Simple type theory (STT)

Simply typed : 型変数のない型理論

Polymorphically typed : 型変数のある 〃

通常の category での semantics と fibred category での semantics の両方をやる.

contexts : 有限列 of 変数宣言.

calculus types and terms から classifying category を定義し, model を, classifying category からの functor で構造をたもつものとする.

→ exponents

$(1, \times)$ finite products

$(0, +)$ finite coproducts.

Date

$(\to, 1, \times)$ CCC

$(\to, 1, \times, 0, +)$ CCC with finite coproducts

↕ $(\supset, \top, \wedge, \bot, \vee)$

$(\to)$ 難しい

(fibred category ならできる)

fibred category の semantics では contexts は base category の objects。
context の上の fiber は その context で何が起きるか

STT では simple fibration を考えれば十分
(variable が他の variable に影響されない)

$\to$ は π^* (weakening functor) の右随伴 (2.4 でやる)
(1.9 で simple product とよばれたもの)

$\times$ は π^* の左随伴 (simple coproduct)

これは $\prod$ が $\to$ に, $\sum$ が $\times$ に解釈される
よくある形になっている

Church の型なし λ計算は,
simply typed λ-calculus with $\Omega = \Omega \to \Omega$
なる唯1つの型.

2.6 では simple fibration は データ型
with (simple) parameters の良い記述を与えることを紹介する.

2.1 The basic calculus of types and terms

しばらく圏は登場せず，型理論をやる．(?)

$\Sigma = (T, \mathcal{F})$ を many-typed signature とする．

$(T = |\Sigma|, \ \mathcal{F} : T^* \times T \longrightarrow Sets)$

型に対して，その型をもつ function symbols の集合を返す．

．可算個の変項 $Var = \{v_1, v_2, \cdots\}$ を用意する．

(唯の文字で，変数に対して型は決まっていない)

<u>Def</u> (context)

context Γ とは，下のような変数宣言の有限列．

$$\Gamma = (v_1 : \sigma_1, \ \ldots, \ v_n : \sigma_n)$$

$\Gamma = (v_1 : \sigma_1, \ \ldots, \ v_n : \sigma_n)$, $\Delta = (v_1 : \tau_1, \ \ldots, \ v_n : \tau_m)$ に対し，

$$\Gamma, \Delta := (v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n, v_{n+1} : \tau_1, \ldots, v_{n+m} : \tau_m)$$

と定める．

<u>Note</u>

$(X_\sigma)_{\sigma \in T}$ のように変数は型に紐付けられていない．

Def basic rules.

identity

$$\frac{}{v_1 : \sigma_1 \vdash v_1 : \sigma_1}$$

function symbol

$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1 \quad \cdots \quad \Gamma \vdash M_n : \sigma_n}{\Gamma \vdash F(M_1, \dots, M_n) : \sigma_{n+1}} \quad \left(\text{for } F : \sigma_1, \dots, \sigma_n \to \sigma_{n+1} \text{ in } \Sigma\right)$$

Def structural rules.

weakening

$$\frac{v_1 : \sigma_1 , \ \cdots , \ v_n : \sigma_n \vdash M : \tau}{v_1 : \sigma_1 , \dots , v_n : \sigma_n , v_{n+1} , \sigma_{n+1} \vdash M : \tau}$$

contraction

$$\frac{\Gamma, \ v_n : \sigma , \ v_{n+1} : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma, \ v_n : \sigma \vdash M[v_n / v_{n+1}] : \tau}$$

exchange

$$\frac{\Gamma, \ v_i : \sigma_i , \ v_{i+1} : \sigma_{i+1} , \ \Delta \vdash M : \tau}{\Gamma, \ \underline{v_i : \sigma_{i+1} , \ v_{i+1} : \sigma_i} , \ \Delta \vdash M[v_{i+1}/v_i , \ v_i/v_{i+1}] : \tau}$$

☆

変数を増やす.	2変数を1つにおきかえる	入れかえ
weakening	contraction	exchange

Def derivable

derivation tree が存在して $\Gamma \vdash M:\sigma$ が結論になるとき $\Gamma \vdash M:\sigma$ は derivable といい，略に

$$\blacktriangleright \Gamma \vdash M:\sigma$$

と書く．

Exercise 2.1.1

(i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma; v_n:\sigma, \overbrace{\Delta}^{m-1\text{個}}, v_{n+m}:\rho, \Theta \vdash M:\tau}{\vdots\ m-1\text{回の exchange}}}{\Gamma, v_n:\sigma, v_{n+1}:\rho, \Delta, \Theta \vdash M[\text{うわ〜}]:\tau}}{\dfrac{\dfrac{\Gamma, v_n:\rho, v_{n+1}:\sigma, \Delta, \Theta \vdash M[\text{うわ〜}]:\tau}{\vdots\ m-1\text{回の exchange}}}{\Gamma, v_n:\rho, \Delta, v_{n+m}:\sigma, \Theta \vdash M[v_n/v_{n+m}, v_{n+m}/v_n]:\tau}}$$

（計 $2m-1$ 回 exchange する）

(ii) exchange を m 回する．

(iii) Θ の長さを l とすると，$2l+m-1$ 回 exchange して，

$$\Gamma, \Delta, \Theta, v_{n+m+l+1}:\sigma, v_{n+m+l+2}:\sigma \vdash M[\cdots]:\tau$$

を得て，contract して，再び $l+m-1$ 回 exchange する．

(iv) (iii) をくり返す．

Note type と term のこの計算を term calculus と呼ぶ．

Date

<u>Def</u>

$M[N/v_n]$ is defined inductively as follows.

$$v_m[N/v_n] = \begin{cases} N & (m=n) \\ v_m & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$F(M_1, \ldots, M_n)[N/v_n] = F(M_1[N/v_n], \ldots, M_1[N/v_n]).$$

<u>Prop</u> The following is a derived rule.

substitution

$$\frac{\Gamma, v_n : \sigma \vdash M : \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M[N/v_n] : \tau}$$

<u>Exercise 2.1.2</u>

Δ : length m, Θ : length k

derive
$$\frac{\Gamma, v_n : \sigma, \Delta \vdash M : \tau \qquad \Theta \vdash N : \sigma}{\Gamma, \Theta, \Delta \vdash M^*[N^\#/v_n] : \tau}$$

where
$$M^* = M[v_{n+k}/v_{n+1}, \ldots, v_{n+k+m-1}/v_{n+m}]$$
$$N^\# = N[v_n/v_1, \ldots, v_{n+k-1}/v_k]$$

Lemma

$\blacktriangleright \Gamma \vdash F(M_1, \ldots, M_n) : \tau$ (where $F : \tau_1, \ldots, \tau_n \to \tau$)

then, $\Gamma \vdash M_i : \tau_i$ for each i.

proof. By structural induction.

function symbol
明らか.

weakening

$$\frac{\Gamma \vdash F(M_1, \ldots, M_n) : \tau}{\Gamma, v_m : \sigma_m \vdash F(M_1, \ldots, M_n) : \tau}$$

then, $\blacktriangleright \Gamma \vdash M_i : \tau_i$

therefore $\blacktriangleright \Gamma, v_m : \sigma_m \vdash M_i : \tau_i$

contraction

$$\frac{\Gamma, v_n : \sigma, v_{n+1} : \sigma \vdash F(M_1', \ldots, M_n') : \tau}{\Gamma, v_n : \sigma \vdash F(M_1, \ldots, M_n) : \tau}$$

then $\blacktriangleright \Gamma, v_n : \sigma, v_{n+1} : \sigma \vdash M_i' : \tau_i$

therefore $\blacktriangleright \Gamma, v_n : \sigma \vdash \underset{M_i'[v_n/v_{n+1}]}{\underset{\shortparallel}{M_i}} : \tau_i$

exchange

$$\frac{\Gamma, v_i : \sigma_i, v_{i+1} : \sigma_{i+1}, \Delta \vdash F(M_1', \ldots, M_n') : \tau}{\Gamma, v_i : \sigma_{i+1}, v_{i+1} : \sigma_i, \Delta \vdash F(M_1, \ldots, M_n) : \tau}$$

$$M_i = M_i'[v_i/v_{i+1}, v_{i+1}/v_i]$$

then

$\blacktriangleright \Gamma, v_i : \sigma_i, v_{i+1} : \sigma_{i+1}, \Delta \vdash M_i' : \tau_i$

therefore

$\blacktriangleright \Gamma, v_i : \sigma_{i+1}, v_{i+1} : \sigma_i, \Delta \vdash M_i : \tau_i$

□

Date

<u>Lemma</u>

$\triangleright\ \Gamma, v_i : \sigma, \Delta \vdash v_i : \tau$

then $\sigma = \tau$.

<u>proof.</u> By structural induction.

identity obvious

weakening obvious

contraction $v_i = v_n$ obvious

$v_i \neq v_n$ obvious

exchange obvious

<u>Proof of Excercise 2.1.2</u>

structural induction. for M.

(I) $M = v_n$ then, $M^*[N^\#/v_n] = N^\#$.

By the lemma above, $\sigma = \tau$.

$$\dfrac{\dfrac{\Theta \vdash N : \tau}{\vdots \text{ weakenings and exchanges}}}{\Gamma, \Theta, \Delta \vdash N^\# : \tau}$$

(II) $M = v_\ell$ $(n \neq \ell)$ then, $M^* = v_{\ell'}$, $M^*[N^\#/v_n] = v_{\ell'}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{v_1 : \tau \vdash v_1 : \tau}}{\dfrac{\vdots \text{ a lot of weakenings and exchanges}}{\Gamma, \Theta, \Delta \vdash v_{\ell'} : \tau}}$$

(III) $M = F(M_1, \ldots, M_\ell)$ then

$M^* = F(M_1^*, \ldots, M_\ell^*)$

$M^*[N^\#/v_n] = F(M_1^*[N^\#/v_n], \ldots, M_\ell^*[N^\#/v_n])$

The lemma shows $\triangleright\ \Gamma, v_n : \sigma, \Delta \vdash M_i : \tau_i$.

By the induction hypothesis,

$$\triangleright\ \Gamma, \Theta, \Delta \vdash M_i^*[N^\#/v_n] : \tau_i \ .$$

Therefore, applying the function symbol rule, we get

$$\Gamma, \Theta, \Delta \vdash F(M_1, \ldots, M_\ell)^*[N^\#/v_n] : \tau .$$

本の definition 2.1.1 の上に 1.6 でやった version

つまり 型のついた変数集合の族 $X = (X_\sigma)_{\sigma \in T}$ を固定し,

型 σ の term の集合 $\mathrm{Terms}_\tau(X)$ を作っていく

set theoric な話と対応していることが書いてあるが,

明らかに分かる.

最後に classifying category を定義する.

Date

2.1.1 Definition (classfying category)

signature Σ の term calculus (ここまで述べた derivation rule のこと) に対し, classfying category $Cl(\Sigma)$ を定で定義する.

objects : contexts Γ

morphisms : $Cl(\Sigma)(\Gamma, \Delta)$ は,

$\Delta = (v_1 : \tau_1, \ldots, v_m : \tau_m)$ のとき,

m 個の term $(M_1, \ldots, M_m)$ の組の集合で,

各 M_i に対し,

$$\Gamma \vdash M_i : \tau_i$$

が derivable なもの.

composition : $\Gamma \xrightarrow{(M_1, \ldots, M_m)} \Delta \xrightarrow{(N_1, \ldots, N_k)} \Theta$

に対し, 合成を,

$$(N_1[M_1/v_1, \ldots, M_m/v_m], \ldots, N_k[M_1/v_1, \ldots, M_m/v_m])$$

で定める.

identity : $(v_1, \ldots, v_n)$

これは 命題論理の リンデンバーム代数 の構成と似ている.

(同値な命題 からなる同値類で全体を割って,
$P \longrightarrow Q$ なる P, Q に $P \leq Q$ なる順序を入れて
boolian algebra にするやつ)

Associativity を示すには, 下(の一般形)が必要. (やりたくない)

$$M[N/v_n][L/v_m] = M[N[L/v_m]/v_n]$$

2.1.2 Proposition

$Cl(\Sigma)$ は有限直積をもつ.

proof.

$$\Gamma \longleftarrow (\Gamma, \Delta) \longrightarrow \Delta$$

が直積（明らか） $\square$

2.2 Functional semantics

1.6 の Σ の model とは、$((A_\sigma)_{\sigma\in T}, [\![-]\!])$ で、

$[\![F]\!] : A_{\sigma_1}\times\cdots\times A_{\sigma_n} \longrightarrow A_{\sigma_{n+1}}$ を定めるものだった。

これを $Cl(\Sigma) \longrightarrow Sets$ なる functor として書き直す。
finite product preserving

これによって Sets を $\mathbb{B}$ にとりかえて、
一般化する。

Rem (1) $\mathbb{S}$-Model とは set theoric model の圏で、

object は $(\Sigma, (A_\sigma)_{\sigma\in T}, [\![-]\!])$ such that
$((A_\sigma)_{\sigma\in T}, [\![-]\!])$ は Σ の model.

morphism は、

- $\underset{(T, \mathcal{F})}{\Sigma} \xrightarrow{\phi} \underset{(T', \mathcal{F}')}{\Sigma'}$ (Sign での morphism)

- 各 $\sigma \in |\Sigma| (= T)$ に対して
$A_\sigma \xrightarrow{H_\sigma} A'_{\phi(\sigma)}$ があって、
Σ の各 functional symbol $F: \sigma_1, \ldots, \sigma_n \longrightarrow \sigma_{n+1}$ に対し

$$
\begin{tikzcd}
A_{\sigma_1}\times\cdots\times A_{\sigma_n} \arrow[r, "H_{\sigma_1}\times\cdots\times H_{\sigma_n}"] \arrow[d, "{[\![F]\!]}"'] & A'_{\phi(\sigma_1)}\times\cdots\times A'_{\phi(\sigma_n)} \arrow[d, "{[\![\phi(F)]\!]'}"] \\
A_{\sigma_{n+1}} \arrow[r, "H_{\sigma_{n+1}}"'] & A'_{\phi(\sigma_{n+1})}
\end{tikzcd}
$$

が可換なもの。

(2)

$$\mathbb{S}\text{-Model} \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ign} \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ets}$$
$$(\Sigma, (A_\sigma), [\![\ ]\!]) \longmapsto \Sigma \longmapsto |\Sigma|$$

は全部 split fibration.

2.2.1 Theorem

$$\mathbb{S}\text{-Model}(\Sigma) \simeq \mathcal{FPC}at\,(\mathcal{C}\ell(\Sigma), \mathbb{S}\mathrm{ets})$$

(Σ a fibre category)

equivalence.

但し $\mathcal{FPC}at\,(\mathcal{C}\ell(\Sigma), \mathbb{S}\mathrm{ets})$ は,
finite product preserving functor $\mathcal{C}\ell(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ets}$ の
なす functor category.

(2-category $\mathcal{FPC}at$ は $\mathcal{C}at$ の finite product preserving functor に制限した $\mathcal{C}at$ の部分2圏 のこと)

<u>proof.</u> まず $\mathbb{S}\text{-Model}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{FPC}\text{at}(\mathcal{Cl}(\Sigma), \text{Sets})$
なる functor を作る.
$T = |\Sigma|$ とする

$\mathbb{S}\text{-Model}(\Sigma)$ の object $= \Sigma$ の model $((A_\sigma)_{\sigma\in T}, [\![-]\!])$
に対して, $\mathbb{FPC}\text{at}(\mathcal{Cl}(\Sigma), \text{Sets})$ の object $\mathcal{A} : \mathcal{Cl}(\Sigma) \longrightarrow \text{Sets}$
を次で定める.

$$\mathcal{A}(\Gamma = (v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n)) = A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n}$$

$\mathcal{A}((M_1, \ldots, M_m) : \Gamma \longrightarrow \Delta)$ は $A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n}$ から $A_{\tau_1} \times \cdots \times A_{\tau_m}$ への
関数で,

$$\begin{array}{ccc} A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} & \longrightarrow & A_{\tau_i} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & [\![M_i]\!]_{\rho(v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_n \mapsto a_n)} \end{array}$$

interpretation

の積.

($\Gamma \vdash M_i : \tau_i$ に対し $[\![\Gamma \vdash M_i : \tau_i]\!]$ を自然に導かれる
$$A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \longrightarrow A_{\tau_i}$$
なる写像と見れば, 上の射は,
$$\langle [\![\Gamma \vdash M_1 : \tau_1]\!], \ldots, [\![\Gamma \vdash M_m : \tau_m]\!] \rangle$$)

後で $\mathcal{A}$ が finite limit preserving functor であることを示す.

[valuation とは $(\rho_\sigma : X_\sigma \longrightarrow A_\sigma)_{\sigma\in T}$

interpretation とは $([\![-]\!]^\tau_\rho : \text{Terms}_\tau(X) \longrightarrow A_\tau)_{\tau\in T}$ で

$$[\![x]\!]_\rho = \rho_\tau(x)$$

$$[\![F(M_1, \ldots, M_n)]\!]_\rho = [\![F]\!]([\![M_1]\!]_\rho, \ldots, [\![M_n]\!]_\rho) \;]$$

$\mathcal{S}$-Model(Σ) の morphism $(H_\sigma : A_\sigma \to B_\sigma)_{\sigma \in T}$ に対して, natural transformation $\theta : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ を次で定める. $\Gamma = (v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n)$ とする.

$$\begin{array}{cccc}
\theta_\Gamma : & \mathcal{A}(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\Gamma) \\
& \parallel & & \parallel \\
& A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} & & B_{\sigma_1} \times \cdots \times B_{\sigma_n} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & (H_{\sigma_1}(a_1), \ldots, H_{\sigma_n}(a_n))
\end{array}$$

(つまり $\theta_\Gamma = H_{\sigma_1} \times \cdots \times H_{\sigma_n}$)

後でこれが natural であることを示す.

◦ まず $\mathcal{A}$ が functor であることを示す.

$\mathcal{A}((v_1, \ldots, v_n) : \Gamma \to \Gamma)$ は 明らかに $id_{A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n}}$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \arrow[r, "\mathcal{A}((M_1, \ldots, M_m))"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{A}((N_1, \ldots, N_k) \circ (M_1, \ldots, M_m))"'] & A_{\tau_1} \times \cdots \times A_{\tau_m} \arrow[r, "\mathcal{A}((N_1, \ldots, N_k))"] & A_{\rho_1} \times \cdots \times A_{\rho_k} \arrow[d, "\pi_i"] \\
& & A_{\rho_i}
\end{tikzcd}$$

i番目の成分を計算すると, composition が示せる.

$$\begin{aligned}
&[\![\Gamma \vdash N_i [M_1 / v_1, \ldots, M_m / v_m]]\!] (a_1, \ldots, a_m) \\
&= [\![N_i [M_1 / v_1, \ldots, M_m / v_m]]\!]_{\rho(v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_m \mapsto a_m)} \\
&= [\![N_i]\!]_{\rho(v_1 \mapsto [\![M_1]\!]_{\rho(v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_m \mapsto a_m)}, \ldots)} \\
&= [\![\Delta \vdash N_i : \rho_i]\!] ([\![M_1]\!]_{\rho(v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_m \mapsto a_m)}, \ldots) \\
&= [\![\Delta \vdash N_i : \rho_i]\!] \circ \langle [\![\Gamma \vdash M_1 : \tau_1]\!], \ldots \rangle (a_1, \ldots, a_m)
\end{aligned}$$

- $\mathcal{A}$ が finite product preserving であること.

$$\mathcal{A}((\Gamma, \Delta)) = A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \times A_{\tau_1} \times \cdots \times A_{\tau_m}$$

$\times$ の結合順を除けば ほぼ明らか.

- $\theta_\Gamma = H_{\sigma_1} \times \cdots \times H_{\sigma_n}$ は natural か.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(\Gamma) = A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \arrow[r, "\theta_\Gamma = H_{\sigma_1} \times \cdots \times H_{\sigma_n}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(M_1, \ldots, M_m)"'] & \mathcal{B}(\Gamma) = B_{\sigma_1} \times \cdots \times B_{\sigma_n} \arrow[d, "\mathcal{B}(M_1, \ldots, M_m)"] \\
A_{\tau_1} \times \cdots \times A_{\tau_m} = \mathcal{A}(\Delta) \arrow[r, "H_{\tau_1} \times \cdots \times H_{\tau_m} = \theta_\Delta"'] & B_{\tau_1} \times \cdots \times B_{\tau_m} = \mathcal{B}(\Delta)
\end{tikzcd}$$

は $\mathbb{S}$-Model の morphism がみたすべき性質から可換.

逆向きの functor $\mathrm{FPCat}(\mathcal{C}\ell(\Sigma), \mathrm{Sets}) \longrightarrow \mathbb{S}\text{-}\mathrm{Model}(\Sigma)$
を作る。

$\mathrm{FPCat}(\mathcal{C}\ell(\Sigma), \mathrm{Sets})$ の object

$\mathcal{M} : \mathcal{C}\ell(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Sets}$ (finite limit preserving) に対し Σ の model を作る。

各 $\sigma \in |\Sigma|$ に対し、 $M\sigma = \mathcal{M}(v_1 : \sigma)$ とする。

さらに各 function symbol $F : \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \longrightarrow \sigma_{n+1}$ に対し、

$$\begin{array}{ccccccc} [\![F]\!] : & M\sigma_1 \times \cdots \times M\sigma_n & \longrightarrow & M\sigma_{n+1} \\ & \| & & \| \\ & \mathcal{M}(v_1 : \sigma_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(v_1 : \sigma_n) & & \mathcal{M}(v_1 : \sigma_{n+1}) \end{array}$$ を、

$$\mathcal{M}(v_1 : \sigma_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(v_1 : \sigma_n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n)$$
(finite limit preserving の性質による isomorphism) と、

$$\mathcal{M}(v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n) \xrightarrow[\mathcal{M}(F(v_1, \ldots, v_n))]{} \mathcal{M}(v_1 : \sigma_{n+1})$$

の合成で定義する。 $(v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n \vdash F(v_1, \ldots, v_n) : \sigma_{n+1})$

FPCat の morphism $\mathcal{M} \xRightarrow{\alpha} \mathcal{N}$ に対し,

model 間の morphism $(\,M_\sigma \longrightarrow N_\sigma\,)_{\sigma \in T}$ を,

$$\begin{array}{ccc} M_\sigma & \longrightarrow & N_\sigma \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & \alpha_{(v_1:\sigma)}(a) \end{array}$$

で定める

これは実際に,

$$\begin{tikzcd}
M_{\sigma_1} \times \cdots \times M_{\sigma_n} \arrow[rr, "\alpha(v_1:\sigma_1) \times \cdots \times \alpha(v_1:\sigma_n)"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & N_{\sigma_1} \times \cdots \times N_{\sigma_n} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{M}(v_1:\sigma_1, \dots, v_n:\sigma_n) \arrow[rr, "\alpha(v_1:\sigma_1, \dots, v_n:\sigma_n)"] \arrow[d, "\mathcal{M}(F(v_1:\sigma_1, \dots, v_n:\sigma_n))"] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & \mathcal{N}(v_1:\sigma_1, \dots, v_n:\sigma_n) \arrow[d, "\mathcal{N}(F(v_1:\sigma_1, \dots, v_n:\sigma_n))"] \\
\mathcal{M}(v_1:\sigma_{n+1}) \arrow[rr, "\alpha(v_1:\sigma_{n+1})"] & & \mathcal{N}(v_1:\sigma_{n+1})
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}(v_1:\sigma_{n+1}) = M_{\sigma_{n+1}}, \qquad \mathcal{N}(v_1:\sigma_{n+1}) = N_{\sigma_{n+1}}$$

となって $\mathbb{S}$-Model の morphism.

以上で

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}\text{-Model}(\Sigma) \arrow[r, bend left, "F"] & \mathrm{FPCat}(\mathcal{Cl}(\Sigma), \mathrm{Sets}) \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

を得た. F, G が equivalence を定めることを示す.

計算すると

$$GF = 1_{S\text{-Model}}.$$

$1 \cong FG$ を下で示す.

$$\mathcal{M} : Cl(\Sigma) \longrightarrow Sets \quad \in \quad FPCat(Cl(\Sigma), Sets)$$

に対し $\theta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \Rightarrow FG(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'$ を,

$$\begin{array}{ccc} \theta_{\mathcal{M},\Gamma} : \mathcal{M}(\Gamma) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}'(\Gamma) \\ \| & & \| \\ \mathcal{M}(v_1:\sigma_1, \ldots, v_n:\sigma_n) & & A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \\ & & \| \\ & & \mathcal{M}(v_1:\sigma_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(v_1:\sigma_n) \end{array}$$

で定める. θ は Γ に関して natural であることは,

$\Gamma \xrightarrow{(M_1, \ldots, M_m)} \Delta$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\Gamma) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}'(\Gamma) = A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(\Delta) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}'(\Delta) = A_{\tau_1} \times \cdots \times A_{\tau_m} \end{array}$$

を示せばいいが, 下側りは直積だから,

$\Gamma \xrightarrow{(M)} v_1:\tau$ に対し $\quad (\Gamma \vdash M:\tau)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\Gamma) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}'(\Gamma) \\ {\scriptstyle \mathcal{M}((M))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{M}'((M))} \\ \mathcal{M}(v_1:\tau) & = & A_\tau \end{array}$$

を示せばいい. M に関する帰納法で示す.

Date

• M が v_i のとき

$\mathcal{M}'(v_i) : A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \longrightarrow A_\tau$ は射影.

$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto a_i$

明らかに

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\Gamma) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\mathcal{M}(v_i)"'] & A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \arrow[d, "pr_i"] \\ & \mathcal{M}(v_i : \sigma_i) = A_{\sigma_i} \end{tikzcd}$$

• $M = F(M_1, \ldots, M_k)$ のとき, $(F : \tau_1, \ldots, \tau_k \longrightarrow \tau)$

いま $Cl(\Sigma)$ において,

$$(F(M_1, \ldots, M_k)) = (F(v_1, \ldots, v_k)) \circ (M_1, \ldots, M_k)$$

$\Delta = v_1 : \tau_1, \ldots, v_k : \tau_k$ とすると,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\Gamma) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathcal{M}(M_1, \ldots, M_k)"'] & A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \arrow[d, "(M_1, \ldots, M_k)"] \\ \mathcal{M}(\Delta) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\mathcal{M}(F(v_1, \ldots, v_k))"'] & A_{\tau_1} \times \cdots \times A_{\tau_k} \arrow[d, "[\![F]\!]"] \\ & A_\tau \end{tikzcd}$$

上の可換は induction hypothesis,

下の可換は $[\![F]\!]$ の定義である

Date

最後に $\theta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \Rightarrow FG(\mathcal{M})$ が natural なことを示す。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\theta_{\mathcal{M}}"'] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{M}' \arrow[d, "\alpha'"] \\
\mathcal{N} \arrow[r, "\theta_{\mathcal{N}}"] & \mathcal{N}'
\end{tikzcd}$$

の component は

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\Gamma) \arrow[r, "\theta_{\mathcal{M},\Gamma}"'] \arrow[d, "\alpha_\Gamma"'] & \mathcal{M}(v_1 : \sigma_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(v_1 : \sigma_n) \arrow[d, "\alpha(v_1:\sigma_1) \times \cdots \times \alpha(v_n:\sigma_n)"] \\
\mathcal{N}(\Gamma) \arrow[r, "\theta_{\mathcal{N},\Gamma}"] & \mathcal{N}(v_1 : \sigma_1) \times \cdots \times \mathcal{N}(v_1 : \sigma_n)
\end{tikzcd}$$

なので明らかに可換

□

2.2.2 Definition (model)

Σ : many typed signature
$\mathcal{B}$: category with finite products

A **model** of Σ とは，

$$Cl(\Sigma) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{B}$$

なる finite products preserving functor $\mathcal{M}$ のこと．

morphism between two Σ-models $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ とは，
$\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{N}$ なる自然変換．

$\mathcal{B}$ の Σ-model の圏とは $\mathbf{FPCat}(Cl(\Sigma), \mathbb{B})$．

これは，$\mathcal{M}(v_1 : \sigma) = [\![\sigma]\!]$ として，

$$\mathcal{M}((\Gamma \vdash F(v_1, \dots, v_n) : \sigma_{n+1}))$$
$$= [\![F]\!] : [\![\sigma_1]\!] \times \cdots \times [\![\sigma_n]\!] \longrightarrow [\![\sigma_{n+1}]\!]$$ と定めると

Σ の model は $(([\![\sigma]\!])_{\sigma \in T}, [\![-]\!])$ と見れる．

2.2.3 Example

- $Cl(\Sigma) \xrightarrow{id} Cl(\Sigma)$ は $Cl(\Sigma)$ 上の model.
  generic model という．

2.2.4 Lemma

(i) 忘却関手

$$\mathbb{FPCat} \xrightarrow{\mathrm{Sign}(-)} \mathbb{Sign}$$

が次のように定められる.

$\mathbb{B} \in \mathbb{FPCat}$ に対し, $\mathbb{Sign}(\mathbb{B})$ は.

types = objects from $\mathbb{B}$

function symbols

$$F : X_1, \ldots, X_n \longrightarrow X_{n+1} \quad \text{in } \mathbb{Sign}(\mathbb{B})$$

$$\text{iff} \quad F : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_{n+1} \quad \text{in } \mathbb{B}.$$

なる signature.

(ii) 逆に関手

$$\mathbb{Sign} \xrightarrow{\mathrm{Cl}(-)} \mathbb{FPCat}$$

が定められる.

$$\phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$$

に対しては,

$$\mathrm{Cl}(\phi) : \mathrm{Cl}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Cl}(\Sigma')$$

を, σ を $\phi(\sigma)$ に, F を $\phi(F)$ に入れかえる関手とする.

($\mathrm{Cl}(\phi)(M)$ のことを ϕM と書く)

Date

proof. (i) ($\mathbb{S}\mathrm{ign}(-)$ は functor であること)

$\mathcal{M}: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ に対し、$\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathbb{B}) \xrightarrow{\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathcal{M})} \mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathbb{C})$ は、

- $|\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathbb{B})| = \mathbb{B}$ の objects $\longrightarrow$ $|\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathbb{C})| = \mathbb{C}$ の objects

$$B \longmapsto \mathcal{M}(B)$$

- $F: X_1, \ldots, X_n \longrightarrow X_{n+1}$ in $\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathbb{B})$ に対し、

$F: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_{n+1}$ in $\mathbb{B}$ に注意して、

$\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathcal{M})(F)$ は 下の合成

$$\mathcal{M}(X_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(X_n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X_1 \times \cdots \times X_n) \xrightarrow{\mathcal{M}(F)} \mathcal{M}(X_{n+1})$$

$$\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathbb{1}_{\mathbb{B}}) = id_{\mathbb{S}\mathrm{ign}(\mathbb{B})}.$$

composite も 明らか.

(ii) 明らか

$\Sigma \longrightarrow \Sigma'$

$T \longrightarrow T'$

variable そのまま

type $\tau \longmapsto \phi(\tau)$

$F \longmapsto \phi(F)$

$: \tau_1, \ldots, \tau_n \to \tau_{n+1}$ $\quad : \phi\tau_1, \ldots, \phi\tau_n \to \phi\tau_{n+1}$

Note. FPCat を small category で作らないと $|\mathbb{S}\mathrm{ign}(-)| = B_0$ が small にならない.

2.2.5 Theorem

Σ : signature

$\mathbb{B}$: category with finite products.

に対し、

$$\frac{\Sigma \xrightarrow{\ \phi\ } \mathrm{Sign}(\mathbb{B})}{\mathrm{Cl}(\Sigma) \xrightarrow[\ \mathcal{M}\ ]{} \mathbb{B}}$$

同型を除き 1対1対応がある.

(bijective isomorphism up-to-iso)

[2-圏の意味で $\mathrm{Cl}(-) \dashv \mathrm{Sign}(-)$ で, $\mathrm{Cl}(\Sigma)$ は free category with finite products generated by Σ という]

<u>proof.</u> 2.2.1 と同じ流れ.

(i) $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathrm{Sign}(\mathbb{B})$ に対し $\mathcal{M}_\phi : \mathrm{Cl}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{B}$ を構成する.

$$\Gamma = (v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n) \longmapsto \phi(\sigma_1) \times \cdots \times \phi(\sigma_n)$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[d, "{(M_1, \ldots, M_m)}"] \\ \Delta \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} & \phi(\sigma_1) \times \cdots \times \phi(\sigma_n) \arrow[dl, "{\mathcal{M}_\phi(\Gamma \vdash M_i : \tau_i)}"'] \arrow[d, "{\mathcal{M}_\phi(M_1, \ldots, M_m)}"] \\ \phi(\tau_i) & \phi(\tau_1) \times \cdots \times \phi(\tau_m) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_\phi(\Gamma \vdash M : \tau) : \phi(\sigma_1) \times \cdots \times \phi(\sigma_n) \longrightarrow \phi(\tau)$ は,
derivation に対して帰納的に定義される.

Date

- identity $\mathcal{M}_\phi(v_1:\sigma \vdash v_1:\sigma) = id_{\phi(\sigma)}$

- function symbol $F: \tau_1, \ldots, \tau_m \longrightarrow \tau_{m+1}$ に対し,

$\mathcal{M}_\phi(\Gamma \vdash F(M_1, \ldots, M_m) : \tau_{m+1})$ は

$$\phi(\sigma_1) \times \cdots \times \phi(\sigma_n) \xrightarrow{\langle \mathcal{M}_\phi(\Gamma \vdash M_i : \tau_i) \rangle_{i=1,\ldots,m}} \phi(\tau_1) \times \cdots \times \phi(\tau_m) \xrightarrow{\phi(F)} \phi(\tau_{m+1})$$

積

- weakening

$$\mathcal{M}_\phi(\Gamma, v_n : \sigma \vdash M : \sigma)$$
$$= \mathcal{M}_\phi(\Gamma \vdash M : \sigma) \circ \pi$$

- contraction

$$\mathcal{M}_\phi(\Gamma, v_n : \sigma \vdash M[v_n / v_{n+1}] : \tau)$$
$$= \mathcal{M}_\phi(\Gamma, v_n : \sigma, v_{n+1} : \sigma \vdash M : \tau) \circ \langle id, \pi' \rangle$$

$$\phi(\tau) \longleftarrow \overrightarrow{\phi(\sigma_i)}, \phi(\sigma), \phi(\sigma) \longleftarrow \overrightarrow{\phi(\sigma_i)}, \phi(\sigma)$$

- exchange

$$\mathcal{M}_\phi(\Gamma, v_i : \sigma_{i+1}, v_{i+1} : \sigma_i, \Delta \vdash M[v_i \leftrightarrow v_{i+1}] : \tau)$$
$$= \mathcal{M}_\phi(\Gamma, v_i : \sigma_i, v_{i+1} \sigma_{i+1}, \Delta) \circ id \times \langle \pi', \pi \rangle \times id$$

単なる入れかえ

Date

(ii) $Cl(\Sigma) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{B}$ に対して $\Sigma \xrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}} \mathbb{S}ign(\mathcal{B})$ を作る.

$$|\Sigma| \xrightarrow{\phi_{\mathcal{M}}} \mathcal{B}_0 \ (\mathcal{B} \text{ の object})$$
$$\sigma \longmapsto \mathcal{M}(v_1 : \sigma)$$

$$F : \sigma_1, \dots, \sigma_n \to \sigma_{n+1} \longmapsto \mathcal{M}(F(v_1, \dots, v_n)) \circ \varphi \ : \phi_{\mathcal{M}}(\sigma_1) \times \dots \times \phi_{\mathcal{M}}(\sigma_n) \longrightarrow \phi_{\mathcal{M}}(\sigma_{n+1})$$

φ は, 下の同型射

$$\mathcal{M}(v_1 : \sigma_1) \times \dots \times \mathcal{M}(v_1 : \sigma_n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(v_1 : \sigma_1, \dots, v_n : \sigma_n)$$

(iii) (i) で定めたものが finite product preserving functor か.

identity を保つ　　直観的に明らか (ちゃんとやると, $\Gamma \vdash v_i : \tau_i$ が projection になること)

composition を保つ　　明らかでない Exercise 2.2.2 にまかされている.

finite product を保つ　　自明.

(ii) は $\mathbb{S}ign$ の morphism であることに 特に 型が合っていること以外に条件はないので OK.

(iv) 対応は up-to-isomorphism で bijective か.

$$\phi_{\mathcal{M}_\phi}(\sigma) = \mathcal{M}_\phi(v_1 : \sigma) = \phi(\sigma)$$

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathcal{M}_\phi}(F : \sigma_1, \dots, \sigma_n \to \sigma_{n+1}) &= \mathcal{M}_\phi(F(v_1, \dots, v_n)) \circ \varphi \\
&= \phi(F) \circ \langle \mathcal{M}_\phi(\Gamma \vdash v_i : \tau_i) \rangle_{i=1,\dots,n} \circ \varphi \\
&= \phi(F) \circ \varphi
\end{aligned}$$

identity になる.

Date

$$\mathcal{M}_{\phi_M}(\Gamma) = \phi_M(\sigma_1) \times \cdots \times \phi_M(\sigma_n)$$

$$= \mathcal{M}(v_1 : \sigma_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(v_1 : \sigma_n)$$

$$\mathcal{M}_{\phi_M}(\langle \Gamma \vdash M_1 : \tau_1, \Gamma \vdash M_2 : \tau_2, \ldots, \Gamma \vdash M_m : \tau_m \rangle)$$

$$\cong \langle \mathcal{M}_{\phi_M}(\Gamma \vdash M_1 : \tau_1), \ldots, \mathcal{M}_{\phi_M}(\Gamma \vdash M_m : \tau_m) \rangle$$

ちゃんとこの先をやるには構造帰納法をまわす必要がある.

$\mathcal{M}_{\phi_M}(\Gamma \vdash M : \tau)$ と $\mathcal{M}(\Gamma \vdash M : \tau)$ が iso か.

$M = F(v_1, \ldots, v_n)$ のときだけやると,

$$\mathcal{M}_{\phi_M}(F(v_1, \ldots, v_n)) = \phi_M(F) \circ \langle \mathcal{M}_{\phi_M}(\Gamma \vdash v_1 : \tau_1), \cdots \rangle$$

$$= \phi_M(F) \circ \varphi^{-1}$$

$$= \mathcal{M}(F(v_1, \ldots, v_n)) \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$$

$$= \mathcal{M}(F(v_1, \ldots, v_n)).$$

TODO : Exercise 2.2.2 を示す, 構造帰納をまわす.

2.2.6 Definition $\mathbb{S}\mathrm{ign}_{tr}$

2.2.5 Theorem による随伴 $Cl(-) \dashv \mathbb{S}\mathrm{ign}(-)$ によって monad $T = \mathbb{S}\mathrm{ign}(Cl(-))$ on $\mathbb{S}\mathrm{ign}$ が得られる.

この monad に対応する Klisli 圏を $\mathbb{S}\mathrm{ign}_{tr}$
(category of signatures and translation と呼ぶ)

translation $\phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ は
types から contexts へ, function symbols から terms へ
の対応として考えられる.

($\mathbb{S}\mathrm{ign}$ では type は type へ, function symbol は function symbol へ だった)

形式的には $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ign}(Cl(\Sigma'))$ なるものである
そのような translation

$\mathbb{S}\mathrm{ign}_{tr}$ は $\mathbb{S}\mathrm{ign}$ より有用らしい.

この辺何言ってるか分からん.
Klisli 圏やってないわ, 死。

Date

2.2.7 Examples. (translation)

(i) 古典的な translation of signatures involves two signatures for groups. signatures with equations

(1) Σ_1 は type $= \{G\}$

function symbols

$m : G, G \longrightarrow G$

$e : () \longrightarrow G$ (空 $\longrightarrow G$)

$i : G \longrightarrow G$

with equations

$$v_1 : G \vdash m(e, v_1) =_G v_1$$

⋮ etc.

(2) Σ_2 は type $= \{G\}$

function sympols

$d : G, G \longrightarrow G$

$a : () \longrightarrow G$

$d(v_1, v_2)$ は $v_1^{-1} v_2$ のこと (以下 $v_1^{-1} v_2$ とかく)

a は G が空でないことのみを保障し, 意味をもたない.

with the equation

$$v_1 : G,\ v_2 : G,\ v_3 : G \vdash \left[\{ v_3^{-1}(v_1^{-1}(v_1^{-1} v_1)) \}^{-1} v_3^{-1}(v_2^{-1}(v_1^{-1} v_1)) \right]^{-1} v_1 =_G v_2$$

これで群になるらしい.

この (1) (2) に対して, $\Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_1$ を, G から G へ,

function symbol d を, Σ_1-term

$$v_1 : G,\ v_2 : G \vdash m(i(v_1), v_2) : G$$

へうつし, a は任意の term へうつす.

これは translation であって, Sign の morphism ではない!

(ii) ブール論理

① $\neg : B \to B$ and $\wedge : B, B \to B$

② $\neg : B \to B$ and $\supset : B, B \to B$

③ $\neg : B \to B$ and $|$ or $: B, B \to B$

$$v_1 \supset v_2 = \neg(v_1 \wedge \neg v_2)$$

$$v_1 \mid v_2 = \neg(v_1 \wedge v_2)$$ によって translation がある.

<u>Exercises</u>

<u>2.2.4</u> $\mathbb{C}$-Model を次で定義する.

objects $(\Sigma, \mathbb{A}, \mathcal{M})$ Σ: signature

$\mathcal{M} : Cl(\Sigma) \to \mathbb{A} \in \mathbf{FPCat}$

morphisms

$$(\Sigma, \mathbb{A}, \mathcal{M}) \xrightarrow{(\phi, K, \alpha)} (\Sigma', \mathbb{A}', \mathcal{M}')$$

where $\phi : \Sigma \to \Sigma'$

$K : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ with

$$\begin{tikzcd} Cl(\Sigma) \arrow[r, "Cl(\phi)"] \arrow[d, "\mathcal{M}"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha \Rightarrow"] & Cl(\Sigma') \arrow[d, "\mathcal{M}'"] \\ \mathbb{A} \arrow[r, "K"'] & \mathbb{A}' \end{tikzcd}$$

Show that (i) $\begin{matrix}\mathbb{C}\text{-Model} \\ \downarrow \\ \text{Sign}\end{matrix}$ is a fibration

(ii) this fibration has fibred products.