5-7

5.7 The free completion of $\mathcal{A}$ with respect to all colimits with indexing-type in $\mathcal{F}$.

今日の話：

関手の集合 $\mathcal{F}$ であって、$F \in \mathcal{F}$ なら

・F の domain は small，　F の codomain は $\mathcal{V}$

なる $\mathcal{F}$ について，

$\mathcal{F}$-cocomplete，　$\mathcal{F}$-cocontinuous，　$\mathcal{F}$-colimits

なる概念を考える。　(メインは Thm 5.35)

前準備として次を示す。

Proposition 5.34　$^\forall \mathcal{A} \in \mathcal{V}\text{-Cat}$，accessible functor $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{V}$ の集合は small colimit で閉じている。

則ち，

$^\forall \mathcal{L}$: small $\mathcal{V}$-category，　$^\forall H : \mathcal{L}^{op} \to \mathcal{V}$，　$^\forall P : \mathcal{L} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$，

If $^\forall L \in \mathcal{L}$，$PL$: accessible　then　$H \star P$ is accessible.

存在は $[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$: cocomplete から従う。

proof.　$\mathcal{L}$, H, P を条件をみたすようにとる。

> Remark (Prop 4.83)
>
> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ が accessible とは次の同値な条件をみたすこと。
>
> (i) F は presentables の small colimit
>
> (ii) F は何らかの domain が small な K で $\mathrm{Lan}_K H$ で書ける。
>
> (iii) F は $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{A} \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$ なる形の 左 Kan 拡張。

Prop 4.83 (iii) より，
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \arrow[dr, "PL"] & \\ \mathcal{C}_L \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$
が左Kan拡張になるように 各 L に対し，

$\mathcal{A}^{op}$ の full subcategory $\mathcal{C}_L$ がとれる。

$\mathcal{L}$: small，$\mathcal{C}_L$: small なので　$\mathcal{C} := \bigcup_{L \in \mathcal{L}} \mathcal{C}_L$: $\mathcal{A}^{op}$ の small full sub がとれる。

$K : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{A}^{op}$ とする。

> Remark (Theorem 4.47 の後半の主張)
>
> $\begin{tikzcd} & \mathcal{Z} \arrow[dr, "\mathrm{Lan}_{ZK} G"] & \\ \mathcal{K} \arrow[ur, "Z"] \arrow[rr, "G"'] \arrow[urr, phantom, "\mathbin{/\!/}"] & & \cdot \end{tikzcd}$
>
> Z が fully faithful ＆ $\mathrm{Lan}_{ZK} G$ がある
>
> ⇒ 下 の 三角 は 左 Kan 拡張．　(⇒上も左Kan拡張)

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}^{op} \arrow[ddr, "PL"] & \\ & \mathcal{C} \arrow[u, hook, "K"] \arrow[dr, dotted, "(PL)K"'] & \\ \mathcal{C}_L \arrow[ur, hook] \arrow[rr] \arrow[urr, phantom, "\mathbin{/\!/}"] & & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

よって

$$PL \cong \mathrm{Lan}_K (PL)K \qquad (*)$$

$Q : \mathcal{L} \longrightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{V}]$ を $\mathcal{L} \xrightarrow{P} [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}] \xrightarrow{[K,1]} [\mathcal{C}, \mathcal{V}]$

で定める。このとき

$$QL = (PL)K.$$

よって (*) に代入して

$$PL \cong \mathrm{Lan}_K QL.$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}^{op} \arrow[dr, "PL"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "K"] \arrow[rr, "QL"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\Uparrow"] & & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \ni (H \star P)\, A &\cong H? \star (P?)A \\ &\cong H? \star (\mathrm{Lan}_K Q?)A \\ &\cong H? \star (\tilde{K}A- \star Q?-) \\ &\cong \tilde{K}A- \star (H? \star Q?-) \\ &= \tilde{K}A \star (H \star Q) \\ &\cong (\mathrm{Lan}_K (H \star Q))\, A \end{aligned}$$

($P : \mathcal{L} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$. 関手圏の colimit なので)

(∵ 3.21 式)

よって $\underset{[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]\ni}{H \star P} \cong \mathrm{Lan}_K (H \star Q)$ で 右は accessible.

□

- 則ち $\mathrm{Acc}[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ は $[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ の cocomplete full sub $\mathcal{V}$-category
($\mathcal{A}$ が large でも $\mathrm{Acc}[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}] \in \mathcal{V}\text{-Cat}$ だった).

Def. $\mathcal{F}$ が codomain が $\mathcal{V}$ domain が small な functor F の集合のとき,
$\mathcal{F}$ is a set of small indexing types と言う.

$\mathcal{F}$-colimit と呼ぶ

$\mathcal{C}$ が $\mathcal{F}$-cocomplete とは, $\forall F \in \mathcal{F}$, F で index された colimit が存在すること.

$S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ が $\mathcal{F}$-cocontinuous とは, $\forall \mathcal{F}$-colimit を preserve すること.

$\mathcal{F}\text{-Cocts}[\mathcal{C}, \mathcal{B}]$ を $[\mathcal{C}, \mathcal{B}]$ の $\mathcal{F}$-cocontinuous なものたちからなる full subcategory とする.

Theorem 5.35

$\forall \mathcal{F}$: small indexing types, $\forall \mathcal{A}$: $\mathcal{V}$-category,
$\bar{\mathcal{A}} :=$ $\mathcal{F}$-colimits たちによる $Y\mathcal{A}$ の $[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ における closure.
このとき, $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathrm{Acc}[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ となる. $K : \mathcal{A} \hookrightarrow \bar{\mathcal{A}}$ とする. (実質米田)

$\mathcal{A}$ が small で $\mathcal{F}$ が small set のときは $\bar{\mathcal{A}}$ は small である.
$\bar{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{F}$-cocomplete で, $\bar{\mathcal{A}}$ にある任意の $\mathcal{F}$-colimit は K-absolute になる.
the totality of these $\mathcal{F}$-colimits constitutes a density presentation of K.

$S : \bar{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{B}$ なる functor が $S \cong \mathrm{Lan}_K SK$
$$\begin{tikzcd} \bar{\mathcal{A}} \arrow[dr, "S"] & \\ \mathcal{A} \arrow[u, hook, "K"] \arrow[r, "SK"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$
となることと,

S が $\mathcal{F}$-continuous であることは同値。それゆえ、

$$\mathrm{Lan}_K : [\mathcal{A},\mathcal{B}]' \simeq \mathcal{F}\text{-Cocts}[\bar{\mathcal{A}},\mathcal{B}] \qquad (逆は [K,1])$$

where $[\mathcal{A},\mathcal{B}]'$ は $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ の $\mathrm{Lan}_K G$ が存在するような G たちから成る full subcategory.

もし $\mathcal{B}$ が $\mathcal{F}$-cocomplete なら $[\mathcal{A},\mathcal{B}]'$ は $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ そのものであり、

$$\mathrm{Lan}_K : [\mathcal{A},\mathcal{B}] \simeq \mathcal{F}\text{-Cocts}[\bar{\mathcal{A}},\mathcal{B}]$$

となり、$\bar{\mathcal{A}}$ は "the free $\mathcal{F}$-cocompletion of $\mathcal{A}$" であることを表す。

proof

$\bar{\mathcal{A}}$ の構成のとき、$(F_\gamma, G_\gamma)_{\gamma<\kappa}$ みたいな族をとらねばならないが、

$$\{(F,G) \mid {}^\forall F : \mathcal{L}_F \to \mathcal{V} \in \mathcal{F},\ {}^\forall G : \mathcal{L}_F \to [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]\}$$

↑ 一応 small でなくても良さそうな文脈

は small でない集合になりうる。しかし超限帰納法はクラスに対しても まわして良いので $\bar{\mathcal{A}}$ はとれる。

$\mathcal{A}_0 = Y\mathcal{A} \subset \mathrm{Acc}[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$ で、$\mathcal{A}_\gamma \subset \mathrm{Acc}[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$ なら さっきやった Prop 5.34 より、次に足す colimit を $F_\delta \star G_\delta$ とすると、

(仮定: F の domain が small, $G_\delta L$: accessible $({}^\forall L \in \mathcal{L})$ がちゃんと成り立って)

$F_\delta \star G_\delta$ も accessible. limit case は union とるだけなので OK.

超限帰納法より、$\bar{\mathcal{A}} \subset \mathrm{Acc}[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$.

$\mathcal{A}$: small, $\mathcal{F}$: small set のとき、

> Remark 3.5 P.45 Prop 3.36 の 2つ前の段落 最後4行
> $\mathcal{A}$: small, K_γ: small $({}^\forall\gamma)$, 異なる F_γ の数: small $\Rightarrow$ $\bar{\mathcal{A}}$: small

← G の数に依らないの なんでだっけ

だったので $\bar{\mathcal{A}}$ は small.

$\bar{\mathcal{A}}$ は作り方から $\mathcal{F}$-cocomplete.

$\bar{\mathcal{A}}$ にある $\mathcal{F}$-colimit は K-absolute.

(∵ $\tilde{K} : \bar{\mathcal{A}} \to [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$ は ただの inclusion なので当然。)

よって $K : \mathcal{A} \hookrightarrow \bar{\mathcal{A}}$ の density presentation として $\{(F,G) \mid F \in \mathcal{F}\}$ がとれる。

> Remark (Theorem 5.29) K が fully faithful & dense なら TFAE
>
> (i)
> $$\begin{tikzcd} \bar{\mathcal{A}} \arrow[dr, "S"] & \\ \mathcal{A} \arrow[u, hook, "K"] \arrow[r, "SK"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$
> が 左 Kan 拡張 になる
>
> (ii) ${}^\forall\Phi$: K の density presentation, $F_\gamma \star P_\gamma$ is preserved by S. (v) ∃ にした version

> $S : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ が $\mathcal{F}$-cocontinuous とは、$\mathcal{F}$-colimit を preserve すること。

より、S が $\mathcal{F}$-cocontinuous iff $S \cong \mathrm{Lan}_{SK} K$.

> Remark (Theorem 4.99)
>
> $^{\forall}K : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$: fully faithful.　$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]'$: Kに沿って左Kan拡張できるものたち
>
> $[\mathcal{C}, \mathcal{B}]^{\ell}$: 何らかの $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ があって $\mathrm{Lan}_K G$ と iso なものたち.
>
> $$\mathrm{Lan}_K : [\mathcal{A}, \mathcal{B}]' \simeq [\mathcal{C}, \mathcal{B}]^{\ell} : [K, 1]$$

今　$S \in [\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{B}]^{\ell}$　iff　$S \cong \mathrm{Lan}_{SK} K$　を示せば $[\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{B}]^{\ell} = \mathfrak{F}\text{-cocts}\,[\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{B}]$
が従う.

($\Leftarrow$ は明らか.　$\Rightarrow$ を示したい. ~~P.97 Recall の段落 (necessary isomorphic to SK) の部分から従う.~~
K: fully faithful

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{A}} \arrow[dr, "S"] & \\ \mathcal{A} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathcal{B} \end{tikzcd} \in [\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{B}]^{\ell} \quad S = \mathrm{Lan}_K G \quad \begin{tikzcd} \overline{\mathcal{A}} \arrow[dr, "S"] & \\ \mathcal{A} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right, "KS"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

~~エこれ何ででしたっけ??~~)

$\mathcal{B}$ が $\mathfrak{F}$-cocomplete のとき,　$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]'$ を示せば, このときに

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \simeq \mathfrak{F}\text{-cocts}\,[\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{B}]$$

となって, 最後の主張が示される.

示すのは,

$$\mathcal{B} : \mathfrak{F}\text{-cocomplete} \Rightarrow {}^{\forall}G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \quad \mathrm{Lan}_K G \text{ exists}.$$

だが, 次から従う.

> (Theorem 5.30)　$K : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$; fully faithful & dense.　Φ : Kの density presentation
>
> $\mathcal{B}$ が 全ての $\mathfrak{F}_{\gamma}$-indexed colimits をもつ ならば,
>
> $^{\forall}G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$,　$\mathrm{Lan}_K G$ exists.
>
> $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[dr, dotted, "\mathrm{Lan}_K G"] & \\ \mathcal{A} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "G"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

$\square$