2 Chapter 2
Functor categories

2.1 Ends in $\mathcal{V}$

以下, $\mathcal{V}$ は完備かつ余完備を仮定する.

Definition 1. (エンド) $\mathcal{V}$-functor $T : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対し, $\mathcal{V}$-natural family $\lambda_A K \to T(A,A)$ が *universal* であるとは, 任意の $\mathcal{V}$-natural $\alpha_A : X \to T(A,A)$ に対してただ一つ $f : X \to K$ があって, α_A が

$$X \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\lambda_A} T(A,A)$$

となるもの. このような (K,λ) を T の**エンド**と呼ぶ. K のことを $\displaystyle\int_{A\in\mathcal{A}} T(A,A)$ と書き, λ を *counit* と呼ぶ.

Proposition 1. 次は可換.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "\lambda_B"] & T(A,A) \arrow[d, "\rho_{AB}"] \\
T(B,B) \arrow[r, "\sigma_{AB}"] & {[\mathcal{A}(A,B), T(A,B)]}
\end{tikzcd}$$

ただし, ρ_{AB}, σ_{AB} はそれぞれ $T(A,-), T(-,B)$ の *transform.*

Proof. λ の $\mathcal{V}$-naturality の定義は次の図式.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "T(A,-)"] \arrow[d, "T(-,B)"] & {[T(A,A), T(A,B)]} \arrow[d, "-\circ\lambda_A"] \\
{[T(B,B), T(A,B)]} \arrow[r, "-\circ\lambda_B"] & {[K, T(A,B)]}
\end{tikzcd}$$

これは随伴により, 次が可換であることと同値.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B) \otimes K \arrow[r, "1\otimes\lambda_A"] \arrow[d, "1\otimes\lambda_B"] & \mathcal{A}(A,B) \otimes T(A,B) \arrow[r, "T(A,-)\otimes 1"] & {[T(A,A), T(A,B)] \otimes T(A,A)} \arrow[dd, "ev"] \\
\mathcal{A}(A,B) \otimes T(A,B) \arrow[d, "T(-,B)\otimes 1"] & & \\
{[T(B,B), T(A,B)] \otimes T(B,B)} \arrow[rr, "ev"] & & T(A,B)
\end{tikzcd}$$

さらに随伴をとって,

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "\lambda_B"] & T(A,A) \arrow[d, "\rho_{AB}"] \\
T(B,B) \arrow[r, "\sigma_{AB}"] & {[\mathcal{A}(A,B), T(A,B)].}
\end{tikzcd}$$

□

この Prop 1 は (K,λ) を (X,α) に取り替えても同様. すなわち universal $\mathcal{V}$-naturality は次の図式.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "\alpha_A"] \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[d, bend right, "\alpha_B"'] & & \\
{} & K \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "\lambda_B"] & T(A,A) \arrow[d, "\rho_{AB}"] \\
{} & T(B,B) \arrow[r, "\sigma_{AB}"] & {[\mathcal{A}(A,B), T(A,B)]}.
\end{tikzcd}$$

よって $\int_{A\in\mathcal{A}} T(A,A)$ は lim で書けて, $\mathcal{A}$ が small なときは存在する. (より一般に $\mathcal{A}$ が small $\mathcal{V}$-category と equivalent なときも存在する. 以後, small $\mathcal{V}$-category と equivalent なときも small と呼ぶ.)

エンドの定義から, 次の bijective な対応がある.

$$\begin{array}{c}
\alpha_A \colon X \longrightarrow T(A,A);\ \mathcal{V}\text{-natural} \\
\hline\hline
f : X \longrightarrow \int_A T(A,A)
\end{array}$$

Proposition 2. 次は *iso.*

$$[X, \textstyle\int_A T(A,A)] \cong \int_A [X, T(A,A)]$$

Proof. 次の対応によって示される.

$$\begin{array}{c}
Y \xrightarrow{f} [X, \int_A T(A,A)] \\
\hline\hline
Y \otimes X \xrightarrow{\bar{f}} \int_A T(A,A) \\
\hline\hline
\begin{tikzcd}
Y \otimes X \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\alpha_A"'] & \int_A T(A,A) \arrow[d, "\lambda_A"] \\
& T(A,A)
\end{tikzcd} \quad \text{for all } A \\
\hline\hline
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\bar{\alpha}_A"'] & {[X, \int_A T(A,A)]} \arrow[d, "{[X,\lambda_A]}"] \\
& {[X, T(A,A)]}
\end{tikzcd} \quad \text{for all } A
\end{array}$$

α と $\bar{\alpha}$ の $\mathcal{V}$-naturality の同値性を途中で使っていることに注意. □

$\alpha : T \to T'$ があるとき, 次を任意の A に対して可換にする $\int_A \alpha_{AA}$ が下側のエンドの普遍性から一意に存在する.

$$\begin{tikzcd}
\int_A T(A,A) \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, dotted, "\int_A \alpha_{AA}"'] & T(A,A) \arrow[d, "\alpha_{AA}"] \\
\int_A T'(A,A) \arrow[r, "\lambda'_A"] & T'(A,A)
\end{tikzcd}$$

Proposition 3. $T : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{V}$ が各 $B \in \mathcal{B}$ に対して, $\int_A T(A,A,B)$ をもつとき, $\int_A T(A,A,-) : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$ の $\mathcal{V}$-関手への拡張で, $\lambda_{AB} : \int_A T(A,A,B) \to T(A,A,B)$ が A, B に関して $\mathcal{V}$-自然 になるようなものがただ一つ存在する.

Proof. λ_{AB} の B に関する $\mathcal{V}$-自然性 は次の図式.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B,C) \arrow[r, "\int_A T(A,A,-)"] \arrow[d, "T(A,A,-)"] & {[\int_A T(A,A,B), \int_A T(A,A,C)]} \arrow[d, "{[1,\lambda_{AC}]}"] \\
{[T(A,A,B), T(A,A,C)]} \arrow[r, "{[\lambda_{AB},1]}"] & {[\int_A T(A,A,B), T(A,A,C)]}
\end{tikzcd}$$

下の L 字は $\mathcal{V}$-自然で, さらに先ほどの proposition から右上は $\int_A[\int_A T(A,A,B), T(A,A,C)]$ と iso で, 右の縦の射は対応する counit だから上の射はこの普遍性から一意に存在する射とする他ない. この射によって $\mathcal{V}$-関手 になることを示す. identity に関しては次の可換図において, 上の三角形がエンドの universality から可換になるので従う.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B,B) \arrow[rr, "\int_A T(A,A,-)"] \arrow[dd, "T(A,A,-)"'] & & {[\int_A T(A,A,B), \int_A T(A,A,B)]} \arrow[dd, "{[1,\lambda_{AB}]}"] \\
& I \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "j"] \arrow[dl, "j"] \arrow[dr, "\overline{\lambda_{AB}}"] & \\
{[T(A,A,B), T(A,A,B)]} \arrow[rr, "{[\lambda_{AB},1]}"] & & {[\int_A T(A,A,B), T(A,A,B)]}
\end{tikzcd}$$

次に compostion を保つことを示す. $\int_A T(A,A,B)$ を HB, $T(A,A,B)$ を TB

と略記する. まず次が可換.

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[HB,HD]} \arrow[dddr, "\lambda_D\circ-"] & \\
 & {[HC,HD]\otimes[HB,HC]} \arrow[ur, "m"] \arrow[dr, "(\lambda_D\circ-)\otimes 1"] & & \\
 & & {[[HC,HD],[HB,HC]]} \arrow[dr, "m"'] & \\
\mathcal{B}(C,D)\otimes\mathcal{B}(B,C) \arrow[uur, "H\otimes H"] \arrow[r, "T\otimes H"] \arrow[ddr, "T\otimes T"'] & {[TC,TD]\otimes[HB,HC]]} \arrow[ur, "(\lambda_C\circ-)\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes(-\circ\lambda_C)"'] & & {[HB,TD]} \\
 & & {[[TC,TD],[HB,HC]]} \arrow[ur, "m"] & \\
 & {[TC,TD]\otimes[TB,TC]} \arrow[ur, "1\otimes(-\circ\lambda_B)"'] \arrow[dr, "m"] & & \\
 & & {[TB,TD]} \arrow[uuur, "-\circ\lambda_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

よって次の外側が可換.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(C,D)\otimes\mathcal{B}(B,C) \arrow[rr, "H\otimes H"] \arrow[d, "T\otimes T"'] \arrow[dr, "m"] & & {[HC,HD]\otimes[HB,HC]} \arrow[dr, "m"] & \\
{[TC,TD]\otimes[TB,TC]} \arrow[dr, "m"] & \mathcal{B}(B,D) \arrow[rr, dotted] \arrow[d, "T"] & & {[HB,HD]} \arrow[d, "\lambda_D\circ-"] \\
 & {[TB,TD]} \arrow[rr, "-\circ\lambda_B"] & & {[HB,TD]}
\end{tikzcd}
$$

点線は普遍性から生える H_{BD} で, 上の四角形が求める図式. $\square$

Proposition 4. *$\mathcal{V}$-functor* $R : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$ について, 族 $\beta_B : RB \to \int_A T(A,A,B)$ が B に関して自然であることと

$$RB \xrightarrow{\beta_B} \int_A T(A,A,B) \xrightarrow{\lambda_{AB}} T(A,A,B)$$

が B に関して自然であることは同値.

Proof. $\Rightarrow$ が明らかなので逆を示す. 今度も $H = \int_A T(A,A,-))$ と表す. 次の外

側が可換であることが条件.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B,C) \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "H"] \arrow[dd, "T(A,A,-)"'] & & {[RB,RC]} \arrow[d, "\beta_C\circ -"] \\
& {[HB,HC]} \arrow[r, dotted, "-\circ\beta_B"] \arrow[d, "\lambda_C\circ -"'] & {[RB,HC]} \arrow[d, "\lambda_C\circ -"] \\
{[T(A,A,B),T(A,A,C)]} \arrow[r, "-\circ\lambda_B"] & {[HB,T(A,A,C)]} \arrow[r, "-\circ\beta_B"] & {[RB,T(A,A,C)]}
\end{tikzcd}
$$

よって, $[RB,HC] \cong \int_A [RB,T(A,A,C)]$ の普遍性から上の四角形が可換になるが, これは求める自然性. $\square$

最後にフビニの定理のようなものを示す. $T : (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^{\mathrm{op}} \otimes (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to \mathcal{V}$ とする. 各 $B, C \in \mathcal{B}$ に $\int_{A\in\mathcal{A}} T(A,B,A,C)$ があるとき, 上で示したように $\mathcal{V}$-functor $\int_{A\in\mathcal{A}} T(A,-,A,-) : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{V}$ が定まって, $\lambda_{ABC} : \int_A T(A,B,A,C) \to T(A,B,A,C)$ が全ての変数で $\mathcal{V}$-natural になる.

$\alpha_{AB} : X \to T(A,B,A,B)$ が A で自然なとき, エンドの普遍性から次のように分解する.

$$X \xrightarrow{\beta_B} \int_{A\in\mathcal{A}} T(A,B,A,B) \xrightarrow{\lambda_{ABB}} T(A,B,A,B)$$

先ほどの命題から, α_{AB} が B で自然なことと β_B が B で自然なことは同値.

α_{AB} が A と B で自然であることは, $(A,B) \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ で自然であることと同値だったから,

$$\int_{(A,B)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} T(A,B,A,B) \cong \int_{A\in\mathcal{A}} \int_{B\in\mathcal{B}} T(A,B,A,B)$$

さらに $\mathcal{V}$ に symmetric を仮定していたから,

$$\int_{A\in\mathcal{A}} \int_{B\in\mathcal{B}} T(A,B,A,B) \cong \int_{B\in\mathcal{B}} \int_{A\in\mathcal{A}} T(A,B,A,B)$$

が成り立つ.

2.2 The functor-category $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ for small $\mathcal{A}$

$\int_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{B}(TA,SA)$ の element $I \to \int_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{B}(TA,SA)$ は $\mathcal{V}$-natural transformation $I \to \mathcal{B}(TA,SA)$ と 1 対 1 に対応する. つまり,

$$\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A},\mathcal{B})(T,S) \cong V\left(\int_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{B}(TA,SA)\right)$$

が成り立つ. これによって $\mathcal{V}$-category の関手圏が作れる. 以下, 新しい notation で書くことにする.

Notation 1. $[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S)$ を次で定める.

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S) = \int_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{B}(TA,SA)$$

またこの counit を

$$E_A = E_{A,TS} : [\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S) \to \mathcal{B}(TA,SA)$$

で表す.

次が成り立つ.

$$\begin{aligned}[X,[\mathcal{A},\mathcal{V}](T,S)] &= [X,\textstyle\int_A [TA,SA]] \\ &\cong \textstyle\int_A [X,[TA,SA]] \\ &\cong \textstyle\int_A [TA,[X,SA]] \\ &= [\mathcal{A},\mathcal{V}](T,[X,S-])\end{aligned}$$

Theorem 1. *任意の $T,S:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対し $[\mathcal{A},\mathcal{B}](S,T)$ が存在するとき, $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ は $\mathcal{V}$-関手 $T:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を object とし, $[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S)$ を hom-object とする $\mathcal{V}$-category になる. (特に $\mathcal{A}$ が small ならば存在する.)*

Proof. 合成は次の図式で普遍性により一意に生える上辺の M で定める.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{A},\mathcal{B}](S,R)\otimes[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S)} \arrow[r, dotted, "M"] \arrow[d, "E_A\otimes E_A"] & {[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,R)} \arrow[d, "E_A"] \\
B(SA,RA)\otimes B(TA,SA) \arrow[r, "M"] & B(TA,RA)
\end{tikzcd}$$

identity も同様に普遍性によって次の式の上辺で定める.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, dotted, "j"] \arrow[dr, "j_{TA}"'] & {[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,T)} \arrow[d, "E_A"] \\
& \mathcal{B}(TA,TA)
\end{tikzcd}$$

これが $\mathcal{V}$-category になることは次の 2 つの図式のそれぞれ上の面の可換になることで, これらはともに側面と底面の可換性によって普遍性から可換であること

が従う.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & ({[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(H,R) \otimes {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(S,H)) \otimes {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,S) \arrow[dll, "M\otimes 1"'] \arrow[ddr, "a"] \arrow[dddd, "(E_A\otimes E_A)\otimes E_A"'] & \\
 & {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(S,R) \otimes {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,S) \arrow[dl, "M"'] \arrow[dddd] & & & \\
{[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,R) \arrow[dddd, "E_A"'] & & & & {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(H,R) \otimes ({[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(S,H) \otimes {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,S)) \arrow[dll, "1\otimes M"] \arrow[dddd, "E_A\otimes(E_A\otimes E_A)"] \\
 & & {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(H,R) \otimes {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,H) \arrow[ull, "M"] \arrow[dddd, "E_A\otimes E_A"] & & \\
 & & & (\mathcal{B}(HA,RA) \otimes \mathcal{B}(SA,HA)) \otimes \mathcal{B}(TA,SA) \arrow[dll, "M\otimes 1"] \arrow[ddr, "a"] & \\
 & \mathcal{B}(SA,RA) \otimes \mathcal{B}(TA,SA) \arrow[dl, "M"] & & & \\
\mathcal{B}(TA,RA) & & & & \mathcal{B}(HA,RA) \otimes (\mathcal{B}(SA,HA) \otimes \mathcal{B}(TA,SA)) \arrow[dll, "1\otimes M"] \\
 & & \mathcal{B}(HA,RA) \otimes \mathcal{B}(TA,HA) \arrow[ull, "M"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(S,S) \otimes {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,S) \arrow[dr, "M"] \arrow[dd, "E_A\otimes E_A"] & \\
I \otimes {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,S) \arrow[ur, "j\otimes 1"] \arrow[rr, "l"] \arrow[dd, "1\otimes E_A"] & & {[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(T,S) \arrow[dd, "E_A"] \\
 & \mathcal{B}(SA,SA) \otimes \mathcal{B}(TA,SA) \arrow[dr, "M"] & \\
I \otimes \mathcal{B}(TA,SA) \arrow[ur, "j\otimes 1"] \arrow[rr, "l"] & & \mathcal{B}(TA,SA)
\end{tikzcd}
$$

□

$[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ の underlying category は $\mathcal{V}$-$\mathbf{CAT}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ である. この $\mathcal{V}$-category を *functor category* と呼ぶ.

functor category の composition の定義をみると, E_A は functor $[\mathcal{A},\mathcal{B}] \to \mathcal{B}$ になっている. これを *evaluation at* A と呼ぶ.

Theorem 2. *$\mathcal{V}$-functor $E : [\mathcal{A},\mathcal{B}] \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ で, partial functors が*

$$\begin{aligned} E(-,A) = E_A : [\mathcal{A},\mathcal{B}] \to \mathcal{B} \\ E(T,-) = T : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \end{aligned}$$

であるものが存在する. これを単に evaluation と呼ぶ.

Proof. 次を示すことが必要十分.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S) \otimes \mathcal{A}(A,B)} \arrow[r, "E_B \otimes T"] \arrow[dd, "c"] & \mathcal{B}(TB,SB) \otimes \mathcal{B}(TA,TB) \arrow[d, "M"] \\
 & \mathcal{B}(TA,SB) \\
\mathcal{A}(A,B) \otimes [\mathcal{A},\mathcal{B}](TS) \arrow[r, "S \otimes E_A"] & \mathcal{B}(SA,SB) \otimes \mathcal{B}(TA,SA) \arrow[u, "M"']
\end{tikzcd}$$

これの随伴を取ると,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B) \arrow[rr, "T"] \arrow[dd, "S"] & & \mathcal{B}(TA,TB) \arrow[d, "{\mathcal{B}(-,SB)}"] \\
 & & {[\mathcal{B}(TB,SB),\mathcal{B}(TA,SB)]} \arrow[d, "- \circ E_B"] \\
\mathcal{B}(SA,SB) \arrow[r, "{\mathcal{B}(TA,-)}"] & {[\mathcal{B}(TA,SA),\mathcal{B}(TA,SB)]} \arrow[r, "- \circ E_A"] & {[[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S),\mathcal{B}(TA,SB)]}
\end{tikzcd}$$

これは A に関する counit の自然性そのものである. □

$[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S)$ はいつも存在するとは限らないのが厄介である. それでも例えば $[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S)$ が存在するような T,S だけを気にすればいいように $\mathcal{V}$-functor の集合を選んで関手圏を作るようなことで回避する方法などがある.

次のような場合を考える; $\mathcal{V}$-関手 $P : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $Q : \mathcal{D} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ があって, 任意の C, D に対し $[\mathcal{A},\mathcal{B}](P(C,-),Q(D,-))$ が存在する. このとき, proposition 3 において

$$T : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \otimes (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{D}) \to \mathcal{B}, \qquad T(A,A',(C,D)) = \mathcal{B}(P(C,A),Q(D,A'))$$

とすると, $\mathcal{V}$-functor $H : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ が

$$H(C,D) = [\mathcal{A},\mathcal{B}](P(C,-),Q(D,-))$$

で,

$$E_A : [\mathcal{A},\mathcal{B}](P(C,-),Q(D,-)) \to \mathcal{B}(P(C,A),Q(D,A))$$

が A, C, D に関して自然になるようなものがある.

2.3 The isomorphism $[\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C}]\cong[\mathcal{A},[\mathcal{B},\mathcal{C}]]$

$[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ が存在する場合に, 次の (通常の) 関手

$$\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C},[\mathcal{A},\mathcal{B}])\longrightarrow\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{A},\mathcal{B})$$

が isomorphic になることを示す. この関手は $G:\mathcal{C}\to[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ を下の合成へと送り,

$$\mathcal{C}\otimes\mathcal{A}\xrightarrow{G\otimes 1}[\mathcal{A},\mathcal{B}]\xrightarrow{E}\mathcal{B}$$

$\beta:G\Rightarrow G'$ を

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "G\otimes 1"] \arrow[r, bend right, "G'\otimes 1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\otimes 1"] & {[\mathcal{A},\mathcal{B}]\otimes\mathcal{A}} \arrow[r, "E"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

へと送るものとする.

まず object に関して全単射であることを示す. すなわち, 任意の $P:\mathcal{C}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対しただ一つ対応する G があることを示す. $P=E(G\otimes 1)$ であるならば P の 2 つの partial functor は

$$P(C,-)=GC,\qquad P(-,A)=E_AG$$

を満たしているはずである. 逆に P に対して, G がこの 2 つを満たすとき, 1 つめにより $G:\mathcal{C}\to[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ は C を $P(C,-)$ へうつし, 2 つめにより

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(C,D) \arrow[r, "G_{CD}"] \arrow[dr, "P(-,A)_{CD}"'] & {[\mathcal{A},\mathcal{B}](P(C,-),P(C,-))} \arrow[d, "E_A"] \\
 & \mathcal{B}(P(C,A),P(D,A))
\end{tikzcd}$$

が可換になることから, G_{CD} も普遍性から一意に定まる. よって一意性は示された. 存在を示すにはこの一意に決まる G がいつでも functor になることを示せばいい. それは次の 2 つの図式から示される.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(C',C'')\otimes\mathcal{C}(C,C') \arrow[rr, "m"] \arrow[d, "G\otimes G"] \arrow[dr, "P(-,A)\otimes P(-,A)"] & & \mathcal{C}(C,C'') \arrow[ddl, bend left, "P(-,A)"] \arrow[ddll, dashed, bend left=60, "G"] \\
{[\mathcal{A},\mathcal{B}](GC',GC'')\otimes[\mathcal{A},\mathcal{B}](GC,GC')} \arrow[r, "E_A\otimes E_A"] \arrow[d, "m"] & \mathcal{B}(P(C',A),P(C'',A))\otimes\mathcal{B}(P(C,A),P(C',A)) \arrow[d, "m"] & \\
{[\mathcal{A},\mathcal{B}](GC,GC'')} \arrow[r, "E_A"] & \mathcal{B}(P(C,A),P(C'',A)) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(C,C) \arrow[dd, "P(-,A)"] \arrow[dr, "G_{CC}"] & \\
I \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, dashed, "j"] \arrow[dr, "j"] & & {[\mathcal{A},\mathcal{B}](GC,GC)} \arrow[dl, "E_A"] \\
 & \mathcal{B}(P(C,A),P(C,A)) &
\end{tikzcd}
$$

次に morphism に関して全単射になることを示す．任意の $\mathcal{V}$-自然変換 $\alpha: P \to P'$ に対して, ただ一つ対応する $\beta : G \to G'$ があって, $\alpha_{CA} = E_A(\beta_C \otimes 1)$ となることを示せばいい．α_{CA} の A に関する自然性から,

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, dashed, "\beta_C"] \arrow[dr, "\alpha_{CA}"'] & {[\mathcal{A},\mathcal{B}](P(C,-),P'(C,-))} \arrow[d, "E_A"] \\
 & {[P(C,A),P'(C,A)]}
\end{tikzcd}
$$

を可換にする β_C がある．α_{CA} が C に関して自然なことと β_C が C に関して自然なことは同値であることは既に 2.2 で示した．また, この図式は β から α を構成する図式でもあるから, 一意存在性が示された．

$\mathcal{V}_0$ が initial object をもつとき, 2-functor $\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}(-\otimes\mathcal{A},\mathcal{B})$ が $\mathcal{V}$ category $\mathcal{D}$ で representable, つまり $\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}(-,\mathcal{D})$ と equivalent であることと $\mathcal{D} \cong [\mathcal{A},\mathcal{B}]$ が同値になる．

$[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ が存在する範囲で, $[-,-] : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT} \times \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT} \to \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}$ は 2-関手的になることを示す.

まず, 次を思い出す.

Remark. $F : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ に対し, 各 $B \in \mathcal{B}$ に対し representation $\alpha_B : \mathcal{A}(KB,-) \to F(B,-)$ が存在するとき, $\alpha_{BA} : \mathcal{A}(KB,A) \to F(B,A)$ が A, B 両方で natural になるようにただ一通りに K を関手 $K \to \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ にできる.

いま 2-functor F を, $F(\mathcal{C},\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{A},\mathcal{B})$ とする. $K(\mathcal{A},\mathcal{B}) = [\mathcal{A},\mathcal{B}]$ と書くと, 先ほど示したことから $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ が全て存在するなら

$$\alpha_{-\mathcal{A}\mathcal{B}} : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}(-, K(\mathcal{A},\mathcal{B})) \longrightarrow F(-,\mathcal{A},\mathcal{B})$$

は representetion になる. remark の定理から, $[-,-] : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT} \to \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}$ は 2-functor になって, $\alpha_{\mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}}$ は全ての変数に対して自然になる.

ところで representation $\alpha_{\mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}}$ が $\mathcal{A},\mathcal{B}$ で自然なことと次の合成

$$\mathcal{I} \xrightarrow{j} \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}([\mathcal{A},\mathcal{B}],[\mathcal{A},\mathcal{B}]) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}([\mathcal{A},\mathcal{B}]\otimes\mathcal{A},\mathcal{B})$$

が自然であることが同値だったが, これはさらに

$$E : [\mathcal{A},\mathcal{B}]\otimes\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

が $\mathcal{A},\mathcal{B}$ で自然なことと同値になる.

まだ確かめてないが, remark の定理での functor の構成を追いかけると, 2-functor $[-,-] : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT} \times \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT} \to \mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}$ は

- $M : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ と $N : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ に対し, $[M,N] : [\mathcal{A},\mathcal{B}] \to [\mathcal{A}',\mathcal{B}']$ は, object T を NTM へ送り, hom-object の map は次の図式で普遍性から定まるものになる.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{A},\mathcal{B}](T,S)} \arrow[r, "{[M,N]_{TS}}"] \arrow[d, "E_{MA}"] & {[\mathcal{A}',\mathcal{B}'](NTM,NSM)} \arrow[d, "E'_A"] \\
\mathcal{B}(TM(A),SM(A)) \arrow[r, "N_{TMA,SMA}"] & \mathcal{B}'(NTM(A),NSM(A))
\end{tikzcd}$$

- $\mu : M \to M'$, $\nu : N \to N'$ に対して $[\mu,\nu]_T : NTM \to N'TM'$ は,

$$[\mu,\nu]_T = \nu T \mu$$

で与えられる.

またこれもまだ確かめてないが $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{B}^{\mathrm{op}}] \cong [\mathcal{A},\mathcal{B}]^{\mathrm{op}}$ が成り立つ.