

VII Topoi and Logic

1. ZF のモデルを topos で作る。

その中で 連続体仮説が成立しない
モデルを作ったとする。

1. The Topos of Sets

無限公理

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x \in A (x \cup \{x\} \in A))$$

$\Leftrightarrow \mathbb{N}$ is a set (in ZF = 無限公理)

$\mathbb{N} \notin \text{FinSet}$ (FinSet は topos) なので

無限公理は 任意の topos で満たされてい
るわけではない。 □

\mathbb{N} は natural number object (n.n.o) で
一般化する。

def n.n.o $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$ は n.n.o とは,
任意の $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{t} X$ に えり,

唯一 $N \xrightarrow{h} X$ がある。

$$1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N \\ || \quad \downarrow h \quad \downarrow h \\ 1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{t} X$$

claim E, \mathcal{F} が topos で

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{g^*} \\ \perp \\ \xleftarrow{g_*} \end{array} \mathcal{F}$$

なら、

g^* が terminal object をもと、 E は n.n.o である、
 $g^*(1) \xrightarrow{g^*(o)} g^*(N) \xrightarrow{g^*(s)} g^*(N)$
 は \mathcal{F} の n.n.o である。

proof.

$$1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N \\ ||? \qquad \qquad \qquad \downarrow h \qquad \qquad \qquad \downarrow h \qquad \text{が可換} \\ g^*(1) \xrightarrow{g^*(o)} g^*N \xrightarrow{g^{*s}} g^*N \\ \qquad \qquad \qquad \downarrow h \qquad \qquad \qquad \downarrow h \qquad \text{が可換}$$

$$\Leftrightarrow g^*(1) \xrightarrow{g^*(o)} g^*N \xrightarrow{g^{*s}} g^*N \\ ||? \qquad \qquad \qquad \downarrow h \qquad \qquad \qquad \downarrow h \qquad \text{が可換} \\ 1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{t} X \qquad \qquad \qquad \downarrow f \qquad \qquad \qquad \downarrow f$$

Sets は h.n.o が ある が、

\mathbb{C} が 小さな 圖 が 3,

$$\text{Sets} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \\ \xleftarrow[\Gamma]{+} \end{array} \text{Sets}^{\mathbb{C}^{\text{op}}} \quad \Delta + \Gamma$$

$(\Delta$ は constant functor は 3 が、
 Γ は limit が 3 が、)

$\Delta(1)$ は $\text{Sets}^{\mathbb{C}^{\text{op}}}$ の terminal. す. す a claim

2), $\text{Sets}^{\mathbb{C}^{\text{op}}}$ は h.n.o $\Delta(N)$ が ある。

$$\text{Sh}_j \mathcal{E} \begin{array}{c} \xleftarrow{\perp} \\ \xrightarrow[i]{\perp} \end{array} \mathcal{E} \quad \left(j \text{ は Lawvere-Tierney topology} \right)$$

3) $\text{Sh}_j \mathcal{E}$ は h.n.o が ある。

Grothendieck topology は $\text{Sets}^{\mathbb{C}^{\text{op}}}$ の

Lawvere-Tierney topology など

Grothendieck topology $\text{Sh}(\mathbb{C}, \mathbb{J})$ は

h.n.o が ある。

$\text{Sh}(\mathbb{C}, \mathbb{J})$ は h.n.o は $\Omega \Delta(N)$ が ある,

$\Delta: \text{Sets} \rightarrow \text{Sets}^{\mathbb{C}^{\text{op}}}$, $\Omega: \text{Sets}^{\mathbb{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Sh}(\mathbb{C}, \mathbb{J})$ は

(共に左随伴なので) 任意の coproduct を 保つ が、

$$N = \coprod_{n \in \mathbb{N}} 1 \text{ が}, \quad \Omega \Delta(N) \cong \coprod_{n \in \mathbb{N}} 1.$$

• Boolean か否か.

def topos \mathcal{E} の Boolean は, internal Heyting algebra Ω

すなはち internal Boolean algebra \mathbb{T}' ある.

c.f. IV.8

$$\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

$$\vee : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

etc.

Proposition 1 次は同値

(i) \mathcal{E} は Boolean

(ii) $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ は $\neg\neg = \text{id}$ を $\forall T$.

(iii) 任意の object E に対し, $\text{Sub}(E)$ は

(external) Boolean algebra

(iv) 任意の \mathcal{E} の subobject $S \rightarrowtail E$ に対し,

$$\neg S \vee S = E.$$

(v)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 1+1 \xleftarrow{\quad} \\ \text{true} \searrow & \downarrow \approx & \swarrow \text{false} \\ & \Omega & \end{array}$$

\wedge の構成.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ l \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\pi} & \Omega \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ r \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\pi'} & \Omega \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xleftarrow{\quad} & \Omega \\ l \downarrow & \downarrow m & \downarrow r \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{x_m} & \Omega \end{array}$$

\vee の構成.

$$\begin{array}{ccc} \Omega + \Omega & \xrightarrow{\quad} & \Omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \Omega & \xleftarrow{\quad} & \Omega \\ l \downarrow & \downarrow m & \downarrow r \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{x_m} & \Omega \end{array}$$

\Rightarrow の構成.

$$r, l \in \mathcal{E}/\Omega \cong \text{an exponential}$$

$$\begin{array}{ccc} r^l & \downarrow & \\ \Omega & \xrightarrow{x_{rl}} & \Omega \end{array}$$

false

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ 1 & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \neg & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \text{false} \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ \Omega & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

proof. (i) \Leftrightarrow (ii) は明らか.

(ii) \Leftrightarrow (iii) $\text{Hom}(X, \Omega)$ は,

$$\text{Hom}(X, \Omega) \times \text{Hom}(X, \Omega)$$

$$\text{Hom}(X, \Omega \times \Omega) \xrightarrow{\wedge^*} \text{Hom}(X, \Omega)$$

つまり形で Heyting algebra の構造を internal がうまいこと.

internal が Boolean $\Rightarrow \text{Hom}(X, \Omega)$ もう.

$X = \Omega$ とおいた.

$$\text{Hom}(\Omega, \Omega) \xrightarrow{\neg\neg^*} \text{Hom}(\Omega, \Omega)$$

$$\begin{matrix} \Downarrow \\ \text{id} \end{matrix} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{matrix} \Downarrow \\ \neg\neg \end{matrix}$$

を考えると, $\text{Hom}(X, \Omega)$ が Boolean なら

$$\neg\neg = \text{id}$$

$$\left(\text{Hom}(X, \Omega) \cong \text{Sub}(X) \right)$$

(iv) は $\text{Sub}(E)$ が Boolean である主張.

(iv) \Rightarrow (v)

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ 1 & \xrightarrow{\text{false}} & \Omega \end{array}$$

は 1, 0 が pullback

pullback が 0 \Rightarrow join \cong coproduct (c.f. IV.7.6)

$$\begin{array}{ccc} 1+1 & \xleftarrow{z_1} & 1 \\ \uparrow z_2 & \searrow & \downarrow \text{true} \\ 1 & \xrightarrow{\text{false}} & \Omega \end{array}$$

Boolean がうまい

true \vee false = T が従う.

すなはち $1+1 \cong \Omega$.

(v) \Rightarrow (iv)

$$1+1 \xrightarrow[\text{(true, false)}]{\sim} \Omega \quad \text{が可換}$$

$$1+1 \xrightarrow[\text{(true, false)}]{\sim} \Omega \quad \therefore \text{true} = \neg \text{false}$$

$$\text{true} \cdot \neg \text{true} \cong \text{tw} \cdot \text{tw} = \text{id}$$

Lawvere-Tierney topology は言語の良子.

$\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F) \times \text{Sub}_{\mathcal{E}_j}(F)$ は Heyting algebra で比較.

Rem

$$\begin{array}{ccc} \bar{A} & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow F & \nearrow A & \downarrow \text{true} \\ E = E & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

Rem

$F \in \mathcal{E}$ の sheaf は.

$$\begin{array}{ccc} {}^*A & \xrightarrow{\quad} & F \\ \downarrow \text{dense} & \nearrow !\exists & \\ A & & \end{array}$$

Rem

$\text{Sh}_{\mathcal{E}}$ は \mathcal{E} の full subcategory である

sheaf たるものは、(\mathcal{E} , もの)

Rem Lemma V.2.4

E の sheaf $\vdash A \rightarrowtail E$ かつ S ,

A が closed $\Leftrightarrow A$ は sheaf.

5.2

$$\text{Sub}_{\mathcal{E}_j}(F) = \text{Cl} \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F) \hookrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F).$$

Lemma 2. $\text{Sub}_{\mathcal{E}_j}(F)$

$$(i) 1_j = 1$$

$$S \wedge_j T = S \wedge T$$

$$(ii) 0_j = \bar{0}$$

$$S \vee_j T = \overline{S \vee T}$$

$$(iii) S \Rightarrow_j T = (S \Rightarrow T)$$

$$(iv) \neg_j S = (S \Rightarrow \bar{0})$$

proof.

closed と限られた演算の頭に \neg を加せよ作業.

Theorem 3

$\neg\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ は Lawvere-Tierney topology.

proof. 定義をたぐめ.

$$(a) j \circ \text{true} = \text{true}$$

明か.

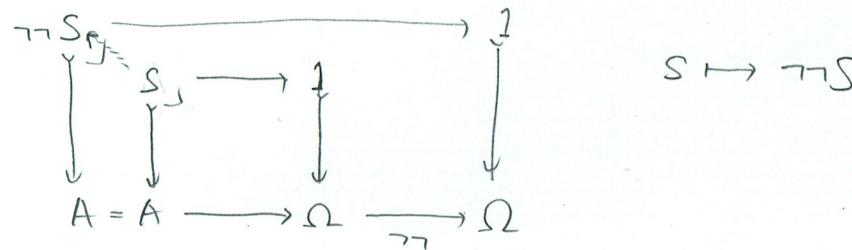
$$(b) j \circ j = j$$

$$\neg\neg\neg\neg = \neg\neg$$

$$(c) j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$$

$$\neg\neg(S \wedge T) = \neg\neg S \wedge \neg\neg T$$

closure operator は.



(\neg\neg は k^{-1} と可換なので自然)

$\neg\neg$ は Lawvere-Tierney topology と定め.

いま

$$-\bar{O}j = \bar{S}\bar{O} = \neg\neg O = O$$

$$\neg_j \neg_j S = ((S \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow \bar{O})$$

$$= ((S \Rightarrow O) \Rightarrow O)$$

$$= \neg\neg S$$

$$S = \neg\neg A \Leftrightarrow A \text{ が } \neg\neg \text{ で},$$

$$\neg_j \neg_j S = \neg\neg\neg\neg A = \neg\neg A = S.$$

よって $E_{\neg\neg}$ は Boolean.

$E_{\neg\neg}$ は Boolean を示したい.

Lemma 4.

$A \rightarrowtail E \quad \exists \in \text{Sets}^{C^{\text{op}}}$

$C \in C^{\text{op}}$

$$(\neg\neg A)(c) = \{x \mid x \in E(c) \text{ s.t. } \forall f: B \rightarrow c, \exists g: D \rightarrow B \text{ s.t. } x \cdot f \cdot g \in A(D)\}$$

proof
計算する。

Corollary 5

$\text{Sets}^{C^{\text{op}}}$ は

dense topology & double negation topology

proof
計算すると一致する。

Sets では 1 の subobject は $\emptyset \subset 1$ だけ。

$\text{Hom}(1, \Omega) \cong \text{Sub}_E(1)$ なので, Ω には global section の "2つしかない", これを

only two global "truth-value" と呼ぶ。

↓

これは Boolean であることは同じでない。

two-valued topos & Boolean topos の定義。

Proposition 6

E : Boolean topos.

$\mathcal{U}: \text{Sub}_E(1)$ a maximal filter
s.t.
 E/\mathcal{U} is two-valued.

proof

計算のついで。

選択公理は $\neg\neg$ 1

$$(\forall_i, X_i \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset.$$

$p: X \rightarrow I$ section $s: I \rightarrow X$ 使得す

$$ps = 1$$

(AC) \rightarrow internal section が存在する。
つまり形が存在する。

なので。

(IAC) internal axiom of choice

$\forall E \in \mathcal{E}, (-)^E: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ preserves epis.

Ihm

(IAC) を満たす topos は Boolean,

def \mathcal{E} が well-pointed であるとき、

$$A \xrightarrow{\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}} B \quad \text{で } f \neq g \text{ のとき},$$

ある $1 \xrightarrow{x} A$ が存在して $fx \neq gx$ 。
である。

Corollary 9

P : poset. $\mathrm{Sh}(P, \tau\tau)$ は axiom of choice
を満たす。

wellpointed topos は $\frac{0 \neq 1 \text{ 且つ } \exists}{\text{non degenerate といふ}}$.

Prop 7

\mathcal{E} が well-pointed topos のとき、
 \mathcal{E} は two-valued かつ Boolean.

Prop 8

$$A \xrightarrow{\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}} B \quad \text{で } f \neq g \text{ のとき},$$

ある 1 つの subobject $G \subset A$

$$G \xrightarrow{x} A$$

があり、 $fx \neq gx$ かつたゞ、

$\forall E \in \mathcal{E} = \mathrm{Set} \cap \mathrm{Sub}(F)$ が

complete Boolean algebra のときは、

\mathcal{E} は axiom of choice を満たす。