1 位相群が作用する集合の圏は Grothendieck Topos

1.1 準備

Remark. category $\mathbf{B}G$ とは, ある位相群 G があって, その群が作用する集合の圏. すなわち, 各 object X に対して, X に離散位相を入れた時に

$$X \times G \to X$$

が連続になるような群の作用が定まっていて, morphism は作用を preserve するもの.

Definition 1. (isotropy subgroup) G が X に作用するとき, $x \in X$ の安定化部分群 (isotropy subgroup) とは,

$$I_x = \{g \in G \,|\, x \cdot g = x\}$$

なる部分群である.[1] これはこの作用が上の意味で連続なとき, open subgroup になる.[2]

1.2 site of BG

Definition 2. $\mathbf{S}(G)$ を, $\mathbf{B}G$ の full subcategory で, objects が G/U (U は G の開部分群) たちであるものとして定める.[3](なんか, 表記的に $U \backslash G$ の方が正しそう.) いま, G/U の商位相は離散的である.[4]

作用 $G/U \times G \to G/U$ は書き下すと

$$(Ux) \cdot g = Uxg$$

になる. 安定化部分群 I_{Ux} は

$$I_{Ux} = \{g | Uxg = Ux\} = x^{-1}Ux$$

になる.[5] $\mathbf{S}B$ における morphism $\phi G/U \to G/V$ は作用に compatible である必要があるから, $\phi(Ux) = \phi(Ue) \cdot x$ となるので, ϕ は $\phi(Ue)$ から一意に決まる. 逆に $a \in G$ に対し, $\phi_a : G/U \to G/V; Ux \mapsto Vax$ が定めたいが, これが well-defined であるためには,

$$Ux = Uy \Rightarrow Vax = Vay$$

が必要. これは,

$$U \subseteq a^{-1}Va$$

と同値.[6] まとめると次のようになる.

---

[1] This defines subgroups since $g, g' \in I_x \Rightarrow x(gg') = (xg)g' = x$ and $g \in I_x \Rightarrow x \cdot g^{-1} = x \cdot gg^{-1} = x$

[2] $G \cong \{x\} \times G \xrightarrow{\iota} X \times G \to X$ の $\{x\}$ の逆像になる.

[3] 正規とは限らないので G/U は群とは限らない

[4] そりゃそう. G/U の各元は Ux の形で, U と同相な集合をつぶしたもの. 開集合を潰すと開集合.

[5] $hxg \in Uxg$, $h'x \in Ux$, $hxg = h'x \Rightarrow g = x^{-1}h^{-1}hx \in x^{-1}Ux$

[6] $x \in U \Rightarrow Ux = Ue \Rightarrow Vax = Va \Rightarrow x \in a^{-1}Va$. Conversely, $Ux = Uy \Rightarrow xy^{-1} \in U \subseteq a^{-1}Va \Rightarrow axy^{-1}a^{-1} \in V$.

Proposition 1. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}G}(G/U, G/V)$ は次と *bijective;* $Va \in G/V$ で, $U \subseteq a^{-1}Va$ なるものたち.

Va と対応する *morphism* を $G/U \xrightarrow{a} G/V$ と書く. 次が可換.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\
G/U \arrow[r, "a"] & G/V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & ax \arrow[d, mapsto] \\
Ux \arrow[r, mapsto] & Vax
\end{tikzcd}
$$

ここから $\mathbf{S}G$ の任意の射は epic であることがわかる.[7] 任意の morphism が単独で cover になるような Grothendiek topology を考えるのが良い. すなわち atomic topology を採用したい. atomic topology が入るためには,

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & D \arrow[d, "\forall f"] \\
E \arrow[r, "\forall g"] & C
\end{tikzcd}
$$

が必要だが,

$$
\begin{tikzcd}
G/O \arrow[r, "a^{-1}"] \arrow[d, "b^{-1}"] & G/U \arrow[d, "a"] \\
G/W \arrow[r, "b"] & G/V
\end{tikzcd}
$$

は, $O = aUa^{-1} \cap bWb^{-1}$ とすることで可換になるので条件は満たされる.[8]

1.3 Grothendiek topology との圏同値

まず

$$\phi : \mathbf{B}G \to \widehat{\mathbf{S}(G)}, \qquad \phi(X) = \mathrm{Hom}_G(-, X)$$

[9] なる自然な関手がある. 次を思い出す.

Remark. X の U-不変部分集合 (U-fixed) とは,

$$X^U \equiv \{x \in X \mid \forall g \in U, (xg = x)\}$$

exponential とはなんの関係もないことに注意.

すると,

$$
\begin{aligned}
\phi(X)(G/U) =& \mathrm{Hom}_G(G/U, X) \\
\cong& X^U
\end{aligned}
$$

[7] 上の図式をぐっと睨むと全射がわかる.

[8] U:subgroup なら aUa^{-1}:subgroup. subgroups は $\cup$ で閉じている. Open は明らか.

[9] $\mathrm{Hom}_G = \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G}$ のこと.

が成り立つ.[10] さらに $\phi(X) \in \widehat{\mathbf{S}(G)}$ による morphism の移り先を見ると,

$$\begin{tikzcd}
G/V \arrow[d, "a"] & X^V \\
G/U & X^U \arrow[u, "(-)\cdot a"']
\end{tikzcd}$$

になっている. 具体的に計算すると以下のようになる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_G(G/V, X) \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_G(G/U, X) \arrow[l, "a^*"'] \arrow[d, "\cong"] \\
X^V & X^U \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \circ a \arrow[d, mapsto] & f \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
f(Ua) = f(U) \cdot a & f(U) \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Theorem 1. 上で定義した *functor* $\mathbf{B}G \xrightarrow{\phi} \widehat{\mathbf{S}(\mathbf{G})}$ は 圏同値

$$\mathbf{B}G \cong \mathrm{Sh}(\mathbf{S}(G))$$

を誘導する. ただし, 右の *sheaves* は *atomic topology* で定められたもの.

Proof. functor

$$\psi : \widehat{\mathbf{S}(G)} \to \mathbf{B}G$$

を次で定める; presheaf F に対し,

$$\psi(\mathrm{F}) = \varinjlim{}_U \mathrm{F}(G/U)$$

ただし colimit は, G の開部分群たちに包含関係で順序を入れた圏でとる.

(i) ψ を equivalence class の表現に直し, functor であることを確かめる.

$\psi(\mathrm{F})$ は $[x, U]$ where $x \in \mathrm{F}(G/U)$ なる集合で, $[x, U] = [y, V]$ となるのは, $W \subseteq U \cap V$ なる開部分群 W があって, $\mathrm{F}(G/W \xrightarrow{e} G/U)$ と $\mathrm{F}(G/W \xrightarrow{e} G/V)$ (e は単位元) に対し, x, y の移り先が一致するときである.

G の $\psi(\mathrm{F})$ への作用は,

$$[x, U] \cdot g = [F(g)(x), g^{-1}Ug]$$

$$\text{where, } F(g)(x) = \mathrm{F}(G/g^{-1}Ug \xrightarrow{g} G/U)(x)$$

で定める.[11] この作用は well-defined (下の可換図式 1.6.1) で, 連続である.[12]

[10] $f(Ux) = f(Ue \cdot x) = f(Ue) \cdot x$. So, $f(U)$ determines whole f.
$\forall x \in U$, $Ue = Ux$. We need $f(Ue) = f(Ue) \cdot x$, which suggests $f(U) \in X^U$. This condition is also sufficient.

[11] $g : G/g^{-1}Ug \to G/U; g^{-1}Ugx \mapsto Ugx$ is defined since $(g^{-1}Ug) \subseteq g^{-1}(U)g$

[12] $x \cdot g = y$ ならば, $g \in gI_y$. 逆に $gh \in gI_y \Rightarrow x \cdot gh = y$. よって, $(x, g) \in \{x\} \times gI_y \subseteq m^{-1}(\{y\})$. だから, $\forall x \in X, I_x$; *open subgroup* が必要十分. いま, $[x, U] \cdot g = [x, U] \iff g \in U$ なので満たされる.

あとは, ψ が morphism を morphism に移すことを示す. $\tau : F \to F'$ に対し,

$$\psi(\tau) : \varinjlim_U \mathrm{F} \longrightarrow \varinjlim_U \mathrm{F}'; \qquad [x, U] \mapsto [\tau_{G/U}(x), U]$$

とする. これは確かに群の作用を保つ.[13] well-defined であることはサボった.

(ii) $\psi \circ \phi \cong Id$

まず, $\forall x \in X$, $\forall g \in I_x$, $xg = x$. すなわち $\forall x \in X, x \in X^{I_x}$. いま I_x は開部分群だから, $X = \bigcup X^U$ (U: 開部分群) となる. さらに, $X^U \cong \phi(X)(G/U)$ だった.

$$\psi(\phi(X)) = \varinjlim_U \phi(X)(G/U) \cong \varinjlim_U X^U$$

で, 最後の colimit は, object X^U, morphism は inclusion になる $\mathbf{B}G$ の図式の colimit なので,

$$\varinjlim_U X^U \cong \bigcup X^U \cong X$$

となる. Naturality はまだ確かめてない.

(iii) $Id \to \phi \circ \psi$

まず,

$$\begin{aligned} g \in U \Rightarrow [x, U] \cdot g =& [F(g)(x), g^{-1}Ug] \\ =& [x, U] \end{aligned}$$

だから,

$$[x, U] \in \psi(\mathrm{F})^U$$

となる. これを使って, 自然変換 $\alpha_F : F \to \phi\psi(\mathrm{F})$ を次で定める.

$$\begin{array}{ccccc} (\alpha_{\mathrm{F}})_U : \mathrm{F}(G/U) & \longrightarrow & \phi(\psi(\mathrm{F}))(G/U) & \cong & \phi(\mathrm{F})^U \\ \cup & & & & \cup \\ x & \longmapsto & & & [x, U] \end{array}$$

これが自然変換になることは,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}(G/U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \psi(\mathrm{F})^U \\ {\scriptstyle \mathrm{F}(a)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (-)\cdot a} \\ \mathrm{F}(G/V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \psi(\mathrm{F})^V \end{array}$$

[13] $\psi(\tau)([x, U]) \cdot g = [\tau_{G/U}(x), U] \cdot g = [F'(g)(\tau_{G/U}(x)), g^{-1}Ug] = \left[\tau_{G/g^{-1}Ug}(F(g)(x)), g^{-1}Ug\right] = \psi(\tau)\left([x, U] \cdot g\right)$

が可換になること．すなわち, $y \in \mathrm{F}(G/V)$ に対し, $[F(a : G/U \to G/V)(y), U] = [F(a : G/a^{-1}Va \to G/V)(y), a^{-1}Va]$ となることである．これは次が可換であることから従う．

$$\begin{tikzcd} G/a^{-1}Va \arrow[r, "a"] & G/V \\ G/U \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

α の F に関する naturality は下の 1.6.2

(iv) presheaf から sheaf に制限

Remark. Atomic topology において, presheaf P が sheaf になることは, for any $f : D \to C$ and any $y \in P(D)$, if $y \cdot g = y \cdot h$ for all diagrams

$$E \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} D \xrightarrow{f} C$$

with $fg = fh$, then $y = x \cdot f$ for a unipue $x \in P(C)$

この定理から, f が monic なら, $P(f)$ は bijective になる．

F を sheaf とする．先ほどの $(\alpha_F)_U : F(G/U) \to \psi(F)^U$ の codomain を $\psi(F)$ まで広げて

$$(\alpha_F)_U : F(G/U) \to \varinjlim_V F(G/V) \cong \phi(F)$$

とみると, 計算するとこれは colimit への canonical map になっていて, いま, colimit は全ての morphism が inclusion の圏からとったから, diagram の各々の morphism は上の remark から mono になる．そうすると, $(\alpha_F)_U$ も mono になる．[14]

次に, $(\alpha_F)_U : F(G/U) \to \psi(F)^U$ が全射になることを示す．任意の $[x, V] \in \psi(F)^U$ をとる．V は十分小さく $V \subseteq U$ となると仮定していい．S を morphism $G/V \xrightarrow{e} G/U$ 1 つが生成する sieve とする．すなわち S とは次のような morphism の集合である．

$$G/W \xrightarrow{a} G/V \xrightarrow{e} G/U$$

x は $F(G/V)$ の元だった．これに対して,

$$x_{e \circ a} := x \cdot a = \mathrm{F}(a)(x)$$

が matching family になることを下の方で示す.1.6.3 すると, F は sheaf なので amalgamation が unique に存在するから, ある $y \in F(G/U)$ があって $F(e)(y) = x$. すると,

$$[x, U] = [y, U] = (\alpha_F)_U(y)$$

[14]同値類の取り方を見るとわかる．

となって, $(\alpha_F)_U$ は全射.

ここまでの議論から, F が sheaf なら α_F は bijection になる. ψ の domain を $\mathrm{Sh}(\mathbf{S}(G))$ に制限することで, α は natural isomorphism になる.

(v) $\phi(X)$ は sheaf

本はここで証明が終わってるけど, ϕ で X をうつした先が sheaf にならないとだめ.

これは, 先ほどの remark を使って示す.

$$G/W \underset{b}{\overset{e}{\rightrightarrows}} G/aVa^{-1} \xrightarrow{a^{-1}} G/V \xrightarrow{a} G/U$$

が, $e = a \circ a^{-1} \circ e = a \circ a^{-1} \circ b = b$ を満たすことは $b \in U$ と同値. 条件から, $b \in U$ ならば, $y \cdot a^{-1} = y \cdot a^{-1} b$. よって, 任意の U の元 b に対し, $(y \cdot a^{-1}) \cdot b = y \cdot a^{-1}$ となるので,

$$y \cdot a^{-1} \in X^U$$

がなりたつ. 一意性はすぐ示せる.

□

1.4 cofinal な open subgroup たちの時でも同様に示せること.

Theorem 2. *G: 位相群 のとき, $\mathcal{U}$ を cofinal (共終) な開部分群の族とする. (すなわち, 任意の開部分群は $\mathcal{U}$ の開部分群を含む.) このときでも,*

$$\mathbf{B}G \cong \mathrm{Sh}(\mathbf{S}_{\mathcal{U}}(G))$$

が示せる. ($\mathbf{S}_{\mathcal{U}}(G)$ は, $\mathbf{S}(G)$ の full sub category.)

Proof. 略. □

1.5 具体例 $\mathbf{B}\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$

$\mathbb{N}$ の自己全単射からなる群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ に直積位相の相対位相を入れる. (以下, 自己全単射のことを自己同型と呼ぶ) すると, $\mathbb{N}$ の有限部分集合 K に対して,

$$U(K) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{N}) | \forall i \in K, \alpha(i) = i\}$$

とすると, これらを集めた集合族 $\mathcal{U}$ は, cofinal になる.[15]

ここで, $\mathbf{I}$ を $\mathbb{N}$ の有限部分集合と単射 $L \rightarrowtail K$ からなる圏とする. 目標は次の圏同値を示すことである.

[15] 任意の開部分群 H に対し, 位相の定め方から H はある $i, j \in \mathbb{N}$ に対し, $\alpha(i) = j$ を満たす全ての自己同型 α を含まなくてはならない. そうすると, 逆に H は α の逆元も含まなくてはならないから, $\beta(j) = i$ なる全ての自己同型も含むことになる. このとき, $\beta \circ \alpha \in H$ となるが, $\tau(i) = i$ なる自己同型 τ は全て $\beta \circ \alpha$ の形に書けるから, 結局 H は $U(\{i\})$ を含むことになる.

Corollary 1. *Schanuel Topos*

$$\mathrm{Sh}(\mathbf{I}^{op}) \cong \mathbf{B}\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$$

Theorem 2 から, $\mathbf{I}^{op} \cong \mathbf{S}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Aut}(\mathbb{N}))$ を示せばいい.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ を G と書くことにする. $\mathbf{S}_{\mathcal{U}G}$ の任意の morphism は, $\alpha : G/U(K) \to G/U(L)$ where $\alpha \in G$ とかけて, $U(K) \subseteq \alpha^{-1}U(L)\alpha$ を満たすようなものだった. これはつまり $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は ϕ が K が 固定する (fix) とき $\alpha\phi\alpha^{-1}$ は L を固定するということだから, $\alpha^{-1}(L) \subseteq K$ が従う.[16] これは, $\alpha^{-1} : L \rightarrowtail K$ を induce している.

$\mathbf{S}_{\mathcal{U}}$ から $\mathbf{I}$ への反変関手を, 上の対応によって作る. すなわち,

$$G/U(K) \xrightarrow{\alpha} G/U(L)$$

$$K \xleftarrow[\alpha^{-1}]{} \!\!\prec L$$

で対応づける. これは,

$$\begin{aligned}
U(L)\alpha = U(L)\beta &\iff \alpha\beta^{-1} \in U(L) \\
&\iff \forall x \in L, \qquad \alpha\beta^{-1} = x \\
&\iff \forall x \in L, \qquad \beta^{-1}(x) = \alpha^{-1}(x) \\
&\iff \alpha^{-1} = \beta^{-1} \text{as morphisms in } \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

となるので, well-defined で faithful である. full であることは, 任意の $L \rightarrowtail K$ が $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ まで延長できることから明らか. essentially surjective も定義から明らか. (というか圏同値どころか逆関手作れる.)

1.6 証明の詳細

1.6.1

$$\begin{tikzcd}
F(G/U) \arrow[dd, "F(g)"] \arrow[dr, "F(e)"] & & F(G/V) \arrow[dd, "F(g)"] \arrow[dl, "F(e)"'] \\
& F(G/W) \arrow[dd, "F(g)"] & \\
F(G/g^{-1}Ug) \arrow[dr, "F(e)"] & & F(G/g^{-1}Vg) \arrow[dl, "F(e)"'] \\
& F(G/g^{-1}Wg) &
\end{tikzcd}$$

[16] $\phi(\alpha^{-1}(l)) = \alpha^{-1}(l)$ なので.

1.6.2

$$\begin{tikzcd}
F(G/U) \arrow[r, "(\alpha_F)_U"] \arrow[d, "\tau_{G/U}"] & \psi(F)^U \arrow[d] \\
F'(G/U) \arrow[r, "(\alpha_{F'})_U"] & \psi(F')^U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[x, U]} \arrow[d, mapsto] \\
\tau_{G/U} \arrow[r, mapsto] & {[\tau_{G_U}(x), U]}
\end{tikzcd}$$

1.6.3

これは,

$$\begin{tikzcd}
G/W \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & G/V \arrow[r, "e"] & G/U
\end{tikzcd}$$

が可換なときに, $x \cdot a = x \cdot b$ を満たすことを示せばいい. いま,

$$\begin{tikzcd}
G/aWa^{-1} \arrow[r, "a^{-1}"] & G/W
\end{tikzcd}$$

は monic なので, これを F で送っても monic. monic を後ろにつけても問題ないので, 上の a, b につなげることで a を e と仮定していい. すると, $b = e : G/W \to G/U$ となるので, これは $b \in U$ となる.

$$\begin{tikzcd}
G/W \arrow[r, shift left, "e"] \arrow[r, shift right, "b"'] & G/V \arrow[r, "e"] & G/U
\end{tikzcd}
\qquad \bigl(W \subseteq V,\ W \subseteq b^{-1}Vb\bigr)$$

$$\begin{aligned}
[x, V] =& [F(e)(x), e^{-1}Ue] \\
=& [F(b)(x), (eb)^{-1}Ueb] \\
[x, V] =& [F(b)(x), b^{-1}Vb]
\end{aligned}$$

これは同値類の作り方から, ある $W' \subseteq V \cup b^{-1}Vb$ があって,

$$\begin{tikzcd}
F(G/V) \arrow[r, "F(e)"] & F(G/W') & F(G/b^{-1}b) \arrow[l, "F(e)"'] & F(G/V) \arrow[l, "F(b)"'] \\
\cup & \cup & & \cup \\
x \arrow[r, mapsto] & \cdot & & x \arrow[ll, mapsto, "F(b)"]
\end{tikzcd}$$

さらに,

$$\begin{tikzcd}
& F(G/V) \arrow[dl, "F(b)"'] \arrow[dr, "F(b)"] & \\
F(G/W) \arrow[dr, "F(e)"] & & F(G/b^{-1}Vb) \arrow[dl, "F(e)"] \\
& F(G/W') &
\end{tikzcd}$$

いま

$$
\begin{tikzcd}
F(G/V) \arrow[r, "F(e)"] & F(G/W) \arrow[r, "F(e)"] & F(G/W') \\
x \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \arrow[rr, mapsto] & & \cdot \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F(G/V) \arrow[r, "F(b)"] & F(G/W) \arrow[r, "F(e)"] & F(G/W') \\
x \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \arrow[rr, mapsto] & & \cdot \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90]
\end{tikzcd}
$$

で, $F(e)$ は monic (injective) だから, $F(b)(x) = F(e)(x)$ が従う.