SGL 5.

V Basic Constructions of Topos

いくつか Topos から別の Topos を構成する方法をこの章でみる. (E : topos とする)

1. E に Lawvere-Tierney topology j なるものを入れる.

   Lawvere-Tierney topology は, point set topology と Grothandieck topology を含んだ概念.
   実際 C の presheaf の圏での Lawvere-Tierney topology は C の Grothandieck topology と対応する.

   Lawvere-Tierney topology からなる Sheaf の圏 $Sh_j \mathcal{E}$ はtopos.
   associated sheaf functor を今回も作るが, 定義方法はこれまでと異なる.

2. E の comonad G : E -> E が finite product preserving なら G の coalgebra の圏は todos

3. BG, Set^(C^op) の一般化ができる. つまり, Set を E で置き換える. つまり

   E の group object G に対し,
   　　G が作用する E の object たちからなる圏
   が topos

   C が G の categorical object であるとき,
   　　C のpresheaf の structure を持つ E のobject たちからなる圏
   が topos

4. E の filtered diagram の colimit を object にして, logical morphism を morphism にする圏も topos.

お気持ち　Lawvere-Tierney Topology

空間 X のsheaf を考えるには, “被覆” を考えることが重要.

C = { U_i } を開集合の族とする. j(C) で, ~~なんらかの~~ U_i たちによって に cover されている開集合全体の集合を表す.

このとき　$j(j(C)) = j(C)$ ①　と　$j(C1 \cap C2) \subseteq j(C1) \cap j(C2)$　が成り立つ.

C1, C2 が sieve だったら, (つまり ~~$V \subseteq U \in C1$ なら $V \in C1$~~ だったら)

$$j(C1 \cap C2) = j(C1) \cap j(C2)$$ ②

まで言える.

$\forall U_i \in C, \quad U_i \subseteq U$

さらに C が なんらかの開集合 U の seive S と一致しているならば,　j(C)　も seiveで,
$C = S \in \Omega(U)$ となる.
ただし　$\Omega(U)$ は presheaf の subject classifier で

$$\Omega(U) = \{ S \mid S \text{ は } U \text{ のseive} \}.$$

したがって　j　は　~~$\Omega \to \Omega$~~ なる map だと思える.
(Sieve の集合から sieve の集合への関数なので)

$\mathcal{E}$: topos　Ω: subobject-classifier　とする.

Definition

Lawvere-Tierney topology on $\mathcal{E}$ は
$j : \Omega \to \Omega$ なるもので次の3つをみたすもの

(a) $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$　(b) $j \circ j = j$　(c) $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{true}"] \arrow[dr, "\mathrm{true}"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ & \Omega \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ & \Omega \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\dashv$

Ω を真理値の集合だと思うと. $j : \Omega \to \Omega$ は その modal operator と見れる. また, j は Ω への射 だから,

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

なる J を使って 上の定義はかきかえられる.

LT-topology を $\mathcal{E} = \mathrm{Sets}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ で考えて、
point-set topology の概念を言むか。

Remark

$$\Omega(U) = \{ S \mid S \text{ は } U \text{ の sieve} \}$$

$$S : \text{sieve} \Leftrightarrow [W \subseteq V \in S \Rightarrow W \in S].$$

$V \subseteq U$ に対し、principal sieve $\hat{V}$ が、

$$\hat{V} = \{ W \mid W \overset{\text{open}}{\subseteq} V \}$$

で定まる。

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{true}_U : & 1 & \longrightarrow & \Omega(U) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & 0 & \longmapsto & \hat{U} \end{array}$$

開集合の族 S が開集合 V を cover するとは、

$$\bigcup S \supseteq V$$ であること

J を定義する. $J \in Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$

$$J(U) = \{ S \mid S \text{ は } U \text{ の sieve}, \ S \text{ covers } U \}$$

J はちゃんと functor で さらに $\Omega(U)$ の subfunctor.

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \arrow[d, "true"] \\
\Omega \arrow[r, "j"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$j_U : \Omega(U) \to \Omega(U)$$

$$j_U(S) = \{ W \mid W \subseteq^{open} U,$$

Sの各開集合をWに制限したものが、Wをcoverする $\}$

open

$= V = \bigcup S$ としたときの $\hat{V}$

計算すると LT-topology の3条件をみたす.

LT-topology における Sheaf を考える.

$$A \longmapsto \bar{A} \quad : \quad \mathrm{Sub}(E) \longrightarrow \mathrm{Sub}\,E$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(E,\Omega) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(1,j)"'] & \mathrm{Sub}(E) \arrow[d] & \ni A \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Hom}(E,\Omega) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Sub}(E) & \ni \bar{A}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{A} \arrow[rrr] \arrow[d, tail] & & & 1 \arrow[d, tail, "t"] \\
& A \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "t"] & \\
E \arrow[r, equal] & E \arrow[r] & \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, tail] & B \arrow[d, tail] \\
E \arrow[r, "f"] & F
\end{tikzcd}$$

に対して

$$f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{j} \Omega$$

Prop 1. $\mathcal{E}$: topos $\quad j : \Omega \to \Omega$.

$$A \mapsto \bar{A} \ : \mathrm{Sub}(E) \to \mathrm{Sub}(E)$$

が、 $f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ をみたす.

このとき

j が LT-topology

$\Longleftrightarrow \quad A \subset \bar{A}, \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\left(
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "t"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}
\right)$$

$\bar{A}$ は closed set と

何ら関係なし.

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ in general topology

Proof. $(\Rightarrow)$

$$
\begin{tikzcd}
\bar{A} \arrow[rrr] \arrow[dd, tail] & & & 1 \arrow[dd, "t"] \\
 & A \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[ur] \arrow[d, "T"] & \\
F = E & E \arrow[r] & \Omega \arrow[r, "j"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$j \circ t = t$

$\underline{A \subset \bar{A}}.$

$$
\begin{tikzcd}
\bar{\bar{A}} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \\
 & \bar{A} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \\
 & & A \arrow[r] \arrow[d] & \\
 & & & \Omega \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "j"] & \Omega \arrow[r, "j"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$\bar{A} = \bar{\bar{A}}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ も同様。

(⇐)

$$
\begin{tikzcd}
\bar{1} \arrow[rrr] \arrow[dd] & & & 1 \arrow[dd, "t"] \\
& 1 \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] \arrow[ul, red] & 1 \arrow[d, "t"] & \\
1 \arrow[r, phantom, "="] & 1 \arrow[r] & \Omega \arrow[r, "j"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$A \subset \bar{A}$ より $1 \subset \bar{1}$

$j(t) = t$

Theorem 2.

Grothendieck topology J on a small $\mathbb{C}$ に対し,
Lawvere Tierney topology on $\mathbf{Sets}^{\mathbb{C}^{op}}$ が作れる.

proof

Remark Grothendieck

各 $C \in \mathbb{C}$ に対し, C a sieve の集合 $J(C)$ を定めたもの

$$
\begin{array}{rccc}
j_C : & \Omega(C) & \longrightarrow & \Omega(C) \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& S & \longmapsto & \{ g \mid S \text{ covers } g : D \to C \} \\
& & & \parallel \\
& & & \{ g \mid g^*(S) \in J(\mathrm{dom}\, g) \}
\end{array}
$$

jc は LT-topology (記憶すること)