3.7 Tensor and cotensor products.

この章では，indexed limit $\{F, G\}$ の特別な場合を調べる．
以降

3.7 では，$K = \mathcal{I}$ とする．$(F: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{V},\ G: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{B})$

$\mathcal{I}$ は objects が $\{*\}$，$\mathcal{I}(*, *) = I$ なる $\mathcal{V}$-category.
$\mathcal{V}$-functor $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の object と1対1に対応．
実際 $\mathcal{A}$ の object A に対し，$\mathcal{V}$-functor T が，

$$T(*) = A.$$
$$T_{**} : I = \mathcal{I}(*, *) \xrightarrow{j} \mathcal{A}(A, A)$$

が唯1つ決まる．

$\mathcal{I}$ からの $\mathcal{V}$-functor は codomain の $\mathcal{V}$-category の object 1つと対応する．F が $X \in \mathcal{V}$，$C \in \mathcal{B}$ と対応しているとする．

このとき $\{F, G\}$ を $X \pitchfork C$ と書く．また，$[X, C]$ とも書く．
これは cotensor product と呼ばれる．
$= \text{power}$

$X \in \mathcal{V}$，$C \in \mathcal{B}$ だから $\mathcal{V} \neq \mathcal{B}$ なら記法の濫用ではない
実は $\mathcal{V} = \mathcal{B}$ なら元の $[X, C]$ と一致するので完全にOK．

定義に戻ると，$X \pitchfork C$ は次のような $\mathcal{V}$-自然同型をみたすもの．

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(B, X \pitchfork C) &\cong [\mathcal{I}, \mathcal{V}](F, \mathcal{B}(B, G-)) \\
&= \int_{I \in \mathcal{I}} [FI, \mathcal{B}(B, GI)] \\
&\cong [X, \mathcal{B}(B, C)]
\end{aligned}$$

$\int_{I \in \mathcal{I}}$ は $\mathcal{I}$ の object が1つだけだから外せる．

任意の $X \in \mathcal{V}$ と $C \in \mathcal{B}$ に対し $X \pitchfork C$ が存在するとき，
$\mathcal{B}$ は cotensor product をもつと言う．

($\mathcal{B}$ が complete なら cotensor product がある) ($\mathcal{I}$: small なので)

cotensor product は $\mathcal{B} = \mathcal{V}$ のときは

$$[B, X \pitchfork C] \cong [X, [B,C]]$$

だが, $[B,[X,C]] \cong [X,[B,C]]$ であったから,

$$X \pitchfork C \cong [X, C] \quad \text{in } \mathcal{V}_0$$

← $\mathcal{V}$ の2つの object の iso

これによって, $X \pitchfork C$ を $[X,C]$ と書くことは consistent.

$\mathcal{V}$=Set なら, $X \pitchfork C$ in $\mathcal{B}$ は, power C^X

$$\left(C^X :\overset{\text{def}}{=} \prod_{x \in X} C \right)$$

$$\left(\because \quad \begin{array}{c} X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,C) \\ \hline\hline \{ f_x : B \to C \text{ in } \mathcal{B} \}_{x \in X} \\ \hline\hline B \longrightarrow \prod_{x \in X} C \end{array} \right)$$

ところで $B, C \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ は $\mathcal{V}$-category) が isomorphic な object であることは

- underlying category で $\mathcal{B}_0(B,C)$ に isomorphism があること
- $\mathcal{B}(B,D) \cong \mathcal{B}(C,D)$ なる $\mathcal{V}$-natural isomorphism があること

のどっちで考えても同値な定義になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(B,B) \cong \mathcal{B}(C,B) & \quad & \mathcal{B}(B,C) \cong \mathcal{B}(C,C) \\ \uparrow j & & \uparrow j \\ I & & I \end{array} \qquad I \longrightarrow I \otimes I$$

$\mathcal{B}_0(B, [F,G]) \cong$ ——

$\mathcal{B}(B, [F,G]) \cong$ 〜

双対な概念は tensor product で，これは
$X \in \mathcal{V}$ と $C \in \mathcal{B}$ に対し　$X \otimes C$

$$\mathcal{B}(X \otimes C, B) \cong [X, \mathcal{B}(C, B)]$$

なる $\mathcal{V}$-自然同型がある $X \otimes C$，$A, B, C \in \mathcal{V}$ のとき

$$[A \otimes C, B] \cong [A, [C, B]]$$

が成り立つので $\mathcal{V}$ における tensor product と一致．

$\mathcal{V} = \mathbf{Set}$ のときは

$$\frac{\dfrac{X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(C, B)}{\{f_x : C \longrightarrow B\}_{x \in X}}}{\coprod_{x \in X} C \longrightarrow B}$$

なので，coproduct $X \cdot C$ になる．

$\mathcal{V}$-category の object の iso は underlying category での iso だから自明．

$$\mathcal{B}_0(B, X \pitchfork C) \cong \mathcal{V}_0(X, \mathcal{B}(B, C)) \qquad (3.44)$$

なる underlying category での自然同型があるとき，cotensor product $X \pitchfork C$ が存在するならそれと一致するが，(3.44) から cotensor product の存在は言えない．

$\mathcal{B}_0(B, X \pitchfork C) \cong \mathcal{V}_0(X, \mathcal{B}(B,C))$ が成立しても

$X \pitchfork C$ が cotensor product にならない例.

2-cell

$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots$

$\mathcal{B}$: 2-category を次のグラフから生成されるもの

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & 1 \arrow[r, bend left, "g"] & 2 \arrow[l, bend left, "h"] \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} g\alpha = 1 \\ gh = 1 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gf"] & 1 \arrow[r, bend left, "g"] & 2 \arrow[l, bend left, "h"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{V} = \mathbf{Cat}$:

$X = \mathbb{2}$: 1-category $\in \mathcal{V}$

$C = 2$: 1-cell $\in \mathcal{B}$

$\mathbb{2} \pitchfork 2 = 1$: 1-cell $\in \mathcal{B}$

で定めると, underlying category で

$\mathcal{B}_0(B,1) \cong \mathbf{Cat}_0(\mathbb{2}, \mathcal{B}(B,2))$ in $\mathbf{Set}$ … (1)

をみたすが,

$\mathcal{B}(B,1) \cong \mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \mathcal{B}(B,2))$ in $\mathbf{Cat}$ … (2)

をみたさない.

① まず, $\mathbf{Cat}_0(\mathbb{2}, \mathcal{B}(B,2))$ は集合で,

$\underset{\text{1-cat}}{\mathbb{2}} \longrightarrow \underset{\text{1-cat}}{\mathcal{B}(B,2)}$ なる 1-functor からなる.

$\mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \mathcal{B}(B,2))$ は圏で, object は $\mathbb{2} \longrightarrow \mathcal{B}(B,2)$ なる 1-functor, morphism は 1-natural transformation. に注意する.

② さらに $\mathbb{2} \longrightarrow \mathcal{B}(B,2)$ なる 1-functor とは, $\mathcal{B}(B,2)$: 1-category の morphism 全体の集合である.
そしてこれは $\mathcal{B}$ における 2つの 1-cell $x, y : B \to 2$ の間にある 2-cell $\alpha : x \Rightarrow y$ なるものたちである.

③. $\mathcal{B}$の 1-cell $B \longrightarrow 2$ を調べる. $gh = 1$ より

(B = 0 のとき) $0 \to 2$ なる 1-cell は

$gf = ghgf = \cdots$ の1つだけ

(B = 1 のとき) $1 \longrightarrow 2$ なる 1-cell は

$g = ghg = \cdots$ の1つだけ

(B = 2 のとき) $2 \longrightarrow 2$ なる 1-cell は id_2 だけ.

④ $\mathcal{B}$ の 2-cell を調べる.

$gf \Rightarrow gf$ なる 2-cell は $g\alpha = 1$ より 1_{gf} だけ.

$g \Rightarrow g$, $\mathrm{id}_2 \Rightarrow \mathrm{id}_2$ なる 2-cell は自明に
それぞれ1つずつだけ.

⑤ ①②④ より B に関わらず,
$\mathbf{Cat}_0(\mathbb{2}, \mathcal{B}(B,2))$ は 1元集合になってしまう.
さらに $\mathcal{B}_0(B,1)$ も明らかにそうなので (1) はみたされる.

⑥ $\mathcal{B}(0,1)$: 1-category は, objects が $\{f\}$ で,
morphisms は $\{1_f, \alpha, \alpha^2, \cdots\}$.

$\mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \mathcal{B}(0,2))$: 1-category は, $\mathcal{B}(0,2)^{\to}$ に同型.

$\mathcal{B}(0,2)$ は object が gf のみ, morphism も id_{gf} のみ.

よって (2) はみたされない.

Proposition 3.46.

V が conservative, $\mathcal{V}_0$ の各 object は高々 small set の exteremal epimorphic quotients をもつとする.

$\mathcal{B}_0$ が complete のとき, $\mathcal{B}$ は cotensored である.

proof. $\{V$ が conservative, 高々 small set の extremal epimorphism quotient

$\overset{\text{Prop 3.41}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{V}_0$ は $\{I\}$ の small limits たちからなる closure.

$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{B}_0^{op}: \text{cocomplete}, \ \mathcal{V}_0 \text{ は } \{I\} \text{ の closure.} \\ \overset{\text{~~Prop 3.37~~}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(-,C)_0 : \mathcal{B}_0^{op} \longrightarrow \mathcal{V}_0 \text{ は } I \in \mathcal{I} \text{ に対し} \\ \quad \mathcal{V}_0(I, \mathcal{B}(-,C)) \cong \mathcal{B}_0(-,C) \text{ なので representable.}\end{array}\right.$

$\overset{\text{Prop 3.37}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}(-,C)_0$ は左随伴をもつ.

よって

$$\mathcal{V}_0[X, \mathcal{B}(B,C)] \cong \mathcal{B}_0^{op}(X \pitchfork C, B) = \mathcal{B}_0(B, X \pitchfork C). \quad \text{in Set}$$

~~いま V: V-Cat → Cat なる 2-functor.~~

$V: \mathcal{V}_0 \to Set$ は 1-functor で conservative だから,

$$V(X, \mathcal{B}(B,C)) \cong \mathcal{B}(B, X \pitchfork C)$$

□

Prop 3.37

$\mathcal{C}$: cocomplete.

$\mathcal{B}$ は full subcategory $\mathcal{A}$ の small colimits たちの族からなる closure.

$T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ は, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して

$\mathcal{B}(A, T-)$ が representable ならば, 左随伴をもつ.

Prop 3.41

$V: \mathcal{V}_0 \longrightarrow Sets$ が conservative で 任意の $\mathcal{V}_0$ の object は small set of exteremal epimorphism quotients を もつなら, $\mathcal{V}_0$ は $\{I\}$ の small colimits の closure

$\mathcal{B}$ が cotensored なら. 3.22 式

$$\{F \star G, T\} \cong \{F, \{G-, T\}\}$$

$$\left(\begin{array}{l} F : \mathcal{K}^{op} \to \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{K} \to [\mathcal{A}, \mathcal{V}], \\ T : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \end{array}\right)$$

にさらに次のようにつけ足せる.

$- \in \mathcal{K}$

$\square \in \mathcal{A}$

$$\{F \star G, T\} \cong \{(G-)\square, F- \pitchfork T\square\} \cong \{F, \{G-, T\}\}.$$

$G- \in [\mathcal{A}, \mathcal{V}]$. $\quad G- : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$

$$[A, [B, C]] \cong [B, [A, C]]$$

$$\mathcal{B}(B, \{F \star G, T\}) \cong [\mathcal{A}, \mathcal{V}](F \star G, \mathcal{B}(B, T\square))$$

$$\cong [\mathcal{K}^{op}, \mathcal{V}](F, [\mathcal{A}, \mathcal{V}](G-, \mathcal{B}(B, T\square))) \cong [\mathcal{K}^{op} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{V}](F-, [G-\square, \mathcal{B}(B, T\square)])$$

$$\mathcal{B}(B, \{G-\square, F- \pitchfork T\square\}) \cong [\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{V}](G-\square, \mathcal{B}(B, F- \pitchfork T\square))$$

$\mathcal{K} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

$$\cong [\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{V}](G-\square, [F-, \mathcal{B}(B, T\square)])$$

$G-\square \in [\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{V}]$

$\mathcal{B}$ が cotensored なら. 3.22式

$$\{F \star G, T\} \cong \{F, \{G-, T\}\}$$

$$\left(\begin{array}{l} F : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{K} \longrightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{V}], \\ T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \end{array}\right)$$

にさらに次のようにつけ足せる.

$$\{F \star G, T\} \cong \{(G-)\square, F- \pitchfork T\square\} \cong \{F, \{G-, T\}\}.$$

$$\mathcal{B}(B, \{F, \{G-, T\}\}) \cong [\quad\quad](F, \mathcal{B}(B, \{G-, T\}))$$

$$\cong [\quad\quad](F, [\quad\quad](G-, \mathcal{B}(B, T\square)))$$