7 Subobject Classifiers for Sites

topological space における subobject classifier Ω は,

$$\Omega(U) = \{ V \mid V \subset_{open} U \}.$$

Here, each open set V are replaced by the corresponding <u>principal sieve</u>

$$\downarrow(V) = \{ V' \mid V' \subset V \}.$$

then,

$$\Omega(U) = \{ S \mid S \text{ is a principal sieve on } U \}.$$

Now, a sieve S is principal is to assert that it is <u>closed under arbitrary unions</u>; i.e. that for all open $W \subseteq U$,

$$\underline{S \text{ covers } W \Rightarrow W \in S}$$

This is property of sieves, which can be generalized to any site.

$f^* h^* M \in J B$

Recall that, for a sieve $\overset{J(C)}{M}$ on C and an arrow $f : D \to C$, we say <u>"M covers f"</u> when

$$f^* M \in J(D).$$

<u>Def</u>

A sieve M on C is <u>closed</u> iff

$$\forall f : D \to C \text{ in } \mathbb{C}, \quad M \text{ covers } f \Rightarrow f \in M. \qquad (3)$$

iff

$$\forall f : D \to C \text{ in } \mathbb{C}, \quad (f^*M =) \{ h : E \to D \mid fh \in M \} \text{ covers } D \Rightarrow f \in M \qquad (4)$$

┘

* closed は topologically に閉集合である的な意味ではなく、この意味で使われ、両者は直観的なつながりはない。

<u>Property</u> $\forall h : B \to C$ in $\mathbb{C}$

M is closed $\Rightarrow$ h^*M is closed

proof.

h^*M covers $f : D \to B$

$\Leftrightarrow f^*(h^*M) \in J(C)$

$\Leftrightarrow (hf)^* M \in J(C)$

$\Leftrightarrow M$ covers $hf \Rightarrow hf \in M$

$\Rightarrow f \in h^*M$.

Def

$\Omega(C) = \{S : \text{closed sieve on } C\}$.

$\forall h : B \longrightarrow C$, $\Omega(h) : \Omega C \longrightarrow \Omega B$

is given by,

$M \cdot h = h^* M$.

Def S: given sieve.

$\bar{S} = \{h \mid S \text{ covers } h\}$

Property $\bar{S}$ is a closed sieve

proof. ① $\bar{S}$ is a sieve

$h \in \bar{S} \Leftrightarrow S$ covers h

$\Rightarrow S$ covers hf (§2 (iia) stability of arrow form)

$\Leftrightarrow hf \in \bar{S}$

② $\bar{S}$ is closed

$\because$ $\bar{S}$ covers g (Assumption)

S covers all arrows of $\bar{S}$ (by def)

$\Rightarrow S$ covers g (§2 (iii a) transitivity of arrow form)

Property

$\bar{S}$ is the smallest closed sieve on C containing S.

proof. $S \subset \bar{S}$ は $f \in S \Rightarrow f^* S = t_D \in J(D)$

より明らか. smallest も明らか.

$\left(\begin{array}{l} S \subset S',\ S' \text{ closed とする} \\ f \in \bar{S} \Leftrightarrow S \text{ covers } f \\ \Rightarrow S' \text{ covers } f \Leftrightarrow f \in S' \end{array}\right)$

$\bar{S}$ は S の closure と呼ばれる.

Property $\forall g : D \longrightarrow C$

$\overline{g^*(S)} = g^*(\bar{S})$

proof.

$g^*(S) \subseteq g^*(\bar{S})$.

$g^*(\bar{S})$ is closed (既に示した).

よって $\overline{g^*(S)} \subseteq g^*(\bar{S})$ ($\because$ minimum)

逆に

$f \in g^*(\bar{S})$

$\Rightarrow gf \in \bar{S}$

$\Rightarrow S$ covers gf $\quad ((gf)^* S \in J(B))$

$\Rightarrow g^*(S)$ covers f $\quad (f^* g^* S) \in J(D))$

$\Rightarrow f \in \overline{g^*(S)}$

Lemma 1.

The presheaf Ω is a sheaf.

proof. 次を示す.

(i) Ω は separated.

(ii) every matching families have amalgamation.

(i) $M, N \in \Omega(C)$ (closed sheaves on C)

$S \in J(C)$, $\forall g \in S$, $M \cdot g = N \cdot g$

を仮定. $M \cdot g = g^* M$ だった(定義).

このとき $M \cap S = N \cap S$

$\left(\because g \in M \cap S \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g^* M = t_D = g^* N \\ g \in S \end{array}\right\} \Rightarrow g \in N \cap S\right)$

$f \in M$ を仮定する. このとき,

- M covers f
- S covers f ($\because$ stability (ii)).

よって $M \cap S$ covers f $\quad (f^*(M \cap S) = f^*(M) \cap f^*(S))$

$\Leftrightarrow N \cap S$ covers f

$\Rightarrow N$ covers f

$\Rightarrow f \in N$

$M \subset N$

逆も同じ

Lemma 1

proof

(ii) $S \in J(C)$,

$M_f \in \Omega(D)$ $(f: D \to C \in S)$

$\{M_f\}_{f \in S}$ は matching family とする.

すなわち

$g^*(M_f) = M_{fg}$ $\left(\begin{matrix}\forall f \in S \\ \forall g\end{matrix}\right)$.

いま,

$M = \{f \circ g \mid g \in M_f,\ f \in S\}$ とし,

$\overline{M}$ が amalgamation になることを示す.

まず

$f^*(M) = M_f$ を示す.

① $M_f \subseteq f^*(M)$ は明らか

$\left(\begin{matrix} g \in M_f & \Rightarrow & f \cdot g \in M \\ & \Rightarrow & g \in f^*(M)\end{matrix}\right)$

② $u \in f^*(M)$

$\Rightarrow fu \in M$

$\Rightarrow \exists f' \in S,\ \exists g \in M_{f'}$ s.t.

$fu = f'g$

$\Rightarrow M_{fu} = M_{f'g}$

$\Rightarrow u^*(M_f) = g^*(M_{f'})$

$g \in M_{f'}$ より $g^*(M_{f'})$ は maximal sieve.

よって $u \in M_f$.

①②より $f^*(M) = M_f$.

$f^*(\overline{M}) = \overline{f^*(M)} = \overline{M_f} = M_f$ //

□.

Lemma 2

$F \in Sh(C, J)$.

$A \subset F$: sub presheaf.

A is a sheaf iff

$\forall C \in \mathcal{C}$, $\forall x \in FC$, $\forall S \in J(C)$,

$\left(\begin{matrix}(\forall f: D \to C \in S,\ x \cdot f \in A(D)) \\ \Rightarrow x \in A(C)\end{matrix}\right)$

proof.

A の matching family は FC 内で amalgamation をもつが, それが AC 内に入っていることが必要十分. 上はそのままこれ.

Def

$C \longmapsto t_C$ は natural transformation

$\mathrm{true}: 1 \longrightarrow \Omega$

を定める.

Prop 3

(Ω, true) is a subobject classifier in $Sh(C, J)$ と定める.

proof.

$A \subset F$ in $Sh(C, J)$ とする.

presheaf のときと同様 $\chi_A: F \longrightarrow \Omega$ を

$$\begin{matrix}(\chi_A)_C: & FC & \longrightarrow & \Omega C \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & \{f: D \to C \mid x \cdot f \in A(D)\}\end{matrix}$$

で定める.

$(\chi_A)_C(x)$ が closed sieve であること,

χ_A が natural transformation であること,

pullback diagram になること,

χ_A が unique であることを示す.

Prop 3

proof.

・sieve になることは明らか.

・closed になることを示す.

$(\chi_A)_C(x)$ covers g

$\Rightarrow$ $g^*((\chi_A)_C(x))$ covers D

$\Leftrightarrow$ $\{f \mid fg \in (\chi_A)_C(x)\}$ covers D

$\Leftrightarrow$ $\{f : B \to D \mid x \cdot fg \in A(B)\}$ covers D.

$S = \{f : B \to D \mid x \cdot fg \in A(B)\}$

とおくと, S covers D and

$\forall f : B \to D \in S,\ (x \cdot g) \cdot f \in A(B)$

をみたす. Lemma 2 から,

$x \cdot g \in A(D)$.

$\Leftrightarrow$ $g \in (\chi_A)_C(x)$.

・χ_A は natural transformation か.

$g : B \to C$ とする.

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "(\chi_A)_C"] \arrow[d, "Fg"'] & \Omega C \arrow[d, "g^*(-)"] \\
FB \arrow[r, "(\chi_A)_B"'] & \Omega B
\end{tikzcd}$$

$f \in (\chi_A)_B(x \cdot g)$

iff $(x \cdot g) \cdot f \in A(なんか)$

iff $gf \in (\chi_A)_C(x)$.

iff $f \in g^*((\chi_A)_C(x))$.

//

・pullback diagram になること

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!"] \arrow[d, hook] & 1 \arrow[d, "true"] \\
F \arrow[r, "\chi_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$Sh(\mathbb{C}, J)$ で pullback であることは

$\hat{\mathbb{C}}$ で pullback であることで,

pointwise に pullback であること.

つまり

$x \in AC$

iff $(\chi_A)_C(x)$ が maximal sieve

を示せば良い.

$(\chi_A)_C(x) = \{f : D \to C \mid x \cdot f \in A(D)\}$

の定義から明らか.

・uniqueness of χ_A.

$t_C = (\chi_A)_C(x)$

iff $1_C \in (\chi_A)_C(x)$

pullback

iff $x \in A(C)$. であるから,

$f \in (\chi_A)_C(x)$

χ_A の naturality

iff $1_D \in f^*((\chi_A)_C(x)) = (\chi_A)_D(x \cdot f)$

iff $x \cdot f \in A(D)$ よって χ_A は unique.

Cor 4

Every Grothendieck topos is an elementary topos.

Cor 5

$\phi : F \longrightarrow G$ is epic in $Sh(\mathbb{C}, J)$

iff

$\forall C \in \mathbb{C},\ \forall y \in G(C),\ \exists S \in J(C)$

s.t.

$\forall f : D \to C \in S$,

$y \cdot f$ is in the image of

$\phi_D : FD \longrightarrow GD$.

locally surjective という.

proof.

$\Leftarrow$ $\alpha, \beta : G \longrightarrow H$, $\alpha\phi = \beta\phi$ とする.

$C \in \mathbb{C}$, $y \in G(C)$, $S \in J(C)$

S は上の条件をみたす. 条件から,

$\forall f \in S$, $\alpha(y \cdot f) = \beta(y \cdot f)$

$\left(\text{何か} \xmapsto{\phi_D} y \cdot f \rightrightarrows \begin{matrix} \alpha(y \cdot f) \\ \beta(y \cdot f) \end{matrix} \right)$

$\alpha(y) \cdot f = \beta(y) \cdot f$.

H: sheaf で S は cover なので,

$\alpha(y) = \beta(y)$

$\Rightarrow$ $\phi : F \longrightarrow G$; epic のとき,

$A \subset G$ を,

$$A(C) = \{ y \in G(C) \mid \exists S \in J(C) \text{ s.t. } \forall f : B \to C \in S,\ y \cdot f \in Im(\phi_B) \}$$

で定める. Lemma 2 から, A が subsheaf であることを示す.

S を C の cover とする.

$\forall f : D \to C \in S$, $x \cdot f \in A(D)$

がみたされているとする.

$x \cdot f \in A(D)$ ならば,

ある $M_f \in J(D)$ で,

$\forall g : B \to D \in M_f$, $(x \cdot f) \cdot g \in Im(\phi_B)$

なるものがあるので選ぶ.

いま,

$M = \{ f \circ g \mid f \in S,\ g \in M_f \}$

は C を cover する.

$f \circ g \in M$ ならば $x \cdot (fg) \in Im(\phi_B)$

が従うので, これは

$x \in A(C)$ を示す.

Lemma 2 から A は subsheaf.

$\chi_A : G \longrightarrow \Omega$ を characteristic map とする.

いま, $y = \phi_C(x) \in GC$ ならば,

任意の $f : B \to C$ に対し,

$y \cdot f = \phi_C(x) \cdot f = \phi_B(x \cdot f) \in Im(\phi_B)$

なので,

$y \in A(C)$.

よって

$\phi : F \longrightarrow A \hookrightarrow G$ と分解し,

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr] \arrow[dr, "\phi"] \arrow[ddr, "\phi"'] & & \\ & A \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\ & G \arrow[r, "\chi_A"] & \Omega \end{tikzcd}$$

ϕ: epic だから, $\chi_A = G \longrightarrow 1 \xrightarrow{true} \Omega$.

つまり $A = G$. これは主張そのもの

$\square$

Cor 6

$\phi : P \longrightarrow Q$; given natural transformation.

$a(\phi) : aP \longrightarrow aQ$ is epic in $Sh(\mathbb{C}, J)$

iff ϕ is locally surjective

proof.

($\Leftarrow$) $\alpha, \beta : aQ \longrightarrow F$, $\alpha \circ a(\phi) = \beta \circ a(\phi)$ とする.

$$\begin{tikzcd} aP \arrow[r, "a(\phi)"] & aQ \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & F \\ P \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\phi"'] & Q \arrow[u, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

より

$\alpha \circ \eta \circ \phi = \beta \circ \eta \circ \phi$.

ϕ が locally surjective なので

ϕ is epic.

$\alpha \circ \eta = \beta \circ \eta$.

η の universality から $\alpha = \beta$.

($\Rightarrow$) $A \subseteq Q$ を Corollary 5 と同様に

$$AC = \left\{ y \in QC \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists S \in J(C) \text{ s.t. } \forall f \in S, \\ y \cdot f \in \mathrm{Im}(\phi_s) \end{array} \right\}$$

と定める.

$\Omega^{(p)}$ を $\hat{\mathbb{C}}$ の subobject classfier

$\Omega^{(p)}(C) = \{ \text{sieves on } C \}$ とする.

classifing arrow は presheaf と sheaf で同じだった. $(\chi_A)_C(y)$ は presheaf として closed sieve になる.

よって右のように factor through する.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"] & \\ Q \arrow[r, dashed, "\chi_A"] \arrow[r, "\chi_A"'] & \Omega \arrow[d, "i"] \\ & \Omega^{(p)} \end{tikzcd}$$

$\hat{\mathbb{C}}$ の図式 / Sh の図式

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\phi"] & iaP \arrow[d, "a\phi"] & aP \arrow[d, "a\phi"] \\ Q \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & iaQ \arrow[d, "a\overline{\chi_A}"] & aQ \arrow[d, "\exists! \ \overline{\chi_A}"] \\ & i\Omega & \Omega \end{tikzcd}$$

$\chi_A \circ \phi = \mathrm{true} \circ !$ （計算するとそうなる）

ので,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "!"] & iaP \arrow[d, "!"] & aP \arrow[d, "!"] \\ 1 \arrow[r, no head] \arrow[dr, "\mathrm{true}"'] & ia1 = 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ & i\Omega = \Omega & \Omega \end{tikzcd}$$

$\overline{\chi_A} \circ a(\phi) = \mathrm{true} \circ !$

$a(\phi)$ epic なので $\overline{\chi_A} = \mathrm{true} \circ !$

よって $\chi_A = \mathrm{true} \circ !$.

すなわち $P \simeq A \Leftrightarrow \phi$: locally surjective □

最後に J が $Sh(\mathbb{C}, J)$ から復元できる特別な場合を見る.

Corollary 7

A family $\{ f_i : C_i \longrightarrow C \}$ covers C

（これが生成する sieve が $J(C)$ に含まれるの意味）

iff the induced map

$$\coprod_i ay(C_i) \longrightarrow ay(C)$$

is epic in $Sh(C, J)$

proof.

$\coprod_i ay(C_i) \simeq a\left(\coprod_i^{(p)} y(C_i)\right)$ だった.

$a\left(\coprod_i^{(p)} y(C_i)\right) \xrightarrow{a\phi} ay(C)$ epic

iff $\coprod_i y(C_i) \xrightarrow{\phi} y(C)$ is locally surjective

何かたぶんがんばるとできる