Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Кенан Гашимов

2026-02-24

Содержание (i)

1. Вводная часть

Показать, как на основе математической модели выбрать стратегию поиска и перехвата при неопределённости направления движения цели.

Сюжет: в условиях тумана катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. На короткое время видимость улучшается, и лодка фиксируется на расстоянии k км от катера. Затем она снова исчезает и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера равна n скоростям лодки. Необходимо определить траекторию катера, обеспечивающую перехват.

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений при условии, что скорость катера больше скорости лодки в n раз.

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений при условии, что скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.

Задание

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений при условии, что скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.
3. По графику определить точку пересечения траекторий (момент перехвата).

2. Теория: постановка и вывод модели

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,

Используем полярные координаты:

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер удалён от неё на k: $X_0 = k$ (отсчёт ведётся относительно лодки).

Используем полярные координаты:

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер удалён от неё на k: $X_0 = k$ (отсчёт ведётся относительно лодки).

Используем полярные координаты:

- полюс — точка обнаружения лодки,

Начальные обозначения и координаты

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер удалён от неё на k: $X_0 = k$ (отсчёт ведётся относительно лодки).

Используем полярные координаты:

- полюс — точка обнаружения лодки,
- ось r направлена через начальное положение катера.

Дистанция перехода к «обходу» полюса

Найдём расстояние x, при котором катер и лодка окажутся на одном и том же радиусе относительно полюса.

За время t лодка проходит путь x, а катер $-x-k$ либо $x+k$ (зависит от взаимного расположения относительно выбранной оси).

Из равенства времён и соотношения скоростей получаются два режима старта:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

Далее катер движется так, чтобы радиальная составляющая его скорости совпадала со скоростью лодки, а оставшаяся часть шла на «обход» направления (тангенциально).

Разложение скорости катера и система ОДУ

Из равенства времён и соотношения скоростей получаются два режима старта:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- case = minus:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

Далее катер движется так, чтобы радиальная составляющая его скорости совпадала со скоростью лодки, а оставшаяся часть шла на «обход» направления (тангенциально).

Исключая параметр времени t, получаем уравнение траектории:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Следствие: в полярных координатах траектория катера имеет вид экспоненциально расходящейся спирали.

3. Эксперимент: численное моделирование

Условие задачи для расчётов

Задано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,

Требуется: построить траектории катера и лодки и по их пересечению определить момент перехвата.

Условие задачи для расчётов

Задано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,
- превосходство по скорости: $n = 5$.

Требуется: построить траектории катера и лодки и по их пересечению определить момент перехвата.

Базовый эксперимент: case = plus

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- катер описывает расходящуюся спираль;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- катер описывает расходящуюся спираль;
- радиус r увеличивается при росте угла θ;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- катер описывает расходящуюся спираль;
- радиус r увеличивается при росте угла θ;
- лодка в полярном виде соответствует лучу (прямолинейное движение в декартовых координатах).


Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
45°
0°
315°
225°
180°
135°
20
15
10
5
0

Ключевые отличия от case=plus:

- начальный радиус больше, поэтому траектория смещена дальше от полюса;

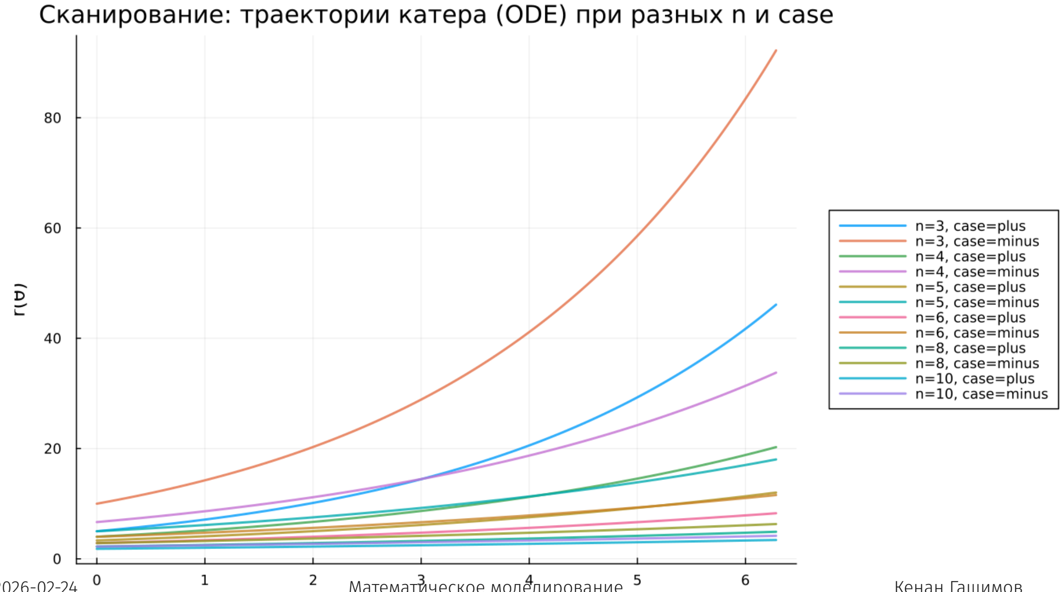
Базовый эксперимент: case = minus

Ключевые отличия от case=plus:

- начальный радиус больше, поэтому траектория смещена дальше от полюса;
- форма спирали не меняется, меняется только масштаб и стартовая позиция.

4. Параметрический анализ

Сканирование по параметру n



Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент «раскрытия» спирали по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$, поэтому:

- при малых n спираль расходится быстрее;

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент «раскрытия» спирали по углу равен $1/\sqrt{n^2-1}$, поэтому:

- при малых n спираль расходится быстрее;
- при больших n радиальный рост замедляется;

Сканирование по параметру n

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент «раскрытия» спирали по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$, поэтому:

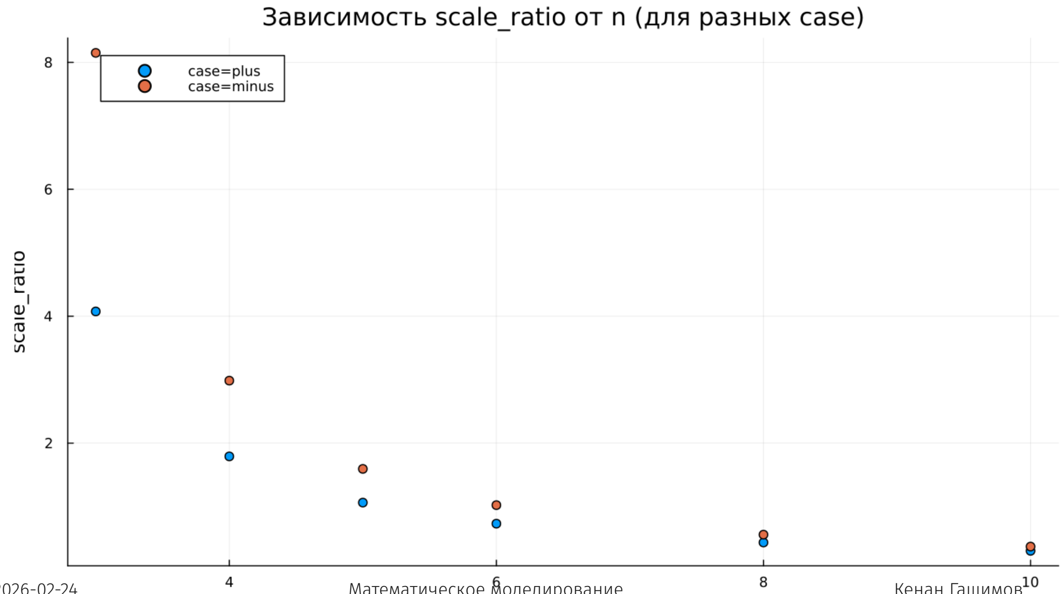
- при малых n спираль расходится быстрее;
- при больших n радиальный рост замедляется;
- траектории выглядят более «пологими» и менее агрессивно расходящимися.

Метрика scale_ratio

Введём показатель относительного масштаба:

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

Метрика scale_ratio



Метрика scale_ratio

Интерпретация:

- при малых n значение существенно больше 1 — катер быстро «обгоняет» лодку по радиальному масштабу;

В режиме case=minus значения, как правило, выше из-за большего стартового радиуса.

Метрика scale_ratio

Интерпретация:

- при малых n значение существенно больше 1 — катер быстро «обгоняет» лодку по радиальному масштабу;
- с ростом n метрика заметно снижается;

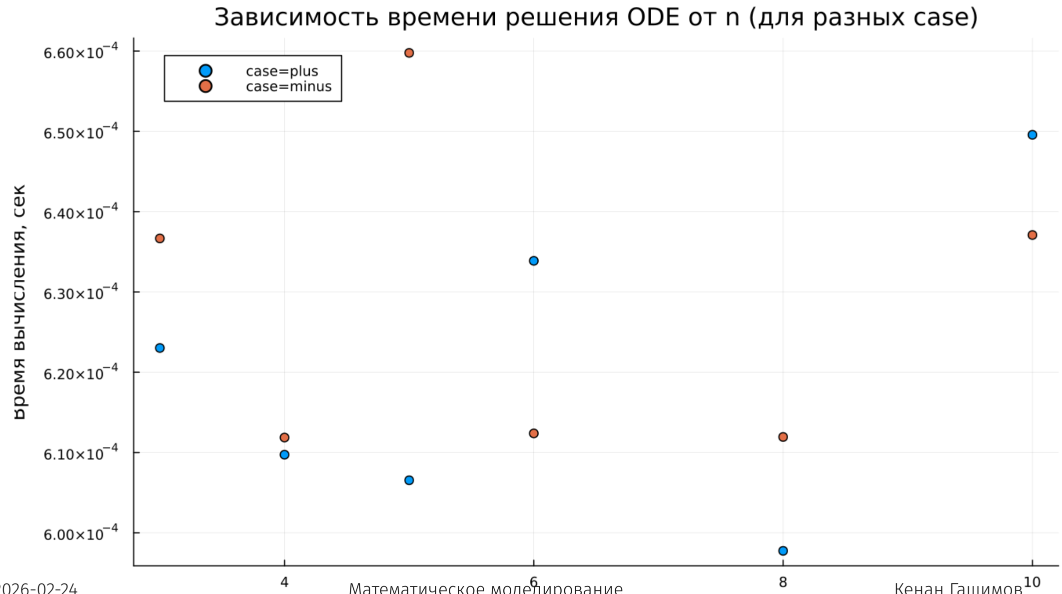
В режиме case=minus значения, как правило, выше из-за большего стартового радиуса.

Интерпретация:

- при малых n значение существенно больше 1 — катер быстро «обгоняет» лодку по радиальному масштабу;
- с ростом n метрика заметно снижается;
- при больших n траектории становятся близкими по масштабу.

В режиме case=minus значения, как правило, выше из-за большего стартового радиуса.

Время вычислений



Время вычислений

Итоги бенчмаркинга:

- характерное время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;

Итоги бенчмаркинга:

- характерное время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- выраженной зависимости от n не обнаружено;

Время вычислений

Итоги бенчмаркинга:

- характерное время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- выраженной зависимости от n не обнаружено;
- небольшие колебания связаны с адаптивным шагом интегрирования.

5. Итоги

Выводы

1. Оптимальная стратегия катера в модели приводит к траектории вида экспоненциально расходящейся спирали в полярных координатах.

Выводы

1. Оптимальная стратегия катера в модели приводит к траектории вида экспоненциально расходящейся спирали в полярных координатах.
2. Параметр n задаёт темп радиального роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается r при росте θ.

Выводы

1. Оптимальная стратегия катера в модели приводит к траектории вида экспоненциально расходящейся спирали в полярных координатах.
2. Параметр n задаёт темп радиального роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается r при росте θ.
3. Режим начальных условий (case) влияет на стартовый масштаб и положение, но не меняет качественную форму траектории.

Выводы

1. Оптимальная стратегия катера в модели приводит к траектории вида экспоненциально расходящейся спирали в полярных координатах.
2. Параметр n задаёт темп радиального роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается r при росте θ.
3. Режим начальных условий (case) влияет на стартовый масштаб и положение, но не меняет качественную форму траектории.
4. Численное решение демонстрирует устойчивость, а вычислительные затраты слабо зависят от n.