VI Topoi and Logic

ZFのモデルを topos で作る.
その中で連続体仮説が成り立たない
モデルを作ったりする.

1. The Topos of Sets

無限公理

$\exists A(\emptyset \in A \wedge \forall x \in A (x \cup \{x\} \in A))$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{N}$ is a set (in ZF − 無限公理)

$\mathbb{N} \notin$ FinSet (FinSet は topos) なので
無限公理は任意の topos で満たされている
わけではない.

$\mathbb{N}$ は natural number object (n.n.o) で
一般化する.

__def__ n.n.o　$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$ が n.n.o とは,
任意の $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{f} X$ に対し,
唯1つ $N \xrightarrow{h} X$ があって

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[r, "x"] & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

が可換.

__claim__ $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ が topos で

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, bend left, "g^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{F} \arrow[l, bend left, "g_*"] \end{tikzcd}$$

のとき,

g^* が terminal object をもち, $\mathcal{E}$ に n.n.o があるなら,

$$g^*(1) \xrightarrow{g^*(0)} g^*(N) \xrightarrow{g^*(s)} g^*(N)$$

は $\mathcal{F}$ の n.n.o になる.

proof.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\ g_*(1) \arrow[r, "g_* x"'] & g_* X \arrow[r, "g_* f"'] & g_* X \end{tikzcd}$$

が可換

$\Leftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} g^*(1) \arrow[r, "g^* 0"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & g^* N \arrow[r, "g^* s"] \arrow[d, "\bar{h}"] & g^* N \arrow[d, "\bar{h}"] \\ 1 \arrow[r, "x"'] & X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

が可換.

□

Sets には n.n.o があるから，

$\mathbb{C}$ が小さい圏なら，

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sets} \arrow[r, shift left, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Sets}^{\mathbb{C}^{op}} \arrow[l, shift left, "\Gamma"] \end{tikzcd} \qquad \Delta \dashv \Gamma$$

（Δ は constant functor にするやつ，
Γ は limit とるやつ．）

$\Delta(1)$ は $\mathrm{Sets}^{\mathbb{C}^{op}}$ でも terminal．さっきの claim より，$\mathrm{Sets}^{\mathbb{C}^{op}}$ には n.n.o $\Delta(N)$ がある．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}_j\mathcal{E} \arrow[r, hook, shift right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{E} \arrow[l, bend right, "a"'] \end{tikzcd}$$

（j は Lavere-Tierney topology）

より $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ にも n.n.o がある．

Grothendieck topology は $\mathrm{Sets}^{\mathbb{C}^{op}}$ での Lawvere-Tierney topology なので，Grothendieck topology $\mathrm{Sh}(\mathbb{C}, J)$ には n.n.o がある．

$\mathrm{Sh}(\mathbb{C}, J)$ の n.n.o は $a\Delta(N)$ だが，

$\Delta : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Sets}^{\mathbb{C}^{op}}$，$a : \mathrm{Sets}^{\mathbb{C}^{op}} \to \mathrm{Sh}(\mathbb{C}, J)$ は

（共に左随伴なので）任意の coproduct を保つから，

$N = \coprod_{n \in \mathbb{N}} 1$ より，$a\Delta(N) \cong \coprod_{n \in \mathbb{N}} 1$．

・Booleanか否か.

<u>def</u> topos $\mathcal{E}$ が Boolean とは, internal Heyting algebra Ω が internal Boolean algebra であること.

c.f. IV.8

$$\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$$
$$\vee : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

ets.

<u>Proposition 1</u> 次は同値

(i) $\mathcal{E}$ は Boolean

(ii) $\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ は $\neg\neg = \mathrm{id}$ をみたす.

(iii) 任意の object E に対し, $\mathrm{Sub}(E)$ は (external) Boolean algebra

(iv) 任意の $\mathcal{E}$ の subobject $S \rightarrowtail E$ に対し, $\neg S \vee S = E$.

(v)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr, "true"'] & 1+1 \arrow[d, dashed, "\cong"] & 1 \arrow[l] \arrow[dl, "false"] \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

$\wedge$ の構成.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r] \arrow[d, tail, "l"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\pi"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\pi'"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, dashed, "m"] & \\
\Omega \arrow[r, "l"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega \\
 & & \Omega \arrow[ul, "r"]
\end{tikzcd}$$

$\vee$ の構成.

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega + \Omega \arrow[d, two heads] & \\
\Omega \arrow[ur] \arrow[dr, tail, "l"'] & \bullet \arrow[d, tail, "m"] & \Omega \arrow[ul] \arrow[dl, tail, "r"] \\
 & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\chi_r"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ の構成.

$r, l \in \mathcal{E}/\Omega\times\Omega$ での exponential

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "r^l"'] & \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\chi_{r^l}"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

false

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "true"] \\
1 \arrow[r, "false"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\neg$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, tail, "false"'] & 1 \arrow[d, tail, "true"] \\
\Omega \arrow[r, "\neg"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

proof. (i) ⇔ (ii) は明らか.

(i) ⇔ (iii) $\mathrm{Hom}(X,\Omega) \cong \mathrm{Sub}(X)$ は,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,\Omega)\times\mathrm{Hom}(X,\Omega) \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr, dashed, "\wedge"] & \\
\mathrm{Hom}(X,\Omega\times\Omega) \arrow[r, "\wedge_*"] & \mathrm{Hom}(X,\Omega)
\end{tikzcd}$$

のような形で Heyting algebra の構造を internal からうけつぐ.

internal が Boolean ⇒ $\mathrm{Hom}(X,\Omega)$ もそう.

$X=\Omega$ とおいて,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Omega,\Omega) \arrow[r, "\neg\neg_*"] & \mathrm{Hom}(\Omega,\Omega) \\
\mathrm{id} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, "\in" sloped] & \neg\circ\neg \arrow[u, phantom, "\in" sloped]
\end{tikzcd}$$

を考えると, $\mathrm{Hom}(X,\Omega)$ が Boolean なら

$\neg\circ\neg = \mathrm{id}$.

$\left(\mathrm{Hom}(X,\Omega) \cong \mathrm{Sub}(X) \right)$

(iv) は Sub(E) が Boolean である主張.

(iv) ⇒ (v)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
1 \arrow[r, tail, "\mathrm{false}"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

はいつも pullback

pullback が 0 ⇒ join ≅ coproduct (c.f. IV.7.6)

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[dr, dotted] & 1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
1 \arrow[u, "\iota_2"] \arrow[r, tail, "\mathrm{false}"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Boolean なので

$\mathrm{true} \vee \mathrm{false} = \top$ が従う.

すなわち $1+1 \cong \Omega$.

(v) ⇒ (iv)

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[r, "\sim", "(\mathrm{true},\,\mathrm{false})"'] \arrow[d, "\mathrm{tw}"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1+1 \arrow[r, "\sim", "(\mathrm{true},\,\mathrm{false})"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

が可換

$\because$ $\mathrm{true} = \neg\mathrm{false}$

$\mathrm{false} = \neg\mathrm{true}$.

よって $\neg\circ\neg \cong \mathrm{tw}\circ\mathrm{tw} = \mathrm{id}$.

Lawvere-Tierney topology j の話に戻る.

$Sub_{\mathcal{E}}(F)$ と $Sub_{\mathcal{E}_j}(F)$ の Heyting algebra を比較する.

Rem

$$
\begin{tikzcd}
\bar{A} \arrow[rrr] \arrow[dd, tail] & & & 1 \arrow[dd, tail, "\mathrm{true}"] \\
& A \arrow[ul, dashed] \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[ur, dashed] \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] & \\
E \arrow[r, equal] & E \arrow[r] & \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Rem $F \in \mathcal{E}$ が sheaf とは,

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\forall}A \arrow[r, "\forall"] \arrow[d, tail, "\mathrm{dense}"'] & F \\
\bar{A} \arrow[ur, dashed, "!\exists"'] &
\end{tikzcd}
$$

Rem $Sh_j\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ の full subcategory で sheaf たちからなるもの. ($\mathcal{E}_j$ ともかく)

Rem Lemma V.2.4

E が sheaf で $A \rightarrowtail E$ なら,

A が closed $\Longleftrightarrow$ A も sheaf.

よって

$$Sub_{\mathcal{E}_j}(F) = ClSub_{\mathcal{E}}(F) \hookrightarrow Sub_{\mathcal{E}}(F)$$

Lemma 2. $Sub_{\mathcal{E}_j}(F)$

(i) $1_j = 1$

$S \wedge_j T = S \wedge T$

(ii) $0_j = \bar{0}$

$S \vee_j T = \overline{S \vee T}$

(iii) $S \Rightarrow_j T = (S \Rightarrow T)$

(iv) $\neg_j S = (S \Rightarrow \bar{0})$.

proof.

closed と限らない演算の頭に $\overline{}$ をかぶせる作業.

<u>Theorem 3</u>

$\neg\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ は Lavere-Tierney topology.

proof. 定義をたしかめる.

(a) $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$ 明らか.

(b) $j \circ j = j$ $\neg\neg\neg\neg = \neg\neg$.

(c) $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$ $\neg\neg(S \wedge T) = \neg\neg S \wedge \neg\neg T$

closure operator は,

$$\begin{tikzcd}
\neg\neg S \arrow[rrr] \arrow[dd, tail] & & & 1 \arrow[dd, tail] \\
& S \arrow[ul, dashed, tail] \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail] & \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[r] & \Omega \arrow[r, "\neg\neg"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$S \longmapsto \neg\neg S$

($\neg\neg$ は K^{-1} と可換なので自然で)

$\neg\neg$ は Lavere-Tierney topology を定める.

$\mathcal{E}_{\neg\neg}$ は Boolean を示したい.

いま $0_j = \bar{0} = \neg\neg 0 = 0$

$$\neg_j \neg_j S = ((S \Rightarrow \bar{0}) \Rightarrow \bar{0})$$
$$= ((S \Rightarrow 0) \Rightarrow 0)$$
$$= \neg\neg S$$

$S = \neg\neg A$ なる A があるので,

$$\underline{\neg_j \neg_j S} = \neg\neg\neg\neg A = \neg\neg A = S.$$

よって $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ は Boolean.

Lemma 4.

$A \rightarrowtail E \in Sets^{C^{op}}$

$C \in C^{op}$

$$(\neg\neg A)(C) = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in E(C) \text{ かつ, } \forall f : B \to C, \\ \exists g : D \to B \quad s.t. \quad x \cdot f \cdot g \in A(D) \end{array} \right\}$$

proof. 計算する.

Corollary 5

$Sets^{C^{op}}$ では

dense topology と double negation topology

proof

計算すると一致する.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\neg{[t]}"] \arrow[dr, "t"'] & 1 \arrow[d, phantom, "\lrcorner"] & 1 \arrow[l] \arrow[dl, "f"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

Sets では 1 の subobject は $\emptyset$ と 1 だけ.

$Hom(1, \Omega) \cong Sub_{\mathcal{E}}(1)$ なので, Ω には

global section が 2つしかない. これを

only two global "truth-value" という.

↓

これと Boolean であることは同じではない.

two-valued topos を Boolean topos から作る.

Proposition 6

$\mathcal{E}$: Boolean topos.

$\mathcal{U}$: $Sub_{\mathcal{E}}(1)$ の maximal filter

このとき

$\mathcal{E}/\mathcal{U}$ は two-valued.

proof

読めていない.

選択公理について

$(\forall_i, X_i \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ や,

$p : X \twoheadrightarrow I$ に section $s : I \rightarrowtail X$ があって

$ps = 1$

などの形がある.

(AC) $\twoheadrightarrow$ に対し section がある.

となる.

(IAC) internal axiom of choice

$\forall E \in \mathcal{E}$, $(-)^E : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ preserves epics.

Thm

(IAC) をみたす topos は Boolean.

def $\mathcal{G}$ が $\mathcal{E}$ を generate する ~~$\mathcal{E}$ が well-pointed~~ であるとは，

$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ で $f \neq g$ ならば，

ある $G \in \mathcal{G}$ と $G \xrightarrow{x} A$ があって $fx \neq gx$．

であること．

wellpointed topos は $0 \not\cong 1$ をみたす

$\| $ nondegenerate という．

Prop 7

$\mathcal{E}$ が well-pointed topos なら，

$\mathcal{E}$ は two-valued かつ Boolean．

Prop 8

「$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ で $f \neq g$ ならば，

ある 1 の subobject G と

$G \xrightarrow{x} A$

があって，$fx \neq gx$ がなりたつ」

各 $E \in \mathcal{E}$ に対して $\mathrm{Sub}(E)$ が

complete Boolean algebra ならば，

$\mathcal{E}$ は axiom of choice をみたす．

Corollary 9

$\mathbb{P}$: poset． $\mathrm{Sh}(\mathbb{P}, \neg\neg)$ は axiom of choice をみたす．