Rem.

regular logic $(=, \wedge, \top, \exists)$

coherent logic $(=, \wedge, \top, \exists, \vee, \bot)$

predicate logic $(=, \wedge, \top, \exists, \vee, \bot, \forall, \supset)$

Rem

① Eq-fibration
- fibered preorder で $\top, \wedge$ 有
- $\mathbb{B}$ に finite product
- $\mathrm{Eq} \dashv \delta^*$ Beck-Chevalley + Frobenius

② regular fibration
- $\coprod \dashv \pi^*$ Beck-Chevalley + Frobenius

③ coherent fibration
- $\bot$, $\vee$ 有で 分配束.

④ first order fibration
- $\supset$ 有
- $\pi^* \dashv \prod$ Beck-Chevalley.

4.2.5 Order theoric examples

Def Complete Heyting algebra

Complete Heyting algebra とは, poset で

finite meet $\wedge$ と infinite join $\bigvee$ をもち, $(\bigvee_i a_i) \wedge b = \bigvee_i (a_i \wedge b)$

なるもの. frame とも言う.

example $\langle \mathcal{O}(X), \subseteq \rangle$.

Lemma A : complete Heyting algebra のとき, $\begin{array}{c} \mathrm{Fam}(A) \\ \downarrow \\ \mathrm{Sets} \end{array}$ は coherent fibration.

proof. Fam(A) は次のような圏だった.

- object $(I, (a_i)_{i \in I})$ where I は集合, $a_i \in A$ $(\forall i \in I)$.
- morphism $(a_i)_{i \in I} \longrightarrow (b_j)_{j \in J}$ は 写像 $u : I \longrightarrow J$ であって

$$a_i \leq b_{u(i)} \quad (\forall i \in I) \text{ なるもの.}$$

$\begin{array}{c} \mathrm{Fam}(A) \\ \downarrow \\ \mathrm{Sets} \end{array}$ の fibered category は, $(a_i)_{i \in I} \longrightarrow (b_i)_{i \in I}$ なる射があることと

$\forall i \in I$, $a_i \leq b_i$ が同値になる poset.

$$(a_i) \wedge (b_i) = (a_i \wedge b_i)$$
$$(a_i) \vee (b_i) = (a_i \vee b_i)$$

$\bot$, $\top$ は $(\bot)_{i\in I}$, $(\top)_{i\in I}$ で定めれば、

A^I は Aの分配束の構造をうけついで分配束になる.

また、reindexing functor は

$$(b_{u(i)})_{i\in I} \xrightarrow{\bar{u}} (b_j)_{j\in J}$$

で定まる.

$$I \xrightarrow[u]{} J$$

明らかに分配束の構造を reindexing functor は保つ.

最後に $Eq \dashv \delta^*$, $\coprod \dashv \pi^*$ を作る.

$$\frac{Eq_{I,J}\,(a_{i,j})_{i,j\in I\times J} \leqq (b_{i,j,j'})_{(i,j,j')\in I\times J\times J'}}{(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \leqq \delta^*(b_{i,j,j'})}$$

$$\delta^*(b_{i,j,j'}) = (b_{i,j,j})_{(i,j)\in I,J}$$

よって $Eq_{I,J}(a_{i,j}) = (c_{i,j,j'})_{i,j,j'\in I\times J\times J}$ とすると、

$$c_{i,j,j'} = \begin{cases} \bot & (j \neq j' \text{ のとき}) \\ a_{i,j} & (j = j' \text{ のとき}) \end{cases}$$ とすればいい?

$$\frac{\coprod_{I,J}(a_{i,j}) \leq (b_i)}{(a_{ij})_{I} \leq \pi^*(b_i) = (b_i)_{i,j}}$$

は，下が成り立つことは，

$$\forall i,\ \forall j,\quad a_{ij} \leq b_i$$

で，次と同値．

$$\forall i,\ \bigvee_j a_{ij} \leq b_i$$

よって $\coprod_{I,J}(a_{i,j}) = \left(\bigvee_j a_{ij}\right)_{i\in I}$ とすればいい．

Eq と $\amalg$ の Beck-Chevalley は，量化と reindexing の可換性で，簡単．

Eq の Frobenius は，

$$\mathrm{Eq}(\delta^*(x_{i,j,j'}) \wedge (y_{ij})) = \begin{cases} \perp & (j\neq j') \\ x_{ijj} \wedge y_{ij} & (j=j') \end{cases}$$

$$(x_{ijj'}) \wedge \mathrm{Eq}(y_{ij}) = \begin{cases} x_{ijj'} \wedge \perp = \perp & (j\neq j') \\ x_{ijj'} \wedge y_{ij} & (j=j') \end{cases}$$

$\coprod$ の Beck-Chevalley は,

$$\coprod (\pi^* (x_i) \wedge (y_{ij}))$$

$$= \coprod (x_i \wedge y_{ij}) = \bigvee_j (x_i \wedge y_{ij})$$

$$(x_i) \wedge \coprod (y_{ij}) = x_i \wedge \bigvee_j y_{ij}$$

Date

Theorem

$$\begin{array}{c}\mathrm{Fam}(A)\\ \downarrow \\ \mathrm{Sets}\end{array}$$ はさらに強く, first order fibration である.

proof. まず $\supset$ を作る.

$$\begin{array}{c}
\forall i \quad x_i \wedge y_i \le z_i \\
\hline\hline
\forall i,\ \text{ある } a \in A \text{ があって, } \ a \wedge y_i \le z_i \ \text{ かつ } \ x_i \le a \\
\hline\hline
\forall i \quad x_i \le \bigvee \{ a \in A \mid a \wedge y_i \le z_i \}
\end{array}$$

reindexing で保たれることは明らか. 次に $\prod_{(I,J)}$ を作る.

$$\begin{array}{c}
\prod (x_i)_{i \in I} \le (y_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \\
\hline\hline
\forall i, \forall j \quad x_i \le y_{i,j} \\
\hline\hline
\forall i,\ \exists a \in A \ \text{s.t.} \ (\forall j,\ a \le y_{i,j} \ \text{and} \ x_i \le a) \\
\hline\hline
\forall i, \quad x_i \le \bigvee \{ a \in A \mid \forall j,\ a \le y_{i,j} \}
\end{array}$$

Beck-Chevalley は reindexing (i に関するもの) と $\prod$ の可換性 (簡単).

Fact

complete Heyting algebra での意味論は一階述語論理に対して健全かつ完全.

$\langle \mathcal{O}(X), \subseteq \rangle$ でのモデルを考えると、逐一 Int をとることになる.

ex.

$$(U_i)_{i\in I} \supset (V_i)_{i\in I} = (\mathrm{Int}((X - U_i) \cup V_i))_{i\in I}$$

4.2.6 Realizability example

証明は プログラムだ　　　プログラム = partial recursive function

直観主義論理を証明の構成で捉える

定理
Heyting arithmetic (intuitionistic number theory) で証明可能なら、realizable.

Def UFam $(P\mathbb{N})$ は次のような圏

- objects. (I, X) where I : set で、$X \in (P\mathbb{N})^I$
  $(X_i \subseteq \mathbb{N}$ for each $i \in I)$

- fibered preorder が、

$$X \leq Y \overset{\text{def}}{\iff} \left(\bigcap_{i \in I} X(i) \supset Y(i) \right) \text{ が空でない}$$

$\iff$ ある code e があって、任意の $i \in I$ に対し、

$n \in X(i)$ ならば $e \cdot n \in Y(i)$

- morphism は $(I, X) \xrightarrow{u} (J, Y)$ は $I \xrightarrow{u} Y$ であって、
  $X \leq (Y_{u(i)})_{i \in I}$ なるもの。

$\begin{matrix} \mathrm{UFam}(P\mathbb{N}) \\ \downarrow \\ \mathrm{Sets} \end{matrix}$ は fibration. (reindexing は, $(Y_j)_{j\in J} \longmapsto (Y_{u(i)})_{i\in I}$)

<u>Prop</u> $\begin{matrix} \mathrm{UFam}(P\mathbb{N}) \\ \downarrow \\ \mathrm{Sets} \end{matrix}$ の fibered preorder は Heyting prealgebra

proof.

$$(X\wedge Y)(i) = \{ \overbrace{\langle n, m\rangle}^{\text{pairing}} \mid n \in X(i) \text{ and } m \in Y(i) \}$$

$X\wedge Y \leq X$ の code は pairing function の第1射影の code

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, dashed] & \\ X & X\wedge Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

coproduct も同様

exponential は,

$$\begin{tikzcd} & \langle e_i, n_i\rangle \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & e_i(n_i) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\ \langle f(t_i, -), x_i\rangle & X\supset Y \wedge X \arrow[r] & Y \\ \langle t_i\ x_i\rangle \arrow[u] & T \wedge X \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

で OK.

分配的? ⇒ OK.　　reindexing で保たれる? ⇒ OK.

coproduct

$X \in \mathbb{E}_{I \times J}$
$Y \in \mathbb{E}_{I}$

$$\frac{\dfrac{X \leq \pi^* Y \quad \text{over } I \times J}{\exists e \text{ s.t. } \forall i, \forall j, \quad \forall n \in X_{ij}, \quad e \cdot n \in Y_i}}{\exists e. \text{ s.t. } \forall i., \quad \forall n \in \bigcup_{j \in J} X_{ij}, \quad e \cdot n \in Y_i}$$

$$\coprod_{(I,J)} X = \left(\bigcup_{j \in J} X_{ij}\right)_{i \in I} \leq Y \quad \text{over } I$$

Beck-Chevalley は $\bigcup_{j \in J}$ と $u : I \to K$ での reindexing の可換性.

Frobenius は,

$$\coprod_{(I,J)} (\pi^*_{I,J}(X) \wedge Y)(i) = \bigcup_{j \in J} (X_i \wedge Y_{i,j})$$

$$X \wedge \coprod_{(I,J)} Y(i) = X_i \wedge \bigcup_{j \in J} Y_{ij}$$

product

$$
\begin{array}{c}
\pi^* X \le Y \quad \text{over } I \times J \\
\hline\hline
\exists e \text{ s.t. } \forall i, \forall j, \forall n \in X_i, \; e\cdot n \in Y_{ij} \\
\hline\hline
\exists e \text{ s.t. } \forall i \; \forall n \in X_i, \; e\cdot n \in \bigcap_{j\in J} Y_{ij} \\
\hline\hline
X \le \left(\bigcap_{j\in J} Y_{ij} \right)_{i \in I} = \prod Y \quad \text{over } I.
\end{array}
$$

$X \in \mathbb{E}_I$

$Y \in \mathbb{E}_{I\times J}$

但し $J = \emptyset$ なら $\mathbb{N}$ と思う.

Eq

$$
\begin{array}{l}
X \le \delta^* Y \quad \text{over } I \times J \\
\hline\hline
\exists e. \text{ s.t. } \forall i, \forall j, \forall n \in X_{ij}, \; e\cdot n \in Y_{ijj} \\
\hline\hline
\exists e \text{ s.t. } \forall i, \forall j, \forall j' \begin{cases} \forall n \in X_{ij} & e\cdot n \in Y_{ijj'} \; (j = j') \\ \forall n \in \emptyset & e\cdot n \in Y_{ijj'} \; (j \ne j') \end{cases} \\
\hline\hline
Eq\, X \le Y \quad \text{over } I \times J \times J
\end{array}
$$

$X \in \mathbb{E}_{I\times J}$

$Y \in \mathbb{E}_{I\times J\times J}$

$$
Eq(X)(ijj') = \begin{cases} X_{ij} & (j = j') \\ \emptyset & (j \ne j') \end{cases}
$$

Frobenius

$$
Eq(\delta^* Y \wedge X)(ijj') \qquad Y \wedge Eq(X)(ijj')
$$

$$
\begin{cases} \emptyset \\ Y_{ijj} \wedge X_{ij} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_{ijj'} \wedge \emptyset = \emptyset. \\ Y_{ijj} \wedge X_{ij} \end{cases}
$$