**Rozwiązanie**

**18.1.**

| $a$ | $b$ | liczba operacji mod |
|---|---|---|
| 25 | 15 | 3 |
| 116 | 324 | 6 |
| 762 | 282 | 6 |

**18.2.**

| $a_1, a_2, \ldots, \quad a_n$ | NWD$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ |
|---|---|
| 36, 24, 72, 150, 114 | 6 |
| 119, 187, 323, 527, 731 | 17 |
| 121, 330, 990, 1331, 110, 225 | 1 |

**18.3.**

Przykładowa poprawna odpowiedź:

$w \leftarrow a_1$
**dla** $i$ = 2, 3, 4, ...., $n$ **wykonuj**
  $w \leftarrow NWD\ (w, a_i)$
**zwróć** $w$ **i zakończ**

**Zadanie 19.**

**Wiązka zadań *Zakupy międzyplanetarne***

Mieszkańcy galaktyki Różnoliczbowo zamieszkują 9 planet: Liczbowo$_2$, Liczbowo$_3$, …, Liczbowo$_{10}$. Na każdej planecie Liczbowo$_i$ jej mieszkańcy posługują się systemem liczbowym o podstawie $i$. Na każdej planecie wszystkie ceny są liczbami naturalnymi.

**19.1.**

Mieszkańcy czterech sąsiadujących planet: Liczbowo$_2$, Liczbowo$_4$, Liczbowo$_8$ oraz Liczbowo$_{10}$ często podróżują pomiędzy tymi planetami i kupują różne towary. W poniższej tabeli znajdują się ceny wybranych towarów zakupionych przez jedną osobę na różnych planetach. Uzupełnij tabelę, przeliczając **podane** ceny na systemy liczbowe wszystkich czterech planet.

| **Towar** | **Cena towaru zapisana w systemie liczbowym planety** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Liczbowo$_2$** | **Liczbowo$_4$** | **Liczbowo$_8$** | **Liczbowo$_{10}$** |
| Kozaki | 10111011 | | | |
| Płaszcz | | | 724 | |
| Skuter | | | | 1458 |

**19.2.**

Na różnych planetach ten sam towar może mieć różną cenę, na przykład cena ciasta kokosowego na planecie Liczbowo$_{10}$ wynosi $38_{10}$, zaś na planecie Liczbowo$_8$ jego cena wynosi $55_8$ (równą $45_{10}$).

Mieszkańcy planety Liczbowo$_{10}$ są bardzo oszczędni i przed zakupami porównują ceny towarów na wybranych planetach. Uzupełnij w poniższej tabeli relacje (>, <, =) pomiędzy poszczególnymi cenami.

| Liczbowo$_x$ | Relacja | Liczbowo$_y$ |
|---|---|---|
| $110000100_2$ | > | $556_8$ |
| $3123_4$ | | $1747_8$ |
| $110_{10}$ | | $11010_3$ |
| $266_9$ | | $110100_3$ |
| $110111101_2$ | | $674_8$ |

**19.3.**

Sprzedawcy sklepów planety Liczbowo$_i$ wyliczają wartość zakupów klientów, sumując ceny zakupionych towarów w systemie obowiązującym na ich planecie; stosują przy tym metodę dodawania pisemnego.

---

**Przykłady**

Dodawanie w systemie o podstawie 2:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+_2 & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Dodawanie w systemie o podstawie 4:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 2 & 2 \\
 & & 1 & 0 & 3 \\
 & & & 3 & 1 \\
 & +_4 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 3
\end{array}
$$

Podsumuj rachunki pana Dwójkowskiego (z planety Liczbowo$_2$) oraz pana Czwórkowskiego (z planety Liczbowo$_4$).

**Rachunek pana Dwójkowskiego:**

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
+_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

SUMA ……………………………

**Rachunek pana Czwórkowskiego:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 3 | 3 |
| | 1 | 0 | 2 |
| | 3 | 1 | 1 |
| | 1 | 3 | 1 |
| | 1 | 2 | 3 |
| $+_4$ | 3 | 0 | 1 |

SUMA …………………

Podaj różnicę wartości obu rachunków w systemie obowiązującym na planecie $\text{Liczbowo}_{10}$.

**Różnica rachunków** w systemie obowiązującym na planecie $\text{Liczbowo}_{10}$ wynosi: …………..

**19.4.**

Właściciele sieci sklepów ulokowanych na wszystkich planetach galaktyki postanowili dostarczyć do sklepów kalkulatory, które będą dodawały ceny w opisany powyżej sposób. Aby pomóc właścicielom, podaj algorytm dodawania (w postaci pseudokodu lub w języku programowania), który dla dwóch liczb $a$ i $b$ zapisanych w systemie o podstawie $p \in [2,9]$ wyznacza i wypisuje wartość sumy $a +_p b$ zapisaną w systemie o podstawie $p$ zgodnie z poniższą specyfikacją. Twój algorytm **nie może** dokonywać zamiany liczb $a$ i $b$ na inny system pozycyjny.

**Specyfikacja**

Dane:

$p$ — podstawa systemu, liczba naturalna z przedziału [2,9],

$n$ — liczba cyfr liczb naturalnych $a$, $b \leq 255$ (przyjmujemy, że krótsza liczba jest uzupełniona z lewej strony zerami, tak aby obie liczby miały taką samą długość),

A[n], A[n−1],..., A[1] – kolejne cyfry liczby a zapisanej w systemie o podstawie $p$,

B[n], B[n−1],..., B[1] – kolejne cyfry liczby b zapisanej w systemie o podstawie $p$,

Wyniki:

wartość liczby $c = a +_p b$ zapisana w systemie o podstawie $p$ w postaci ciągu cyfr C[n+1], C[n],…,C[1].

**Przykład**

Dla następujących danych:

$p = 4$

$n = 4$,

Liczba $a = 3122_4$

Liczba $b = 21_4$

Wynikiem jest liczba $c = 3203_4$

Zawartość tablic A, B, C:

| i | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| A[i] | | 3 | 1 | 2 | 2 |
| B[i] | | 0 | 0 | 2 | 1 |
| C[i] | 0 | 3 | 2 | 0 | 3 |

## Komentarz do zadania

### 19.1.

Powszechnie znane są algorytmy konwersji liczby z zapisu dziesiętnego na zapis w systemie pozycyjnym o podstawie $s < 10$ i odwrotnie: z zapisu w systemie o podstawie $s$ na system dziesiętny. Aby uniknąć wielokrotnego wykonywania takich konwersji, skorzystamy z zależności między reprezentacjami liczb w systemie o podstawie 2, podstawie $4 = 2 \cdot 2$ oraz podstawie $8=2 \cdot 2 \cdot 2$. Skoncentrujmy się najpierw na systemach o podstawach 2 i 4:

- reprezentację liczby w systemie czwórkowym można uzyskać z jej reprezentacji w systemie binarnym (czyli o podstawie 2), wybierając od końca pary cyfr i zamieniając je na ich czwórkowe reprezentacje;
- reprezentację liczby w systemie binarnym można uzyskać z jej reprezentacji w systemie czwórkowym, zamieniając każdą cyfrę czwórkową na jej dwucyfrową reprezentację binarną.

Ponieważ $8=2^3$, analogiczna własność zachodzi dla konwersji między systemem binarnym a systemem ósemkowym, z tą różnicą, że zamiast bloków 2 cyfr rozważamy bloki o długości 3. Korzystając z powyższych obserwacji, uzyskujemy rozwiązanie:

<table>
<tr><th rowspan="2">Towar</th><th colspan="4">Cena towaru zapisana w systemie liczbowym planety</th></tr>
<tr><th>Liczbowo$_2$</th><th>Liczbowo$_4$</th><th>Liczbowo$_8$</th><th>Liczbowo$_{10}$</th></tr>
<tr><td>Kozaki</td><td>10111011</td><td>2323</td><td>273</td><td>187</td></tr>
<tr><td>Płaszcz</td><td>111010100</td><td>13110</td><td>724</td><td>468</td></tr>
<tr><td>Skuter</td><td>10110110010</td><td>112302</td><td>2662</td><td>1458</td></tr>
</table>

Dokładniej, dla $10111011_{(2)}$ uzyskujemy:

- reprezentację czwórkową: dzieląc 10111011 na bloki 10, 11, 10, 11 i zapisując w systemie o podstawie 4 wartość każdego bloku: 2, 3, 2 i 3;

<table>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">11</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td></tr>
</table>

- reprezentację ósemkową: dzieląc 10111011 na bloki 10, 111, 011 i zapisując w systemie o podstawie 4 wartość każdego bloku: 2, 7 i 3.

<table>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">010</td><td colspan="3">111</td><td colspan="3">011</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">3</td></tr>
</table>

Z kolei z $724_{(8)}$ uzyskujemy:

- reprezentację binarną: zamieniając każdą cyfrę ósemkową na jej 3-cyfrową reprezentację binarną, czyli 111, 010, 100; daje to reprezentację 111010100;
- reprezentację czwórkową: dzieląc binarną reprezentację 111010100 na bloki 01, 11, 01, 01 i 00, zapisując w systemie o podstawie 4 wartość każdego bloku: 1, 3, 1, 1 i 0.

Znając zasady konwersji między systemami o podstawach 2, 4 i 8, reprezentację dziesiętną możemy uzyskać za pomocą standardowego algorytmu zamiany liczby z systemu o podstawie $p$ różnej od 10 (np. $p = 2$) na system dziesiętny. Analogicznie, znając reprezentację dziesiętną, wystarczy znaleźć jej reprezentację w jednym z pozostałych systemów, a potem zastosować omówione powyżej reguły konwersji między systemami o podstawach 2, 4 i 8.

**19.2.**

Używając standardowych algorytmów zamiany z systemu niedziesiętnego na dziesiętny, możemy wszystkie liczby przekształcić na postać dziesiętną i wówczas porównać. Metoda ta wymaga dość dużo obliczeń, dlatego pokażemy sposób wymagający mniej pracy. Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 1 polegać on będzie na wykorzystaniu faktu, że dwie cyfry w systemie o podstawie *s* odpowiadają jednej cyfrze w systemie o podstawie $s^2$, podobnie trzy cyfry w systemie o podstawie *s* odpowiadają jednej cyfrze w systemie o podstawie $s^3$):

$556_8$=$101101110_2$ < $110000100_2$
$3123_4$=$11011011_2$, $1747_8$=$001111100111_2$, czyli $3123_4$<$1747_8$
$266_9$=$022020_3$, czyli $266_9$<$110100_3$
$674_8$=$110111100_2$, czyli 6748<1101111012

Jedyny przykład wymagający konwersji na system dziesiętny to porównanie $110_{10}$ i $11010_3$=$81_{10}$+$27_{10}$+$3_{10}$=$111_{10}$.

**19.3.**

Możemy wszystkie liczby w rachunku zamienić na system dziesiętny i je dodawać. Inne rozwiązanie polega na zastosowaniu metody dodawania pisemnego przeprowadzonego na reprezentacji binarnej i czwórkowej. Pokażemy je dla par liczb z rachunku pana Dwójkowskiego. Najpierw dodamy dwie pierwsze liczby.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| przeniesienie: | | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| | | | **1** | **0** | **1** | **1** |
| | $+_2$ | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| SUMA: | | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** |

Następnie do wyniku dodamy trzecią liczbę

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| przeniesienie: | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | | | | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| | $+_2$ | | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** |
| SUMA: | | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |

Dodając następnie liczby: $11010_2$, $11001_2$ i $101011_2$, uzyskamy wynik $10110010_2$.

Analogicznie postępujemy dla reprezentacji czwórkowych. Suma dwóch pierwszych liczb to:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| przeniesienie: | | 1 | 1 | |
| | | | **3** | **3** |
| | $+_4$ | **1** | **0** | **2** |
| SUMA: | | **2** | **0** | **1** |

Dodając następnie liczby: $311_4$, $131_4$, $123_4$ i $301_4$, uzyskamy wynik $2333_4$.

Następnie zamieniamy obie obliczone sumy na system dziesiętny:

$10110010_2$=$2_{10}$+$16_{10}$+$32_{10}$+$128_{10}$=$178_{10}$ oraz $2333_4$=$3_{10}$+$3_{10}\cdot 4_{10}$+$3\cdot 16_{10}$+$2\cdot 64_{10}$=$191_{10}$.

A zatem różnica wartości rachunków wynosi $13_{10}$.

**19.4.**

Zadanie można rozwiązać, implementując zasadę dodawania pisemnego, której przykłady podaliśmy w rozwiązaniu zadania 3. Zgodnie z tą zasadą dodajemy odpowiadające sobie cyfry i przeniesienia, zaczynając od prawej strony. Przyjmujemy przy tym, że ostatnie przeniesienie $R[1]$ (na skrajnie prawej pozycji 1) jest równe zero. Ponadto wiemy, że:

- $i$-ta cyfra wyniku jest równa $(A[i] + B[i] + R[i])$ mod $p$, gdzie $R[i]$ to $i$-te przeniesienie,
- $(i + 1)$-sze przeniesienie $R[i + 1]$ jest równe $(A[i] + B[i] + R[i])$ div $p$,

gdzie mod i div oznaczają odpowiednio operacje reszty z dzielenia i wyniku dzielenia całkowitego (tzn. zaokrąglenia dokładnego wyniku dzielenia do liczby całkowitej w dół). Musimy jednak uwzględnić, że wynik może być o jedną cyfrę dłuższy od dodawanych liczb. Dlatego przyjmiemy, że wynik ma $n$+1 cyfr i najbardziej znaczącą cyfrę wyniku zapiszemy na pozycji $n$+1.

```
i ← 1
R[1] ← 0
dopóki i < n+1 wykonuj
        c ← A[i] + B[i] + R[i]
        C[i] ← c mod p
        R[i + 1] ← c div p
        i ← i + 1
C[n+1] ← R[n+1]
```

W modelu odpowiedzi zamieściliśmy trochę inne rozwiązanie:

- zamiast tablicy przeniesień $R$ przechowujemy tylko aktualne przeniesienie, w zmiennej $r$;
- pokazujemy tam, jak można uniknąć stosowania operatorów mod i div, korzystamy przy tym z tego, że $A[i]+B[i]$ jest zawsze nie większe niż $2p - 2$, a reszta $R[i]$ jest równa 0 lub 1.

## Zadanie 20.

**Wiązka zadań *Liczba narcystyczna***

Niech dana będzie liczba naturalna $x$, której zapis dziesiętny ma $n$ cyfr:

$$x = a_{n-1}10^{n-1} + a_{(n-2)}10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 \qquad (a_{n-1} \neq 0).$$

Powiemy, że liczba $x$ jest *narcystyczna*, jeśli suma jej cyfr podniesionych do potęgi $n$-tej jest równa $x$, tzn.

$$a_{n-1}^n + a_{n-2}^n + \cdots + a_1^n + a_0^n = x.$$

Na przykład liczba 1634 jest narcystyczna, ponieważ

$$1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1634.$$

Powiemy, że liczba $x$ jest *B-narcystyczna*, jeśli jej zapis w systemie o podstawie $B$ ma $n$ cyfr, których suma $n$-tych potęg jest równa $x$, tzn.

$$x = a_{n-1}B^{n-1} + a_{(n-2)}B^{n-2} + \cdots + a_1 B + a_0 \quad \text{oraz} \quad a_{n-1}^n + a_{n-2}^n + \cdots + a_1^n + a_0^n = x.$$

Na przykład liczba 289 jest 5-narcystyczna, ponieważ