Econometría Financiera

Tema 2:

Modelos Univariados de Media Condicionada

Abdel Arancibia Flores[1]

[1]UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Abril, 2020

Índice

Conceptos Preliminares

Procesos Estocásticos

Un **Proceso Estocástico (PE)** es una secuencia de variables aleatorias, ordenadas y equidistantes cronológicamente.

Ejemplo:

- Suponga que hemos observado una muestra de tamaño T de alguna variable aleatoria Y.

  $$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_T\} = \{y_t\}_{t=1}^{T}$$

  La muestra observada representa T números particulares, este conjunto de T números es una posible salida de un subyacente **proceso estocástico generador de datos**.

- Si imaginásemos haber observado el proceso para un período de tiempo infinito, obtendríamos la secuencia

  $$\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots, y_T, y_{T+1}, y_{T+2}, \ldots\}$$

  la cual puede ser vista como *una simple realización* de un proceso de series de tiempo.

Conceptos Preliminares

Procesos Estocásticos Estacionarios

- **Estrictamente Estacionario**

  El proceso estocástico $\{y_t\}$ es estrictamente estacionario si la distribución conjunta de $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ no depende del tiempo. En otras palabras, los momentos de $\{y_t\}$ no dependen del tiempo.

- **Débilmente Estacionario**

  O también llamado **estacionario en covarianzas**. El proceso estocástico $\{y_t\}$ es débilmente estacionario si los dos primeros momentos de y_t no dependen del tiempo.

$$E[y_t] = \mu_t = \mu$$

$$Var[y_t] = \sigma_t^2 = \sigma^2 < \infty$$

$$Cov(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] = \gamma_k < \infty$$

Conceptos Preliminares

Procesos Estocásticos Estacionarios

Nota: Un proceso estocástico estacionario especial e importante en la teoría de series de tiempo es el **ruido blanco**.

Se dice que $\{\epsilon_t\}_{t=1}^{T}$ es ruido blanco si:

$$E[\epsilon_t] = 0$$

$$Var[\epsilon_t] = \sigma_\epsilon^2$$

$$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-k}) = 0, \quad \forall\ t \in \{1, \ldots, T\}, \quad \forall\ k \neq 0$$

Conceptos Preliminares

Función de Autocorrelación

Sea un proceso estocástico estacionario: $Y = \{y_t\}_{t=t_0}^{T}$

- **Función de Autocorrelación Simple (ρ_k)**

  Está definida como la correlación entre y_t y y_{t-k}

$$\rho_k = Corr(y_t, y_{t-k}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t)}\sqrt{Var(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0}\sqrt{\gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- **Función de Autocorrelación Parcial (PACF)**

  La autocorrelación parcial de orden k, mide la dependencia lineal de y_t y su rezago y_{t-k} luego de remover el efecto de los rezagos intermedios sobre ambas.

  La autocorrelación parcial de orden k, es el coeficiente de la regresión parcial (en la población) ϕ_{kk} en la autoregresión de orden k-ésimo de la forma

$$y_t = \phi_{0,k} + \phi_{1,k} y_{t-1} + \cdots + \phi_{k,k} y_{t-k} + \epsilon_t$$

Conceptos Preliminares

Procesos Lineales

Un proceso estocástico es lineal si se obtiene a partir de la combinación lineal de los elementos de un ruido blanco ($\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$)

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$$

cuya varianza de largo plazo es

$$Var_\infty(y_t) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

- **Teorema de descomposición de Wold**

  Cualquier serie de tiempo estacionaria $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ puede ser escrita como la suma de n proceso estocástico lineal y un proceso determinístico (k_t)

  $$y_t = k_t + x_t = g(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$$

  cuyo valor de ψ_0 es igual a la unidad.

Proceso Media Móvil (MA)

Proceso MA(1)

Sea $\{\epsilon_t\}$ un ruido blanco, el proceso MA(1) está dado por:

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$$

- Esperanza (μ)

$$E[y_t] = E[\mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}] = \mu + E[\epsilon_t] + \theta.E[\epsilon_{t-1}] = \mu$$

- Varianza (γ_o)

$$\begin{aligned}\gamma_0 = E[(y_t - \mu)^2] = E[(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})^2] &= E[\epsilon_t^2 + 2\theta\epsilon_t\epsilon_{t-1} + \theta^2\epsilon_{t-1}^2] \\ &= \sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2 \\ &= (1+\theta^2)\sigma^2\end{aligned}$$

- Covarianza (γ_k)

  La primera covarianza ($k = 1$) es

$$\begin{aligned}\gamma_0 = E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] &= E[(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1} + \theta\epsilon_{t-2})] \\ &= E[\epsilon_t\epsilon_{t-1} + \theta\epsilon_{t-1}^2 + \theta\epsilon_t\epsilon_{t-2} + \theta^2\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}] \\ &= 0 + \theta^2\sigma^2 + 0 + 0 \\ &= \theta\sigma^2\end{aligned}$$

  las covarianzas para $k > 1$ son iguales a 0.

- La ACF se corta en $k = 1$ y la PACF decae exponencialmente.
- Siempre es estacionario.

Proceso Media Móvil (MA)

Proceso MA(q)

Un proceso media móvil de q-ésimo orden, denotado como MA(q), es caracterizado mediante

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

- Esperanza (μ)

$$E[y_t] = \mu + E[\epsilon_t] + \theta_1.E[\epsilon_{t-1}] + \theta_2.E[\epsilon_{t-2}] + \cdots + \theta_q.E[\epsilon_{t-q}] = \mu$$

- Varianza (γ_o)

$$\gamma_0 = E[(y_t - \mu)^2] = E[(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q})^2]$$
$$\gamma_0 = \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 + \theta_2^2\sigma^2 + \cdots + \theta_q^2\sigma^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$$

- Covarianza (γ_k)

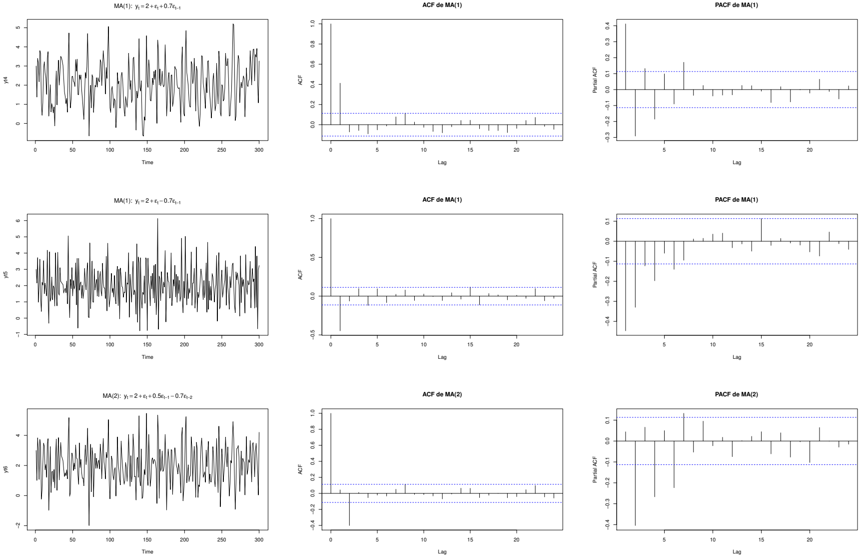
$$\gamma_k = \begin{cases} (\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \theta_{k+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-k})\sigma^2 & \text{para } k = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \text{para } k > q \end{cases}$$

- La ACF se corta en $k = q$ y la PACF decae exponencialmente.
- Es estacionario siempre y cuando q sea finito.
- Es invertible si todas las raíces de

$$\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$$

caen fuera del círculo unitario.

Proceso Media Móvil (MA)



Procesos Autoregresivos (AR)

Proceso AR(1)

Un proceso autoregresivo de primer orden, AR(1) satisface la siguiente ecuación en diferencia

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

Para calcular los momentos, asumiremos que el proceso es **estacionario en covarianza**

- Esperanza (μ)

$$\begin{aligned} E[y_t] &= c + \phi . E[y_{t-1}] + E[\epsilon_t] \\ \mu &= c + \phi\mu + 0 \\ \mu &= \frac{c}{1-\phi} \end{aligned}$$

- Varianza (γ_o)

$$\begin{aligned} y_t &= \mu(1-\phi) + \phi y_{t-1} + \epsilon_t \\ (y_t - \mu) &= \phi(y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t \\ E[(y_t - \mu)^2] &= \phi^2 E[(y_{t-1} - \mu)^2] + 2\phi E[(y_{t-1} - \mu)\epsilon_t] + E[\epsilon_t^2] \\ \gamma_0 &= \phi^2 \gamma_0 + 0 + \sigma^2 \\ \gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi 2} \end{aligned}$$

Procesos Autoregresivos (AR)

Proceso AR(1)

- Covarianza (γ_k)

$$
\begin{aligned}
E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] &= \phi.E[(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + E[\epsilon(y_{t-k} - \mu)] \\
E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] &= \phi.E[(y_{t-1} - \mu)(y_{|t-1|-|k-1|} - \mu)] \\
\gamma_k &= \phi\gamma_{k-1}
\end{aligned}
$$

De manera iterativa llegamos a que la covarianza vendría a ser

$$\gamma_k = \phi^k \gamma_0$$

- Función de Autocorrelación (ρ_k)

$$
\begin{aligned}
\rho_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\
\rho_k &= \frac{\phi^k \gamma_0}{\gamma_0} \\
\rho_k &= \phi^k
\end{aligned}
$$

la función de autocorrelación decae exponencialmente.

Procesos Autoregresivos (AR)

Proceso AR(p)

Los procesos AR(p) se definen como

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

Utilizando el operador de rezagos, podemos reescribirlo de la forma

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) y_t = c + \epsilon_t$$

donde $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$, es el polinomio de rezagos del proceso AR(p)

- El proceso AR(p) será estacionario si las raíces del polinomio de rezagos ($\Phi(L)$) caen fuera del círculo unitario.
- Se puede verificar que

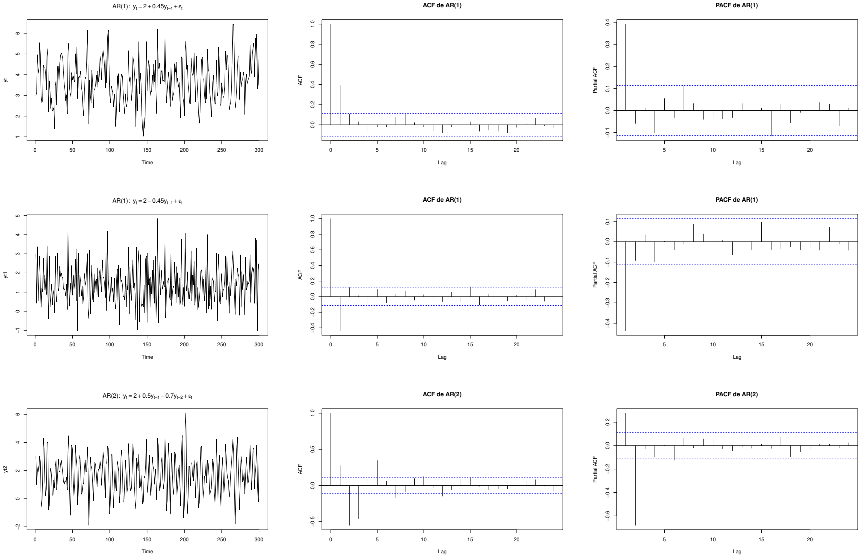
  $$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$$

  con:

  $$E[y_t] = \mu = \frac{c}{1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j}$$

  $$Var[y_t] = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j^2} \sigma_\epsilon^2$$

Procesos Autoregresivos (AR)



Procesos Mixtos (ARMA(p,q))

Está dado por:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q$$

o de la siguiente manera

$$\Phi(L) y_t = c + \Theta(L)\epsilon$$

- Es estacionario si todas las raíces de $\Phi(L)$ caen fuera del círculo unitario.
- Es invertible si todas las raíces de $\Theta(L)$ caen fuera del círculo unitario.
- Tanto ACF como PACF decaen exponencialmente.