Theorem 1. *$\mathcal{B}$: $\mathcal{V}$ 圏とする. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の small full subcategory で $Z : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ を inclusion であるとする. このとき, $\mathcal{B}$ が cocomplete, $\mathcal{B}_0$ が finitely complete, $\mathcal{B}_0$ の各対象は高々小集合の extremal-epimorphism quotients しか持たないなら, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の small colimit の閉包である.*

Proof. $\mathcal{C}$ を $\mathcal{B}$ における $\mathcal{A}$ の全ての small colimit をとることで得られる閉包とする. $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ を示せば良い.

任意の $\mathcal{B}_0$ の射 $f : C \to D$ で, $C \in \mathcal{C}$ なるものが与えられたとする. これに対し, 超限再帰的に列 $\{C_\alpha \to D\}$ (α は順序数) と $\{p_{\beta\alpha} : C_\beta \twoheadrightarrow C_\alpha\}_{\beta \leq \alpha}$ を以下の方法で構成する. $p_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{C_\alpha}$ とする.

- $C_0 = C$, $f_0 = f$ とする.
- $f_\alpha : C_\alpha \to D$ に対して, $f_{\alpha+1}$ を定めるために, まず f_α の kernel pair を $u_\alpha, v_\alpha : E_\alpha \to C_\alpha$ でとる. u_α, v_α の coequalizer を $p_{\alpha,\alpha+1} : C_\alpha \to C_{\alpha+1}$ とし, coequalizer の普遍性から一意に生える射を, $f_{\alpha+1} : C_{\alpha+1} \to D$ で定める.

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "v_\alpha"] & C_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ C_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, shift left, "u_\alpha"] \arrow[r, shift right, "v_\alpha"'] & C_\alpha \arrow[rr, "f_\alpha"] \arrow[dr, "p_{\alpha,\alpha+1}"'] & & D \\ & & C_{\alpha+1} \arrow[ur, dashed, "f_{\alpha+1}"'] & \end{tikzcd}$$

$p_{\beta,\alpha+1} : C_\beta \to C_{\alpha+1}$ を $p_{\alpha,\alpha+1} \circ p_{\beta\alpha}$ でとる.

$$\begin{tikzcd} C_\beta \arrow[r, two heads, "p_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, bend left, two heads, "p_{\beta,\alpha+1}"] \arrow[dr, "f_\beta"'] & C_\alpha \arrow[r, two heads, "p_{\alpha,\alpha+1}"] \arrow[d, "f_\alpha"] & C_{\alpha+1} \arrow[dl, "f_{\alpha+1}"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

- α が limit のときは, C_α は $\{p_{0\beta}\}_{\beta<\alpha}$ の pushout でとる. このときも, f_α を普遍性で一意に生える射でとる.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_0 \arrow[r, "p_{0\beta}"] \arrow[dr, "p_{0\alpha}"'] & \mathcal{C}_\beta \arrow[d, "p_{\beta\alpha}"] \arrow[ddr, bend left, "f_\beta"] & \\ & \mathcal{C}_\alpha \arrow[dr, dashed, "f_\alpha"'] & \\ & & D \end{tikzcd}$$

この $p_{\beta\alpha}$ も epic になることが diagram chase でわかる.

まず, このようにとった列に関して, C_α が全て $\mathcal{C}$ に含まれることを示す. $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{C}$ はわかっており, α が limit のときは $\mathcal{C}_\alpha$ は $\mathcal{C}$ の図式の colimit で定義されるので明らか. $C_{\alpha+1}$ のときは, $\mathcal{C}_{\alpha+1}$ は pushout で定義されはしたが, E_α が $\mathcal{C}$ に存在するとは限らないので $\mathcal{C}_{\alpha+1} \in \mathcal{C}$ は自明ではない.

$\mathcal{B}$ は cocomplete なので任意の関手 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ に対して $F \star Z$ が存在する. いま, $\mathcal{B}(F \star Z, B) \cong [\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](F, \tilde{Z}B)$ となるので, $- \star Z \dashv \tilde{Z}$ が満たされている. $R = \tilde{Z} - \star Z$ と定めておく. [1] 3.4 節の最後の 2 段落での議論により, $(\tilde{Z})_0$ はいま conservative なので, ϵ_B は任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して extremal epimorphism である.

これを使うと, 今 $\epsilon_{E_\alpha} : RE_\alpha \to E_\alpha$ は epic であるから,

$$RE_\alpha \underset{v_\alpha \circ \epsilon}{\overset{u_\alpha \circ \epsilon}{\rightrightarrows}} C_\alpha \xrightarrow[p_{\alpha,\alpha+1}]{} C_{\alpha+1}$$

も coequalizer である. この RE_α は colimit で定義されていたので $\mathcal{C}$ に含まれるため, この図式は $\mathcal{C}$ の図式であり, これにより $C_{\alpha+1}$ も $\mathcal{C}$ に含まれることがわかる. よって超限帰納法により C_α は全ての α に対して $\mathcal{C}$ に含まれることが証明できた.

次に, $\{q_\alpha := p_{0\alpha} : C \twoheadrightarrow C_\alpha\}$ が任意の α に関して extremal epic であることを示そう. そのために,

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, tail, "m"] & \\
C \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "q_\alpha"] & & C_\alpha
\end{tikzcd}$$

なる monic m が与えられたとする. この m が split epic であることを示せば良い. ここで, 超限再帰的に $\{t_\beta : C_\beta \to X\}_{\beta \le \alpha}$ を, $t_\beta \circ q_\beta = t$ を満たすように, 以下のように構成する.

- t_0 は t でとる.
- t_β に対して, いま, 下のようになっているものとする.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rrr, tail, bend left, "m"] & & & \\
C \arrow[ur, "t_0"] \arrow[r, two heads, "q_\beta"] & C_\beta \arrow[u, "t_\beta"] \arrow[rr, "p_{\beta,\beta+1}"] & & C_{\beta+1} \arrow[r, "p_{\beta+1,\alpha}"] & C_\alpha \\
E_\beta \arrow[ur, shift left, "u_\beta"] \arrow[ur, shift right, "v_\beta"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

いま $m t_\beta q_\beta = m t_0 = q_\alpha = p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta+1} q_\beta$ で q_β は epi なので $m t_\beta = p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta+1}$ (すなわち図式の右上が可換). さらに, $m t_\beta u_\beta = p_{\beta+1,\alpha} p_{\beta,\beta} u_\beta =$

$p_{\beta+1,\alpha}\,p_{\beta,\beta}\,v_\beta = m\,t_\beta\,v_\beta$. いま m が monic なので $t_\beta\,u_\beta = t_\beta\,v_\beta$ となる. よって $p_{\beta,\beta+1}$ は coequalizer で定義したから, この普遍性から取れる $C_{\beta+1} \to X$ があり, これを $t_{\beta+1}$ とする.

- β が limit のとき, $\gamma < \beta$ なる任意の γ に対して $t = t_\gamma\,q_\gamma$ となっているのだから, pushout の普遍性から条件を満たす t_β が一意に取れる.

このようにして t_α が取れるが, C_α を coequalizer で作っていても pushout で作っていても, どちらにせよ普遍性から $mt_\alpha = \mathrm{id}_{C_\alpha}$ を満たす. よって m は split epic.

次に, この列が terminate する条件を考えておくと, これは f_α の kernel pair が一致するとき. すなわち f_α が monic になるときである.

$\{q_\alpha : C \twoheadrightarrow C_\alpha\}$ は C の extremal epimorphism の列であるから, C は高々小集合の extremal-epimorphism quotients しか持たないという条件から, これはある λ で停止する. いま, $f : C \to D$ として $\epsilon_D : RD \to D$ をとっておくと, これは extremal epimorphism だから, f_λ : monic は isomorphism になる. すなわち $D \cong C_\lambda \in \mathcal{C}$ となってしまうため, D も $\mathcal{C}$ に含まれる. この D は任意にとったから, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

□

参考文献

[1] Kelly, Gregory Maxwell, and Max Kelly. Basic concepts of enriched category theory. Vol. 64. CUP Archive, 1982.