5. Aplikasi Turunan

5.1 Menggambar grafik fungsi

Informasi yang dibutuhkan:

A. Titik potong dengan sumbu *x* dan sumbu *y*

B. Asimtot fungsi

Definisi 5.1: Asimtot fungsi adalah garis lurus yang didekati oleh grafik fungsi. Ada Tiga jenis asimtot fungsi, yakni

(i) Asimtot Tegak

Garis $x = c$ disebut asimtot tegak dari $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

(ii) Asimtot Datar

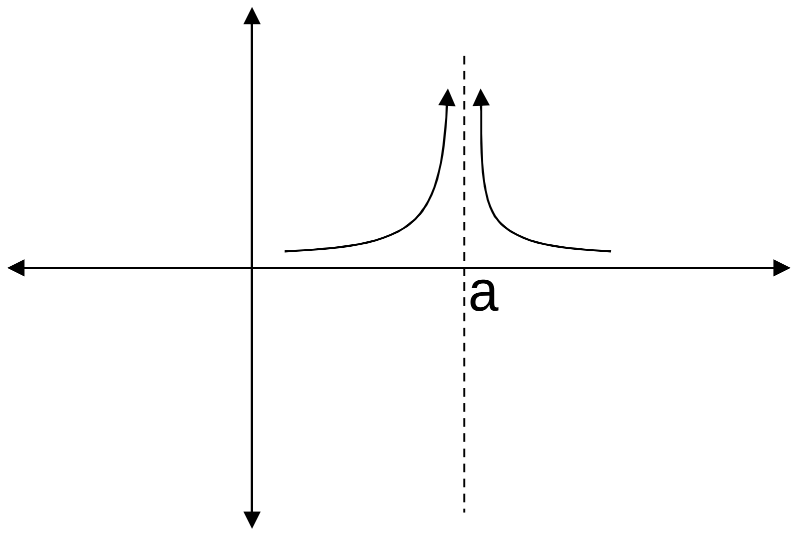
Garis $y = b$ disebut asimtot datar dari $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

(iii) Asimtot Miring

Garis $y = ax + b$ disebut asimtot miring jika

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$$

Asimtot tegak



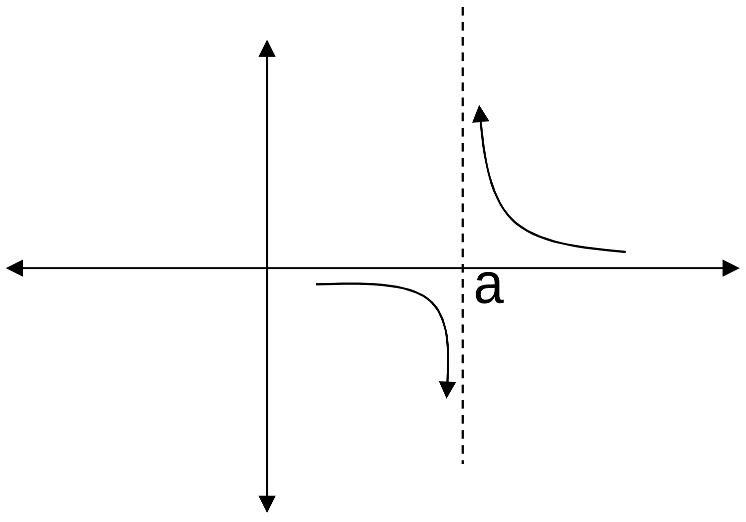
x=a asimtot tegak

Dalam kasus

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

dan

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$



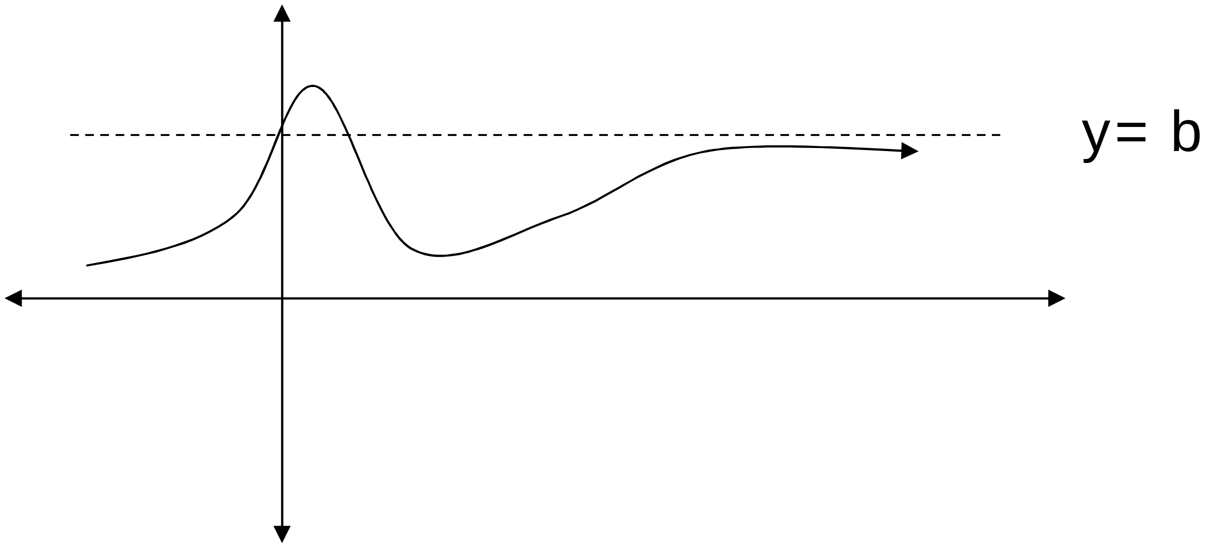
x=a asimtot tegak

Dalam kasus

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

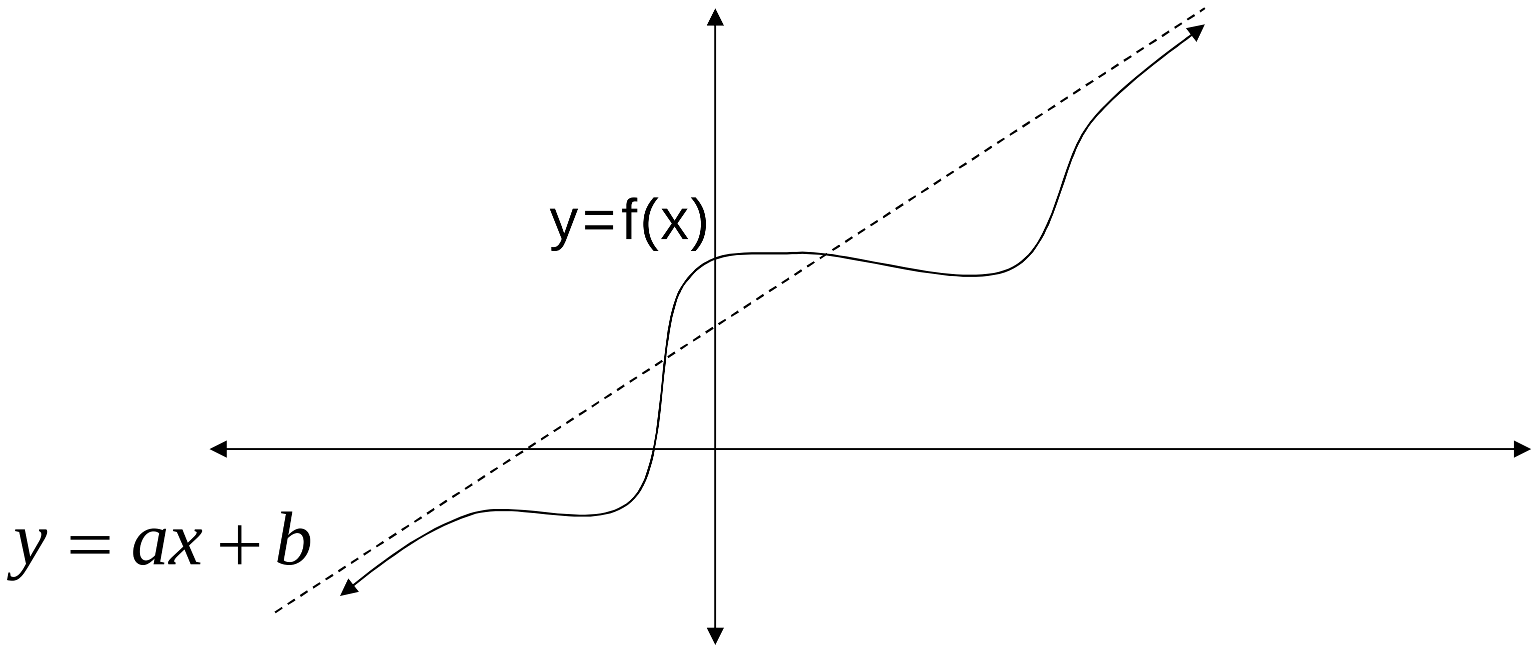
dan

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$



Garis y = b asimtot datar karena $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

Asimtot datar mungkin dipotong oleh grafik fungsi untuk x hingga Tapi, jika untuk x menuju tak hingga asimtot datar dihampiri oleh grafik fungsi(tidak dipotong lagi)



Garis y = ax + b asimtot miring

Asimtot miring bisa dipotong oleh kurva untuk nilai x hingga. Untuk satu fungsi tidak mungkin ada sekaligus asimtot datar dan asimtot miring

Contoh Tentukan semua asimtot dari $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Jawab :

(i) Asimtot tegak : x = 2, karena

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \infty$$

(ii) Asimtot datar :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 (1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2})}{x^2 (\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2})}{(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \infty$$

Maka asimtot datar tidak ada

(iii) Asimtot miring ; y = ax+b

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2}.\frac{1}{x} \quad = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{(1-\frac{2}{x})} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax \quad = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} - x$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4-x(x-2)}{x-2} \quad = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4-x^2+2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0$$

Asimtot miring y = x

Soal Latihan

Tentukan semua asimtot dari fungsi berikut :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

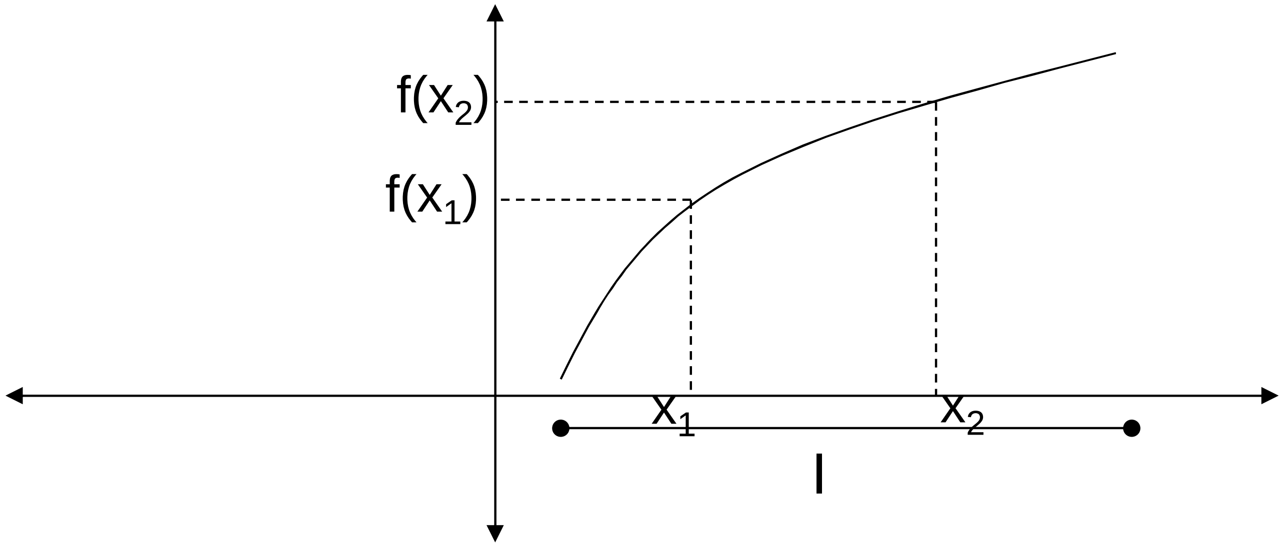
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

3. $f(x) = x^3 - 2x + 1$

C. Kemonotonan Fungsi

Definisi 5.2 Fungsi f(x) dikatakan <u>monoton naik</u> pada interval I jika untuk

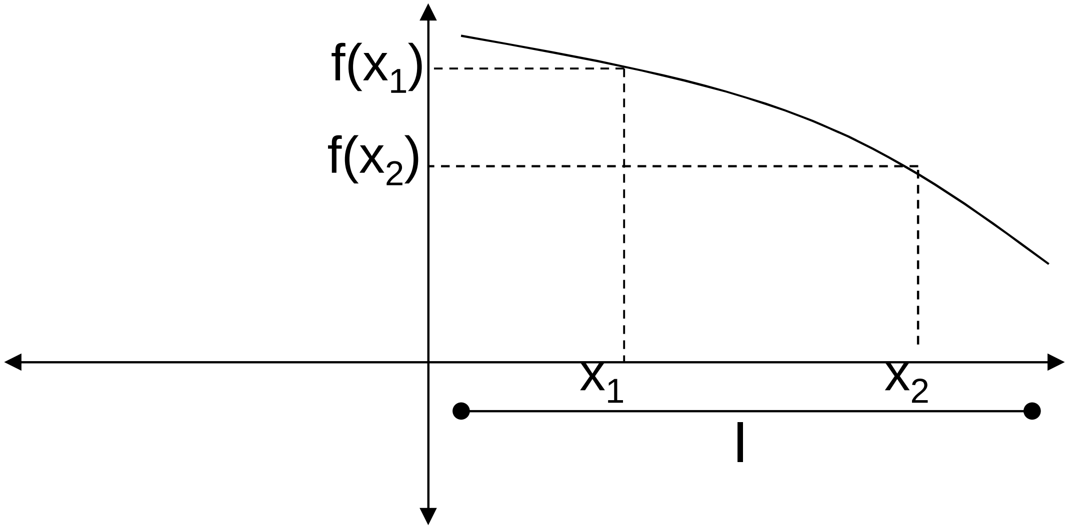
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in I$$



Fungsi f(x) monoton naik pada selang I

monoton turun pada interval I jika untuk

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\ ,\ \forall\ x_1, x_2 \in I$$



Fungsi f monoton turun pada selang I

Teorema 5.1 : Andaikan f diferensiabel di selang I, maka

- Fungsi f(x) monoton naik pada I jika $f'(x) > 0 \;\forall\; x \in I$
- Fungsi f(x) monoton turun pada I jika $f'(x) < 0 \;\forall\; x \in I$

Contoh: Tentukan selang kemonotonan dari $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - 1(x^2 - 2x + 4)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 6x + 4 - x^2 + 2x - 4}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

+++++++ ------------ --------- ++++++

0 2 4

f(x) monoton naik pada $(-\infty, 0)$ dan $(4, +\infty)$

f(x) monoton turun pada (0,2) dan (2,4).

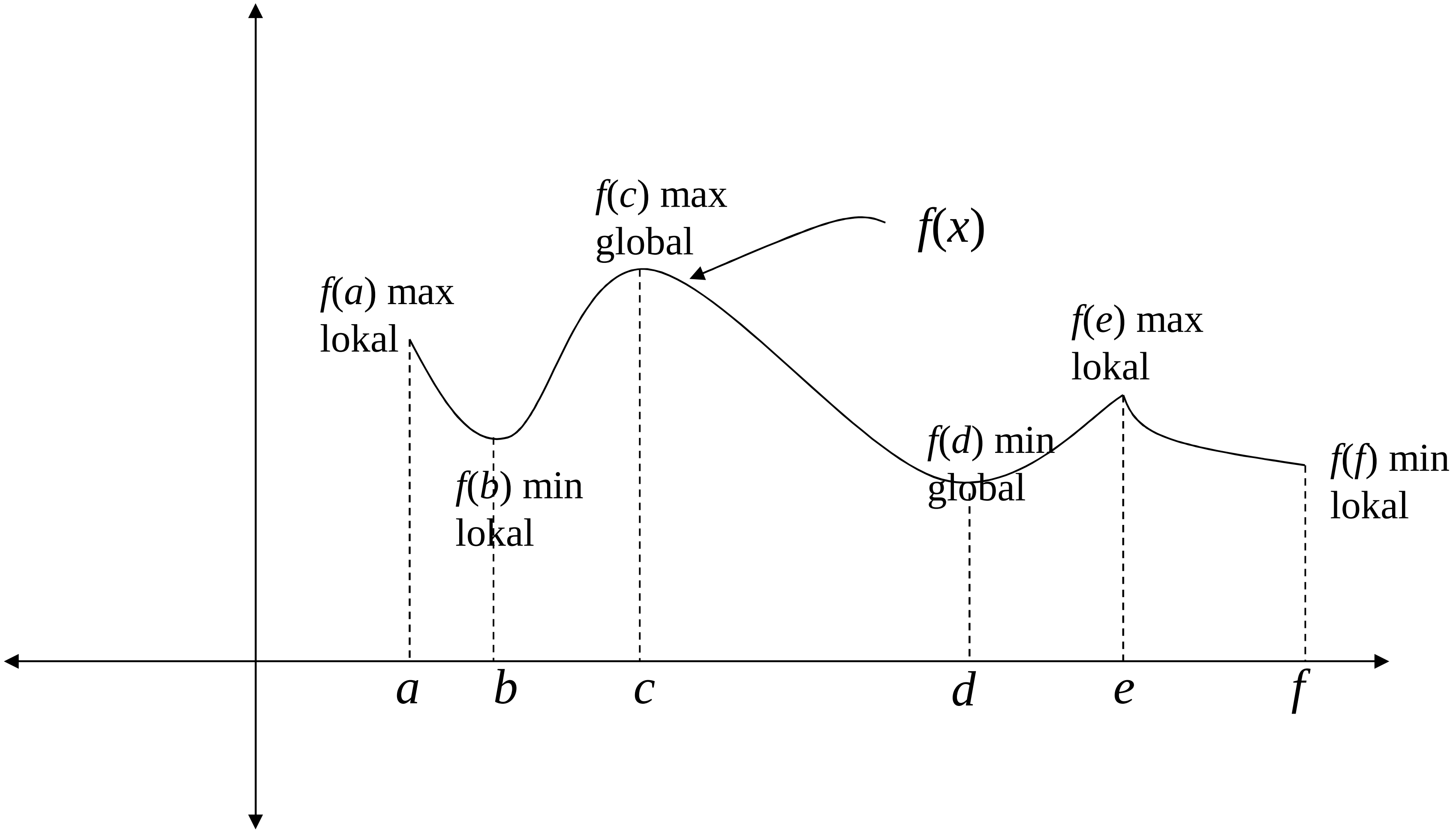
D. Ekstrim Fungsi

Definisi 5.3 Misalkan $f(x)$ kontinu pada selang I yang memuat c,

$f(c)$ disebut nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{min imum}}$ global dari f pada I jika $\dfrac{f(c) \geq f(x)}{f(c) \leq f(x)} \; \forall x \in I$

$f(c)$ disebut nilai $\dfrac{maksimum}{\text{min } imum}$ lokal dari f pada I jika terdapat selang buka yang memuat c sehingga $\dfrac{f(c) \geq f(x)}{f(c) \leq f(x)}$ untuk setiap x pada selang buka tadi. Nilai maksimum dan minimum fungsi disebut juga nilai ekstrim

Titik pada daerah definisi dimana kemungkinan terjadinya ekstrim fungsi disebut titik kritis.

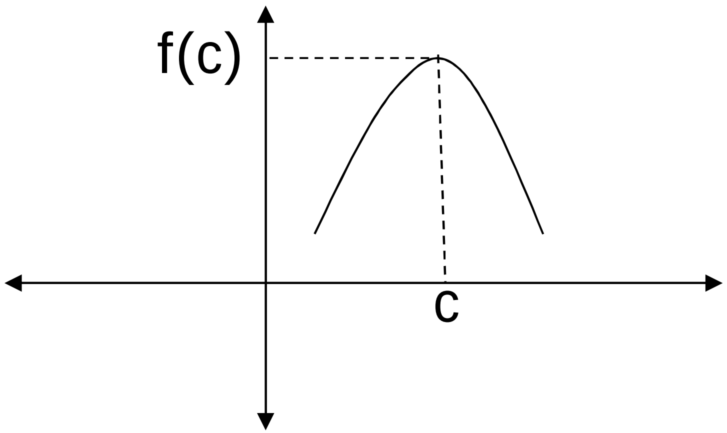


Nilai ekstrem fungsi pada selang I=[a,f]

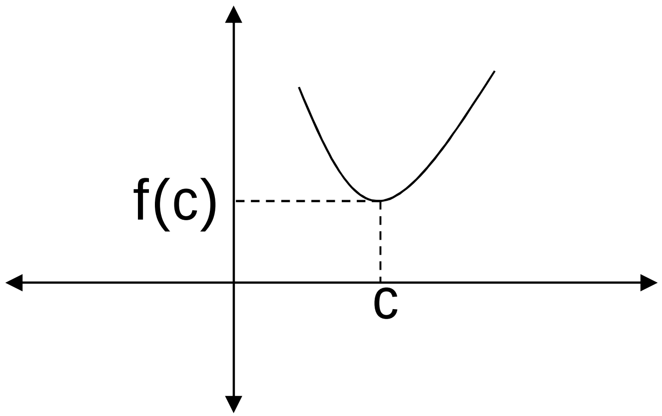
- Ada tiga jenis titik kritis :
  - Titik ujung selang I
  - Titik stasioner (yaitu $x = c$ dimana $f'(c)=0$) , secara geometris : garis singgung mendatar dititik (c,f(c))
  - Titik singulir ($x = c$ dimana $f'(c)$ tidak ada), secara geometris: terjadi patahan pada grafik f di titik (c,f(c))

Teorema 5.3 : Uji turunan pertama untuk ekstrim lokal

Jika $\frac{f'(x) > 0}{f'(x) < 0}$ pada $(c - \text{¢}, c)$ dan $\frac{f'(x) < 0}{f'(x) > 0}$ pada $(c, c + \text{¢})$ Maka f(c) merupakan nilai $\frac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ lokal



f(c) nilai maks lokal



f(c) nilai min lokal

Disebelah kiri c monoton naik (f '>0) dan disebelah kanan c monoton turun (f'<0)

Disebelah kiri c monoton turun (f '<0) dan disebelah kanan c monoton naik (f'>0)

Teorema 5.4 Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal

Misalkan $f'(c) = 0$. Jika $\dfrac{f''(c) < 0}{f''(c) > 0}$,maka f(c) merupakan nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ lokal f

Contoh :Tentukan nilai ekstrim dari $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Jawab: $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

+++++++ ------------ --------- ++++++

0 2 4

Dengan menggunakan uji turunan pertama :

di x = 0 tercapai maksimum lokal dengan nilai $f(0) = -2$

di x = 4 tercapai minimum lokal dengan nilai $f(4) = 6$

Soal Latihan

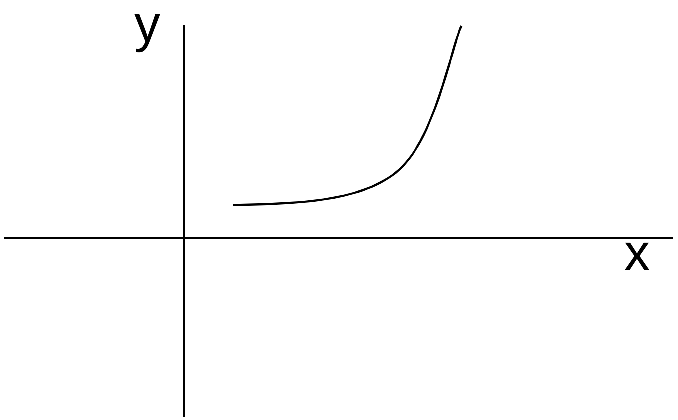
Tentukan selang kemonotonan dan ektrim fungsi berikut :

1. $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$

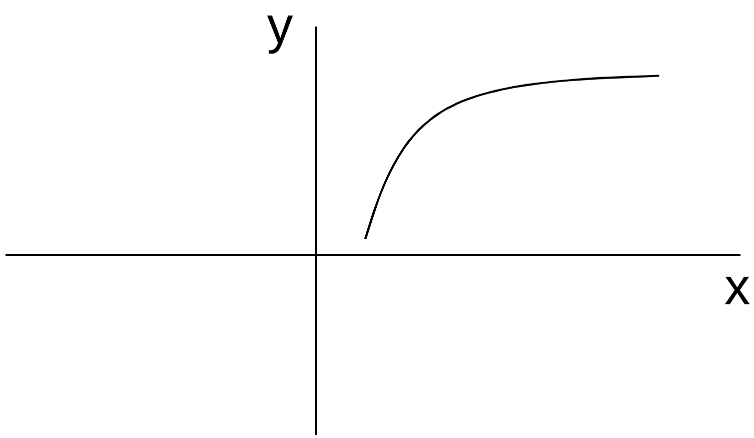
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

E. Kecekungan Fungsi



Grafik fungsi cekung keatas



Grafik fungsi cekung kebawah

Fungsi f(x) dikatakan cekung ke atas pada interval I bila $f'(x)$ naik pada interval I, dan f(x) dikatakan cekung kebawah pada interval I bila $f'(x)$ turun pada interval I.

Teorema 5.6 Uji turunan kedua untuk kecekungan

1. Jika $f''(x) > 0, \forall x \in I$, maka f cekung ke atas pada I.
2. Jika $f''(x) < 0, \forall x \in I$, maka f cekung ke bawah pada I.

contoh Tentukan selang kecekungan dari $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Jawab :

$$f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{(x-2)((2x-4)(x-2)-2(x^2-4x))}{(x-2)^4}$$

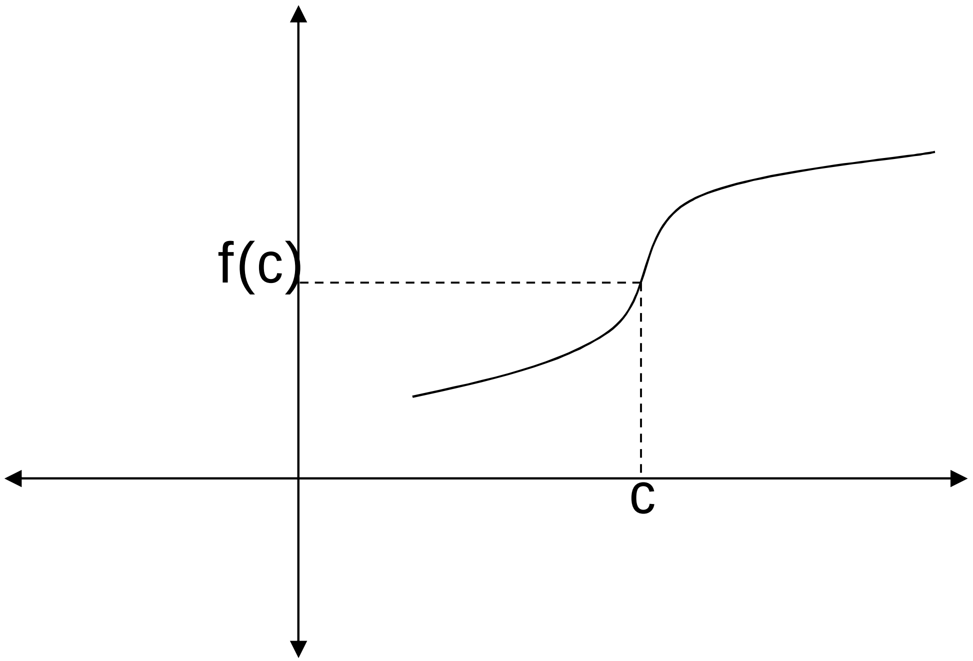
$$=\frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x}{(x-2)^3}=\frac{8}{(x-2)^3}$$

Grafik f cekung keatas pada $(2,\infty)$ dan cekung kebawah pada selang $(-\infty,2)$

- **F. Titik belok**

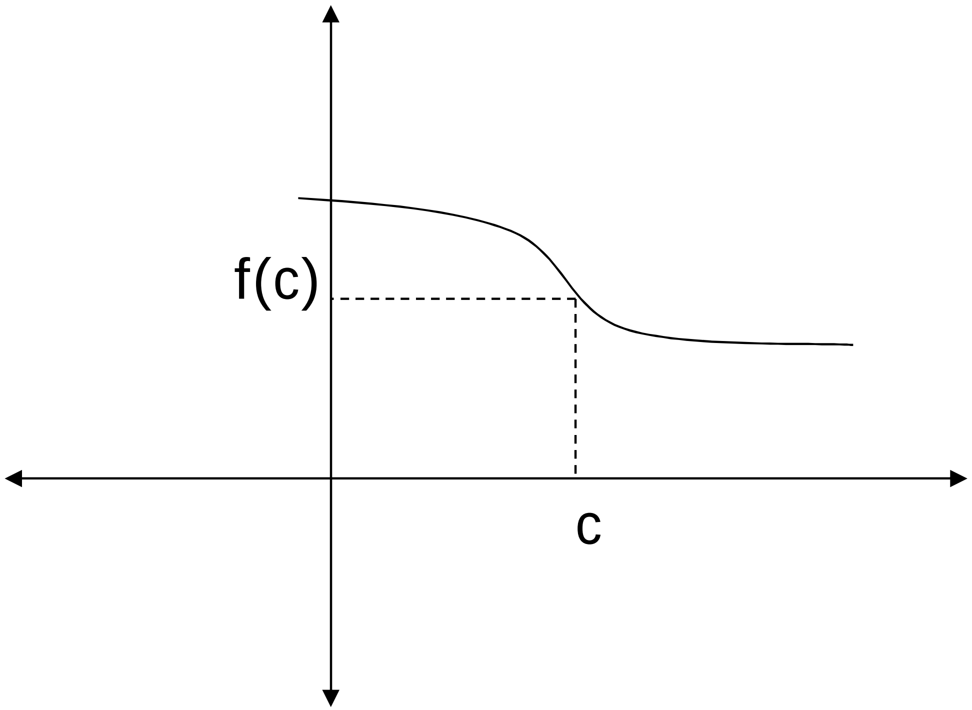
- **Definisi 5.4** Misal $f(x)$ kontinu di $x = b$. Maka $(b,f(b))$ disebut **titik belok** dari kurva $f(x)$ jika :

  terjadi perubahan kecekungan di $x = b$, yaitu di sebelah kiri $x = b$, fungsi f cekung ke atas dan di sebelah kanan $x = b$ fungsi f cekung ke bawah atau sebaliknya.



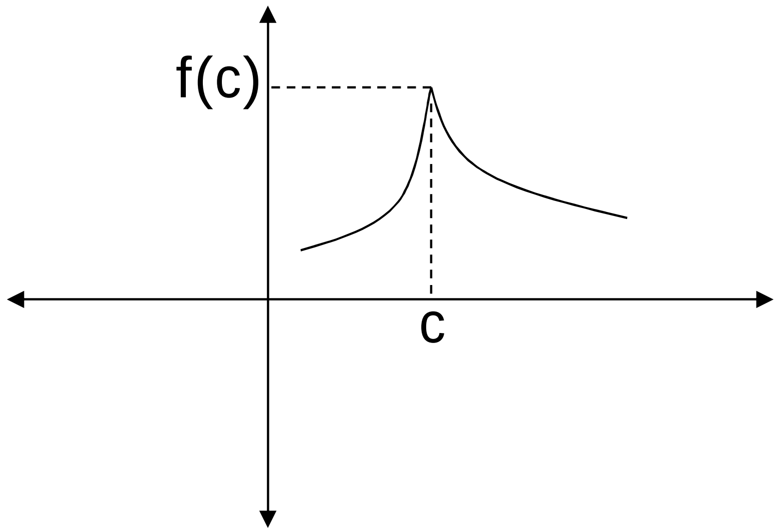
(c,f(c)) titik belok

Karena disebelah kiri c cekung keatas dan disebelah kanan c cekung kebawah

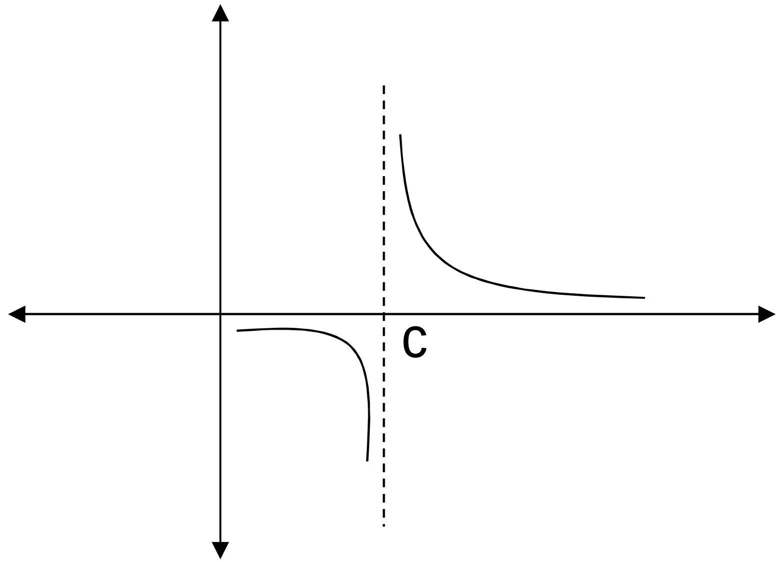


(c,f(c)) titik belok

Karena disebelah kiri c cekung kebawah dan disebelah kanan c cekung keatas



(c,f(c)) bukan titik belok karena disekitar c tidak terjadi perubahan kecekungan



Walaupun di sekitar c terjadi perubahan kecekungan tapi tidak ada titik belok karena f tidak terdefinisi di c

Tentukan titik belok (jika ada) dari

1. $f(x) = 2x^3 - 1$

$$f'(x) = 6x^2 \;,\; f''(x) = 12x$$

------------- +++++++

0

Di x = 0 terjadi perubahan kecekungan, dan f(0)= -1 maka (0,-1) merupakan titik belok

2. $f(x) = x^4$

$$f''(x) = 12x^2$$

+++++++ +++++++

0

Tidak ada titik belok, karena tidak terjadi perubahan kecekungan

3. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

$$f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}$$

-------------- ++++++++

2

Walaupun di x = 2, terjadi perubahan kecekungan, tidak ada titik belok karena fungsi f(x) tidak terdefinisi di x = 2

Soal Latihan

Tentukan selang kecekungan dan titik belok fungsi berikut :

1. $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

Contoh: Diketahui $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

a. Tentukan selang kemonotonan dan ekstrim fungsi
b. Tentukan selang kecekungan dan titik belok
c. Tentukan semua asimtot
d. Gambarkan grafik f(x)

a. Fungsi f(x) monoton naik pada selang $(-\infty,0)$, $(4,+\infty)$
monoton turun pada selang (0,2) dan (2,4).
di x = 0 tercapai maksimum lokal dengan nilai $f(0) = -2$
di x = 4 tercapai minimum lokal dengan nilai $f(4) = 6$

b. Grafik f cekung keatas pada $(2,\infty)$ dan cekung kebawah pada selang $(-\infty,2)$, tidak ada titik belok

c. Asimtot tegak x = 2, asimtot miring y = x, tidak ada asimtot datar

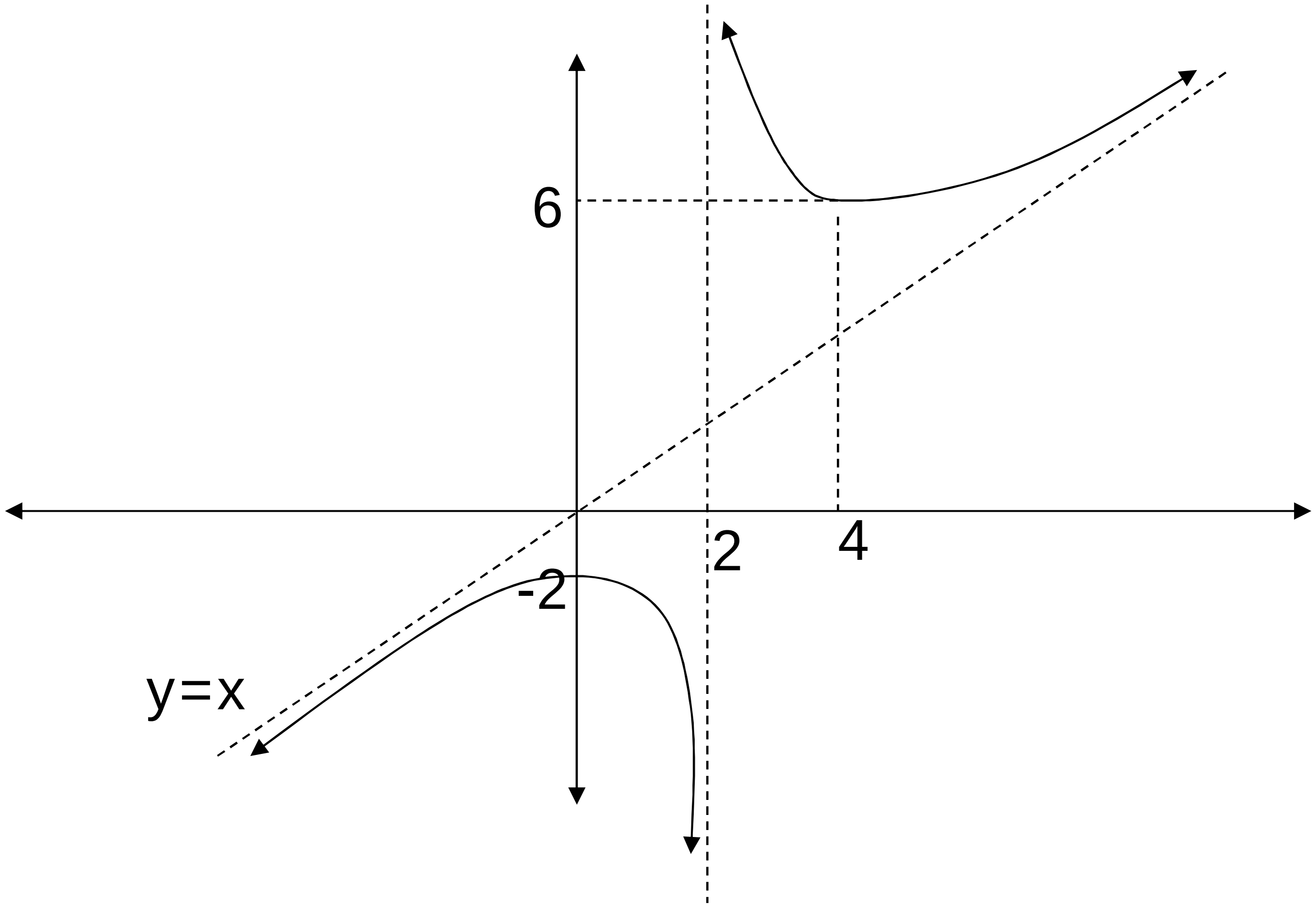
d. Grafik f(x)

++++++ ----- ----- ++++++ f'

0 2 4

-------------------- +++++++++++ f''

2



Soal Latihan

Gambarkan grafik fungsi berikut dengan mencari terlebih dahulu selang kemonotonan,ekstrim fungsi, kecekungan, titik belok, dan asimtot

1. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

2. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3$

3. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1$

4. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

5.2 Menghitung limit fungsi dengan Aturan L'Hôpital

Bentuk tak tentu dalam limit : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$

1. **Aturan L'Hôpital untuk bentuk** $\frac{0}{0}$

Andaikan lim *f*(*x*) = lim *g*(*x*) = 0. Jika $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty,$ atau $-\infty$

Maka

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh: Hitung $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ bentuk (0/0)

Jawab:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2$$

Ctt : aturan L'hopital bisa digunakan beberapa kali asalkan syaratnya dipenuhi

2. Aturan L'Hôpital untuk bentuk $\frac{\infty}{\infty}$

Andaikan lim f(x) = lim g(x) = ∞. Jika $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty$, atau $-\infty$

maka $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh: Hitung $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+5}$ (bentuk $\frac{\infty}{\infty}$)

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

Ctt: walaupun syarat di penuhi, belum tentu limit dapat dihitung dengan menggunakan dalil L'Hopital

Contoh: Hitung $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ $(\frac{\infty}{\infty})$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Soal seperti diatas tidak bisa diselesaikan dengan menggunakan aturan L'Hopital, karena setelah dilakukan aturan L'Hopital muncul lagi bentuk semula

Soal seperti diatas diselesaikan dengan cara sbb:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2}\ \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}} = 1$$

3. **Bentuk 0 . ã**

Untuk menyelesaikannya rubah kedalam bentuk

$\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

Contoh : Hitung $\lim_{x \to 0} x^2 \csc x$

Jawab :

$$\lim_{x \to 0} x^2 \csc x = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\cos x} = 0$$

4. Bentuk ã - ã

Misalkan lim f(x)=lim g(x) = ∞. Untuk menghitung lim [f(x) - g(x)] dilakukan dengan menyederhanakan bentuk [f(x)- g(x)] sehingga dapat dikerjakan menggunakan cara yang telah dikenal sebelumnya

Contoh : Hitung $\lim_{x \to 0} \left(\csc x - \cot x \right)$

Jawab :

$$\lim_{x \to 0} \left(\csc x - \cot x \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Soal Latihan

Hitung limit berikut :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + 3}{2x^3 + 5x + 2}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{2 - 5x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 2x}{2x^2}$