Chapter 4 First order predicate logic 一階述語論理.

本節（100頁程）で一階述語論理，次節で高階述語論理をやる.

ここでやるのは simple predicate logic (SPL)　(simple type theory の上でやる)

型変数がない

依存述語論理や多相述語論理は Section 8.6，11.1 とかでやる.

数理論理学的には型が1つしかないものでやるのが普通だが CS 的には many-typed でやる方が自然.

proof でやらずに provability でやるので，考える fibration は fibered preorder.

$\exists \dashv$ weakening $\dashv \forall$,　$=_\sigma \dashv$ contraction で，　} fiber category

subset types $\{x : \sigma \mid \varphi\}$ は，truth predicate functor の右随伴.

quotient types σ / R は，equality relation functor の左随伴.

} total category と base category の間の随伴.

これらは Section 0.2 に Set での場合が載ってる.

function symbol だけじゃなくて predicate symbol も足さないといけない.

$$P : \sigma_1, \dots, \sigma_n \qquad\qquad P(M_1, \dots, M_n)$$

function symbol は $\sigma_1, \dots, \sigma_n \longrightarrow \sigma_{n+1}$ だったのに対し predicate symbol は $\sigma_1, \dots, \sigma_n$

<u>Def</u> (Σ, Π) が signature with predicates であるとは, Σ が many-typed signature で Π は写像 $\underset{T^*}{\underset{\shortparallel}{|\Sigma|^*}} \longrightarrow \mathrm{Sets}$, $P \in \Pi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ であることを

$$P : \sigma_1, \dots, \sigma_n$$

と書く.

Sign のかわりに SignPred を今後使う.

<u>Def. 4.1.1.</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SignPred} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Fam}(\mathrm{Sets}) \arrow[d] \\
\mathrm{Sets} \arrow[r] & \mathrm{Sets}
\end{tikzcd}$$

$$T \longmapsto (T^* \times T) + T^*$$

で SignPred を定める.

atomic equation proposition

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Gamma \vdash M' : \sigma}{\Gamma \vdash (M =_\sigma M') : Prop}$$

atomic predicate proposition

$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1 \quad \ldots \quad \Gamma \vdash M_n : \sigma_n}{\Gamma \vdash P(M_1, \ldots, M_n) : Prop}$$

$(P : \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

$\bot$, $\top$, $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$,
$\varphi \supset \psi$, $\forall x : \sigma . \varphi$, $\exists x : \sigma . \psi$
を追加する

例
$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash \varphi : Prop}{\Gamma \vdash \exists x : \sigma . \varphi : Prop}$$

(割愛).

$\Gamma \vdash \varphi_1 : Prop, \ldots, \Gamma \vdash \varphi_n : Prop,$
$\Gamma \vdash \psi : Prop$, sequent は

$$\Gamma \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

なるもの.

$\neg\varphi \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi \supset \bot$ としておいて,
derivation rule は
P.225 (predicate logic)

※ P.171 Context rules
axiom,
identity,
cut,
weakening/contraction/substitution
for propositions/types,
substitution
は生きてる.

classical logic にするには
reductio ad absurdum を入れる.

$$\frac{\Gamma \vdash M = M' : \sigma}{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M'}$$

は、上は underlying type theory

における equality（β, η 同値性など）

（を internal equality includes external equality と言える）

P. 225 に reflexivity

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M}$$

が足りないけど、これは underlying type theory において = が reflexive なら OK.

$\left(\varphi \supset\subset \psi \overset{\mathrm{def}}{=} (\varphi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \varphi) \right)$

$\Gamma \vdash M = M' : \sigma$ のとき $\varphi[M/x] \supset\subset \varphi[M'/x]$ は derivable になってる.

この predicate logic に対して subsystem を2つ定義する.

Def

regular logic は

$=, \wedge, \top, \exists$

だけに制限したもの.

coherent logic は

$=, \wedge, \top, \vee, \bot, \exists$

だけに制限したもの.

※ classical coherent logic = classical logic.

Def 4.1.3

(i) The first order specification とは 組 $(\Sigma, \Pi, \mathcal{A})$ で
(Σ, Π) が signature with predicates で $\mathcal{A}$ は axioms の集合.

(ii) regular/coherent specification とは axiom がそれぞれ regular/coherent なものだけからなるもの.

Def 4.1.4

(i) axioms が derivability で閉じているとき first order theory と呼ぶ.
各 $(\Sigma, \Pi, \mathcal{A})$ に対し 閉包をとって得られた theory を
$\mathbb{T}h(\Sigma, \Pi, \mathcal{A})$ と書く.

(ii) first order specification の morphism $(\Sigma, \Pi, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Sigma', \Pi', \mathcal{A}')$
は $\phi : (\Sigma, \Pi) \longrightarrow (\Sigma', \Pi')$ なる signatures with predicates の射 ← 型を全部たもつやつ
であって,

$$\forall (\Gamma \mid \Theta \vdash \chi) \in \mathcal{A},$$

$$(\phi(\Gamma) \mid \phi(\Theta) \vdash \phi(\chi)) \ ; \ \text{derivable in } \mathcal{A}'$$

$$\Leftrightarrow \ \forall (\Gamma \mid \Theta \vdash \chi) \in \mathcal{A}, \quad (\phi(\Gamma) \mid \phi(\Theta) \vdash \phi(\chi)) \in \mathbb{T}h(\Sigma', \Pi', \mathcal{A}')$$

これで作れる圏を FoSpec と書く.

ルールが多いと面倒なので減らしたい。

Lemma 4.1.6

equational logic における relacement は、
predicate logic の replacement から導ける。
逆は等式に制限したときだけ考えると導ける

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M' \qquad \Gamma, x:\sigma \vdash N:\tau}{\Gamma \mid \Theta \vdash N[M/x] =_\tau N[M'/x]} \ (\mathrm{EL\text{-}R})$$

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M' \qquad \Gamma \mid \Theta \vdash \varphi[M/x]}{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi[M'/x]} \ (\mathrm{PL\text{-}R})$$

ほぼ明らか。

(proof)

($\Uparrow$) $\varphi \overset{\mathrm{def}}{\equiv} (N[M/x] =_\tau N)$ とする。

$\varphi[M/x] \equiv (N[M/x] =_\tau N[M/x])$

より、

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M' \qquad \dfrac{\Gamma \vdash N[M/x]:\tau}{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi[M/x]}\,\mathrm{refl}}{\Gamma \mid \Theta \vdash N[M/x] =_\tau N[M'/x]}$$

($\Downarrow$) $\varphi = (N =_\tau N')$ とする。

(EL-R) より、

$\Gamma \mid \Theta \vdash N[M/x] =_\tau N[M'/x]$

$\Gamma \mid \Theta \vdash N'[M/x] =_\tau N[M'/x]$

assumption より

$\Gamma \vdash \Theta \vdash N[M/x] =_\tau N'[M/x]$

symmetry と trassitivity より OK

$\square$

ロビヤー

Lemma 4.1.7 (Lawvare equality)

$$\frac{\Gamma \vdash M = M' : \sigma}{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M'} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M' \quad \Gamma \mid \Theta \vdash M' =_\sigma M''}{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M''}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M'}{\Gamma \mid \Theta \vdash M' =_\sigma M} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta \vdash M =_\sigma M' \quad \Gamma \mid \Theta \vdash \psi[M/x]}{\Gamma \mid \Theta \vdash \psi[M'/x]}$$

と

Lawvare equality

$$\frac{\Gamma ; x:\sigma \mid \Theta \vdash \varphi[x/y]}{\Gamma ; x:\sigma , y:\sigma \mid \Theta , x =_\sigma y \vdash \varphi} \text{(Eq-mate)}$$

は同じ強さ.

(proof)

これは嘘で, 1つ目は Lawvare equality から出ない.

反例は 同じ型なら全ての term は internally equal になるような simple type theory.

(ㇵ) symm

$$\cfrac{\Gamma \vdash M' : \sigma \quad \cfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x:\sigma , y:\sigma \vdash x = y : \mathrm{Prop}}}{x:\sigma , y:\sigma \mid x = y \vdash x = y}\text{identity}}{x:\sigma \mid \ \vdash x = x}\text{Eq-mate}\uparrow}{x:\sigma , y:\sigma \mid x = y \vdash y = x}\text{Eq-mate}\downarrow}{\Gamma , y:\sigma \mid M = y \vdash y = M}\text{subst}}{\Gamma , \Gamma \mid M = M' \vdash M' = M}\text{subst}$$

$(x = x) \equiv (y[x/y] = x[x/y])$

cut 使ってOK.

(実は1回やった)

trans

$$\dfrac{\dfrac{}{x:\sigma,\ y:\sigma \mid x=y \vdash x=y}}{x:\sigma,\ y:\sigma,\ z:\sigma \mid x=y,\ y=z \vdash x=z}\ \text{Eq-mate}\downarrow \qquad (x=y) \equiv (x=z)[y/z]$$

subst と cut 使えばOK.　　　　(実は1回やった)

replacement (形が違うのでまだやってない)

　φ は $\Gamma, x:\tau$ で作られていて y は φ で free とする.

　$\varphi' = \varphi[y/x]$ とすると, $\varphi = \varphi'[x/y]$.

$$\dfrac{\Gamma \mid \Theta \vdash M=M' \qquad \dfrac{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi[M/x] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \varphi \vdash \varphi'[x/y]}\ \text{identity}}{\Gamma, x:\sigma, y:\sigma \mid \Theta, \varphi, x=y \vdash \varphi'}\ \text{Eq-mate}\downarrow}{\Gamma \mid \Theta, \varphi[M/x], M=M' \vdash \varphi[M'/x]}\ \text{subst 2回}}{}\ \text{cut}}{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi[M'/x]}\ \text{cut}$$

(⇓) $\dfrac{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta \vdash \varphi[x/y]}{\Gamma, x:\sigma, y:\sigma \mid \Theta, x=y \vdash \varphi}$ を作る。 (1回やった)

下から上は

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:\sigma, y:\sigma \mid \Theta, x=y \vdash x=y} \quad \Gamma, x:\sigma, y:\sigma \mid \Theta, x=y \vdash \varphi[y/y]}{\Gamma, x:\sigma, y:\sigma \mid \Theta, x=y \vdash \varphi[x/y]}\text{replacement}}{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta, x=x \vdash \varphi[x/y]}\text{contraction}$$

(Θの中にyはない)

最後にcutで $x=x$ をけせばいい。
($x=x$ はderivableと仮定)

上から下は、

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x:\sigma, y:\sigma \mid \Theta, x=_\sigma y \vdash x=_\sigma y} \quad \dfrac{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta \vdash \varphi[x/y]}{\Gamma, x:\sigma, y:\sigma \mid \Theta, x=y \vdash \varphi[x/y]}\text{weakening}}{\Gamma, x:\sigma, y:\sigma \vdash \Theta, x=y \vdash \varphi}\text{replacement}$$

□

これ Lawvere equality を作るときに reflexivity と replacement しか使ってないから、symmetry と transitivity いらないんじゃ？

$$\dfrac{x:\sigma, y:\sigma \mid x=y \vdash x=y \qquad x:\sigma, y:\sigma \mid x=y \vdash (x=x) \equiv (y=x)[x/y]}{x:\sigma, y:\sigma \mid x=y \vdash y=x}\ \mathit{repl}$$

$$\dfrac{x, y, z \mid x=y, y=z \vdash y=z \qquad x, y, z \mid x=y, y=z \vdash (x=z)[y/z] \equiv (x=y)}{x, y, z \mid x=y, y=z \vdash x=z}\ \mathit{repl}$$

Lawvere equality の H の中に x が入るバージョンも作れる.

Lemma 4.1.8.

$$\left(\dfrac{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta \vdash \psi}{\Gamma \mid \Theta \vdash \forall x:\sigma.\psi} \;(x \text{ not free in } \Theta) \quad \& \quad \dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \qquad \Gamma \mid \Theta \vdash \forall x:\sigma.\psi}{\Gamma \mid \Theta \vdash \psi[M/x]} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \Gamma \mid \Theta, \varphi \vdash \forall x:\sigma.\psi \\ \hline\hline \Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \varphi \vdash \psi \end{array} \;(\forall\text{-mate}) \quad (x \text{ not free in } \Theta)$$

$$\left(\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \qquad \Gamma \mid \Theta \vdash \psi[M/x]}{\Gamma \mid \Theta \vdash \exists x:\sigma.\psi} \quad \& \quad \dfrac{\Gamma \mid \Theta \vdash \exists x:\sigma.\psi \qquad \Gamma, x:\sigma \mid \Xi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \mid \Theta, \Xi \vdash \chi} \;(x : \text{not free in } \Xi, \chi) \right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \Gamma \mid \Theta, \exists x:\sigma.\psi \vdash \varphi \\ \hline\hline \Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \psi \vdash \varphi \end{array} \;(\exists\text{-mate}) \quad (x : \text{not free in } \Theta, \varphi)$$

proof

($\forall$ $\Leftarrow$ 1つ目) 自明

($\forall$ $\Leftarrow$ 2つ目)

$$\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \qquad \dfrac{\Gamma \mid \Theta \vdash \forall x:\sigma,\psi}{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \vdash \psi}\;\forall\text{-mate}\Downarrow}{\Gamma, \Gamma \mid \Theta_{[M/x]} \vdash \psi[M/x]}\;\text{substitution}$$

($\forall$ $\Rightarrow$ $\Downarrow$) Γ を $\Gamma, x:\sigma$ にかえて、$M = x$ にする.

($\forall$ $\Rightarrow$ $\Uparrow$) 自明.

(∃ ⇐ 1つ目)

$$
\dfrac{\Gamma \mid \Theta \vdash \psi[M/x] \qquad \dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid \Theta, \exists x.\psi \vdash \exists x.\psi}\ \text{identity}}{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \psi \vdash \exists x.\psi}\ \exists\text{-mate}\downarrow}{\Gamma \mid \Theta, \psi[M/x] \vdash \exists x.\psi}\ \text{subst}}{\Gamma \mid \Theta \vdash \exists x.\psi}\ \text{cut}
$$

(∃ ⇐ 2つ目)

$$
\dfrac{\Gamma \mid \Theta \vdash \exists x.\psi \qquad \dfrac{\Gamma, x:\sigma \mid \Xi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \mid \Xi, \exists x.\psi \vdash \chi}\ \exists\text{-mate}\uparrow}{\Gamma \mid \Xi, \Theta \vdash \chi}\ \text{cut}
$$

(∃ ⇒ ⇓)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash x:\sigma} \qquad \dfrac{}{\Gamma, x:\sigma \mid \psi \vdash \psi[x/x]}}{\Gamma, x:\sigma \mid \psi \vdash \exists x.\psi}\ \text{1つ目} \qquad \dfrac{\Gamma \mid \Theta, \exists x.\psi \vdash \varphi}{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \exists x.\psi \vdash \varphi}\ \text{weakening}}{\Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \psi \vdash \varphi}\ \text{cut}
$$

(∃ ⇒ ⇑)

$$
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid \exists x.\psi \vdash \exists x.\psi} \qquad \Gamma, x:\sigma \mid \Theta, \psi \vdash \varphi}{\Gamma \mid \Theta, \exists x.\psi \vdash \varphi}\ \text{2つ目}
$$

empty type について.

strengthening

$$\frac{\Gamma, x:\sigma \mid \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}{\Gamma \mid \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi} \quad (\text{if } x \text{ not free in } \varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi)$$

は ダメ.

$(x =_\sigma x) \supset (\exists x:\sigma.\ x =_\sigma x)$ と, $(x =_\sigma x)$ は derivable だけど

$\exists x:\sigma.\ x =_\sigma x$ は derivable でない問題.

ちゃんとかくと,

$$x:\sigma \mid \emptyset \vdash (x =_\sigma x) \supset (\exists x:\sigma.\ x =_\sigma x)$$

$$x:\sigma \mid \emptyset \vdash x =_\sigma x$$

は derivable だが,

$$\emptyset \mid \emptyset \vdash \exists x:\sigma.\ x =_\sigma x$$

は derivable でない問題.