
Sa 5.



V Basic Constructions of Topos

いくつか Topos から別の Topos を構成する方法をこの章でみる. ($E : \text{topos}$ とする)

1. E に Lawvere-Tierney topology j なるものを入れる.

Lawvere-Tierney topology は, point set topology と Grothendieck topology を含んだ概念.

実際 C の presheaf の圏での Lawvere-Tierney topology は C の Grothendieck topology と対応する.

Lawvere-Tierney topology からなる Sheaf の圏 $\mathcal{Sh}_j \mathcal{E}$ は topos.

associated sheaf functor を今回も作るが, 定義方法はこれまでと異なる.

2. E の comonad $G : E \rightarrow E$ が finite product preserving なら G の coalgebra の圏は todos

3. BG , $\text{Set}^C(C^{\text{op}})$ の一般化ができる. つまり, Set を E で置き換える. つまり

E の group object G に対し,

G が作用する E の object たちからなる圏

が topos

C が G の categorical object であるとき,

C の presheaf の structure を持つ E の object たちからなる圏

が topos

4. E の filtered diagram の colimit を object にして, logical morphism を morphism にする圏も topos.

お気持ち

Lawvere-Tierney Topology

空間 X の sheaf を考えるには, “被覆”を考えることが重要.

$C = \{U_i\}$ を開集合の族とする. $j(C)$ で, なんらかの U_i に cover されている開集合全体の集合を表す.

$\vdash \text{t-5 によく}$

このとき $j(j(C)) = j(C)$ と $j(C_1 \cap C_2) \subseteq j(C_1) \cap j(C_2)$ が成り立つ.

C_1, C_2 が sieve だったら, (つまり $V \subseteq U \subseteq C_1$ なら $V \subseteq C_1$ だったら)

$$j(C_1 \cap C_2) = j(C_1) \cap j(C_2) \quad \text{②}$$

まで言える.

$$\forall U_i \in C, \quad U_i \subseteq \bar{U}$$

さらに C が なんらかの開集合 U の sieve S と一致しているならば,

$C = S \in \Omega(U)$ となる.

$j(C)$ も sieve で,

ただし $\Omega(U)$ は presheaf の subject classifier で

$$\Omega(U) = \{S \mid S \text{ は } U \text{ の sieve}\}.$$

したがって j は $\Omega \rightarrow \Omega$ なる map だと思える.

(Sieve の集合から sieve の集合への関数なので)

\mathcal{E} : topos Ω : subobject-classifier と定義.

Definition

Lawvere-Tierney topology on \mathcal{E} は

$j: \Omega \rightarrow \Omega$ なるものの次の3つを満たすもの

$$(a) j \circ \text{true} = \text{true} \quad (b) j \circ j = j \quad (c) j \circ \Lambda = \Lambda \circ (j \times j)$$

$$1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$$

$$\text{true} \searrow \downarrow j$$

$$\Omega$$

$$\Omega \xrightarrow{j} \Omega$$

$$j \searrow \downarrow j$$

$$\Omega$$

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\Lambda} \Omega$$

$$j \times j \downarrow \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Lambda} \Omega$$

$$\downarrow j$$

$$\Omega$$

↓

Ω を 真理値の集合だとと思うと、 $j: \Omega \rightarrow \Omega$ は どの modal operator に見える。また、 j は Ω への射である。

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \end{array}$$

なる J を使、 \vdash の定義はかぶさる。

LT-topology を $\mathcal{E} = \text{Sets}$ で見る,
 point-set topology の概念を言及する。

Remark

$$\Omega(U) = \{S \mid S \text{ は } U \text{ の sieve}\}$$

$$S: \text{sieve} \Leftrightarrow [W \subseteq V \in S \Rightarrow W \in S].$$

$V \subseteq U$ に対し, principal sieve \hat{V} ;

$$\hat{V} = \{W \mid W \subseteq^{\text{open}} V\}$$

で定まる。

$$\begin{array}{ccc} \text{true}_\sigma : & \downarrow & \rightarrow \Omega(U) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & 0 & \widehat{G} \end{array}$$

開集合の族 S が開集合 V を cover するとは,

$$\bigcup S \supseteq V \text{ である。}$$

J は定義する。 $J \in \text{Set}^{(X)^{\text{op}}}$

$$J(U) = \{S \mid S \text{ は } U \text{ の sieve, } S \text{ covers } U\}$$

J は \mathcal{I} から functor で せりへ $\Omega(U)$ a subfunctor.

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \end{array}$$

$$j_U : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$$

$$j_U(S) = \{W \mid W \subseteq^{\text{open}} U, S \text{ の各開集合 } W \text{ は } S \text{ の子集合}, W \in \text{cover}\}$$

$$\text{open} \quad \Rightarrow \quad V = \bigcup_{S \in \text{cover}} \{U \in \mathcal{U} \mid S \subseteq U\}$$

計算すると $[T\text{-topology}]$ の 3 条件を満たす。

LT-topology における Sheaf を見る.

$$A \mapsto \bar{A} : \text{Sub}(E) \rightarrow \text{Sub } E$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(E, \Omega) & \xrightarrow{\sim} & \text{Sub}(E) \ni A \\ \text{Hom}(I, j) \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(E, \Omega) & \xrightarrow{\sim} & \text{Sub}(E) \ni \bar{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \bar{A} & & & & I \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ A & \rightarrow & I & & + \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E = E & \xrightarrow{j} & \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \end{array}$$

$$f^{-1}(B) \rightarrow B$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

$$I = f^*(\Omega)$$

$$f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$$



$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{j} & \Omega \end{array}$$

Prop 1. E : topas $j: \Omega \rightarrow \Omega$.

$$A \hookrightarrow \bar{A} : \text{Sub}(E) \rightarrow \text{Sub}(E)$$

$$\text{if } f^{-1}(\bar{B}) = \widehat{f^{-1}(B)} \in \mathcal{F},$$

$\exists a \in \mathbb{R}$

j s.t. LT-topology \Leftarrow

$$\Leftrightarrow A \subset \bar{A}, \bar{\bar{A}} = \bar{A}, \bar{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

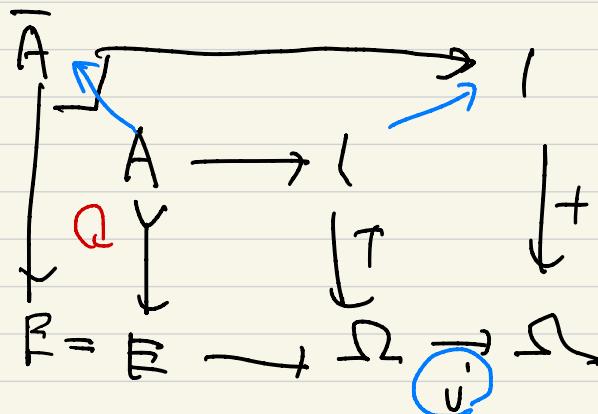
$$\left(\begin{array}{ccc} i^+ : \Omega & \xrightarrow{i} & \Omega \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{i} & \Omega \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \Omega & \xrightarrow{j \circ i} & \Omega \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\Delta} & \Omega \\ \downarrow j \times j & , & \downarrow j \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\Delta} & \Omega \end{array} \right)$$

\bar{A} は closed set

何が \bar{A} の閉包か.

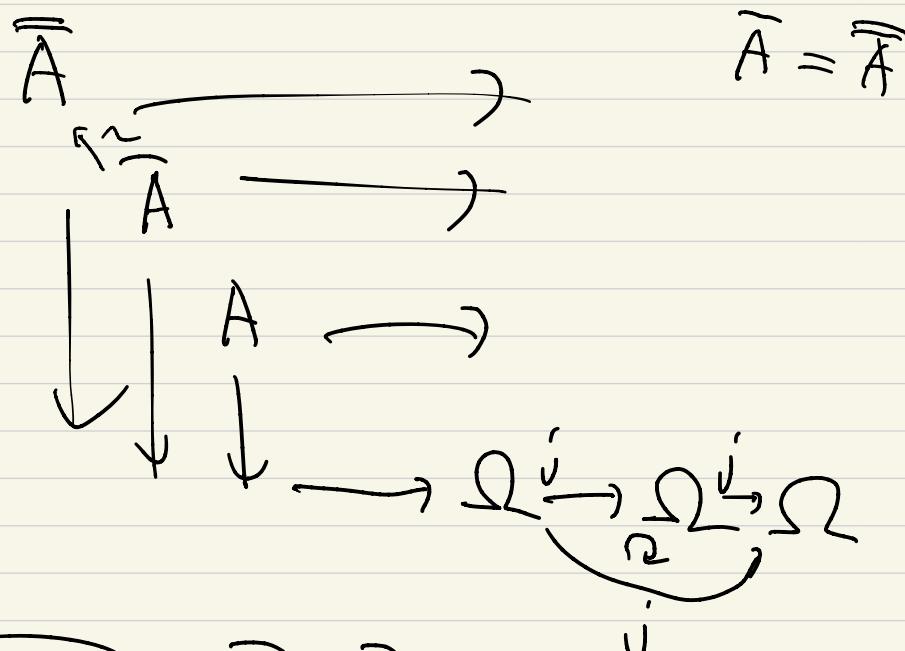
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ in general topology

Proof. (\Rightarrow)



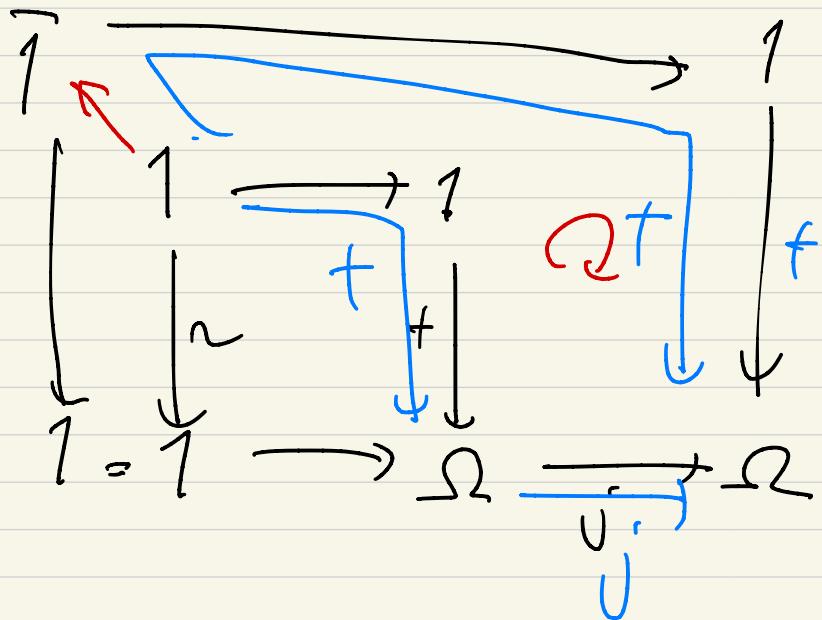
$$A \subset \bar{A}.$$

$$j \circ t = t$$



$$\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B} \in \mathbb{F}_R.$$

$(\uparrow \downarrow)$



$$A \subset \bar{A} \quad \text{et} \quad 1 \subset \bar{f}$$

$$j(t) = t$$

Theorem 2 -

Grothendieck topology J on a

small \mathcal{C} $i = \text{id}_{\mathcal{C}}$,

Lawvere Tierney topology on Sets \mathcal{C}^{op}

\mathcal{T}^1 $\mathcal{T} = \mathcal{L}$.

proof

Remark

Grothendieck

$\forall C \in \mathcal{C} \quad i = \text{id}_C, \quad C \text{ a sieve, a } \text{集}$

$J(C) \in \mathcal{T}$ $\text{at } f = \text{id}_C$

$$j_C : \Omega(C) \longrightarrow \Omega(C)$$

(1) (2)

$$S \longmapsto \{g \mid S \text{ covers } g : D \rightarrow C\}$$

(1)

$$\{g \mid g^*(S) \in J(\text{dom } g)\}$$

\mathbb{R}^n は L^T -topology (計量的)