2.6 Simple parameters.

data types with simple parameters.

まず simple parameters 付きの finite coproducts を簡単に述べる.
次に simple parameters 付き自然数について述べて,
最後に Hagino signatures のような simple parameters 付き帰納的データ型を見る. これには, strong functor と呼ばれるものが重要な役割をもつ.

<u>Rem</u>

1.8.3. Examples. (ii)

$\mathbb{B}$ が finite products をもつ

$\Rightarrow$ $s(\mathbb{B}) \downarrow \mathbb{B}$ は split fibered finite products をもつ

fibered finite product
各 fiber category $s(\mathbb{B})_I$ が finite products をもち, reindexing functor u^* で保たれるもの

$s(\mathbb{B})$ の $I \in \mathbb{B}$ 上の fibered category は $\mathbb{B}/\!/I$ と書いて, object は $\mathbb{B}$ の object X,

$$\frac{X \longrightarrow Y \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I}{\overline{} \atop I \times X \longrightarrow Y \quad \text{in } \mathbb{B}}.$$

index

(I) Distributive coproducts

(II) Natural numbers

(III) Hagino signatures and strong functors ← 長い.

(I) Distributive coproducts

普通の coproduct

$$\begin{array}{c} X \longrightarrow Z \qquad\qquad Y \longrightarrow Z \\ \hline\hline X+Y \longrightarrow Z \end{array}$$

(+ naturality)

(def) coproducts with simple parameters

$^{\forall} I \in \mathbb{B}$,

$$\begin{array}{c} I\times X \longrightarrow Z \qquad\qquad I\times Y \longrightarrow Z \\ \hline\hline I\times(X+Y) \longrightarrow Z \end{array}$$

(natural in X, Y, Z)

(分配則は一般に成り立たない)

2.6.1 Proposition

$\mathbb{B}$ を有限直積 有限直和 つきの圏とする.
以下は同値

(i) $\mathbb{B}$ は coproducts with simple parameters をもつ. ← 上で定義

(ii) $\begin{array}{c} S(\mathbb{B}) \\ \downarrow \\ \mathbb{B} \end{array}$ は fibered coproducts をもつ.

(iii) $\mathbb{B}$ は分配的な coproducts をもつ. つまり

$$\begin{tikzcd} I\times X \arrow[r] \arrow[dr, "1\times i_1"'] & (I\times X)+(I\times Y) \arrow[d, dashed] & I\times Y \arrow[l] \arrow[dl, "1\times i_2"] \\ & I\times(X+Y) & \end{tikzcd}$$

は iso.

Date

proof　(i)⇔(iii) は 明らかに同値.

(i)⇔(ii) も直ぐ.

$$\frac{I \times X \longrightarrow Z \quad \text{in } \mathbb{B}}{X \longrightarrow Z \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I}$$ の対応より

(i) は $\mathbb{B}/\!/I$ が coproduct をもつことを示し,
reindexing functor で保たれることは
$\forall u : I \longrightarrow J$ に対して $u^*(X+Y) = X+Y$ により明らか.

ちなみに分配的ではない圏の例として Ab, Grp がある.

(Ab の例が簡単で, 直和と直積は有限のとき一致して,
$$A \times (B+C) \cong A \times B \times C$$
$$(A \times B) + (A \times C) \cong A \times B \times A \times C$$
なので)

(II) Natural numbers.

Rem　有限直積付きの圏での natural number object (NNO) は次のようなもので,

$$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$$

任意の $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{g} X$ なる形の図式に対し,
唯1つ下を可換にする $h: N \to X$ があるもの.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[r, "x"'] & X \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

NNO は次をみたす.

$$h0 = x, \quad h(Sn) = g(hn)$$

$(n \text{ は } \underbrace{SS\cdots S}_{n\text{個}}0)$

Sets の場合だと写像の形で,

$$h(n) = g^n(x)$$

と書ける.

これの simple parameters を付ける.

Date

Def

$$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$$

が NNO with simple parameters であるとは，

任意の I と $f : I \times 1 \longrightarrow X$ と $g : I \times X \longrightarrow X$

に対して唯1つ下を可換にする $h : I \times N \longrightarrow X$ があること．

$$\begin{tikzcd}
I \times 1 \arrow[r, "id \times 0"] \arrow[d, equal] & I \times N \arrow[r, "id \times S"] \arrow[d, dashed, "\langle \pi, h \rangle"] & I \times N \arrow[d, dashed, "\langle \pi, h \rangle"] \\
I \times 1 \arrow[r, "\langle \pi, f \rangle"'] & I \times X \arrow[r, "\langle \pi, g \rangle"'] & I \times X
\end{tikzcd}$$

いま，

$$h(i, 0) = f i \qquad (i は I の generalized element)$$

$$h(i, Sn) = g(i, h(i, n))$$

これを，$\mathbb{B}/\!/I$ で考えれば 唯の NNO になるよね．

つまり $\begin{array}{c} S(\mathbb{B}) \\ \downarrow \\ \mathbb{B} \end{array}$ の fibered NNO と考えられる．

もう少し一般化して，一般の fibration で考えると，次のようになる．

2.6.2 Definition

fibered terminal object のある fibration が fibered natural numbers object をもつとは、各 fiber に NNO があって、reindexing functors で保たれること。

2.6.3 Proposition

$\mathbb{B}$: 有限直積をもつ圏. 次は同値.

(i) $\mathbb{B}$ は NNO with simple parameters をもつ.

(ii) $\mathbb{B}$ は NNO $0, S$ をもち、任意の $I \in \mathbb{B}$ に対し、functor $I^* : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}/\!/I$ を考えると、$\mathbb{B}/\!/I$ において $I^*(0)$, $I^*(S)$ は NNO になる.

(iii) $\begin{matrix} s(\mathbb{B}) \\ \downarrow \\ \mathbb{B} \end{matrix}$ は fibered NNO をもつ.

(ii) について、

$$I^* : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}/\!/I$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \times X \arrow[d] \arrow[dr, "\pi"] & \\ Y & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

なる functor

proof 明らかだと思ってしまった。

Date

(III) Hagino signatures and strong functors

<u>Remark</u>

Def 2.3.7 Hagino signatures

X は S にない fresh な symbol とする。 (S は atomic types)

Hagino signature とは 分配的な(?) signature で

唯1つの function symbol をもち、それが次の

どちらかであるようなもの。

$$\mathrm{constr} : \sigma \longrightarrow X$$

$$\mathrm{destr} : X \longrightarrow \sigma$$

但し $\sigma \in \overline{S \cup \{X\}}$ (閉包は finite product と finite coproduct で閉じていることを表わす)

Def. S の $\mathbb{B}$ における model とは、(S:集合)

S を離散圏とみたときの functor

$$S \longrightarrow \mathbb{B}$$

S の $\mathbb{B}$ における model の圏とは、functor category

$$\mathbb{B}^S$$

のこと。

Date

2.6.4 Definition

$\mathbb{B}$: distributive category
$A : S \longrightarrow \mathbb{B}$　　i.e.　$(A_s)_{s \in S}$　$A_s \in \mathbb{B}$
$\sigma \in \overline{S \cup \{X\}}$

に対し, *polynomial functor* $T(A)_\sigma : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ を
σ の構造に関して帰納的に以下のように定める.

$$T(A)_\sigma = \begin{cases} \text{the constant functor } A_s & \text{if } \sigma \equiv s \in S \\ \text{the identity functor } 1_{\mathbb{B}} & \text{if } \sigma \equiv X \\ \text{the constant functor } 0 & \text{if } \sigma \equiv 0 \\ \text{the constant functor } 1 & \text{if } \sigma \equiv 1 \\ T(A)_{\sigma_1} + T(A)_{\sigma_2} & \text{if } \sigma \equiv \sigma_1 + \sigma_2 \\ T(A)_{\sigma_1} \times T(A)_{\sigma_2} & \text{if } \sigma \equiv \sigma_1 \times \sigma_2 \end{cases}$$

あとで使う.

algebra と co-algebra を定義する.

Def

任意の 自己関手 $T : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ に対し,
algebra もしくは T-algebra とは,
"carrier" object $Y \in \mathbb{B}$ と morphism $\varphi : T(Y) \longrightarrow Y$ の組
co-algebra とは carrier object Z と morphism $\psi : Z \longrightarrow T(Z)$ の組.

example

G: 群 とすると $T(X) = 1 + X \times X + X$ に対し,
$T(G) \longrightarrow G$ が $1 \xrightarrow{e} G$, $G \times G \xrightarrow{m} G$, $G \xrightarrow{(-)^{-1}} G$
で1つ決まる.

dinamical systems を考える. Z を"状態空間", 写像 (map)
$Z \longrightarrow T(Z)$ を 遷移関数, dynamics と考えると
coalgebra的になる. 例えば

Σ: finite alphabet

$$T(X) = (1+X)^{\Sigma}$$

とすると, co-algebra $Z \longrightarrow T(Z)$ を

$$Z \times \Sigma \longrightarrow 1 + Z$$

$$(z, \sigma) \longmapsto \begin{cases} \text{unsuccessful} \in 1 \\ z' \in Z \quad (z' \text{ は new state}) \end{cases}$$

とすると オートマトン的 (私の知ってる定義とちょっとちがう)

Def　$T: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ に対し，圏 $Alg(T)$ を，

objects : T-algebra

morphism : $\begin{pmatrix} T(Y) \\ \downarrow \varphi \\ Y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} \begin{pmatrix} T(Z) \\ \downarrow \psi \\ Z \end{pmatrix}$ は，下を可換にする $h: Y \longrightarrow Z$ in $\mathbb{B}$.

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\varphi"] & T(Z) \arrow[d, "\psi"'] \\ Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

$CoAlg(T)$ も同様.

$Alg(T)$ の initial object，$CoAlg(T)$ の terminal object について調べる.

Note that, $T(X) = 1 + X$ の initial algebra は定義から，NNO のことである.

$$\left(\begin{tikzcd} 1+N \arrow[r, "1+h"] \arrow[d, "{[0,s]}"] & 1+X \arrow[d, "{[x,g]}"] \\ N \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd} \text{ は，} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "0"] & 1 \arrow[d, "x"] \\ N \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd} \text{ と } \begin{tikzcd} N \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd} \text{ のことなので} \right)$$

Date

2.6.5 Lemma (Lembek)

Initial T-algebra $\varphi : T(Y) \longrightarrow Y$ は iso.

つまり fixed point.

proof.

$$\begin{tikzcd} T^2(Y) \arrow[r, "T(\varphi)"] \arrow[d, "T(\varphi)"] & T(Y) \arrow[d, "\varphi"] \\ T(Y) \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, "T(f)"] & T^2(Y) \arrow[d, "T(\varphi)"] \\ Y \arrow[u, leftarrow, "\varphi"'] \arrow[r, "\exists! f"] & T(Y) \end{tikzcd}$$

右は initial であることから唯1つ存在する f.

$\varphi \circ f : Y \longrightarrow T(Y) \longrightarrow Y$ は identity. (∵ 一意性)

$f \circ \varphi = T(\varphi) \circ T(f) = T(\varphi \circ f) = T(id) = id$ □

Exercises 2.6.4

$T : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ の initial algebra は, ω-chain

$$0 \xrightarrow{!} T(0) \xrightarrow{T(!)} T^2(0) \longrightarrow \cdots$$

の colimit が存在して T が ω-colimit を preserve するなら, それと iso.

2.6.6 Definition

$\sigma(X) \in \overline{S \cup \{X\}}$, $A : S \longrightarrow \mathbb{B}$

$\mathbb{B}$: distributive.

帰納的 Hagino signature

$$\sigma(X) \xrightarrow{\text{constr}} X$$

の $\mathbb{B}$ での *initial model* とは，
initial $T(A)_\sigma$ -algebra で，これも

$$T(A)_\sigma(X) \xrightarrow{\text{constr}} X$$

と書く．

余帰納的 Hagino signature の terminal model も
同様に定義する．

以下，simple fibration を使って このようなデータ型 のパラメータ付き
バージョン を作る．

2.6.7 Definition

$\mathbb{B}$: finite products 有り

$T : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ が *strong* であるとは,
strength natural transformation $st : - \times T\square \Rightarrow T(- \times \square)$
があって,

$$\begin{tikzcd}
I \times TX \arrow[r, "st"] \arrow[dr, "\pi'"'] & T(I \times X) \arrow[d, "T(\pi')"] \\
& TX
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
I \times (J \times TX) \arrow[r, "id \times st"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & I \times T(J \times X) \arrow[r, "st"] & T(I \times (J \times X)) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
(I \times J) \times TX \arrow[rr, "st"] & & T((I \times J) \times X)
\end{tikzcd}$$

を共に可換にすること.

2.6.8 Examples.

(i) 任意の関手 $T : \mathbb{S}\mathrm{ets} \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ets}$ は strong である.
strength は,

$$\begin{array}{ccc}
I \times TX & \longrightarrow & T(I \times X) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(i, a) & \longmapsto & T(\underset{X \longrightarrow I \times X}{f : x \mapsto \langle i, x \rangle})(a)
\end{array}$$

で与えられる.

- st は natural

$$
\begin{tikzcd}
I \times TX \arrow[r, "st"] \arrow[d, "\langle k, Th \rangle"'] & T(I \times X) \arrow[d, "T(\langle k,h \rangle)"] \\
I' \times TX' \arrow[r, "st"] & T(I' \times X')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(i,a) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & T(x \mapsto \langle i,x \rangle)(a) \arrow[d, mapsto] \\
(k(i), Th(a)) \arrow[r, mapsto] & T(x \mapsto \langle k(i), x \rangle)(Th(a))
\end{tikzcd}
$$

$T(\langle k,h \rangle)(T(x \mapsto \langle i,x \rangle)(a))$

$$
\begin{aligned}
& T(x \mapsto \langle k(i), x \rangle)(Th(a)) \\
= \; & T(x \mapsto \langle k(i), h(x) \rangle)(a) \\
= \; & T(\langle k,h \rangle) \circ T(x \mapsto \langle i,x \rangle)(a)
\end{aligned}
$$

- 1つ目の図式

$$
\begin{tikzcd}
I \times TX \arrow[r, "st"] \arrow[dr, "\pi'"'] & T(I \times X) \arrow[d, "T(\pi')"] \\
& T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(i,a) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & T(x \mapsto \langle i,x \rangle)(a) \arrow[d, mapsto] \\
& T(\pi') \circ T(x \mapsto \langle i,x \rangle)(a)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
& T(\pi') \circ T(x \mapsto \langle i,x \rangle)(a) \\
= \; & T(x \mapsto x)(a) \\
= \; & a
\end{aligned}
$$

- 2つ目の図式

$$
\begin{tikzcd}
(i,(j,a)) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\alpha"] & (i, T(x \mapsto (j,x))(a)) \arrow[r, mapsto] & T(y \mapsto (i,y)) \circ T(x \mapsto (j,x))(a) \\
& & T(x \mapsto (i,(j,x)))(a) \arrow[u, phantom, "\parallel"] \\
((i,j),a) \arrow[rr, mapsto] & & T(x \mapsto ((i,j),x))(a) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

Date

例えば，functor $list(-)$

$$A \longmapsto list(A)$$

について考えると，

$$st : I \times list(A) \longrightarrow list(I \times A)$$

は，

$$(i, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle) \longmapsto \underset{\displaystyle map\,(x \mapsto (i,x))\ a}{\langle (i, a_1), \ldots, (i, a_n) \rangle} \quad (\text{with } \shortparallel)$$

で与えられる．

2.6.8
Examples

(ii) $\mathbb{B}$: distributive category に対し，

$$\begin{cases} \text{identity functor } \mathbb{1}_{\mathbb{B}}, \\ \text{constant functors} \end{cases} \text{ は strong.}$$

さらに $T, S : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ が strong なら，

$$\underset{Y \mapsto TY \times SY}{T \times S}, \quad \underset{Y \mapsto TY + SY}{T + S} \quad \text{も strong.}$$

すなわち，$T(A)_\sigma$ は strong である．

これを示す．

・ $1_{\mathbb{B}}$ は, $st = id$ として

$$
\begin{tikzcd}
I\times X \arrow[r, equal] \arrow[dr, "\pi'"'] & I\times X \arrow[d, "\pi'"] \\
& X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I\times(J\times X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "a^{-1}"', "\cong"] & I\times(J\times X) \arrow[r, equal] & I\times(J\times X) \arrow[d, "a^{-1}", "\cong"'] \\
(I\times J)\times X \arrow[rr] & & (I\times J)\times X
\end{tikzcd}
$$

となるだけ.

・ constant functor $A : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ は, $st = \pi' : I\times A \longrightarrow A$ として

$$
\begin{tikzcd}
I\times A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dr, "\pi'"'] & A \arrow[d, "id"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I\times(J\times A) \arrow[r, "id\times\pi'"] \arrow[d, "a^{-1}"] & I\times A \arrow[r, "\pi'"] & A \arrow[d, "id"] \\
(I\times J)\times A \arrow[rr, "\pi'"] & & A
\end{tikzcd}
$$

となるだけ.

・ T の strength を st_T, S の strength を st_S とする.
st を

$$
\begin{tikzcd}
I\times(TX\times SX) \arrow[r, "st"] \arrow[d, "\Delta\times 1"] & T(I\times X)\times S(I\times X) \\
(I\times I)\times(TX\times SX) \arrow[r, "\sim"] & (I\times TX)\times(I\times SX) \arrow[u, "st_T\times st_S"']
\end{tikzcd}
$$

で定める. (定義から自然)

1つ目の図式は

$$
\begin{tikzcd}
I\times(TX\times SX) \arrow[r] \arrow[drr, "\pi'"'] & (I\times TX)\times(I\times SX) \arrow[r, "st_T\times st_S"] \arrow[dr, "\pi'\times\pi'"] & T(I\times X)\times S(I\times X) \arrow[d, "T\pi'\times S\pi'"] \\
& & TX\times SX
\end{tikzcd}
$$

2つ目の図式も計算は簡単.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
I\times(J\times(TX\times SX)) \arrow[rr, "1\times(\Delta\times 1)"] \arrow[drr, "\Delta\times(\Delta\times 1)"] \arrow[dddd, "a^{-1}"'] & & I\times((J\times J)\times(TX\times SX)) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta\times 1"] & I\times((J\times TX)\times(J\times SX)) \arrow[r, "1\times(st\times st)"] \arrow[d, "\Delta\times 1"'] & I\times(T(J\times X)\times S(J\times X)) \arrow[d, "\Delta\times 1"'] \\
& & (I\times I)\times((J\times J)\times(TX\times SX)) \arrow[r] \arrow[ddl, "a^{-1}"] & (I\times I)\times((J\times TX)\times(J\times SX)) \arrow[r, "1\times(st\times st)"] \arrow[d] & (I\times I)\times(T(J\times X)\times S(J\times X)) \arrow[d] \\
& & & (I\times(J\times TX))\times(I\times(J\times SX)) \arrow[r, "(1\times st)\times(1\times st)"] \arrow[d] & (I\times T(J\times X))\times(I\times S(J\times X)) \arrow[d, "st\times st"] \\
(I\times J)\times(TX\times SX) \arrow[r, "(\Delta\times\Delta)\times 1"] \arrow[drr, "\Delta\times 1"'] & ((I\times I)\times(J\times J))\times(TX\times SX) \arrow[rr] \arrow[dr] & & ((I\times J)\times TX)\times((J\times J)\times SX) \arrow[d, "st\times st"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & T(I\times(J\times X))\times T(I\times(J\times X)) \arrow[dl, "T(a^{-1})\times T(a^{-1})"] \\
& & ((I\times J)\times(I\times J))\times(TX\times SX) \arrow[ur] & T((I\times J)\times TX)\times S((I\times J)\times SX) &
\end{tikzcd}
$$

この外側が2番目の図式になっている.

これがstの条件

◦ T の strength を st_T，S の strength を st_S とする．

st を，

$$I\times(TX+SX)\cong(I\times TX)+(I\times SX)\xrightarrow{st_T+st_S}T(I\times X)+S(I\times X)$$

で定める．

1つ目は

$$\begin{tikzcd}
I\times(TX+SX) \arrow[drr, "\pi'"'] & (I\times TX)+(I\times SX) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "st_T+st_S"] \arrow[dr, "\pi'+\pi'"'] & T(I\times X)+S(I\times X) \arrow[d, "T(\pi')+T(\pi')"] \\
& & TX+SX
\end{tikzcd}$$

左側はがんばるとできるが
面白くない．

2つ目は．

$$\begin{tikzcd}
I\times(J\times(TX+SX)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[ddd, "a^{-1}"] & I\times((J\times TX)+(J\times SX)) \arrow[r, "1\times(st+st)"] \arrow[d, "\cong"] & I\times(T(J\times X)+S(J\times X)) \arrow[d, "\cong"] \\
& (I\times(J\times TX))+(I\times(J\times SX)) \arrow[r, "(1\times st)+(1\times st)"] \arrow[dd, "a^{-1}+a^{-1}"] & (I\times T(J\times X))+(I\times S(J\times X)) \arrow[d, "st+st"] \\
& & T(I\times(J\times X))+S(I\times(J\times X)) \arrow[d, "T(a^{-1})+S(a^{-1})"] \\
(I\times J)\times(TX+SX) \arrow[r, "\cong"] & ((I\times J)\times TX)+((I\times J)\times SX) \arrow[r, "st+st"] & T((I\times J)\times X)+S((I\times J)\times X)
\end{tikzcd}$$

→ 外側．

Date

2.6.9 Proposition

$\mathbb{B}$: finite products 有.

次の bijective correspondence がある.

$$\frac{\text{strong functors } \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}}{\text{split functors } \begin{tikzcd} s(\mathbb{B}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & s(\mathbb{B}) \arrow[dl] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}}$$

この対応により, strong functor $T: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ に対し,
対応する split functor の各 fiber への制限を,

$$T/\!\!/I \ : \ \mathbb{B}/\!\!/I \longrightarrow \mathbb{B}/\!\!/I$$

と書くことにする.

proof.

strong functor (T, st) から split functor $\overline{T}: s(\mathbb{B}) \longrightarrow s(\mathbb{B})$ を作る. これは,

$$(I, X) \xmapsto{\overline{T}} (I, TX)$$

$$\begin{tikzcd} I \times X \arrow[d, "f"] \\ Y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} (I, X) \arrow[d, "(u, f)"] \\ (J, Y) \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} (I, TX) \arrow[d, "(u, Tf \circ st)"] \\ (J, TY) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} I \times TX \arrow[d, "st"] \\ T(I \times X) \arrow[d, "Tf"] \\ TY \end{tikzcd}$$

で定める. これが split functor であることを示す.

① $\overline{T}(1_{(I,X)}) = (1, T(\pi') \circ st) = (1, \pi') = 1_{(I,TX)}$

$$\begin{tikzcd} I \times X \arrow[d, "\pi'"] \\ X \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} I \times TX \arrow[r, "st"] \arrow[d, "\pi'"'] & T(I \times X) \arrow[dl, "T(\pi')"] \\ TX & \end{tikzcd}$$

(strong の図式の1つ目)

② $(I, X) \xrightarrow{(u,f)} (J, Y) \xrightarrow{(v,g)} (K, Z)$ に対し、

$$(v,g)\circ(u,f) = (v\circ u,\ g\circ\langle u\circ\pi, f\rangle)$$

$$Z \longleftarrow J\times Y \longleftarrow I\times X$$

だった。

$$\overline{T}\big((v,g)\circ(u,f)\big)$$

$$= \big(v\circ u,\ T(g\circ\langle u\circ\pi, f\rangle)\circ st\big)$$

$$TZ \longleftarrow T(I\times X) \longleftarrow I\times TX$$

$$\overline{T}(v,g)\circ\overline{T}(u,f)$$

$$= (v,\ Tg\circ st)\circ(u,\ Tf\circ st)$$

$$TZ \leftarrow T(J\times Y) \leftarrow J\times TY \qquad TY \leftarrow T(I\times X) \leftarrow I\times TX$$

$$= (v\circ u,\ Tg\circ st\circ\langle u\pi, Tf\circ st\rangle)$$

$$Tg\circ T\langle u\circ\pi, f\rangle\circ st = Tg\circ st\circ\langle u\pi, Tf\circ st\rangle$$

$$T(I\times X) \leftarrow I\times TX \qquad T(J\times Y) \leftarrow J\times TY \longleftarrow I\times TX$$

を示せば良い。

$$
\begin{tikzcd}
T(I\times X) \arrow[rrrr, "T(\Delta\times 1)"] \arrow[drrrr, phantom, "(st)"] & & & & T((I\times I)\times X) \arrow[d, "T((u\times 1)\times 1)"] \\
I\times TX \arrow[u, "st"] \arrow[r, "\Delta\times 1"] \arrow[rr, bend left, "\langle u,1\rangle\times T(1)"] \arrow[dr, "\langle\pi,1\rangle"'] \arrow[ddrrr, bend right, "\langle u\pi,\, Tf\circ st\rangle"'] & (I\times I)\times TX \arrow[r, "(u\times 1)\times 1"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "(a)"] & (J\times I)\times TX \arrow[rr, "st"] \arrow[d, "a"] \arrow[drr, phantom, "(st\text{の2つ目})"] & & T((J\times I)\times X) \arrow[d, "T(a)"] \\
 & I\times(I\times TX) \arrow[r, "u\times 1"'] & J\times(I\times TX) \arrow[r, "1\times st"] & J\times T(I\times X) \arrow[r, "st"] \arrow[d, "1\times Tf"] \arrow[dr, phantom, "(st)"] & T(J\times(I\times X)) \arrow[d, "T(1\times f)"] \\
 & & & J\times TY \arrow[r, "st"'] & T(J\times Y)
\end{tikzcd}
$$

(st) は st の naturality
(a) も a の naturality
何も書いてない所は 計算すると分かる.

外周の上側は, $T(\sim\sim)\circ st$ の形だが,
この $\sim\sim$ の部分は,

$$
\begin{tikzcd}
 & I \arrow[r, "u"] & J \arrow[r, "1"] & J \arrow[r, "1"] & J \\
I\times X \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "\Delta\times 1"] \arrow[ddrr, "1"'] & (I\times I)\times X \arrow[u, "\pi\circ\pi"'] \arrow[r, "(u\times 1)\times 1"] \arrow[dr, "a"'] & (J\times I)\times X \arrow[u, "\pi\circ\pi"'] \arrow[r, "a"] & J\times(I\times X) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "1\times f"] & J\times Y \arrow[u, "\pi"'] \arrow[dd, "\pi'"] \\
 & & I\times(I\times X) \arrow[ur, "u\times 1"'] \arrow[d, "\pi'"] & & \\
 & & I\times X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}
$$

より, $\langle u\pi, f\rangle$ に等しい. よって示された.

Date

③ cartesian morphism を preserve すること,

$$\begin{tikzcd} s(\mathbb{B}) \arrow[rr, "\overline{T}"] \arrow[dr] & & s(\mathbb{B}) \arrow[dl] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

が可換になること を示す.

後者は明らか. $s(\mathbb{B})$ の cartesian morphism は,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\overline{u}} & Y \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array} \quad \text{where} \quad I \times Y \xrightarrow[\overline{u} = \pi']{} Y$$

だったから, $\overline{T}((u, \pi'))$ を調べればいいが, これは 1つ目の図式

$$\begin{tikzcd} I \times TY \arrow[r, "st"] \arrow[dr, "\pi'"'] & T(I \times Y) \arrow[d, "T(\pi')"] \\ & TY \end{tikzcd}$$

から, $(u, \pi') : (I, TY) \longrightarrow (J, TY)$ になるので OK.

次に逆の対応を作る. すなわち
split functor $s(\mathbb{B}) \xrightarrow{R} s(\mathbb{B})$ から strong functor $\overline{R}$ を作る.

R は
$$\begin{tikzcd} s(\mathbb{B}) \arrow[rr, "R"] \arrow[dr] & & s(\mathbb{B}) \arrow[dl] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$
を可換にしているから,

各 $I \in \mathbb{B}$ に対して fibered category に制限すると

$$\mathbb{B}/\!/I \xrightarrow{R_I} \mathbb{B}/\!/I$$

を誘導する. 特に $I = 1$ にすれば

$$\mathbb{B} \simeq \mathbb{B}/\!/1 \longrightarrow \mathbb{B}/\!/1 \simeq \mathbb{B}$$

を誘導する. これを $\overline{R}$ とする. あとは strength を作る.

Date

$$I \xrightarrow{I} 1 \quad \text{in } \mathbb{B}$$

に対応する reindexing functor $\mathbb{B} \cong \mathbb{B}/\!/1 \longrightarrow \mathbb{B}/\!/I$ を

I^* と書く。 $\overline{R}$ は split fibered functor だから,

$$I^* \circ \overline{R} = R_I \circ I^*.$$

いま simple fibration を考えているから, $I^*(X) = X$ だったから,

$$\begin{aligned} \overline{R}(X) &= I^* \circ \overline{R}(X) \\ &= R_I \circ I^*(X) \\ &= R_I(X). \end{aligned}$$

いま, $1 : I \times X \longrightarrow I \times X$ in $\mathbb{B}$,

$1 : X \longrightarrow I \times X$ in $\mathbb{B}/\!/I$,

$$\begin{array}{cccc} R_I(1) : & R_I(X) & \longrightarrow & R_I(I \times X) \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I, \\ & \| & & \| \\ & \overline{R}(X) & & \overline{R}(I \times X) \end{array}$$

$$st = R_I(1) : I \times \overline{R}(X) \longrightarrow \overline{R}(I \times X) \quad \text{in } \mathbb{B}$$

なる対応で st を定める.

① st は自然である．次を示す．

$$\begin{tikzcd} J\times\bar{R}(X) \arrow[r, "st"] & \bar{R}(J\times X) \\ I\times\bar{R}(X) \arrow[u, "u\times 1"] \arrow[r, "st"] & \bar{R}(I\times X) \arrow[u, "\bar{R}(u\times 1)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times\bar{R}(Y) \arrow[r, "st"] & \bar{R}(I\times Y) \\ I\times\bar{R}(X) \arrow[u, "1\times\bar{R}(f)"] \arrow[r, "st"] & \bar{R}(I\times X) \arrow[u, "\bar{R}(1\times f)"'] \end{tikzcd}$$

1つ目は，$s(\mathbb{B})$の図式

$$\begin{tikzcd} & (J,X) \arrow[dr, "(1,1)"] & & \\ (I,X) \arrow[ur, "(u,\pi')"] \arrow[d, "(1,1)"] & & (J,J\times X) \\ (I,I\times X) \arrow[r, "(1,1\times(u\times 1))"] & (I,J\times X) \arrow[ur, "(u,\pi')"'] & \end{tikzcd}$$

をRで送って示す．まず

$$(I,X)\xrightarrow{(u,\pi')}(J,X)\xrightarrow{(1,1)}(J,J\times X)$$

(u,π') は cartesian morphism over $u:I\longrightarrow J$ だから，Rで送ると，

$$(I,\bar{R}(X))\xrightarrow{(u,\pi)}(J,\bar{R}(X))\xrightarrow{(1,st)}(J,\bar{R}(J\times X))$$

これは $\mathbb{B}$ 上では

$$I\times R(X)\xrightarrow{u\times 1}J\times\bar{R}(X)\xrightarrow{st}\bar{R}(J\times X).$$

次に

$$(I,X)\longrightarrow(I,I\times X)\xrightarrow{(1,1\times(u\times 1))}(I,J\times X)\xrightarrow{(u,\pi')}(J,J\times X)$$

を Rで送る．最後のは cartesian morphism で最初の2つは R_I

$$(I,\bar{R}(X))\xrightarrow[(1,st)]{}(I,\bar{R}(I\times X))\xrightarrow[R(1,1\times(u\times 1))]{}(I,\bar{R}(J\times X))\xrightarrow[(u,\pi')]{}(J,\bar{R}(J\times X))$$

これを $\mathbb{B}$ で見ると，

$$\begin{tikzcd}
I \times \bar{R}(X) \arrow[r, "\langle \pi, st \rangle"] & I \times \bar{R}(I \times X) \arrow[r, "\langle \pi, f \rangle"] \arrow[dr, "f"] & I \times \bar{R}(J \times X) \arrow[d, "\pi'"] \\
 & & \bar{R}(J \times X)
\end{tikzcd}$$

この $f: \quad \bar{R}(I \times X) \longrightarrow \bar{R}(J \times X) \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I$

は，

$$I \times X \longrightarrow J \times X \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I$$

$$\left(= I \times (I \times X) \xrightarrow{(u \times 1) \circ \pi'} J \times X \quad \text{in } \mathbb{B} \right)$$

を R_I で送ったもの．さらにこれは，

$$I \times X \xrightarrow{u \times 1} J \times X \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/1$$

を I^* で送ったものであるから， $R_I I^* = I^* \bar{R}$ より，

$$f = \quad \bar{R}(I \times X) \longrightarrow \bar{R}(J \times X) \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I$$

$$\left(I \times \bar{R}(I \times X) \xrightarrow{\bar{R}(u \times 1) \circ \pi'} \bar{R}(J \times X) \quad \text{in } \mathbb{B} \right)$$

よって $f \circ \langle \pi, st \rangle$ は $\mathbb{B}$ で

$$\begin{tikzcd}
I \times \bar{R}(X) \arrow[r, "\langle \pi, st \rangle"] \arrow[dr, "st"'] & I \times \bar{R}(I \times X) \arrow[d, "\pi'"] & \\
 & \bar{R}(I \times X) \arrow[r, "\bar{R}(u \times 1)"] & \bar{R}(J \times X)
\end{tikzcd}$$

と書ける． よって 1番目の図式は可換

2番目の図式は，

$$\begin{tikzcd}
 & (I,Y) \arrow[dr, "(1,1)"] & \\
(I,X) \arrow[ur, "(1, f\circ\pi')"] \arrow[dr, "(1,1)"'] & & (I, I\times Y) \\
 & (I, I\times X) \arrow[ur, "(1, (1\times f)\circ\pi')"'] &
\end{tikzcd}$$
in $S(\mathbb{B})$

をRで送れば良い．

$f\circ\pi' : X \longrightarrow Y$ in $\mathbb{B}/\!/I$

は，$I^* f : X \longrightarrow Y$ in $\mathbb{B}/\!/I$

だから，$R_I(f\circ\pi')$

$= R_I I^*(f)$

$= I^*\bar{R}(f) = \bar{R}f\circ\pi'$

$$I\times\bar{R}(X) \xrightarrow{\bar{R}f\circ\pi'} \bar{R}(Y)$$

よって上側をRで送ると，

$st\circ\langle\pi, \bar{R}f\circ\pi'\rangle$

$= st\circ(1\times\bar{R}f)$

$(1\times f)\circ\pi' : I\times X \longrightarrow I\times Y$ in $\mathbb{B}/\!/I$

$= I^*(1\times f) : I\times X \longrightarrow I\times Y$ in $\mathbb{B}/\!/I$

$(1\times f : I\times X \longrightarrow I\times Y$ in $\mathbb{B}/\!/1)$

よって

$R_I((1\times f)\circ\pi')$

$= R_I I^*(1\times f)$

$= I^*\bar{R}(1\times f)$

$= \bar{R}(1\times f)\circ\pi'$

よって下側をRで送ると，

$\bar{R}(1\times f)\circ\pi'\circ\langle\pi, st\rangle$

$= \bar{R}(1\times f)\circ st$

よって st は自然．

Date

② strengthの1番目の図式

$$\begin{tikzcd} I \times \overline{R}(X) \arrow[r, "st"] \arrow[dr, "\pi'"'] & \overline{R}(I \times X) \arrow[d, "R(\pi')"] \\ & \overline{R}(X) \end{tikzcd}$$

これは

$$\begin{tikzcd} (I, X) \arrow[r, "(1,1)"] \arrow[ddr, "!"'] & (I, I \times X) \arrow[d, "(1, \pi' \circ \pi')"] \\ & (I, X) \arrow[d, "!"] \\ & (1, X) \end{tikzcd}$$

をRで送れば良い。

③ strengthの2番目の図式

$$(I \times J, X) \longrightarrow (I \times J, J \times X) \longrightarrow (I \times J, I \times (J \times X))$$

を送ればできそう（確かめたくない）。

最後に bijective であることをたしかめなければならない。

Date

(T, st) : strong functor に対し,

$\bar{T}$: $(1, X) \longmapsto (1, TX)$ より $\bar{T}X = TX$.

$$\left(\begin{tikzcd}(1,X) \arrow[d, "{(1,f)}"'] \\ (1,Y)\end{tikzcd}\right) \longmapsto \left(\begin{tikzcd}(1,TX) \arrow[d, "{(1,\, Tf\circ st)}"] \\ (1,TY)\end{tikzcd}\right)$$

$Tf \circ st$ は,

$$\begin{tikzcd} 1\times TX \arrow[dr, "st", "\cong"'] \arrow[dd] & \\ & T(1\times X) \arrow[dl, "Tf"] \\ TY & \end{tikzcd}$$

でこれは $\bar{\bar{T}} = T$ を示す.

$st'_{I,X}$: $I\times TX \longrightarrow T(I\times X)$ が元の st と等しいことは,

$\mathbb{B}/\!/I$ において $X \longrightarrow I\times X$

$\mathbb{B}$ において $I\times X \xrightarrow{\langle\pi, 1\rangle} I\times(I\times X)$

を $\bar{T}$ で送ると,

$$st' = \begin{array}{lll} TX \longrightarrow T(I\times X) & & \text{in } \mathbb{B}/\!/I \\ I\times TX \longrightarrow T(I\times X) & & \text{in } \mathbb{B} \end{array}$$

になるが,

$$\bar{T}(\langle\pi,1\rangle) : I\times TX \xrightarrow{st} T(I\times I\times X) \xrightarrow{T(1)} T(I,X)$$

となり これは st に等しいので OK.

$R : s(\mathbb{B}) \longrightarrow s(\mathbb{B})$ と $\bar{\bar{R}}$ が等しいことを示す.

$$\bar{\bar{R}}(I, X) = (I, \bar{R}X) = R(I, X).$$

$$\begin{tikzcd}
(I, X) \arrow[d, "{(u,f)}"'] & \longmapsto & (I, R_I X) \arrow[d] & \text{は} & I \arrow[dd, "u"] & \text{と} & I \times R_I X \arrow[d, "st"] & \\
(J, Y) & & (J, R_J Y) & & & & R_I(I \times X) & = R_1(I \times X) \arrow[d, "R_1(f)"] \\
& & & & J & & R_J Y & = R_1(Y)
\end{tikzcd}$$

$$(I, R_I X) \longrightarrow (I, R_I(I \times X)) \longrightarrow (I, R_1(Y))$$

$$I \times R_I X \xrightarrow{st} R_I(I \times X) \qquad I \times R_I(I \times X) \xrightarrow{R_1 f \circ \pi'} R_1 Y$$

この合成は $R(u,f)$ の $I \times R_I X \longrightarrow R_J Y$ に等しい.

$$I \times R_I(I \times X) \xrightarrow{R_1 f \circ \pi'} R_1 Y$$
$$= I^* R_1 f$$
$$= R_I I^* f$$

$$I \times R_I X \longrightarrow R_I(I \times X)$$
$$= R_I(X \xrightarrow{1} I \times X \text{ in } \mathbb{B}//I)$$

よってこの合成は, R_I で次を送ったもの.

$$(I, X) \longrightarrow (I, I \times X) \longrightarrow (I, Y)$$
$$(I \times X \xrightarrow{1} I \times X) \circ (I \times (I \times X) \xrightarrow{f \circ \pi'} Y)$$

$$= \underbrace{I \times X \xrightarrow{\langle \pi, 1 \rangle} I \times (I \times X) \xrightarrow{f \circ \pi'} Y}_{f}.$$

よって $R_I f$ に等しい. $(I, R_I(Y)) \longrightarrow (J, R_I(Y))$: cartesian morphism を合成して Rf になる

2.6.10 Definition

Strong functor $T : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ に対して,

algebra $\varphi : TX \longrightarrow X$ は次をみたすとき

initial with simple parameters という.

任意の $I \in \mathbb{B}$ に対し,

$$
\begin{array}{rlll}
I^*(\varphi) : & I \times TX & \longrightarrow X & \text{in } \mathbb{B} \\
& TX & \longrightarrow X & \text{in } \mathbb{B}/\!/I
\end{array}
$$

は $T/\!/I : \mathbb{B}/\!/I \longrightarrow \mathbb{B}/\!/I$ の initial algebra になる.

simple parameter 付き NNO のときは, strong functor

$$TX = 1 + X \longrightarrow X$$

に対して algebra

$$[0,S] : 1 + N \longrightarrow N$$

は 任意の $I \in \mathbb{B}$ に対し,

$$I^*[0,S] : \underset{\displaystyle (I\times 1)+(I\times N)}{\overset{}{I\times(1+N)}\;\cong} \longrightarrow N \quad \text{in } \mathbb{B}$$

$$T/\!/I\,(N) = (1+N) \xrightarrow{I^*\varphi} N \quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I$$

は

$$
\begin{tikzcd}
(1+N) \arrow[r, "T/\!/I(h)"] \arrow[d, "I^*\varphi"'] & (1+X) \arrow[d, "I^*\psi"] \\
N \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd}
\quad \text{in } \mathbb{B}/\!/I
$$

これを $\mathbb{B}$ で書き直すと,

$$
\begin{tikzcd}
 & & & I\times 1+I\times X \arrow[ddl, "{[\langle\pi,x\rangle,\langle\pi,g\rangle]}"] \\
I\times(1+N) \arrow[r, "{\langle\pi,st\rangle}"] \arrow[d, "{\langle\pi,[0,S]\pi'\rangle}"'] & I\times(1+I\times N) \arrow[r, "1\times(1+h)"] & I\times(1+X) \arrow[ur, phantom, "\cong"] \arrow[d, "{\langle\pi,\varphi\rangle}"] & \\
I\times N \arrow[rr, "{\langle\pi,h\rangle}"] & & I\times X &
\end{tikzcd}
$$

分配則を使うと

$$
\begin{tikzcd}
I\times 1 \arrow[r, "\mathrm{id}\times 0"] \arrow[d, Rightarrow, no head] & I\times N \arrow[r, "\mathrm{id}\times S"] \arrow[d, "{\langle\pi,h\rangle}"] & I\times N \arrow[d, "{\langle\pi,h\rangle}"] \\
I\times 1 \arrow[r, "{\langle\pi,x\rangle}"] & I\times X \arrow[r, "{\langle\pi,g\rangle}"'] & I\times X
\end{tikzcd}
$$

になるはず. (stは前に帰納的に構成したやつ)