5-3

$K: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$: small とする。 $[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$

K : strongly generating

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{K}$: conservative

$\tilde{K}$: conservative より $\tilde{K}$: fully faithful の方が強いので、

K : dense $\Rightarrow$ K : strongly generating.

K : strongly generating は、K の image だけ見れば良かった。

これは dense に関しては偽。 K が dense $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ image は dense となる。

(∵ Proposition 5.11 $\mathcal{A} \xrightarrow{P} \mathcal{D} \xrightarrow{J} \mathcal{C}$ が dense かつ P が essentially surjective $\Rightarrow$ J : dense.

Proposition 5.7 の前の反例 $\underset{(離散)}{\mathbf{2}} \xrightarrow[\text{essentially surjective}]{} \mathbf{1} \xrightarrow[\text{fully faithful dense}]{1} \mathbf{Set}$ は dense ではない。)

$\mathcal{C}$ に何らかの $K: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$; dense がある ($\mathcal{A}$: small)

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ に small dense full subcategory がある。

($\Rightarrow$はさっきの $\Rightarrow$ で、$\Leftarrow$は明らか) 特にこの subcategory は strongly generating でもある。

- regular generating と dense ($\mathcal{V} = \mathbf{Set}$)

$K : \underset{\text{small}}{\mathcal{A}} \to \underset{\text{cocomplete}}{\mathcal{E}}$ とする。

Theorem 4.91 の後の話。

$$\sum_{x \in X} \mathcal{E}(G_x, C) \cdot G_x \xrightarrow{\varepsilon} C$$

が coequalizer のとき、$\{G_x\}$ を regular generator と呼ぶ。 (これ本の定義がとても良くない)

regular generator は、generator, strong generator より真に強い。

∵ ε が epi

K が dense なら、 $\sum_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(KA, C) \cdot KA \xrightarrow{\varepsilon} C$ は coequalizer になるので

特に regular generator.

(∵ (3.68) $G : \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ がそれなりに良い性質をもつとき

$$\int_{A \in \mathcal{A}} G(A,A) \xrightarrow{\lambda} \prod_{A \in \mathcal{A}} G(A,A) \underset{\sigma}{\overset{\rho}{\rightrightarrows}} \prod_{A, C \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(A,C) \pitchfork G(A,C)$$

は equalizer)

dual をとる + $\mathcal{B}=\mathrm{Set}$ にする + $G(A,A)=\mathcal{C}(KA,C)\cdot KA$ でとると、

$$\sum_{A,A'\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(A',A)\cdot(\mathcal{C}(KA',C)\cdot KA) \rightrightarrows \sum_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{C}(KA,C)\cdot KA \xrightarrow{\lambda} \int^{A\in\mathcal{A}} \mathcal{C}(KA,C)\cdot KA$$

$$\int^{A\in\mathcal{A}} \mathcal{C}(KA,C)\cdot KA \cong C \quad (5.3)$$

ε

dense

・dense の方が regular generator より真に強いことを示す. ($\mathcal{V}=\mathrm{Set}$)

Comp : コンパクトハウスドルフ空間の圏

ここで $\{1\}$ は regular generator (1は1点の空間)

∵
$$\sum_{x\in X} \mathcal{C}(G_x,C)\cdot G_x \xrightarrow{\varepsilon} C$$

明らかに $\{1\}$ は generator

$X=\{1\}$. C : コンパクトハウスドルフ空間

$$\sum_{x\in X} \mathcal{C}(G_x,C)\cdot G_x = |C|\cdot 1 = |C|$$

$\sum_{x\in C} 1$　1点の $|C|$ 個の直和.

$\varepsilon : |C| \longrightarrow C \ ; \ x \mapsto x$. で ε は epi.

任意の epi は coequalizer らしい.

しかし Comp の small subcategory $\mathcal{A}$ で dense なものはない これを示す.

θ : 正則基数 ($\mathrm{cof}(\theta)=\theta$ なる基数) で、

$\mathcal{A}$ の任意の object より大きいものとする.

w

$\Omega = \{\alpha \leq \theta \mid \alpha : \text{ordinal}\}$ に順序位相を入れる. $2=\{0,1\}$ とする.

$\{x \mid \alpha \leq x < \beta\}$

$f:\Omega \longrightarrow 2$ を $f(\alpha)=\begin{cases}1 & (\alpha=\theta)\\ 0 & (\alpha\neq\theta)\end{cases}$ で決める. (fは連続ではない)

Set の morphism

$$\phi_A : \mathrm{Comp}(A,\Omega) \longrightarrow \mathrm{Comp}(A,2) \qquad \phi : \mathrm{Comp}(-,\Omega) \Rightarrow \mathrm{Comp}(-,2)$$

を f の post composition で定める. これは自然である

よって $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{Comp}$: dense なら

$\phi \in \mathrm{Set}(\mathrm{Comp}(1-, \Omega), \mathrm{Comp}(1-, 2))$

$\cong \mathrm{Comp}(\Omega, 2)$.

よって 何らかの $g : \Omega \to 2$ がとれる.

$\mathcal{A} \ni A \neq \emptyset$ を1つとると, constant $x : A \to \Omega$ をとると,

$f \circ x = g \circ x$ をみたす. よって $f = g$. fは連続でないので contradiction

5.1 (ii) $\tilde{K} : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ が fully faithful

によって K: dense のとき $\mathcal{C}$ は $[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ の full subcategory と見れる.

この K は復元できるか.

Proposition 5.14 full subcategory $\mathcal{C}$ の inclusion $J : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$

が 何らかの $K : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ に対して $\tilde{K}$ と isomorphic であることと,

各 $\mathcal{A}(-, A) \in [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ に reflection が $\mathcal{C}$ にあること が同値.

このとき KA は $\mathcal{A}(-, A)$ の reflection で Kは同型を除いて一意.

proof ($\Rightarrow$) yoneda より, $(JC)A \cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](\mathcal{A}(-, A), JC)$

$JC \cong \tilde{K}C = \mathcal{C}(K-, C)$

$\cancel{\cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](JK-, JC)}$

) Jは単に包含関手. fullsub なので

$(JC)A \cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](JKA, JC)$

よって yoneda より $\mathcal{A}(-, A) \cong KA \in \mathcal{C}$

($\Leftarrow$) KA を $\mathcal{A}(-, A)$ の reflection で選んだときに $\mathcal{V}$-functor になればいい.

これは1.10でやった方法で一通りにできる.

($F : \mathcal{C} \otimes \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{V}$ を J の transpose で定め,

$J : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$

$$F(-,A) = (J-)A = - \longmapsto [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}](\mathcal{A}(*,A), J-)$$
$$\cong \mathcal{C}(KA,-)$$

となるので 1.10 の形。

あとは逆をたどるだけ

$$\mathcal{C}(KA, C) \cong [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}](\underline{\mathcal{A}(-,A)}, JC) \leftarrow$$

Proposition 5.15

$\mathcal{A}$: small. $\mathcal{C}$ は $[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$ の reflective full subcategory と$\mathcal{V}$圏同値

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ が cocomplete で、dense functor $K: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ がある。

(同型を除いて) "inclusion" $J: \mathcal{C} \to [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]$ は $\tilde{K}$. 但し K は

$$\mathcal{A} \xrightarrow{Y} [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}] \xrightarrow{S} \mathcal{C} \qquad (S \dashv J)$$

このような $\mathcal{C}$ は cocomplete である。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend right, "J"'] & {[\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}]} \arrow[l, bend right, "S"'] \arrow[l, phantom, "\perp"] \end{tikzcd}$$

$SJ = \mathrm{Id}$

$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ has one, and if and only if the inclusion $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ has one.

A full subcategory $\mathcal{A}$ of $\mathcal{B}$ is called *reflective* if the inclusion $T\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ has a left adjoint. This implies, of course, that $\mathcal{A}_0$ is reflective in $\mathcal{B}_0$, but is in general strictly stronger. It follows – since it is trivially true for ordinary categories – that *every retract*

proof.

($\Rightarrow$) dense $\Leftrightarrow$ $\tilde{K}$ が fully faithful $\Leftarrow$ $\tilde{K} \cong J$: fully faithful

なので $\tilde{K} \cong J$ を示せば dense は従う。

前の prop の $\Leftarrow$ の証明を使う。示すのは $K = SY$

$\mathcal{C}(KA,C) \cong [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}](\mathcal{A}(-,A), JC)$ となること

$$\left[\mathcal{C}(KA,C) = \mathcal{C}(SYA,C) \cong [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}](\underline{YA}, JC)\right]$$

$$\cong [\mathcal{A}^{op},\mathcal{V}](\underline{JSYA}, JC) \quad \not\Rightarrow YA \cong JSYA$$

$JSX \cong X \Leftrightarrow X \in \mathcal{C}$

また、cocomplete な $\mathcal{V}$圏の reflective subcategory も cocomplete.

$(\Leftarrow)$ $K \in [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ $S \in \mathrm{Cocts}[[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}], \mathcal{B}]$

$S \dashv \tilde{K} =: J$

<u>Proposition 5.16</u>

$\mathcal{C}$ が representables を含む $[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ の full subcategory と圏同値

$\Leftrightarrow$ dense fully-faithful $K : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が存在する.

(the "inclusion" $J : \mathcal{C} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ が $\tilde{K}$ で,
$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ が K)

proof $(\Rightarrow)$ $\mathcal{C}$ が representables を含むなら, $J : \mathcal{C} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ は

$J(\mathcal{A}(-, A)) = \mathcal{A}(-, A)$ なので Prop 5.14 より $J \cong \tilde{K}$ で

$K : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ は $J(KA) = \mathcal{A}(-, A)$ になるようなものを選ぶのだから,

$KA = \mathcal{A}(-, A)$ で, これは inclusion.

$(\Leftarrow)$ $K : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が fully faithful なら,

$(\tilde{K}KA = \mathcal{C}(K-, KA) \cong \mathcal{A}(-, A) = YA$ より$)$

ある $\mathcal{C}'$: $[\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ の full subcategory があって, $\mathcal{C} \xrightarrow[\text{equivallace}]{\tilde{K}} \mathcal{C}'$

$\mathcal{C}' \overset{J}{\hookrightarrow} [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$

$YA \cong \tilde{K}KA = J\tilde{K}KA$ $\quad$ $\tilde{K}KA \in \mathcal{C}'$

$[\ \ ] \leftarrow \mathcal{C}$ $\quad$ $\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}$ $\quad$ $J\tilde{K}KA \cong YA$

P.91 3行目〜7行目に戻る.

$\mathcal{V} = \mathrm{Set}$, Cat_0 の射　　　　$\mathbb{2} = \{ \cdot \xrightarrow{f} \cdot \}$

$\underbrace{\mathrm{Cat}_0(\mathbb{2}, \mathcal{A})}_{\text{集合}} \cdot \mathbb{2} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{A}$ は coequalizer でない例

$$\mathcal{A} = \begin{tikzcd} * \arrow[loop above, "e"] \arrow[loop below, "id"] \end{tikzcd} \quad (ee = e)$$

$\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) = \{*\}$　　$ee = e$

$\mathcal{A}(*, *) = \{id, e\}$

$\mathrm{Cat}_0(\mathbb{2}, \mathcal{A}) = \{id, e\}$,

$$\mathbb{2} + \mathbb{2} = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \xrightarrow{f_0} \cdot \\ \cdot \xrightarrow[f_1]{} \cdot \end{array} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{2}+\mathbb{2} \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathbb{2} \arrow[r] \arrow[dr, "f \mapsto id"'] & \mathbb{2}+\mathbb{2} \arrow[d, dashed, "\varepsilon"', "{f_0 \mapsto id,\ f_1 \mapsto e}"] & \mathbb{2} \arrow[l] \arrow[dl, "f \mapsto e"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

$c = \varepsilon$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathbb{2}+\mathbb{2} \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'"'] & \mathcal{A} \\ & & \mathbb{N} \arrow[u, dashed, "\exists"'] \end{tikzcd}$$

$f_0 \mapsto 0$

$f_1 \mapsto 1$

$cF = cG$ なら,

$c'F = c'G$

$\because\ c'F(f) = 1$

$\Leftrightarrow Ff = f_1$

$\Leftrightarrow cFf = e \Leftrightarrow cGf = e$

$\Leftrightarrow Gf = f_1$

$\Leftrightarrow c'G(f) = 1$

可換にする $\mathbb{N} \xrightarrow{H} \mathcal{A}$ があるなら,

$H(0) = id$, $H(1) = Hc'(f_1) = c(f_1) = e$

$H(n+1) = H(1) \cdot H(n) = e \circ H(n) = e$

F) 一意.