**Theorem 1.**  $\mathcal{B}: \mathcal{V}$  圏とする.  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{B}$  の small full subcategory で  $\mathcal{Z}: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  を inclusion であるとする. このとき,  $\mathcal{B}$  が cocomplete,  $\mathcal{B}_0$  が finitely complete,  $\mathcal{B}_0$  の各対 象は高々小集合の extremal-epimorphism quotients しか持たないなら,  $\mathcal{B}$  は  $\mathcal{A}$  の small colimit の閉包である.

Proof. C を  $\mathcal{B}$  における  $\mathcal{A}$  の全ての small colimit をとることで得られる閉包とする.  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$  を示せば良い.

任意の  $\mathcal{B}_0$  の射  $f: C \to D$  で,  $C \in \mathcal{C}$  なるものが与えられたとする. これに対し, 超限 再帰的に列  $\{C_\alpha \to D\}$  ( $\alpha$  は順序数) と  $\{p_{\beta\alpha}: C_\beta \twoheadrightarrow C_\alpha\}_{\beta \leq \alpha}$  を以下の方法で構成する.  $p_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{C_\alpha}$  とする.

- $f_{\alpha}: C_{\alpha} \to D$  に対して,  $f_{\alpha+1}$  を定めるために, まず  $f_{\alpha}$  の kernel pair を  $u_{\alpha}, v_{\alpha}: E_{\alpha} \to C_{\alpha}$  でとる.  $u_{\alpha}, v_{\alpha}$  の coequalizer を  $p_{\alpha,\alpha+1}: C_{\alpha} \to C_{\alpha+1}$  と し, coequalizer の普遍性から一意に生える射を,  $f_{\alpha+1}: C_{\alpha+1} \to D$  で定める.

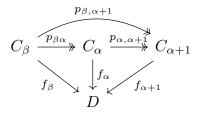
$$E_{\alpha} \xrightarrow{u_{\alpha}} C_{\alpha} \qquad E_{\alpha} \xrightarrow{v_{\alpha}} C_{\alpha} \xrightarrow{f_{\alpha}} D$$

$$\downarrow v_{\alpha} \qquad \downarrow f_{\alpha} \qquad \downarrow f_{\alpha}$$

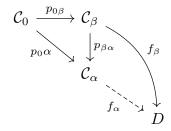
$$C_{\alpha} \xrightarrow{f_{\alpha}} D$$

$$C_{\alpha+1}$$

 $p_{\beta,\alpha+1}: C_{\beta} \to C_{\alpha+1}$  を  $p_{\alpha,\alpha+1} \circ p_{\beta\alpha}$  でとる.



•  $\alpha$  が limit のときは,  $C_{\alpha}$  は  $\{p_{0\beta}\}_{\beta<\alpha}$  の pushout でとる. このときも,  $f_{\alpha}$  を普遍性で一意に生える射でとる.



この  $p_{\beta\alpha}$  も epic になることが diagram chase でわかる.

まず、このようにとった列に関して、 $C_{\alpha}$  が全て C に含まれることを示す。 $C_0 \in C$  はわかっており、 $\alpha$  が limit のときは  $C_{\alpha}$  は C の図式の colimit で定義されるので明らか。 $C_{\alpha+1}$  のときは、 $C_{\alpha+1}$  は pushout で定義されはしたが、 $E_{\alpha}$  が C に存在するとは限らないので  $C_{\alpha+1} \in C$  は自明ではない.

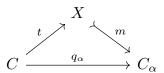
 $\mathcal{B}$  は cocomplete なので任意の関手  $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$  に対して  $F \star Z$  が存在する. いま,  $\mathcal{B}(F \star Z, B) \cong [\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](F, \tilde{Z}B)$  となるので,  $-\star Z \dashv \tilde{Z}$  が満たされている.  $R = \tilde{Z} - \star Z$  と定めておく. [1] 3.4 節の最後の 2 段落での議論により,  $(\tilde{Z})_0$  はいま conservative なので,  $\epsilon_B$  は任意の  $B \in \mathcal{B}$  に対して extremal epimorphism である.

これを使うと, 今  $\epsilon_{E_{\alpha}}: RE_{\alpha} \to E_{\alpha}$  は epic であるから,

$$RE_{\alpha} \xrightarrow[v_{\alpha} \circ \epsilon]{u_{\alpha} \circ \epsilon} C_{\alpha} \xrightarrow[p_{\alpha,\alpha+1}]{u_{\alpha} \circ \epsilon} C_{\alpha+1}$$

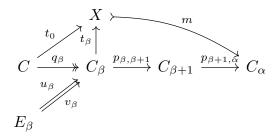
も coequalizer である. この  $RE_{\alpha}$  は colimit で定義されていたので  $\mathcal C$  に含まれるため、この図式は  $\mathcal C$  の図式であり、これにより  $C_{\alpha+1}$  も  $\mathcal C$  に含まれることがわかる. よって超限帰納法により  $C_{\alpha}$  は全ての  $\alpha$  に対して  $\mathcal C$  に含まれることが証明できた.

次に,  $\{q_{\alpha} := p_{0\alpha} : C \rightarrow C_{\alpha}\}$  が任意の  $\alpha$  に関して extremal epic であることを示そう. そのために,



なる monic m が与えられたとする. この m が split epic であることを示せば良い. ここで, 超限再帰的に  $\{t_\beta:C_\beta\to X\}_{\beta\leq\alpha}$  を,  $t_\beta\circ q_\beta=t$  を満たすように, 以下のように構成する.

- to は t でとる.
- $t_B$  に対して、いま、下のようになっているものとする.



いま  $m t_{\beta} q_{\beta} = m t_0 = q_{\alpha} = p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta+1} q_{\beta}$  で  $q_{\beta}$  は epi なので  $m t_{\beta} = p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta+1}$  (すなわち図式の右上が可換). さらに,  $m t_{\beta} u_{\beta} = p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta} u_{\beta} = p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta} u_{\beta}$ 

 $p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta} v_{\beta} = m t_{\beta} v_{\beta}$ . いま m が monic なので  $t_{\beta} u_{\beta} = t_{\beta} v_{\beta}$  となる. よって  $p_{\beta,\beta+1}$  は coequalizer で定義したから、この普遍性から取れる  $C_{\beta+1} \to X$  があり、これを  $t_{\beta+1}$  とする.

•  $\beta$  が limit のとき,  $\gamma < \beta$  なる任意の  $\gamma$  に対して  $t = t_{\gamma} q_{\gamma}$  となっているのだから, pushout の普遍性から条件を満たす  $t_{\beta}$  が一意に取れる.

このようにして  $t_{\alpha}$  が取れるが,  $C_{\alpha}$  を coequalizer で作っていても pushout で作っていても, どちらにせよ普遍性から  $mt_{\alpha}=\mathrm{id}_{C_{\alpha}}$  を満たす. よって m は split epic.

次に、この列が terminate する条件を考えておくと、これは  $f_{\alpha}$  の kernel pair が一致するとき. すなわち  $f_{\alpha}$  が monic になるときである.

 $\{q_{\alpha}:C\to C_{\alpha}\}$  は C の extremal epimorphism の列であるから, C は高々小集合の extremal-epimorphism quotients しか持たないという条件から, これはある  $\lambda$  で停止する. いま,  $f:C\to D$  として  $\epsilon_D:RD\to D$  をとっておくと, これは extremal epimorphism だから,  $f_{\lambda}$ : monic は isomorphism になる. すなわち  $D\cong C_{\lambda}\in\mathcal{C}$  となってしまうため, D も  $\mathcal{C}$  に含まれる. この D は任意にとったから,  $\mathcal{B}=\mathcal{C}$ .

参考文献

[1] Kelly, Gregory Maxwell, and Max Kelly. Basic concepts of enriched category theory. Vol. 64. CUP Archive, 1982.