5.12

Description of the image above in terms of K-comodels;
generalization to an equivalence $\mathrm{Lan}_Z \dashv [Z,1]$ between categories of comodels.

今日の話：

タイトルが意味不明.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Ladj}[\mathcal{C},\mathcal{B}] & \hookrightarrow & [\mathcal{C},\mathcal{B}]_*^{\ell k} & \cong & [\mathcal{A},\mathcal{B}]_*^{(K)} & \hookrightarrow & [\mathcal{A},\mathcal{B}] \\ \| & & & & & & \end{array}$$

前回のmotivationを引き継いでいる.

（前回：$\forall K : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$; dense, $\mathrm{Ladj}[\mathcal{C},\mathcal{B}] \hookrightarrow [\mathcal{C},\mathcal{B}] \xrightarrow{[K,1]} [\mathcal{A},\mathcal{B}]$

の replate image は何か.

↳ image + imageに含まれるものとisoなもの全体.）

この答え，つまり replate image が，K-Com $[\mathcal{A},\mathcal{B}]^{(K)}$ (K-comodel) 全体で与えられることを示す.

（と思ってタイトルを読み返すとちょっと意味分かる）

$\mathcal{A}$ が small でないとき $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ が $\mathcal{V}$-圏でないかもしれないので replate image を $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ で考えると面倒だが，

$[\mathcal{A},\mathcal{B}]_*^{(K)}$ で考えると，これは $[\mathcal{C},\mathcal{B}]_*^{\ell k}$ と equivalent なので 後者が $\mathcal{V}$-圏なら OK.
よって $\mathcal{A}$ のサイズに依存しない議論としていい.

$(K:\mathcal{A}\to\mathcal{C}\,;\,\text{dense})$

Def

$G:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ が K-comodel とは,

$\tilde{G}:\mathcal{B}\longrightarrow[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$ が $\tilde{K}:\mathcal{C}\longrightarrow[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$ を何らかの $T:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ で下のように factorize すること.

$$\tilde{G}\cong\quad\mathcal{B}\xrightarrow{\ \exists T\ }\mathcal{C}\xrightarrow{\ \tilde{K}\ }[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$$

即ち 自然に

$$\mathcal{B}(GA,\ B)\cong\mathcal{C}(KA,TB)$$

とできること □

- $K:\mathcal{A}\to\mathcal{C}\,;\,\text{dense}$ は $\tilde{K}=\tilde{K}\,\mathrm{Id}$ より K-comodel.

- $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ の K-comodel の full-subcategory を $K\text{-Com}[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ とし,
  $K\text{-Com}[\mathcal{A},\mathcal{B}]\cap[\mathcal{A},\mathcal{B}]^{(K)}=:K\text{-Com}[\mathcal{A},\mathcal{B}]^{(K)}$ とする. (Lan_K できるもの)
  他の $Z:\mathcal{A}\to\mathcal{D}$ をとってきて, $K\text{-Com}[\mathcal{A},\mathcal{B}]^{(Z)}:=K\text{-Com}[\mathcal{A},\mathcal{B}]\cap[\mathcal{A},\mathcal{B}]^{(Z)}$ も定義しておく.

- T は 存在すれば up-to iso で一意. ∵ $\tilde{K}$ が fully faithful なので.

* 1.11 あたりで "$\mathcal{B}(GA,B)\cong\mathcal{C}(KA,TB)$ なる TB が存在すれば T は一意に関手にできる" を保障して欲しいが, これは多分できない.

- 疑問：どこが comodel ??

5.13 でやる fact　$\mathcal{A}$: small, $\mathcal{E}$: cocomplete のとき $K: \mathcal{A} \to \mathcal{E}$; dense は

(かなり一般化された) essential-algebraic theory と思える.

その $\mathcal{P}$: $\mathcal{V}$-圏 での model は　$H: \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{P}$ であって, $H^{op}: \mathcal{A} \to \mathcal{P}^{op}$ が

さっき定義した co model になるもののことらしい.

$\mathrm{Ladj}[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \simeq K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(K)}$ をこれから示すが,

先により一般の結果を示すらしい.

Theorem 5.52

$K : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$; dense に対して,

$Z : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ と fully faithful $J : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ があって,

$$K \cong JZ$$

とする. (このとき Theorem 5.13 より J, Z は共に dense で $J = \mathrm{Lan}_Z K$.)

このとき

$$\mathrm{Lan}_Z \dashv [Z, 1] : J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}] \simeq K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(Z)}$$

が equivalence (unit, counit は canonical maps)

proof. (まず ← 向きの構成をする)

$H \in J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}]$ をとる. 定義から ある $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ があって

$$\mathcal{B}(HD, B) \cong \mathcal{C}(JD, TB) \qquad (B, D \text{ で natural})$$

$D = ZA$ とすると, (Z を precomposite すると)

$$\mathcal{B}(HZA, B) \cong \mathcal{C}(JZA, TB) \cong \mathcal{C}(KA, TB) \qquad (A, B \text{ で natural})$$

となるので HZ は K-comodel. (すなわち $\widetilde{HZ} \cong \tilde{K}T$.)

Recall Theorem 4.47 (4.49 式)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C} \arrow[ddr] & \\
 & \mathcal{D} \arrow[ur, "J"] \arrow[drr, "J"'] \arrow[r, phantom, "="] & & \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "Z"] \arrow[rrr, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\cong"] & & & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

J が fully-faithful なら, 外側が Kan 拡張 ⇒ 下も上も Kan 拡張

$$\widetilde{JZ}\, J \cong \tilde{Z}.$$

今　$\tilde{K}J \cong \widetilde{JZ}J \cong \tilde{Z}$　となっている。(この式はH使ってないので、定理の仮定から出る。
逆の構成のときも使ってOK)

よって

$\tilde{K}$: fully faithful

$$[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](\tilde{Z}D, \widetilde{HZ}B) \cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](\tilde{K}JD, \tilde{K}TB)$$
$$\cong \mathcal{C}(JD, TB) \cong \mathcal{B}(HD, B)$$

(4.20)式より、　$H \cong \mathrm{Lan}_Z HZ$　となるので　HZ は Z に沿って拡張できる。

この unit は　$1: HZ \longrightarrow HZ$　らしい。

(次に逆 $\longrightarrow$ の構成をする)

$G \in K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(2)}$ をとる。定義から、ある $T: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ があって

$$\tilde{G} \cong \tilde{K}T.$$

また、定義から Z に沿って拡張できる。

$$H := \mathrm{Lan}_Z G$$

としておく。(4.20)式を使うと、

$$\mathcal{B}(HD, B) \cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](\tilde{Z}D, \tilde{G}B)$$
$$\cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](\tilde{K}JD, \tilde{K}TB)$$
$$\cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](JD, TB)$$

上の赤文字と
$\tilde{G} \cong \tilde{K}T$

$\tilde{K}$: fully faithful

よって　$H \in J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}]$

$D = ZA$ とすると $\mathcal{B}(HZA, B) \cong \mathcal{C}(KA, TB)$ $(\tilde{K}TB)A$

$\cong \mathcal{B}(GA, B)$ $\cong (\tilde{G}B)A$

よって $HZ \cong G$. これが Kan 拡張 $G \Longrightarrow (\mathrm{Lan}_Z G)Z$ の unit になるらしい。

従って

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{D}, \mathcal{B}]} \arrow[r, shift right, leftarrow, "{[K,1]}"'] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Lan}_Z"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & {[\mathcal{A}, \mathcal{B}]} \\
J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}] \arrow[u, hook] \arrow[r, shift right, leftarrow, "{[K,1]}"'] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Lan}_Z"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(Z)} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

で下は unit, counit が iso なので equivalence. $\square$

先の証明で, equivalence の unit, counit が canonical なものだったらしいので,

$$\begin{array}{ccc}
J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}] & \subset & [\mathcal{D}, \mathcal{B}]^{\ell Z}_{*} \\
\cong & & \cong \\
K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(Z)} & \subset & [\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(Z)}_{*}
\end{array}$$

となることが分かる. $\mathcal{D} = \mathcal{C}$, $J = 1_{\mathcal{C}}$ とおけば,

$$1_{\mathcal{C}}\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{C}, \mathcal{B}] \cong K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(K)}$$

となるが, この左辺に含まれる $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ は ある T があって

$$\mathcal{B}(SC, B) \cong \mathcal{C}(\underset{C}{\underbrace{1_{\mathcal{C}}C}}, TB)$$

となるもの，すなわち　left-adjoint．従って次の定理を得る．

<u>Theorem 5.56</u>

$K: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$; dense と $\mathcal{B}$ に対し，

$$\mathrm{Lan}_K \dashv [K, 1] \quad : \quad [\mathcal{E}, \mathcal{B}]_*^{\ell K} \cong [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_*^{(K)}$$

は，

$$\mathrm{Lan}_K \dashv [K, 1] \quad : \quad \mathrm{Ladj}[\mathcal{E}, \mathcal{B}] \cong K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(K)}$$

の restriction をもつ．

今，$\mathcal{E}$: cocomplete，$\mathcal{A}$: small とするなら　$\mathrm{Ladj}[\mathcal{E}, \mathcal{B}] = \mathrm{Cocts}[\mathcal{E}, \mathcal{B}]$ とできて，

($\because$ Theorem 5.33．$\mathcal{A}$: small は $\mathcal{E}$ の dense subcategory の存在のため)

これ，K : fully faithful を言っていないのでダメじゃね？

$\forall G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$\exists \mathrm{Lan}_K G$　(例えば $\mathcal{A}$: small かつ $\mathcal{B}$: cocomplete) なら，

$K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(K)} = K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ としていい．

- $\mathcal{A}$: small のとき　$K = Y : \mathcal{A} \longrightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ とすると，　$Y\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(Y)} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(Y)}$

となって，　3回目の

$$\mathrm{Cocts}[[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}], \mathcal{B}] \cong [\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{(Y)}$$

の発見とする．

このようになっている．（$K \cong JZ$, J : fully-faithful）

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ladj}[\mathcal{E}, \mathcal{B}] & \cong & J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}]^{(J)} & \cong & K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{P}]^{(K)} \\
 & & \cap & & \cap \\
 & & J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}] & \cong & K\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{A}, \mathcal{P}]^{(2)}
\end{array}
$$

この縦が proper であることを確認しておく．

$\mathcal{E} = \mathcal{V} = \mathbf{Set}$, $\mathcal{A} = \mathcal{D} = \mathcal{B} = \{2\} \underset{\text{full sub}}{\subset} \mathbf{Set}$ とする．

J は dense

（∵ $\{1\}$ は dense．よって $\{1, 2\}$ も dense．(5.17)

$\{2\} \hookrightarrow \{1, 2\} \hookrightarrow \mathbf{Set}$ を考えて．

$\{1, 2\}$ の任意の object は $\{2\}$ の少なくとも1つの object の retract なので Prop 5.20 から従う）

$\tilde{J} : \mathbf{Set} \longrightarrow [\{2\}^{op}, \mathbf{Set}]$ に対し，$\tilde{J}\emptyset = \mathbf{Set}(\{2\}-, 0) = \Delta\emptyset$

$$
\tilde{J}0 \star 1_{\mathcal{D}} = \mathrm{colim}(\mathrm{el}\,\tilde{J}0 \xrightarrow{d^{op}} \longrightarrow)
$$

$= \{2\}$ の initial object．

そんなものは存在しないのでダメ．$\mathrm{Lan}_J 1_{\mathcal{D}}$ は存在しえない．よって $1_{\mathcal{D}} \notin J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}]^{(J)}$

今，（$\mathcal{A} = \mathcal{D}$, $Z = 1_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ で）$\widetilde{1_{\mathcal{D}}} = Y \cong \tilde{J}J$ なので $1_{\mathcal{D}} \in J\text{-}\mathrm{Com}[\mathcal{D}, \mathcal{B}]$．

J : fully faithful, dense