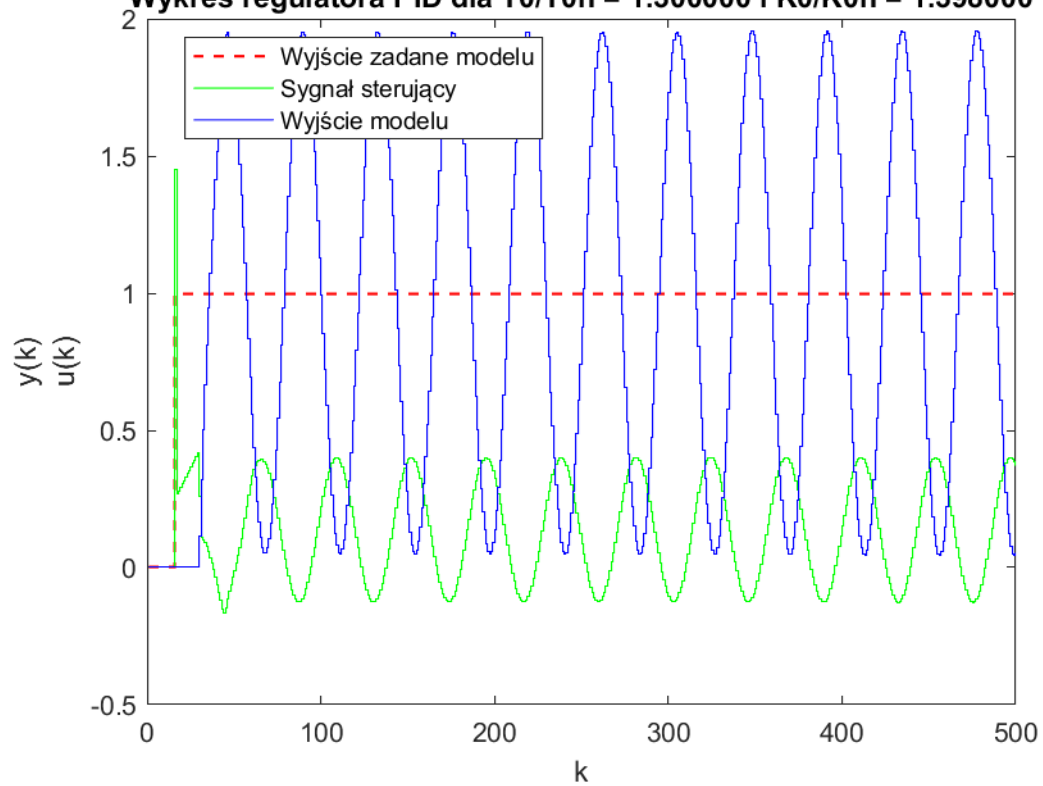
6.1 Stabilność regulatora PID



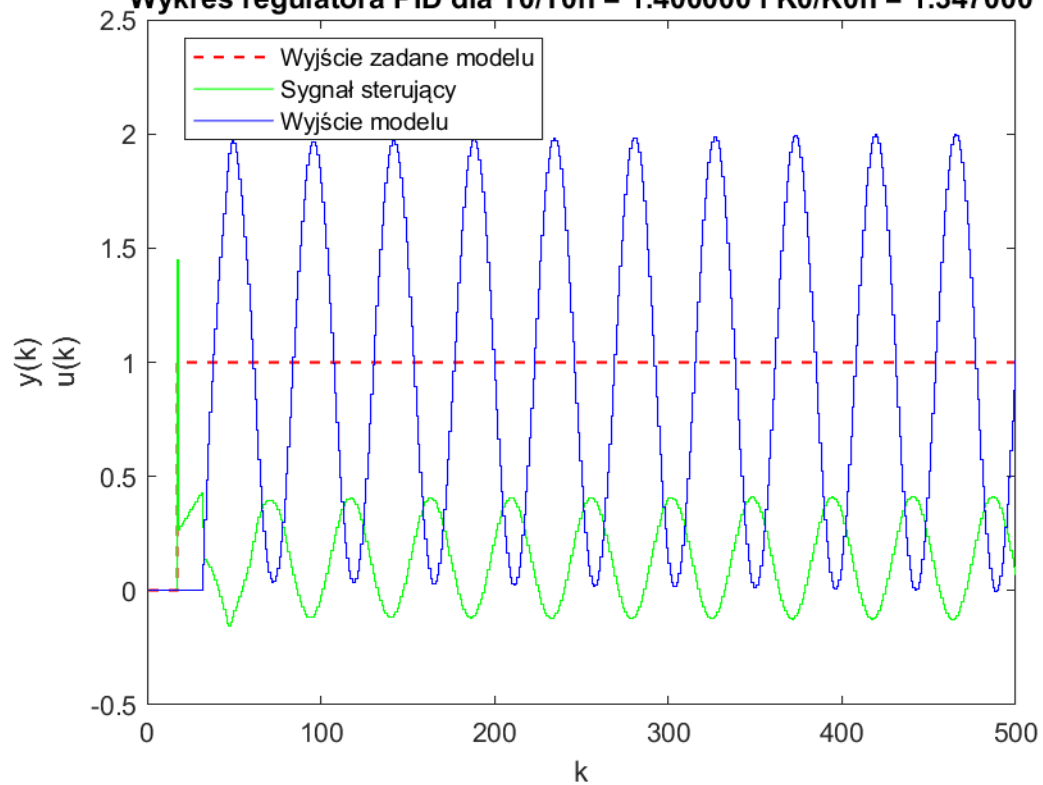
Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.200000$ i $K_0/K_{0n} = 1.455000$



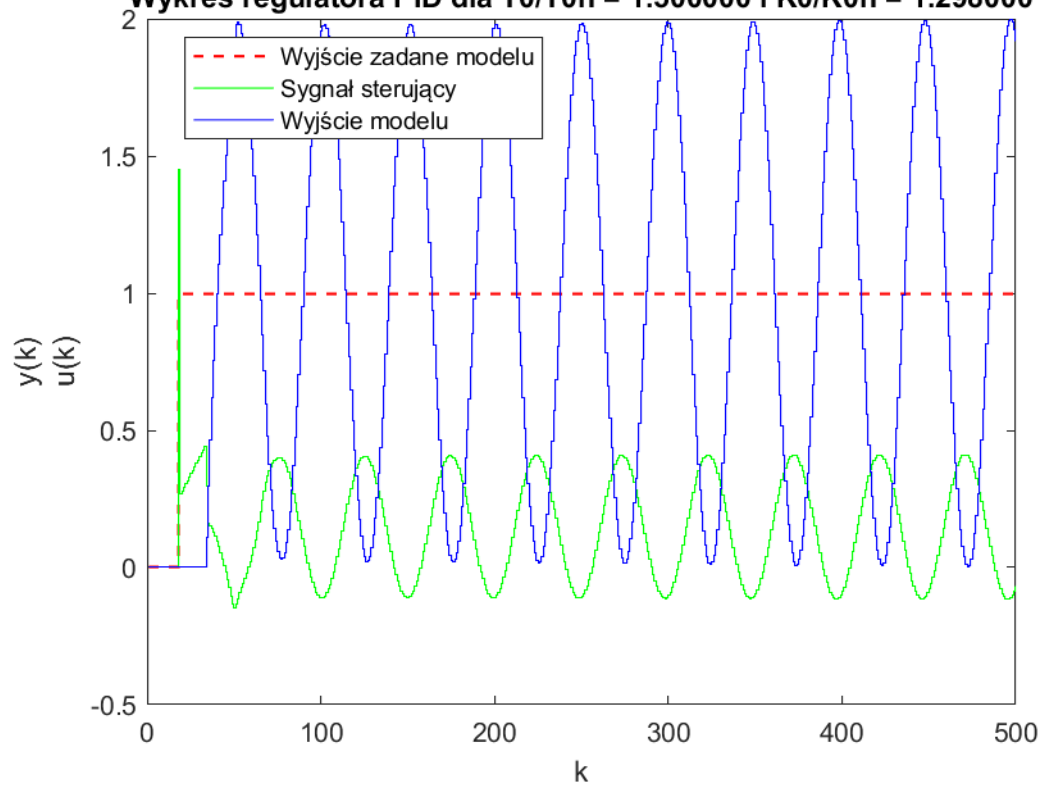
Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.300000$ i $K_0/K_{0n} = 1.398000$



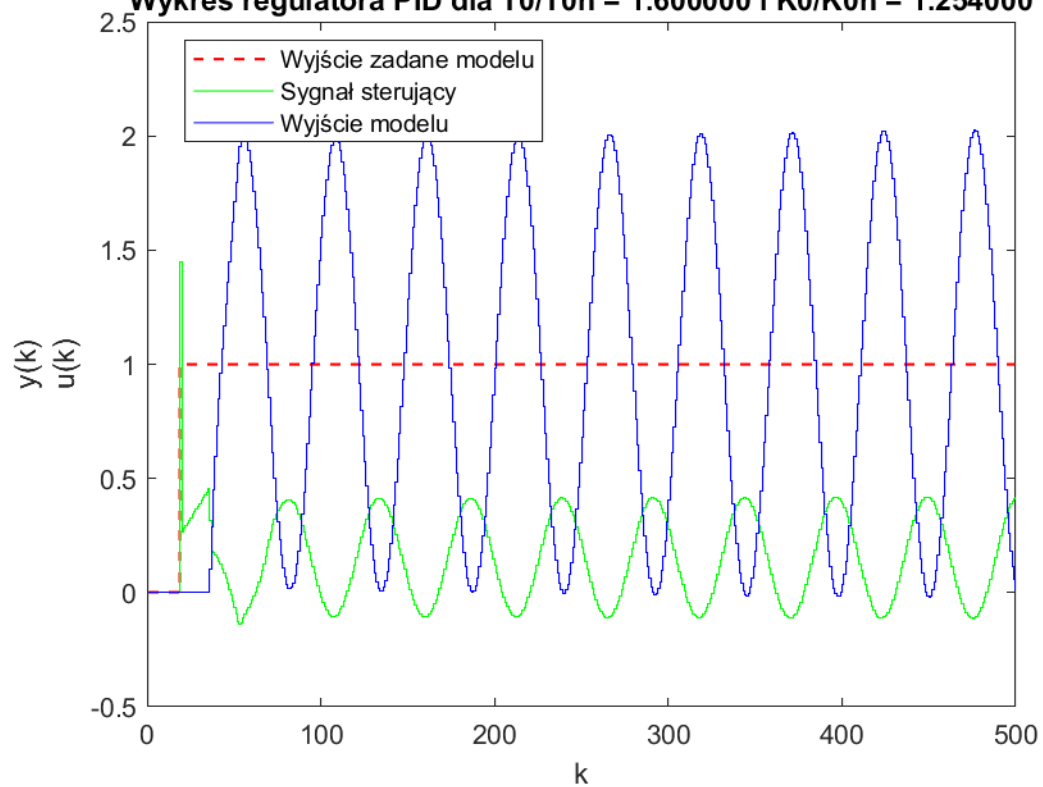
Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.400000$ i $K_0/K_{0n} = 1.347000$



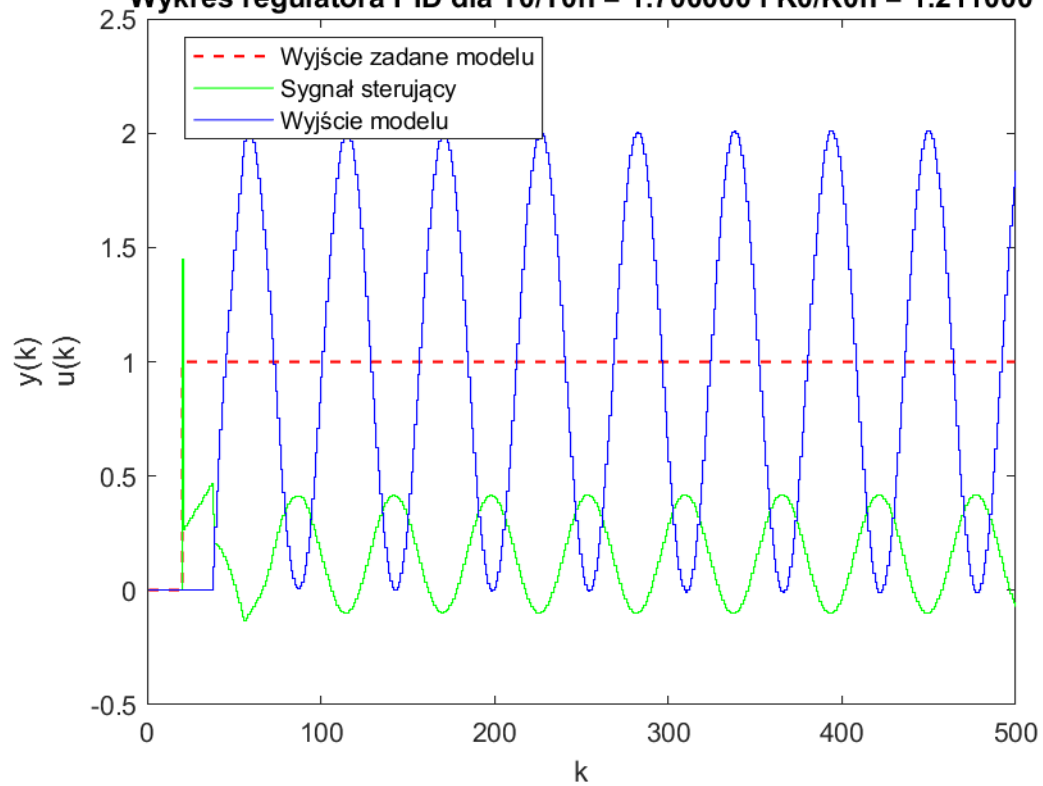
Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.500000$ i $K_0/K_{0n} = 1.298000$



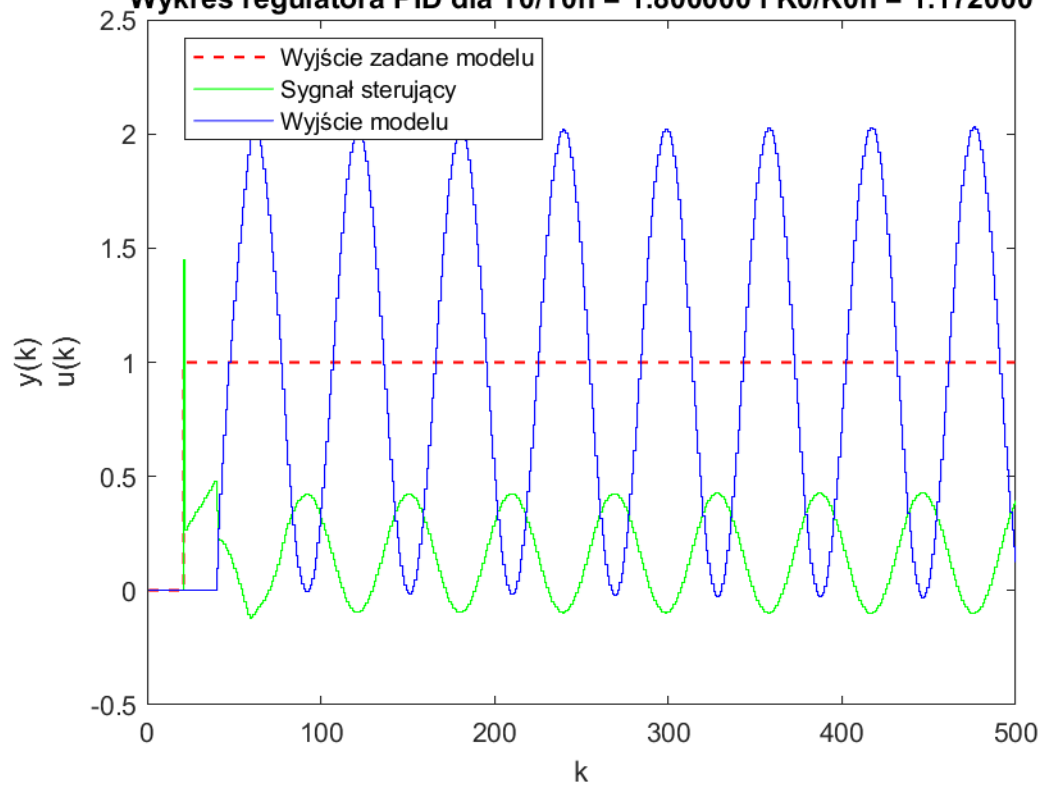
Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.600000$ i $K_0/K_{0n} = 1.254000$



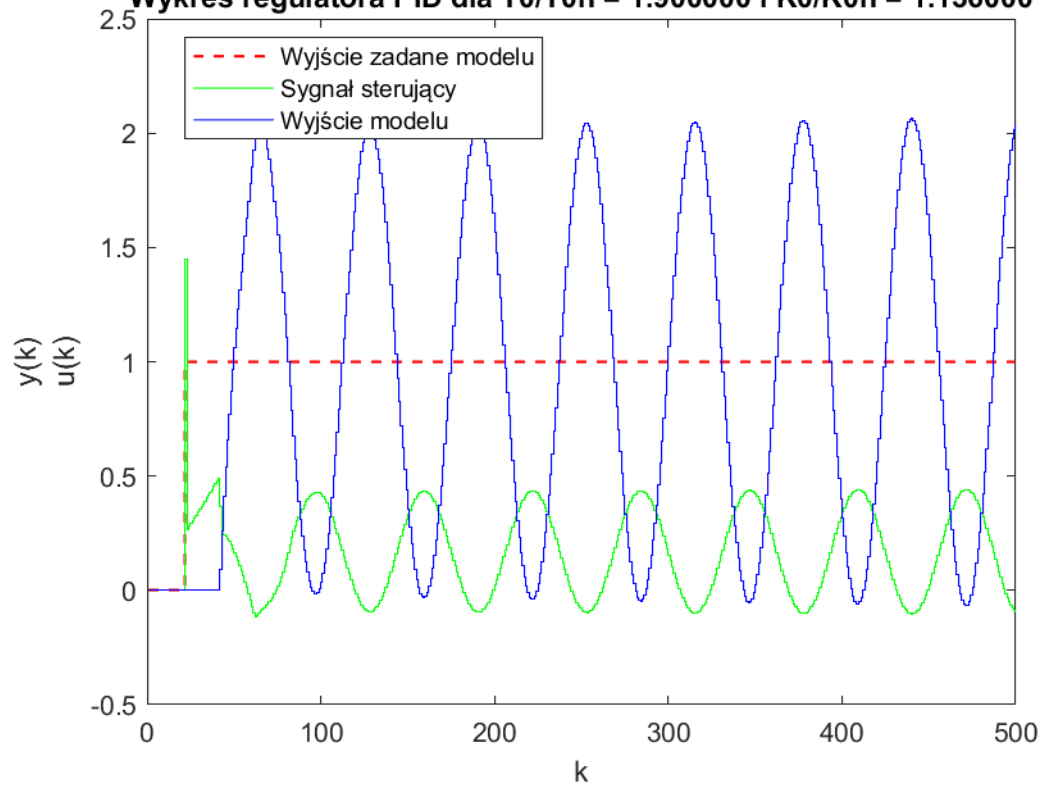
Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.700000$ i $K_0/K_{0n} = 1.211000$

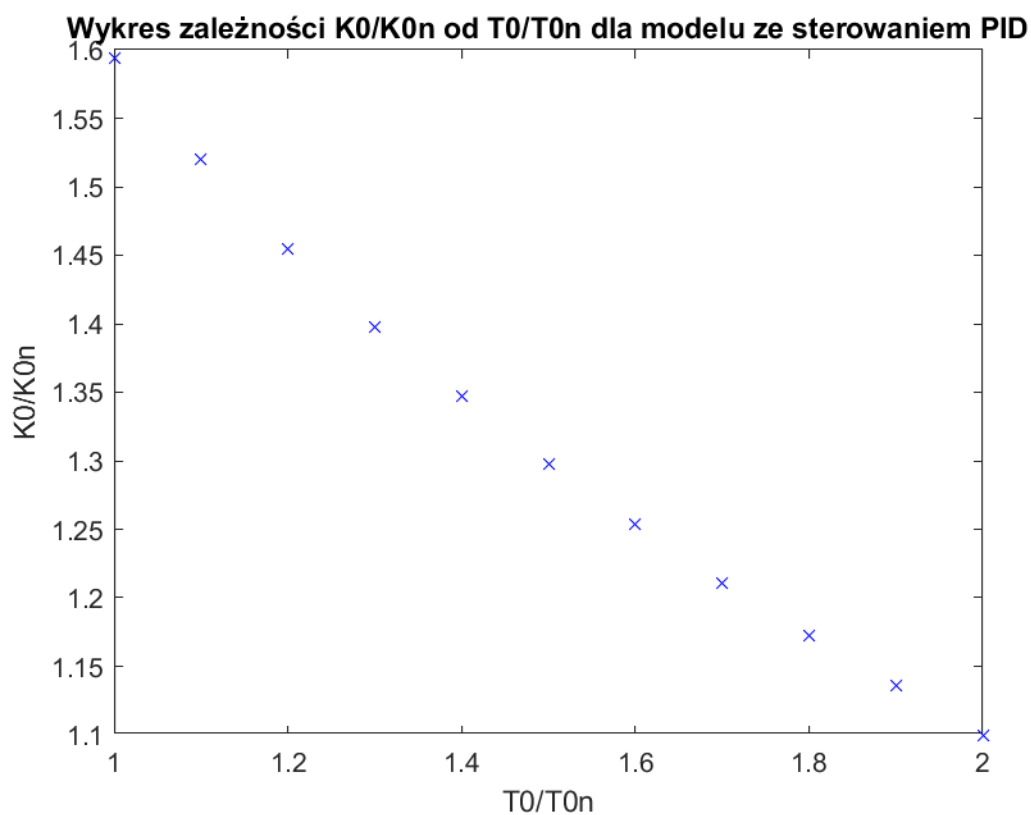
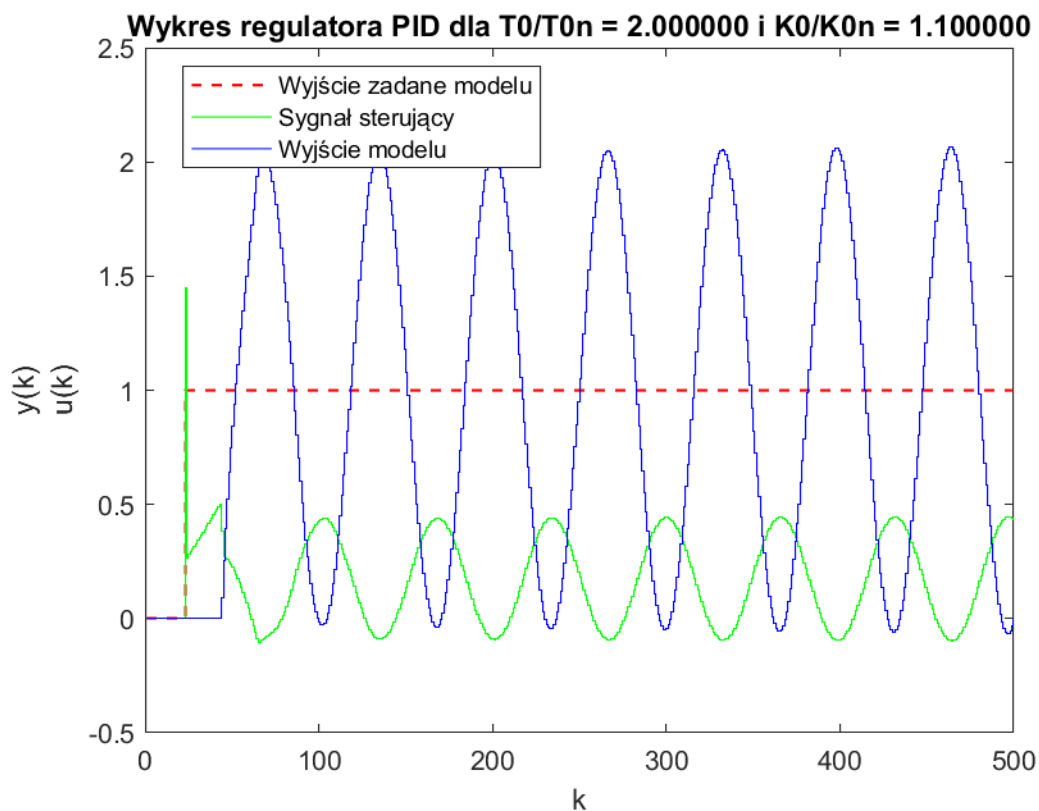


Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.800000$ i $K_0/K_{0n} = 1.172000$



Wykres regulatora PID dla $T_0/T_{0n} = 1.900000$ i $K_0/K_{0n} = 1.136000$



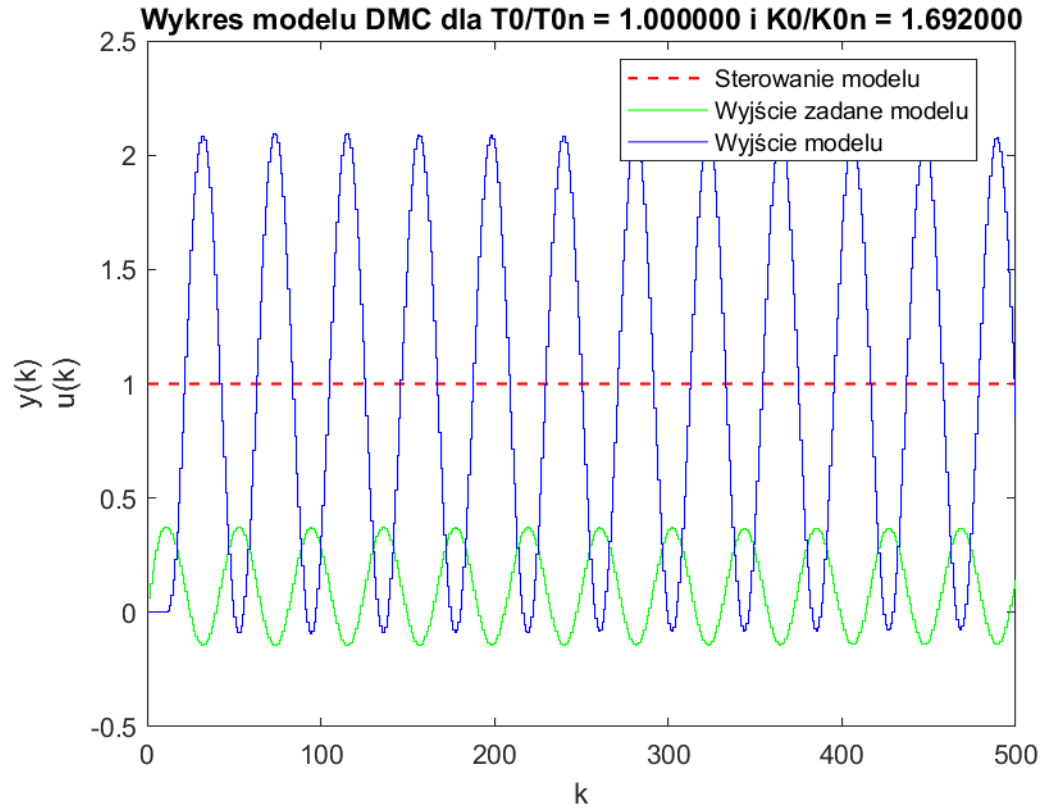


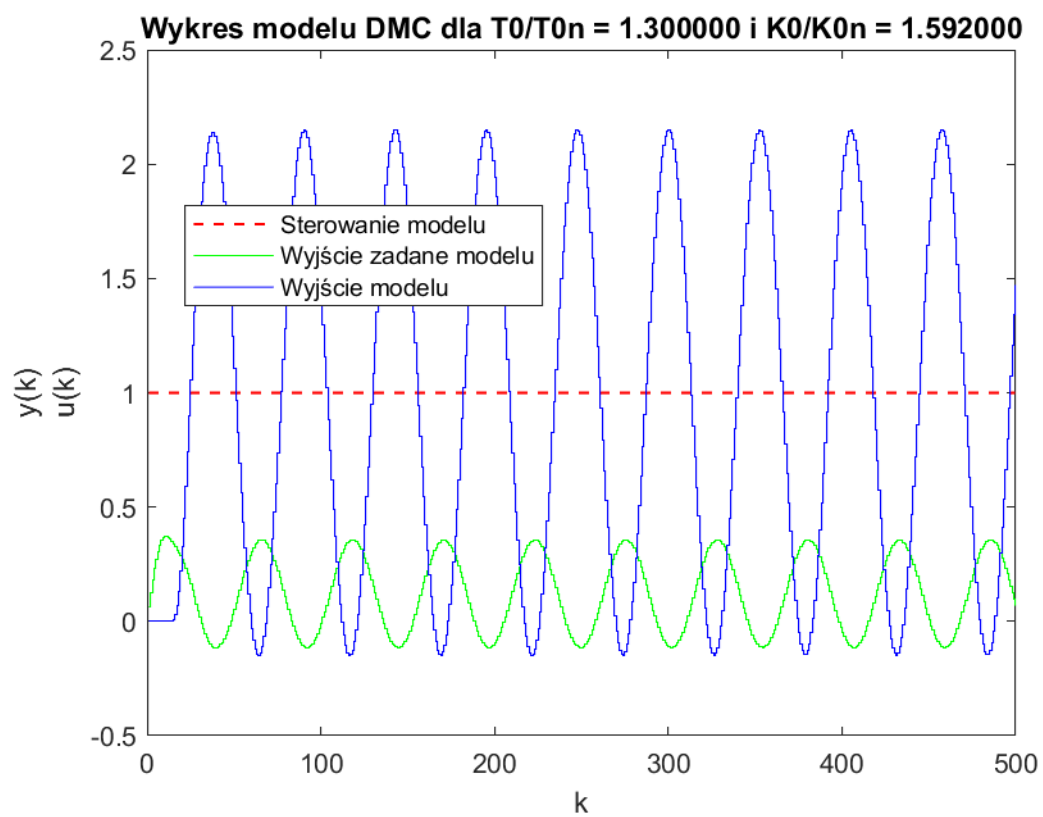
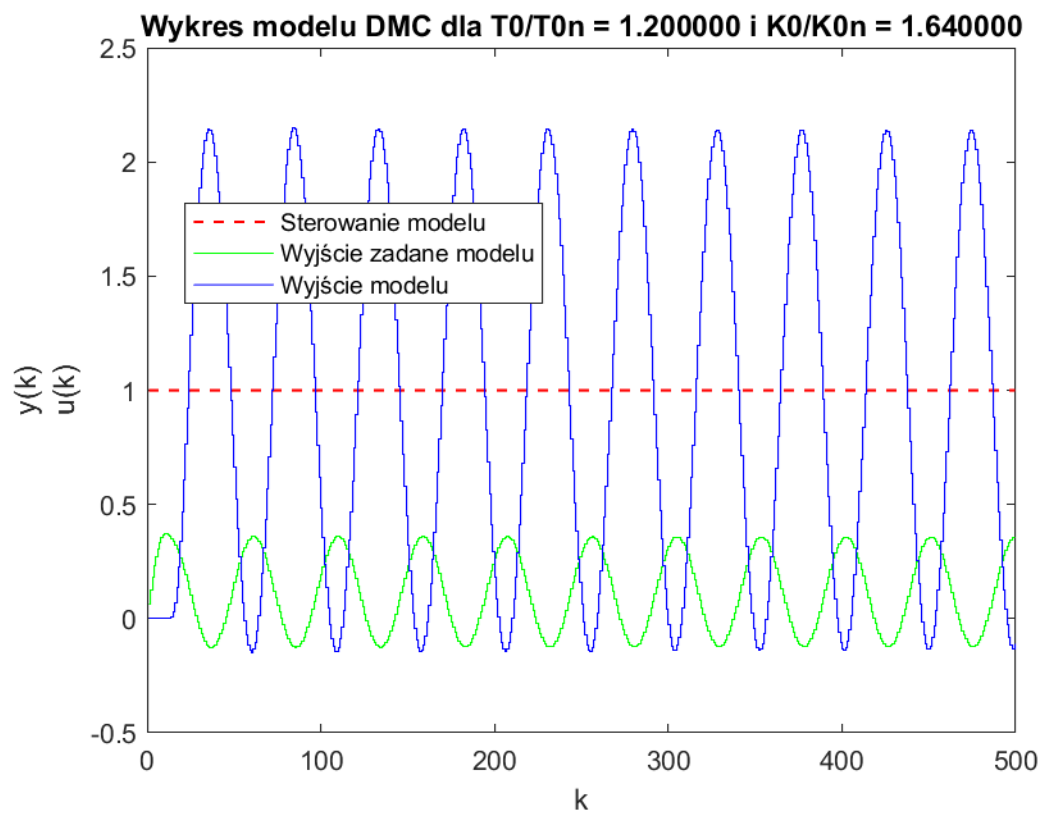
Jak możemy zauważyć obiekt z regulatorem PID jest całkiem stabilny, szczególnie przy opóźnieniu, które jest podane na wejściu. Przy coraz większych opóźnieniach możemy zaobserwować pogarszanie się stabilności i zbliżanie się punktów do wartości 1. Zejście wykresu poniżej tej wartości świadczy o

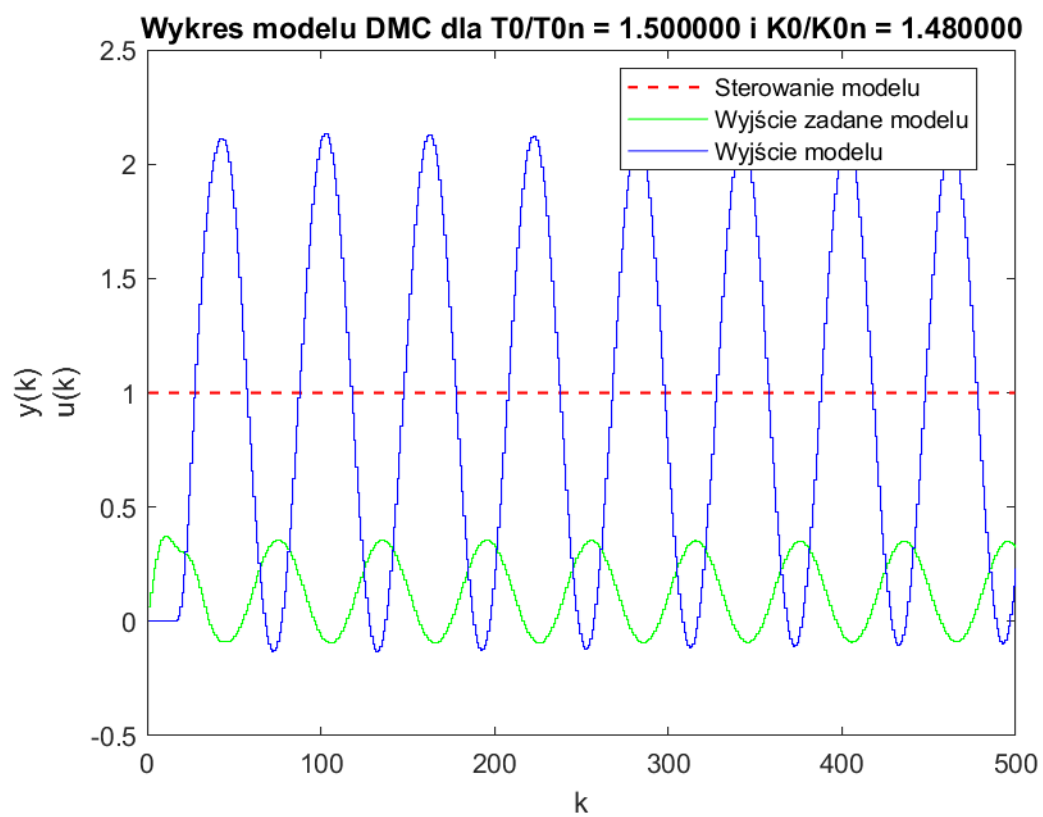
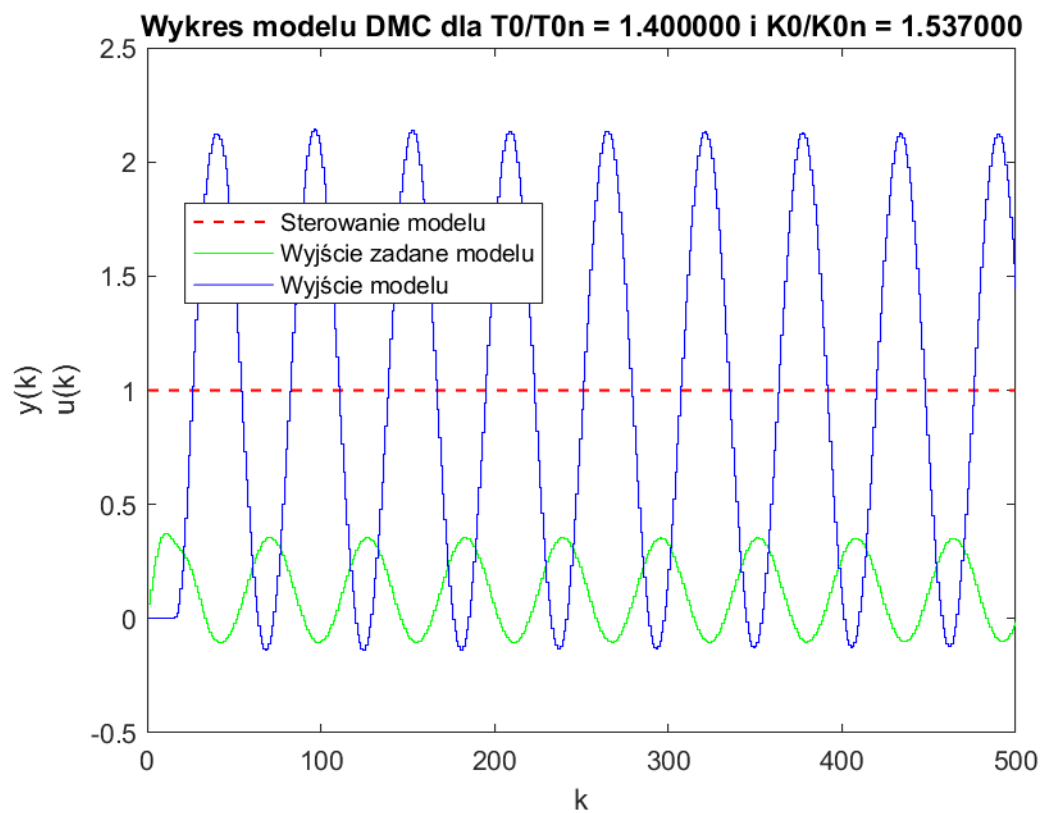
tym, że obiekt o podanych parametrach przy zwiększeniu opóźnienia staje się niestabilny i powinno się natychmiast doregulować regulator.

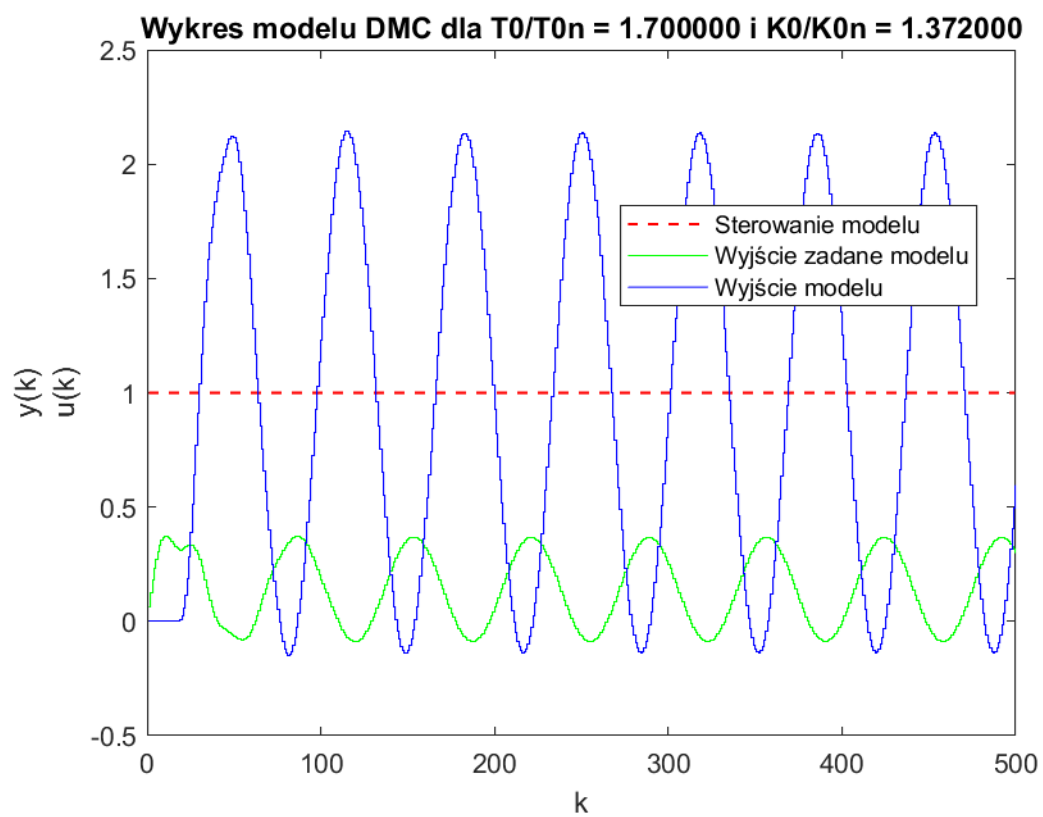
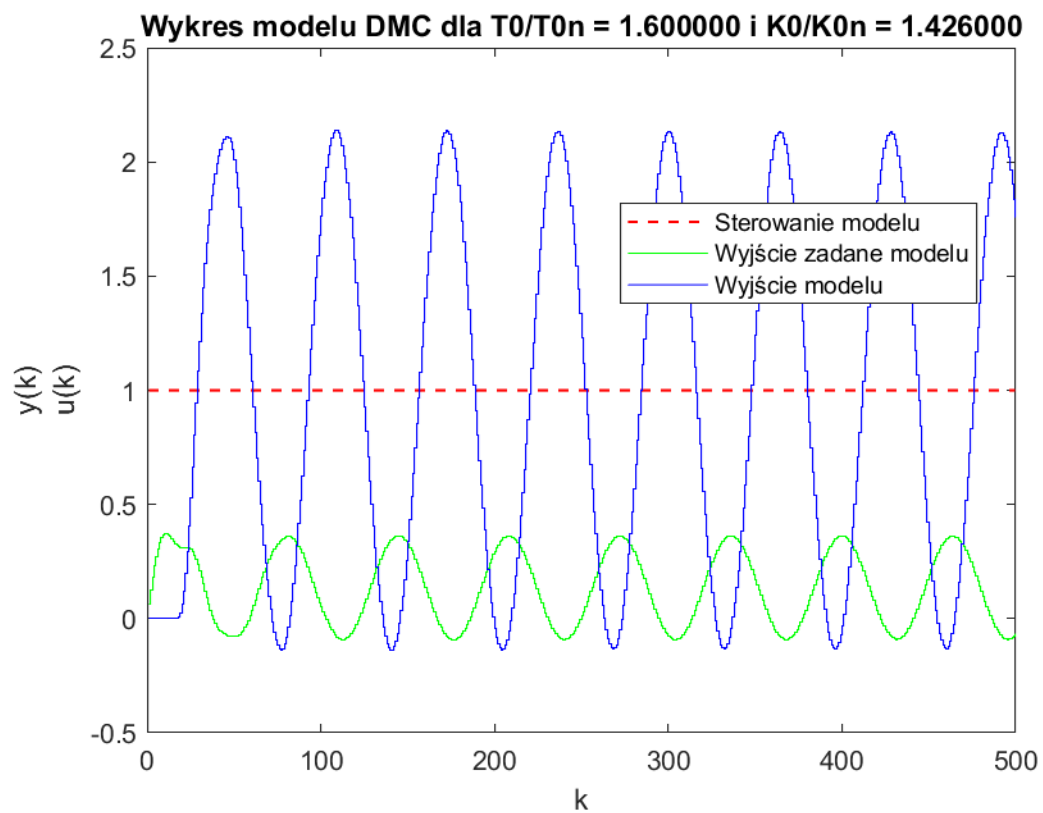
Sama krzywa stabilności regulatora PID przypomina wykres liniowy. Należy też zwrócić uwagę na wartości na osi y, ponieważ mogą mylnie sugerować gwałtowność spadku stabilności.

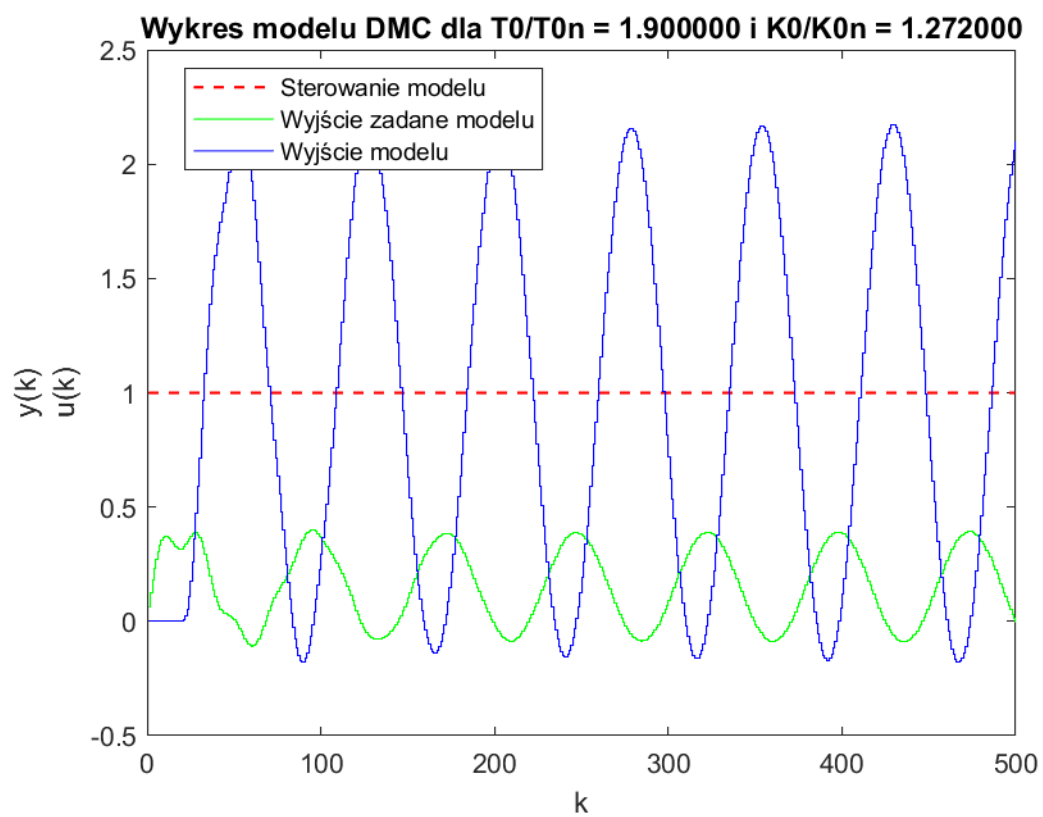
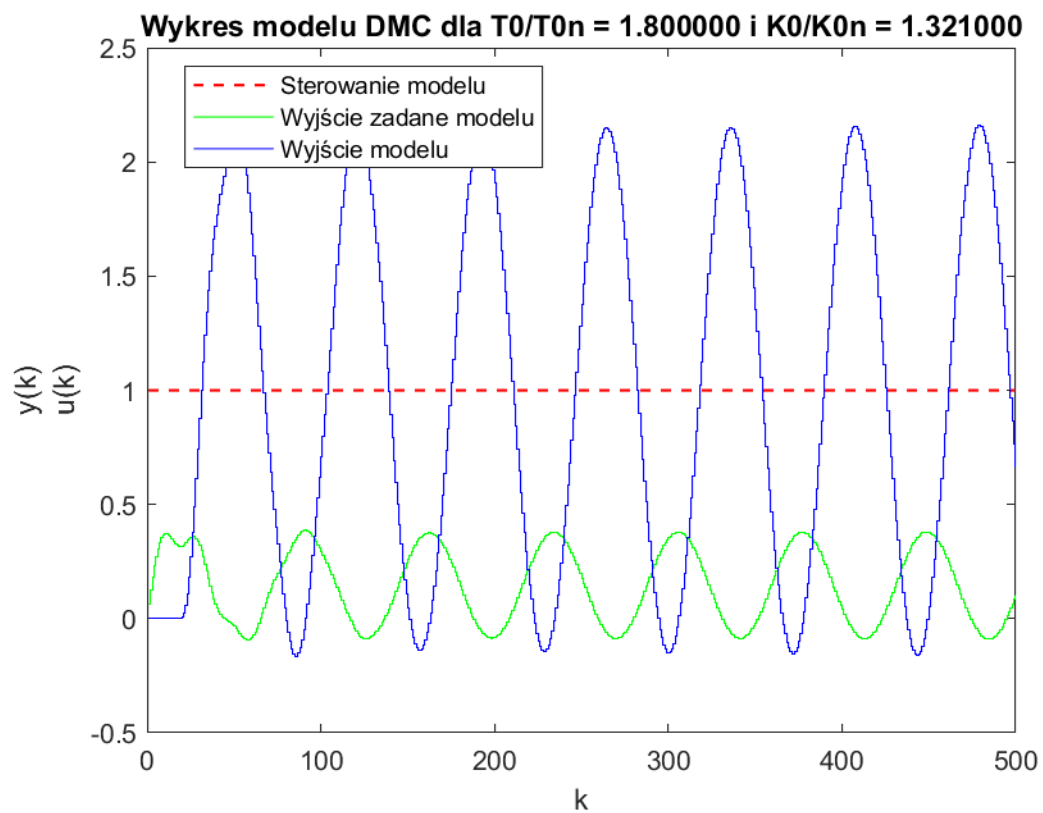
6.2 Stabilność regulatora DMC

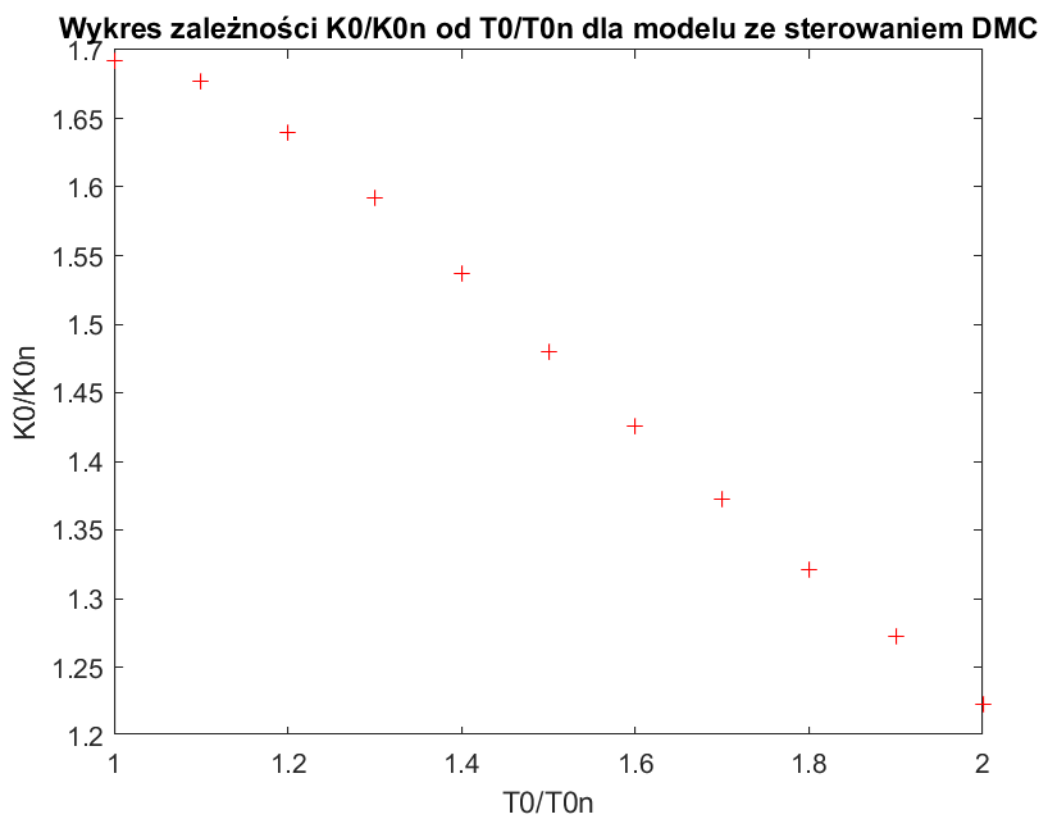
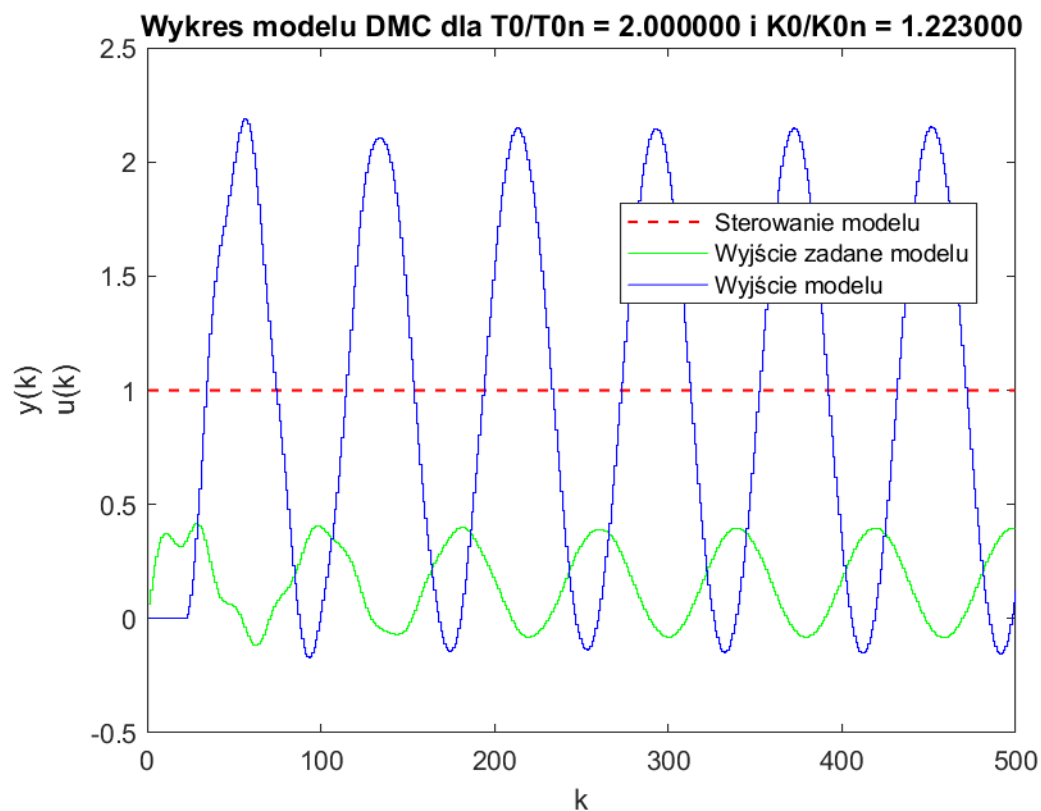






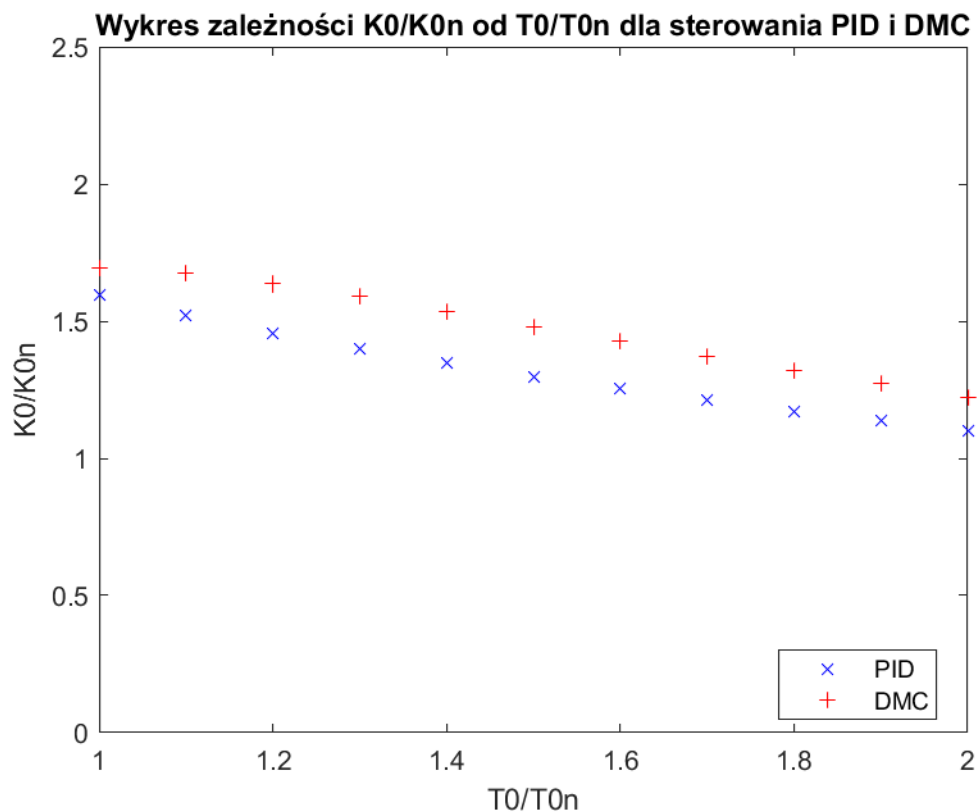






Obiekt z regulatorem DMC, podobnie jak w przypadku PID, jest bardzo stabilny. Jego krzywa również przypomina powoli opadający wykres liniowy.

6.3 Porównanie stabilności regulatorów



Na wykresie porównania stabilności regulatorów PID i DMC możemy zauważyć, że regulator DMC ostatecznie okazuje się być lepszym wyborem dla obiektu, którym chcemy sterować, ponieważ jego wartości są położone wyżej na wykresie. Stabilny algorytm DMC może świadczyć o bardzo dobrym dobraniu jego horyzontów.

Szybkość pogarszania się stabilności w zależności od opóźnienia w obu przypadkach jest podobna do liniowej, a nawet osiąga podobne nachylenie.