4.2 Fibrations for first order predicate logic

regular logic $(=, \wedge, \top, \exists)$

coherent logic $(=, \wedge, \top, \exists, \vee, \bot)$

predicate logic $(=, \wedge, \top, \exists, \vee, \bot, \forall, \supset)$

Def. 3.5.1

Eq-fibration $\begin{matrix}\mathbb{E}\\ \downarrow\\ \mathbb{B}\end{matrix}$ とは、
(i) fibered preorder
(ii) fibered finite products $(\top, \wedge)$ と $\mathbb{B}$ に finite product $(1, \times)$ があって
(iii) equality $Eq_{I,J}$ $(Eq_{I,J} \dashv \delta^*)$ で Frobenius $(Eq_{I,J}(\delta^*(X) \times Y) \xrightarrow{\sim} X \times Eq_{I,J}(Y))$ をみたすもの。

Def. 4.2.1

(i) regular fibration とは、Eq-fibration で simple coproduct $(\coprod_{(I,J)} \dashv \pi^*_{I,J})$ で Frobenius $\coprod_{(I,J)}(\pi^*_{I,J}(Y) \times Z) \xrightarrow{\sim} Y \times \coprod_{(I,J)}(Z)$ をみたすもの。

(ii) coherent fibration とは、regular fibration で、fibered finite coproducts $(\bot, \vee)$ をもち、fibered preorder が分配束になるもの

(iii) first order fibration とは、coherent fibration で、fibered CCC で、simple products $(\pi^*_{I,J} \dashv \prod_{(I,J)})$ Lemma 1.9.12 をもつもの。

first fibrationをたしかめるまでの手順.

- 任意の $u \in \mathbb{B}$ に対し cartesian lifting $\overline{u} \in \mathbb{E}$ がとれる. ┘ fibration
- 各 fibered category が preorder である.
- 各 fibered preorder に $\top$, $\wedge$ がある.
- reindexing functor が $\top$, $\wedge$ を保つ.
- $Eq_{I,J} : \mathbb{E}_{I\times J} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathbb{E}_{I\times J\times J} : \delta^*$ なる随伴がある.
- $Eq_{K,J}\,(u\times id)^* \Rightarrow ((u\times id)\times id)^*\, Eq_{I,J}$ が natural iso ┘ Eq-fibration
- $Eq_{I,J}(\delta^*(X)\times Y) \longrightarrow X \times Eq_{I,J}(Y)$ が iso ┘ Frobenius.
- $\coprod_{(I,J)} : \mathbb{E}_{I\times J} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathbb{E}_I : \pi^*_{I,J}$ なる随伴がある.
- $\coprod_{(K,J)}(u\times id)^* \Rightarrow u^* \coprod_{(I,J)}$ が natural iso.
- $\coprod_{(I,J)}(\pi^*_{I,J}(Y)\times Z) \longrightarrow Y\times \coprod_{(I,J)}(Z)$ が iso. ┘ regular fibration.
- 各 fibered preorder に $\bot$, $\vee$ があり, 分配的で reindexing functor で $\bot$, $\vee$ が保存 ┘ coherent fibration
- 各 fibered preorder に exponent があり, reindexing functor が保存.
- $\pi^*_{I,J} : \mathbb{E}_I \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathbb{E}_{I\times J} : \prod_{(I,J)}$ なる随伴がある.
- $u^* \prod_{(I,J)} \Longrightarrow \prod_{(K,J)}(u\times id)^*$ が natural iso. ┘

4.2.2 Syntactic examples

- $\mathcal{L}(\Sigma, \Pi, \mathcal{A})$ は
  - objects $\Gamma \mid \varphi$ (右側は1つだけということにしておく)
  - morphisms $(\Gamma \mid \varphi) \longrightarrow (\Delta \vdash \psi)$ は context morphism $\vec{M} : \Gamma \to \Delta$ であって $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi[\vec{M}/\Delta]$ が derivable なもの.

$\mathcal{A}$: regular axioms のとき $\begin{array}{c}\mathcal{L}(\Sigma, \Pi, \mathcal{A}) \\ \downarrow \\ \mathcal{C}\ell(\Sigma)\end{array}$ は regular fibration

$\mathcal{A}$: coherent axioms のとき　coherent fibration

$\mathcal{A}$: first order predicate axioms のとき　first order fibration.

- fibration

$$\begin{tikzcd} \psi(\vec{M}) \arrow[r, dashed, "\vec{M}"] & \psi \\ \Gamma \arrow[r, "\vec{M}"'] & \Delta \end{tikzcd}$$

が cartesian morphism

- fibered category が preorder なのは明らか.

- $$\frac{}{\Gamma \mid \varphi \vdash \top}, \qquad \frac{\Gamma \mid \chi \vdash \varphi \qquad \Gamma \mid \chi \vdash \psi}{\Gamma \mid \chi \vdash \varphi \wedge \psi},$$

可換性とか一意性は preorder だから関係ない.

$$\frac{}{\Gamma \mid \bot \vdash \psi}, \qquad \frac{\Gamma \mid \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma \mid \psi \vdash \chi}{\Gamma \mid \varphi \vee \psi \vdash \chi}, \qquad \frac{\Gamma \mid \chi \wedge \varphi \vdash \psi}{\Gamma \mid \chi \vdash \varphi \supset \psi}$$

・ reindexing functor は $\psi \longmapsto \psi(\vec{M})$ だから $\top, \bot, \wedge, \vee$ は保たれる。

π保つとかは考えなくていい…

・分配的なのは $\Gamma \mid \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

$\Gamma \mid (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$

の導出木書けばいい。

・ $$\frac{\Gamma, \Delta, \Delta \mid \varphi,\ y = y' \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \mid \varphi \vdash \psi(x, y, y')}$$

preorder だから naturality の図式は自明に可換。

よって $Eq_{\Gamma,\Delta}(\varphi) = \varphi \wedge y = y'$

Eq の BeckChevalley

・ $Eq_{K,J}(\vec{M} \times id)^*(\varphi) = Eq_{K,J}(\varphi(\vec{M}, y)) = \varphi(\vec{M}, y) \wedge y = y'$

$((u \times id) \times id)^* Eq_{I,J}(\varphi) = ((u \times id) \times id)^*(\varphi \wedge y = y') = \varphi(\vec{M}, y) \wedge (y = y')(\vec{M}, y, y')$

Eq の Frobenius.

・ $Eq_{I,J}(\delta^*(\varphi) \wedge \psi) = Eq_{I,J}(\varphi(x, y, y) \wedge \psi) = \varphi(x, y, y) \wedge \psi \wedge y = y'$

$\varphi \wedge Eq_{I,J}(\psi) = \varphi \wedge \psi \wedge y = y'$

$$\left(\frac{\varphi(x, y, y) \wedge y = y'}{\varphi(x, y, y') \wedge y = y'} \right)$$

- $$\frac{\Gamma, \Delta \mid \psi \vdash \varphi}{\Gamma \mid \coprod_{\Gamma,\Delta} \psi \vdash \varphi}$$ weakeningした φ

となることが必要だが、 $$\frac{\Gamma, x:\sigma \mid \psi \vdash \varphi}{\Gamma \mid \exists x:\sigma.\psi \vdash \varphi}$$

なので Δ の変数を $\exists$ で縛るのが $\coprod_{\Gamma,\Delta}$.

$\coprod$ の Beck-Chevalley

- $\coprod_{\Gamma',\Delta}(\vec{M} \times id)^*(\psi) = \coprod_{\Gamma',\Delta}\psi(\vec{M}, y) = \exists y.\psi(\vec{M}, y)$

  $\vec{M}^*\coprod_{\Gamma,\Delta}(\psi) = \vec{M}^*(\exists y.\psi(x,y)) = (\exists y.\psi(\vec{x}, y))(\vec{M})$

$\exists y$ と substitution の可換性

$\coprod$ の Frobenius. (Lemma 1.9.12 より従う)

- $\coprod_{\Gamma,\Delta}(\pi^*(\varphi) \wedge \psi) = \coprod_{\Gamma,\Delta}(\varphi \wedge \psi) = \exists y.(\varphi \wedge \psi)$ (φ で y は not free)

  $\varphi \wedge \coprod_{\Gamma,\Delta}(\psi) = \varphi \wedge \exists y.\psi$.

- $$\frac{\Gamma, \Delta \mid \psi \vdash \varphi}{\Gamma \mid \psi \vdash \prod_{(\Gamma,\Delta)}\varphi}$$ weakeningした ψ

  が必要なので $\prod_{(\Gamma,\Delta)}\varphi = \forall y.\varphi$

Π の Beck-Chevalley

$$\vec{M}^{*}\textstyle\prod_{(\Gamma,\Delta)}(\varphi) = \vec{M}^{*}(\forall y.\varphi) = (\forall y.\varphi)[\vec{M}/x]$$

$$\textstyle\prod_{(\Gamma',\Delta)}(\vec{M}\times id)^{*}(\varphi) = \prod_{(\Gamma',\Delta)}(\varphi(\vec{M},y)) = \forall y.\varphi(\vec{M},y)$$

~~Π の Frobenius (Lemma 1.9.12 より従う)~~

$$\varphi \vee \forall y.\psi(y) \supset\subset \forall y.(\varphi \vee \psi(y))$$

は直観だと出ない気がする。

4.2.3 Set theoretic example

(Σ, Π) を signatures with predicates とする。 (Σ,Π)-algebra $((A_\sigma), [\![-]\!], [\![-]\!])$ は、各 $\sigma \in \Sigma$ に対し集合 A_σ、各 function symbol $F: \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \sigma_{n+1}$ に対して写像 $[\![F]\!]: A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \longrightarrow A_{\sigma_{n+1}}$、各 predicate symbol $P: \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ に対して $[\![P]\!] \subseteq A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n}$ を与えるもの。

取りあえず (Σ,Π)-algebra は関係ない。 Section 0.2

$$\begin{array}{c} \mathrm{Pred} \\ \downarrow \\ \mathrm{Sets} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{objects} & (I, X) \text{ where } X \subseteq I \\ \text{morphisms} & (I,X) \xrightarrow{f} (J,Y) \text{ は } I \xrightarrow{f} J \text{ で } f(X) \subseteq Y \text{ なるもの。} \end{array} \right.$$

は first order fibration で二重否定除却できる。

$\forall X \subseteq I \times J$, $Eq(X) = \{(i,j,j) \in I \times J \times J \mid (i,j) \in X\} \subseteq I \times J \times J$

$\forall X \subseteq I \times J$, $\coprod(X) = \{ i \in X \mid$ ある $j \in J$ があって $(i,j) \in X \}$

$\forall X \subseteq I \times J$ $\prod(X) = \{ i \in X \mid$ 任意の $j \in J$ に対し $(i,j) \in X \}$

$(A_\sigma)_{\sigma \in T}$ に対して 圏 $\mathcal{A}$ を次のように作る。

objects : $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ なる型の列。

morphisms : $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \longrightarrow (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ は m 個組 $(f_1, \ldots, f_m)$

であって $f_i : A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \longrightarrow A_{\tau_i}$ なるもの。

これに対して この上の fibration を次で作る。

objects : $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ なる型の列と $X \subseteq A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n}$.

morphisms : $\forall \vec{x} \in X$, $(f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})) \in Y$ なる $(f_1, \ldots, f_m) : A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \to A_{\tau_1} \times \cdots \times A_{\tau_m}$.

さっきの $\begin{array}{c}\mathrm{Pred}\\ \downarrow \\ \mathrm{Set}\end{array}$ と一緒。

4.2.4 Kripke model example

圏 $Alg(\Sigma, \Pi)$ 　((Σ,Π)-algebra の圏) は、

objects : (Σ,Π)-algebra

morphisms : $((A_\sigma), [\![-]\!]^A, [\![-]\!]^A) \xrightarrow{H} ((B_\sigma), [\![-]\!]^A, [\![-]\!]^A)$ は、

$H = (H_\sigma : A_\sigma \to B_\sigma)_{\sigma \in |\Sigma|}$ であって、

$$\begin{array}{ccc} A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} & \xrightarrow{H_{\sigma_1} \times \cdots \times H_{\sigma_n}} & B_{\sigma_1} \times \cdots \times B_{\sigma_n} \\ {\scriptstyle [\![F]\!]^A} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle [\![F]\!]^B} \\ A_{\sigma_{n+1}} & \xrightarrow{H_{\sigma_{n+1}}} & B_{\sigma_{n+1}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [\![P]\!]^A & \dashrightarrow & [\![P]\!]^B \\ \cap & & \cap \\ A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} & \xrightarrow{H_{\sigma_1} \times \cdots \times H_{\sigma_n}} & B_{\sigma_1} \times \cdots \times B_{\sigma_n} \end{array}$$

なるもの。

Kripke model for (Σ,Π) とは、 poset $\mathbb{I} = (\mathbb{I}, \leq)$ と functor

$$\mathbb{I} \xrightarrow{K} Alg(\Sigma, \Pi)$$

$$\mathcal{K}(i) = \langle (\mathcal{K}(i)_\sigma)_{\sigma\in|\Sigma|},\ [\![-]\!](i),\ [\![-]\!](i) \rangle$$

$$\mathcal{K}(ij) = (\mathcal{K}(ij)_\sigma : \mathcal{K}(i)_\sigma \to \mathcal{K}(j)_\sigma)_{\sigma\in|\Sigma|}$$

$\mathcal{K}(\sigma_1,\dots,\sigma_n) : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbf{Sets}$; functor

$$\begin{pmatrix} i \\ \rotatebox{90}{$\leq$} \\ j \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathcal{K}(i)_{\sigma_1}\times\cdots\times\mathcal{K}(i)_{\sigma_n} & \ni & \vec{x} \\ \downarrow \mathcal{K}(ij)_{\sigma_1}\times\cdots\times\mathcal{K}(ij)_{\sigma_n} & & \downarrow \\ \mathcal{K}(j)_{\sigma_1}\times\cdots\times\mathcal{K}(j)_{\sigma_n} & \ni & (\vec{x})' \end{pmatrix}$$

$(X_i)_{i\in\mathbb{I}}$ $\quad (X_i \subseteq \mathcal{K}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i) = \mathcal{K}(i)_{\sigma_1}\times\cdots\times\mathcal{K}(i)_{\sigma_n})$

が monotone であるとは, $\quad i \leq j$ and $\vec{x} \in X \implies (\vec{x})' \in X_j$

圏 $\mathbb{B}$ を次で定義

- objects : 型の列 $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$
- morphisms : $(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \to (\tau_1,\dots,\tau_m)$ は natural transformation
$$\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[r, bend left, "\mathcal{K}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{K}(\tau_1,\dots,\tau_m)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{Sets} \end{tikzcd}$$

$(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \in \mathbb{B}$ の上の fibered category

- objects : monotone collections $(X_i \subseteq \mathcal{K}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i))_{i\in\mathbb{I}}$
- morphisms : $(X_i)_{i\in\mathbb{I}} \longrightarrow (Y_i)_{i\in\mathbb{I}}$ が存在すること $\iff$ $\forall i\in\mathbb{I},\ X_i \subseteq Y_i$

reindexing functor

$\alpha : (\sigma_1,\dots,\sigma_n) \to (\tau_1,\dots,\tau_m)$ に対して, $\alpha^*((X_i)_{i\in\mathbb{I}}) = (\{\vec{y} \in \mathcal{K}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i) \mid \alpha_i(\vec{y}) \in X_i\})_{i\in\mathbb{I}}$

Kripke semantics

<u>Def</u> structure $\mathcal{A}=((A_\sigma), [\![-]\!]^{\mathcal{A}}, [\![-]\!]^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B}=((B_\sigma), [\![-]\!]^{\mathcal{A}}, [\![-]\!]^{\mathcal{A}})$

に関して $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ を $A_\sigma \subseteq B_\sigma$, $[\![f]\!]^{\mathcal{A}} \subseteq [\![f]\!]^{\mathcal{B}}$, $[\![P]\!]^{\mathcal{A}} \subseteq [\![P]\!]^{\mathcal{B}}$ で決める.

射像の包含

<u>Def</u> Kripke model とは, $\mathcal{C} = (C, \leq, \{\mathcal{A}_c \mid c \in C\})$

- C : non-empty set
- $\leq$: C の poset
- $\mathcal{A}_c$: 古典 structure

$\mathbb{I} \longrightarrow$ Structure なる functor.

C が世界の集合, $c \in C$ は可能世界. valuation ρ に対して,

- $c, \rho \Vdash P(t_1, \dots, t_n)$ iff $\mathcal{A}_c, \rho \models P(t_1, \dots, t_n)$ (structure $\mathcal{A}_c$ と ρ の元で true)
- $c, \rho \nVdash \bot$
- $c, \rho \Vdash \varphi \vee \psi$ iff $c, \rho \Vdash \varphi$ 又は $c, \rho \Vdash \psi$
- $c, \rho \Vdash \varphi \wedge \psi$ iff $c, \rho \Vdash \varphi$ かつ $c, \rho \Vdash \psi$
- $c, \rho \Vdash \varphi \to \psi$ iff 任意の $c' \geq c$ において "$c', \rho \Vdash \varphi$ ならば $c', \rho \Vdash \psi$"
- $c, \rho \Vdash \exists x. \varphi$ iff ある $a \in \mathcal{A}_c$ があって $c, \rho(x \mapsto a) \Vdash \varphi$.
- $c, \rho \Vdash \forall x. \varphi$ iff 任意の $c' \geq c$ と任意の $a \in \mathcal{A}_c$ に対して $c', \rho(x \mapsto a) \Vdash \varphi$

で定める.

公理 Γ に対して、任意のクリプキモデル $\mathcal{C}$ の任意の可能世界 c に対し、

$$c, \rho \Vdash \Gamma \quad \text{ならば} \quad c, \rho \Vdash \varphi$$

が成立するとき、$\Gamma \Vdash \varphi$ とする。

<u>定理</u> $\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \vdash_{\substack{NJ \\ LJ}} \varphi$

<u>定理</u> $c \leq c'$ のとき $(c, \rho \Vdash \varphi)$ ならば $(c', \rho \Vdash \varphi)$

このときは

$$\begin{tikzcd}
A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "{[\![F]\!]^A}"'] & & B_{\sigma_1} \times \cdots \times B_{\sigma_n} \arrow[dd, "{[\![F]\!]^B}"] \\
\vec{a} \arrow[r, mapsto] & \vec{a} & \\
{[\![F]\!]\vec{a}} \arrow[r, mapsto] & {[\![F]\!]\vec{a}} & \\
A_{\sigma_n} \arrow[rr, hook] & & B_{\sigma_n}
\end{tikzcd}$$

を考えているが、

$$\begin{tikzcd}
K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(i) \arrow[rr, "{K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(\omega)}"] \arrow[dd] & & K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(j) \arrow[dd] \\
\ni \vec{x} \arrow[rr, mapsto] & & (\vec{x})' \in \\
K(\sigma_n)(i) \arrow[rr] & & K(\sigma_n)(j)
\end{tikzcd}$$

横は包含に限定しない。

$\mathbb{B}$: objects : type の列 $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

morphisms : $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \longrightarrow (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ は

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[r, bend left, "K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)"] \arrow[r, bend right, "K(\tau_1, \ldots, \tau_m)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Sets \end{tikzcd}$$

$$\alpha_i : \underset{\displaystyle K(i)_{\sigma_1} \times \cdots \times K(i)_{\sigma_n}}{\overset{\shortparallel}{K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(i)}} \longrightarrow \underset{\displaystyle K(j)_{\tau_1} \times \cdots \times K(j)_{\tau_m}}{\overset{\shortparallel}{K(\tau_1, \ldots, \tau_m)(i)}}$$

$\Sigma \longrightarrow Sign(\mathbb{B})$

$\sigma \longmapsto (\sigma)$

$$F : \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau \longmapsto \begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[r, bend left, "K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)"] \arrow[r, bend right, "K(\tau)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow [\![F]\!]"] & Sets \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(i) \arrow[r] \arrow[d, "{[\![F]\!]_i}"] & K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(j) \arrow[d, "{[\![F]\!]_j}"'] \\ K(\tau)(i) \arrow[r] & K(\tau)(j) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\Sigma, \Pi, \mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{E} \arrow[d] \\ Cl(\Sigma) \arrow[r] & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

(fibration は fibered category と cartesian morphism を定めれば決まる)

fibered category $\mathbb{E}_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}$ objects monotone collections $(X_i \subseteq K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i))_{i\in\mathbb{I}}$

morphisms $(X_i)_{i\in\mathbb{I}} \leq (Y_i)_{i\in\mathbb{I}}$

iff index ごとの包含関係 $X_i \subseteq Y_i$.

$$\begin{array}{ccc} [\![P]\!]^i & \dashrightarrow & [\![P]\!]^j \\ \cap & & \cap \\ K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i) & \rightarrow & K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(j) \end{array}$$

$[\![P]\!]$ は monotone

$\mathbb{E}_{\sigma_1,\dots\sigma_n}$ の object.

reindexing functor α^* (pointwise に逆像)

$$\left(\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[r, bend left, "K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "K(\tau_1,\dots,\tau_m)"'{name=D}] & Sets \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\alpha"] \end{tikzcd}\right)$$

$$\alpha^*((Y_i)_{i\in\mathbb{I}}) = (\alpha_i^{-1}(Y_i))_{i\in\mathbb{I}}$$

$$(\alpha_i : K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i) \longrightarrow K(\tau_1,\dots,\tau_m)(i))$$
$$\cup\!|$$
$$Y_i$$

$\mathbb{E}$ の morphism
$$\begin{array}{ccc} (X_i)_{i\in\mathbb{I}} & \xrightarrow{\alpha} & (Y_i)_{i\in\mathbb{I}} \\ \cap\!| & & \cap\!| \\ (X_i \subseteq K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i)) & & (Y_i \subseteq K(\tau_1,\dots,\tau_m)(i)) \\ (\sigma_1,\dots,\sigma_n) & \xrightarrow[\alpha]{} & (\tau_1,\dots,\tau_m) \end{array}$$

α は 各 i に対し

$$\begin{array}{ccc} X_i & \dashrightarrow & Y_i \\ \cap & & \cap \\ K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i) & \xrightarrow{\alpha_i} & K(\tau_1,\dots,\tau_m)(i) \end{array}$$ をみたす.

・ $(\alpha_i^{-1}(Y_i))_{i\in \mathbb{I}}$ は monotone ?

$(\alpha_i^{-1}(Y_i))_{i\in \mathbb{I}}$ $\quad$ $(Y_i)_{i\in \mathbb{I}}$

$$\sigma \xrightarrow{\alpha} \tau$$

$(Y_i)_{i\in \mathbb{I}}$ monotone

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & Y_j \arrow[d, hook] \\
K(\tau)(i) \arrow[r] & K(\tau)(j)
\end{tikzcd}$$

α: natural

$$\begin{tikzcd}
K(\sigma)(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "K(\sigma)(ij)"'] & K(\tau)(i) \arrow[d, "K(\tau)(ij)"] \\
K(\sigma)(j) \arrow[r, "\alpha_j"] & K(\tau)(j)
\end{tikzcd}$$

欲しい図式

$$\begin{tikzcd}
\alpha_i^{-1}(Y_i) \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & \alpha_j^{-1}(Y_j) \arrow[d, hook] \\
K(\sigma)(i) \arrow[r, "K(\sigma)(ij)"] & K(\sigma)(j)
\end{tikzcd}$$

・ fibration ? $\Rightarrow$ 明らか.

・ fibered Hyting algebra ?

$E_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}$ において,

$$\bot(i) = \emptyset, \quad \top(i) = K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i)$$

$$(X \vee Y)(i) = X(i) \cup Y(i)$$

$$(X \wedge Y)(i) = X(i) \cap Y(i)$$

$$(X \supset Y)(i) = \left\{ \vec{x} \in K(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(i) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall j \geq i, \\ (\vec{x})^j \in X_j \Rightarrow (\vec{x})^j \in Y_j \end{array} \right\}$$

これら全部 monotone であり, reindexing functor で保たれることが確かめられる.

•
$$\frac{(X_i)_i \subseteq \pi^*(Y_i)_i \quad \text{in } \mathbb{E}_{\sigma,\tau}}{\coprod_{(\sigma,\tau)}(X_i)_i \subseteq (Y_i)_i \quad \text{in } \mathbb{E}_\sigma}$$

そもそも π は、

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[r, bend left, "K(\sigma,\tau)"] \arrow[r, bend right, "K(\sigma)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\pi"] & \mathrm{Sets} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{cccc} \pi_i : & K(\sigma,\tau)(i) & \longrightarrow & K(\sigma)(i) \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & K(i)_{(\sigma)} \times K(i)_{(\tau)} & & K(i)_{(\sigma)} \\ & (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & \vec{x} \end{array}$$

なので reindexing functor π^* は pointwise inverse image だから、

$$\pi^*(Y_i)_{i\in\mathbb{I}} = (Y_i \times K(\tau)(i))_{i\in\mathbb{I}}$$

よって

$$\left(\coprod_{(\sigma,\tau)}(X_i)_{i\in\mathbb{I}}\right)(i) \overset{\text{def}}{\equiv} \left\{\vec{x}\in K(\sigma)(i) \;\middle|\; \text{ある } \vec{y}\in K(\tau)(i) \text{ があって } (\vec{x},\vec{y})\in X_{(i)}\right\}$$

これは monotone.

・$\coprod$ の Beck-Chevalley

$$\vec{x} \in \left(\coprod_{\sigma,\tau}(\alpha\times id)^*(X_i)_i\right)(i) \iff \text{ある } \vec{y}\in K(\tau)(i) \text{ があって } (\alpha_i(\vec{x}),\vec{y})\in X_i$$

$$\iff \vec{x} \in \left(\alpha^* \coprod_{(\sigma,\tau)}(X_i)_i\right)(i)$$

・ $$\frac{\pi^*(X_i)_i \subseteq (Y_i)_i \quad \text{in } \mathbb{E}_{\sigma,\tau}}{(X_i)_i \subseteq \prod_{(\sigma,\tau)}(Y_i)_i \quad \text{in } \mathbb{E}_\sigma}$$

$$\left(\prod_{(\sigma,\tau)}(Y_i)_i\right)(i) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \vec{x} \in K(\sigma)(i) \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{任意の } j \geq i \text{ と } \vec{y} \in K(\tau)(j) \text{ について} \\ ((\vec{x})^j, \vec{y}) \in Y_j\end{array} \right\}$$

これは monotone.

$$\left\{ \vec{x} \in K(\sigma)(i) \;\middle|\; \text{任意の } \vec{y} \in K(\tau)(i) \text{ について } (\vec{x}, \vec{y}) \in Y_i \right\}$$

だと monotone にならないのかな。 ならなさそう。

$\Downarrow$ が非自明。 $\vec{x} \in X_i$ なら $(\vec{x})^j \in X_j$、($\because$ monotone).

上の条件から、 $X_j \times K(\tau)(j) \subseteq Y_j$、 よって任意の

$\vec{y} \in K(\tau)(j)$ について $((\vec{x})^j, \vec{y}) \in Y_j$.

・ $\prod$ の Beck-Cheballey

$$\vec{x} \in \left(\alpha^* \prod_{(\sigma,\tau)} (X_i)_i\right)(i) \iff \begin{array}{l}\text{任意の } j \geq i \text{ と } \vec{y} \in K(\tau)(j) \text{ について} \\ (\alpha_j(\vec{x}), \vec{y}) \in Y_j\end{array}$$

$$\iff \vec{x} \in \left(\prod_{(\sigma,\tau)} (\alpha \times id)^* (X_i)_i\right)(i)$$

- $$\frac{(X_i)_i \subseteq \delta^*(Y_i)_i = \left(\{(\vec{x},\vec{y}) \mid (\vec{x},\vec{y},\vec{y}) \in Y_i\}\right)_{i\in\Pi} \quad \text{over} \quad \mathbb{E}_{\sigma,\tau}}{Eq_{\sigma,\tau}(X_i)_i \subseteq (Y_i)_i \quad \text{over} \quad \mathbb{E}_{\sigma,\tau,\tau}}$$

$$\left(Eq_{\sigma,\tau}(X_i)_i\right)(i) = \{(\vec{x},\vec{y},\vec{y}) \in K(\sigma,\tau,\tau)(i) \mid (\vec{x},\vec{y}) \in X_i\}$$

これは monotone.

- Eq の Beck-Cheballey

$(\vec{x},\vec{y},\vec{y}') \in Eq_{(\sigma',\tau)}(\alpha \times id)^*(X_i)_i \iff \vec{y}=\vec{y}', \quad (\alpha_i(\vec{x}),\vec{y}) \in X_i,$

$(\vec{x},\vec{y},\vec{y}') \in (\alpha \times id \times id)^* Eq_{(\sigma,\tau)}(X_i)_i \iff (\alpha_i(\vec{x}),\vec{y}) \in X_i, \quad \vec{y}=\vec{y}'.$

- Eq の Frobenius.

$(\vec{x},\vec{y},\vec{y}') \in \left(Eq_{\sigma,\tau}(\delta^*(X_i) \wedge (Y_i))\right)(i) \iff \vec{y}=\vec{y}', (\vec{x},\vec{y},\vec{y}) \in X_i, (\vec{x},\vec{y}) \in Y_i$

$(\vec{x},\vec{y},\vec{y}') \in \left(X_i \wedge Eq_{\sigma,\tau}(Y_i)\right)(i)$ も同値.