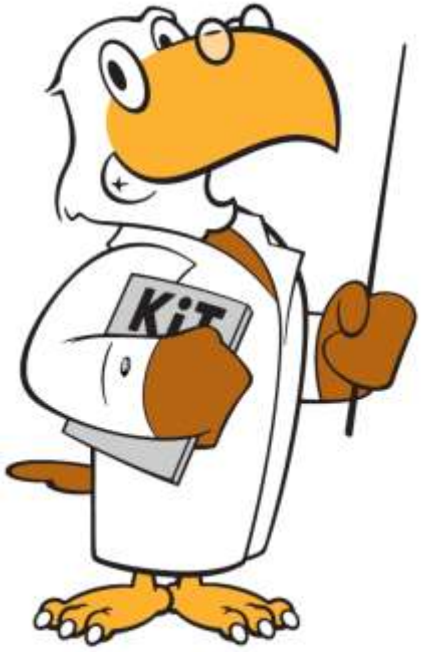
技術者のための統計

第6週

2EL他
23-320

授業開始時には挨拶をします



起立
「おはようございます。」

【技術者のための統計】15週間の流れ

	9月	10月				11月				12月			1月		
日程	27	4	11	18	25	8	15	22	29	6	13	20	10	17	24
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	データの収集・分布 ガイダンス	量的データ分布	2変量のデータ	相関関係・回帰分析	小テスト1・確率論	離散量の確率分布	離散量と連続量	連続量の確率分布	小テスト2・母集団と標本	推測統計	母数の統計的推定	統計的検定		期末試験・多変量解析	総括・自己点検
		レポート1		レポート2					レポート3			レポート4			

本日の内容

1. 小テスト1振り返り
2. 第7章　データ解析における確率論の基礎
   - 7.1 確率の基本的な考え方と基礎的知識
     - （2） 事象と確率
     - （3） 独立事象の同時生起確率
     - （4） 条件付確率
   - 7.2 基礎的確率分布：2項分布
3. まとめ

本日の学修目標

1. 小テスト1（第5章第6章）の振り返りができる
2. 確率論の基礎が理解できる

   7.1　基礎的知識

   - 排反 mutually exclusive
   - 確率密度 probability density
   - 条件付確率、ベイズの定理

   7.2　基礎的確率分布：2項分布

   - 確率変数 random variable、確率分布関数 probability distribution function の理解
   - 2項分布

3. 宿題ができる

次回以降、パソコンを持参のこと

次週までの計画と課題

1．授業資料の復習と教科書予習

→ 教科書 pp.80-103

2．第6回課題　pdfにしてe-Syllabusに提出

11月14日(火)まで　第6回e-Syllabus

次回もPC、電卓を持参のこと

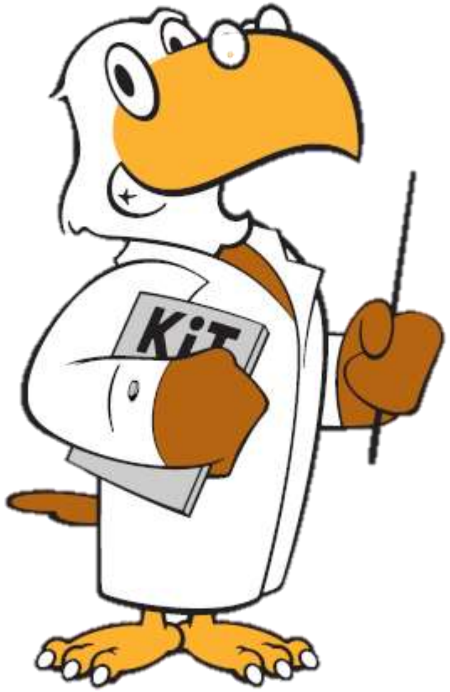
第6回　e-Syllabus

第6回 11月8日 対面	○振り返り授業 ○確率論の基本的考え方について学習する。 ○離散量の確率分布について学習する。	○学習した内容を復習し、課題に取り組む。 ○次回の学習内容について例題を中心に予習をする。	○自己点検：小テスト（1）の結果をふまえこれまでに理解を確認する. ○学習した内容を復習し、課題に取り組む。 ○次回の学習内容について例題を中心に予習をする
	第6回は確率に関する学習になります。 ベイズの定理 二項分布 ポアソン分布	小テスト１の振り返り 演習６	【復習】 【レポート課題】：技術者のための統計第6回目課題　11月14日まで　【未提出】 【自己点検】：第6回　【未提

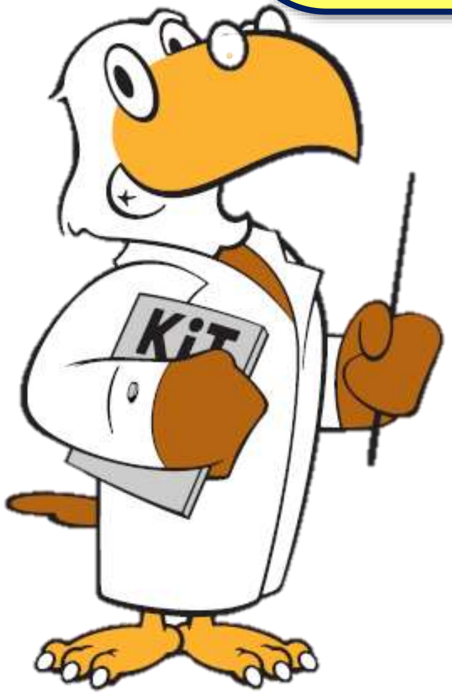
課題6提出場所

自己点検

1．小テスト１振り返り



２．第7章　データ解析における確率論の基礎



標本空間と確率事象

■標本空間 Ω *sample apace*

- ある条件で起こりうるすべての根元事象 *elementary event*

  a, *b*, …の集合体

$$\Omega = \{a, b, \cdots\}$$

- 事象 event ：標本空間の部分集合（ $A, B, C, \cdots$ で表す）
- 空事象 empty event ：空集合 $\emptyset$

事象の基本的な性質

■和 *sum*・積 *product*・余 *complement*（p.81）

- 和 *sum*：$A \text{ or } B \quad A \cup B \qquad A + B$
- 積 *product*：$A \text{ and } B \quad A \cap B \qquad A \times B$
- 余 *complement*：$\text{not } A \qquad \overline{A}$
- 排反 *disjoint*：$A \cap B = \emptyset$

順列

■順列 Permutation

- 異なったn個のものからr個取って並べる並べ方の総数は

$$ {}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) $$

$$ = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{r(r-1)(r-2)\cdots 1} = \frac{n!}{r!} $$

n factorial over r factorial

組合せ

■組合せ Combination

- **異なったn個のものからr個取る並べ方の総数は**

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

n factorial over in parentheses n minus r end parentheses factorial times r factorial

事象と確率　p.83, p.84

■標本空間 Ω の事象 A の生起確率

$\mathrm{Prob}(A)$

■確率の基本的性質

$0 \leq \mathrm{Prob}(A) \leq 1$

$\mathrm{Prob}(\Omega) = 1$

$\mathrm{Prob}(\emptyset) = 0$

$A \subset B$ **ならば** $\mathrm{Prob}(A) \leq \mathrm{Prob}(B)$

$\mathrm{Prob}(A \cup B) = \mathrm{Prob}(A) + \mathrm{Prob}(B) - \mathrm{Prob}(A \cap B)$

A, B **が排反事象ならば** $\mathrm{Prob}(A \cup B) = \mathrm{Prob}(A) + \mathrm{Prob}(B)$

各事象が同様に確からしい＜等確率のとき、 $\mathrm{Prob}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

余事象の確率 $\mathrm{Prob}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{Prob}(A)$

事象と確率　pp.84-87

■独立事象の同時生起確率

$$\mathrm{Prob}(A \cap B) \equiv \mathrm{Prob}(A, B)$$

■独立事象

$$\mathrm{Prob}(A, B) = \mathrm{Prob}(A) \cdot \mathrm{Prob}(B)$$

■条件付確率

事象Aが起こった条件の下で、事象Bが起こる確率

$$\mathrm{Prob}(B|A) = \frac{\mathrm{Prob}(A,B)}{\mathrm{Prob}(A)} \rightarrow \ \mathrm{Prob}(A, B) = \mathrm{Prob}(B|A) \cdot \mathrm{Prob}(A)$$

同様に $\mathrm{Prob}(A, B) = \mathrm{Prob}(A|B) \cdot \mathrm{Prob}(B)$

$\mathrm{Prob}(A) = \mathrm{Prob}(A, B) + \mathrm{Prob}\left(A, \bar{B}\right)$ **より**

$$\mathrm{Prob}(A) = \mathrm{Prob}(A|B) \cdot \mathrm{Prob}(B) + \mathrm{Prob}\left(A|\bar{B}\right) \cdot \mathrm{Prob}\left(\bar{B}\right)$$

演習6－1

■第6回演習　1、2を10分でやろう

1．赤球 6 個と白球 4 個が入っている袋から，5 個の球を取り出すとき，赤球 3 個, 白球 2 個が取り出される確率を求めよ.

2．大小 2 個のサイコロを投げるとき，次の確率を求めよ.

(1)　目の和が 3 である確率　　(2)　目の差が 3 である確率

(3)　目の積が 12 である確率　　(4)　目の和が偶数である確率

3．5 人がジャンケンを 1 回する．次の確率を求めよ.

(1)　1 人だけ勝つ確率　　(2)　3 人が勝つ確率

演習6－2

■第6回演習　3、4を10分でやろう

3．5人がジャンケンを1回する．次の確率を求めよ．

(1)　1人だけ勝つ確率　　　　(2)　3人が勝つ確率

4．当たりくじ4本含むくじ10本がある．このくじをA君，B君の2人がこの順番にくじを1本づつ引く．引いたくじは元に戻さないものとする．このとき，次の確率を求めよ．

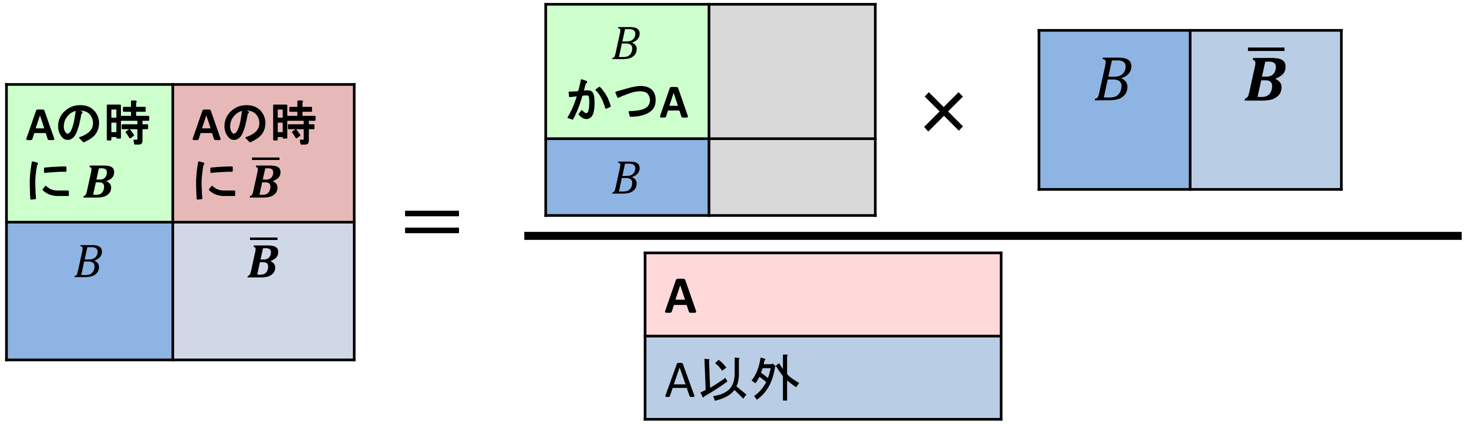
(1)　A君もB君も当たる確率　　　　(2)　A君が当たり，B君が外れる確率

(3)　A君もB君もはずれる確率

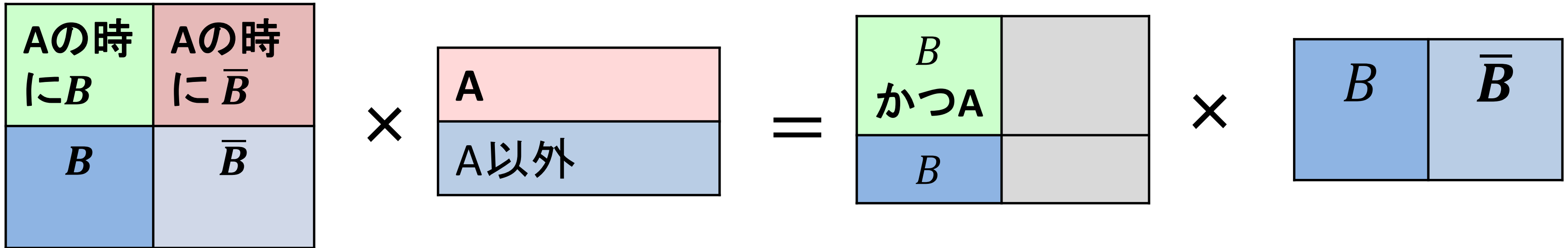
事象と確率　pp.87-88

■ベイズの定理

- B と $\bar{B}$ は標本空間 Ω の分割である。事象 A が起こった時に B が生起する確率は、

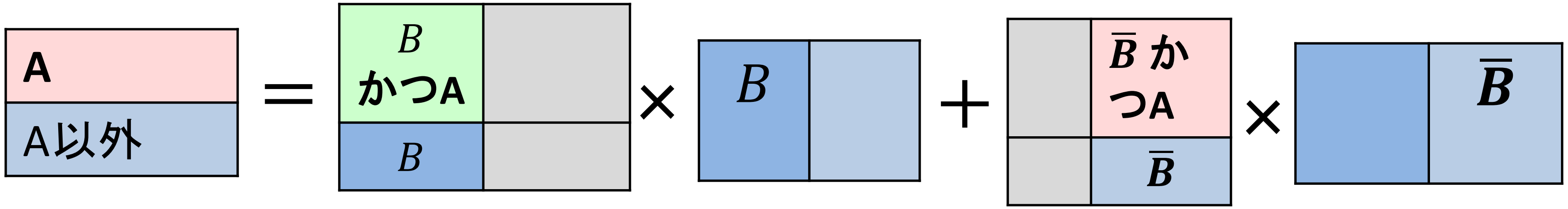


$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$



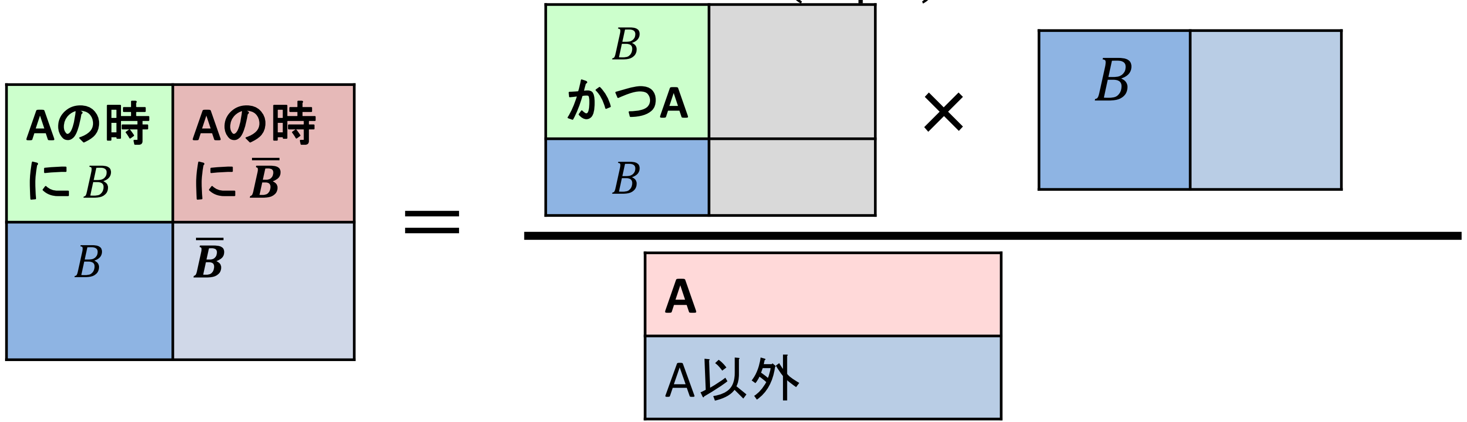
■ベイズの定理

- 事象Aが起こる確率 $P(A)$ は、



$$P(A) = P(A|B)P(B) + P\left(A\middle|\bar{B}\right)P\left(\bar{B}\right)$$

$$\mathrm{Prob}(B|A) = \frac{\mathrm{Prob}\left(A\middle|B\right)\mathrm{Prob}(B)}{\mathrm{Prob}\left(A\middle|B\right)Prob(B)+\mathrm{Prob}\left(A\middle|\bar{B}\right)\mathrm{Prob}(\bar{B})}$$



演習6－3

■第6回演習　5を10分でやろう

５．１．あるクラス 40 人の生徒の男女別、芸術選択科目の人数は右表の通りであった。

(1) この中から１人を抽出して芸術選択科目を尋ねる場合、抽出されたのが女子であったとき、その女子が音楽を選択している確率はいくつか.

	男子	女子
音楽	9	8
美術	１０	１３

(2) この中から１人を抽出する場合、抽出されたのが音楽選択者であったとき、その人が女子である確率はいくらか.

演習６－４

■第6回演習　裏面の3、4を10分でやろう

３.「男性１０人、女性７人が一室でパーティーを開いた。男子の喫煙者は５人、女性は３人である。部屋に入ったら煙草の吸殻が１本、灰皿の上にあった。このとき、吸った人が女性である確率を求めなさい（煙草の吸い回しはしていないと仮定する)」。

４.「酒好きのＡさんはＢ氏をよくお酒に誘う。統計をとると、雨の降っていない日に誘うと、Ｂ氏は５回中４回誘いに応じ、雨の降っている日に誘うと、５回中３回誘いに応じることが分かった。Ｂ氏がＡさんの誘いに応じたとき、雨が降っていない確率を求めよ。雨が降った日と降らない日の割合は１：７とする」。

演習６－５

■第6回演習　裏面のもう一つの4を10分でやろう

４．ある製品をＡ工場で生産するときの不良品率は１％，同じ製品をＢ工場で生産するときの不良品率は２％，Ｃ工場で生産するときの不良品率は３％である．ここで，Ａ，Ｂ，Ｃ工場の製品を１：１：２の割合で出荷する．以下の問題に答えよ．

（１）一つの製品が不良品である確率

（２）不良品が見つかったときＢ工場で作られた製品である確率

ベイズの定理の応用問題

［例 7-5］ 症状 A が発症。感染症 B で症状 A が発症する確率は 80% 。
感染症 B でなくても症状 A が発症する確率は 1% 。
感染症 B の感染率は 0.5% 。
症状 A で感染症 B に感染している確率は

	B 0.5%	$\bar{B}$ 1-0.5%
症状 A	80%	1%
症状がない $\bar{A}$	20%	99%

全体の陽性率 $Prob(A) = Prob(A,B) + Prob(A,\bar{B})$

$$= Prob(A|B) \times Prob(B) + Prob(A|\bar{B}) \times Prob(\bar{B}) = 0.8 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995$$

$$= 0.01395 \cong 0.014$$

症状 A で感染症 B に感染している確率 $Prob(B|A) = \frac{Prob(A,B)}{Prob(A)}$

$$= \frac{\text{症状}A \times B\text{病}}{\text{症状}A \times B\text{病} \quad + \text{症状}A \times B\text{病でない}} = \frac{0.8 \times 0.005}{0.8 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} = \frac{0.004}{0.01395}$$

$$\cong 0.29$$

ベイズの定理の応用問題 「やさしく学べる統計学」より

- C病は 3,000 人に 1 人の割合で発病する難病である。この病気に対する血液検査で正しき判定される信頼度は 97 % である(誤って判定される確率 3 %)。A男が血液検査の結果陽性と判定された。本当にC病にかかっている確率を求めよ。

	B C病 1/3000	$\bar{B}$ 1-1/3000
A 血液検査で陽性	97%	3%
$\bar{A}$ 血液検査で陰性	3%	97%

全体の陽性率 $Prob(A) = Prob(A, B) + Prob(A, \bar{B}) = 0.97 \times \frac{1}{3000} + 0.03 \times \left(1 - \frac{1}{3000}\right)$

$$Prob(B|A) = \frac{Prob(A, B)}{Prob(A)} = \frac{\text{陽性} \times \text{C病}}{\text{陽性} \times \text{C病} + \text{陽性} \times \text{C病でない}}$$

$$= \frac{0.97 \times \frac{1}{3000}}{0.97 \times \frac{1}{3000} + 0.03 \times \left(1 - \frac{1}{3000}\right)} = \frac{0.97}{0.97 + 0.03 \times 2999} \cong 0.0107$$

7.2 基礎的確率分布：2項分布

（1）確率変数*X random variable*　　*p.89*

根元事象により値が定まる変数

例

① サイコロを振った時の出る目(1,2,3,4,5,6)

② サイコロを振った時の出る目を4で割った余り(0,1,2,3)

③ サイコロを5回振った時に1の出る回数(1,2,3,4,5)

④ コインを投げて表が出るまでの回数(1,2,3,4,……)

⑤ 宝くじの当たり(0 (ハズレ) ,1億円)

確率変数 X がある値 x である $(X = x)$ 事象の確率 $\mathrm{Prob}(X = x)$

確率分布関数 probability distribution function（PDF）$p(x) = \mathrm{Prob}(X = x)$

累積確率分布関数 $P(x) = \mathrm{Prob}(X \leq x)$

7.2 基礎的確率分布：2項分布

- 確率変数の独立性 p.90
- 離散的な確率：確率変数 X が離散的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$
  - 確率関数：確率密度関数

$$p(x_i) = \mathrm{Prob}(X = x_i)$$

  - 離散的な確率関数の定理

$$p(x_i) = \mathrm{Prob}(X = x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(X = x_i) = 1$$

$$\mathrm{Prob}(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p(x_i)$$

  - 累積確率分布関数：

$$P(x) = \mathrm{Prob}(x_i \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{p}(x_i)$$

2項分布

■10回硬貨を投げて表の出る確率

0回：$ {}_{10}C_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$

1回：$ {}_{10}C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}$

2回：$ {}_{10}C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \frac{45}{1024} = \frac{5}{512}$

⋮

5回：

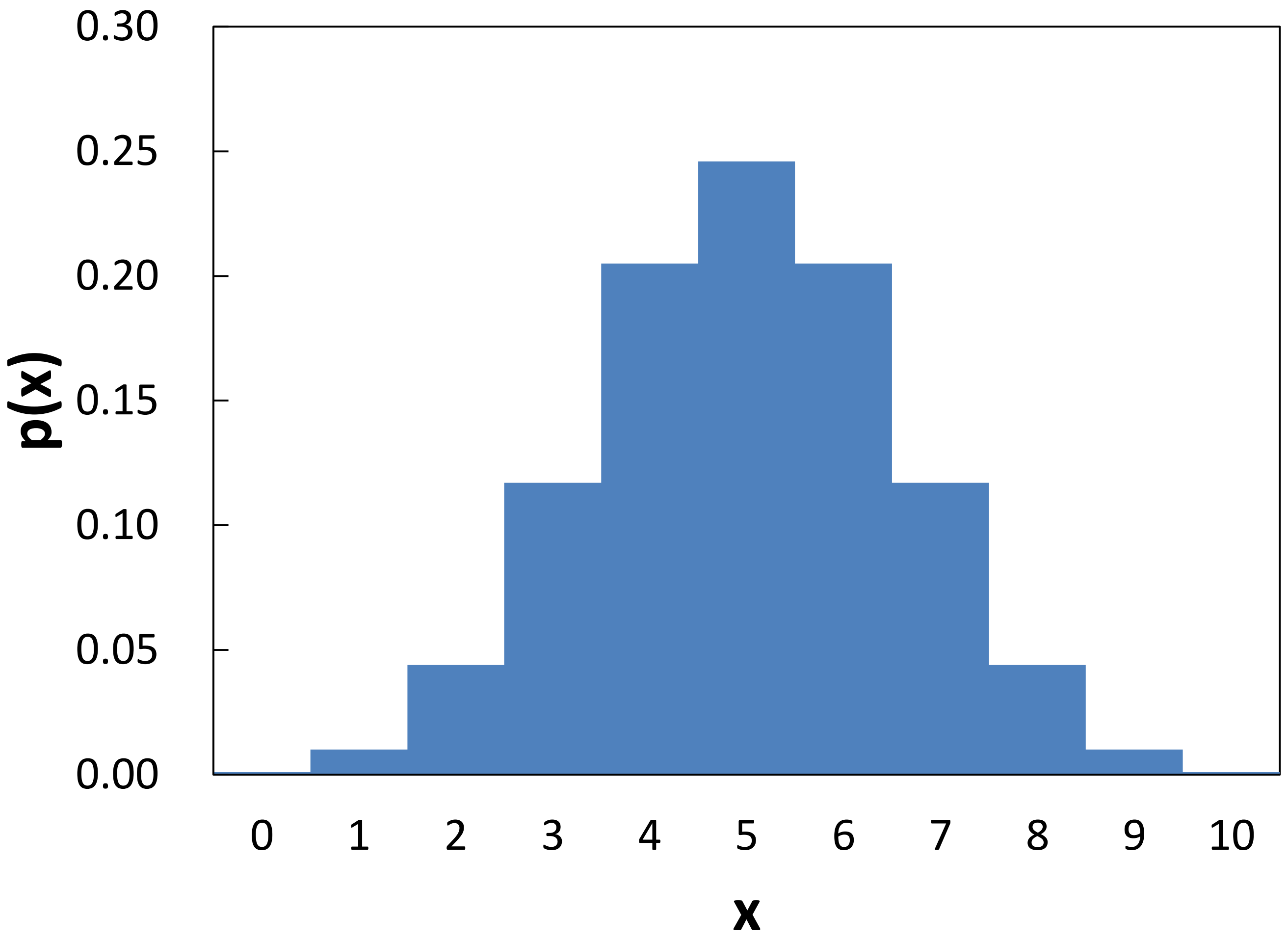
⋮

10回：$ {}_{10}C_{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{1024}$

2項分布

■10回硬貨を投げて表の出る確率関数とグラフ

x	p(x)
0	0.001
1	0.010
2	0.044
3	0.117
4	0.205
5	0.246
6	0.205
7	0.117
8	0.044
9	0.010
10	0.001



2項分布

■2項分布：*binomial distribution* *p.90*

1回の試行で事象*A*の起こる確率 Prob (*A*) =*p* のとき、独立な試行をn回行った時に事象*A*が起こる回数が k回の確率

Bin (n,p,k)

$$\mathrm{Prob}(X=k)={}_nC_k p^k q^{n-k}$$

$$p>0, q=1-p=>0$$

■ 例：さいころをn回振って1の目がk回出る確率

$$\mathrm{Prob}(X=k)={}_nC_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

2項分布

■二項分布の平均と分散

■平均(期待値):

$$E[X] = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = np$$

■分散:

$$V[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = npq$$

■ 証明:

$k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = k \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を使う。

第2章§2-2 ポアソン分布①

■ポアソン分布 Poisson distribution p.58

■二項分布で平均npを一定値 λにして$n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1\cdot 1\cdots 1\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\cdot 1$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

■ 極限公式：

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$、 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$を使う。

第2章§2-2 ポアソン分布②

■ポアソンの平均と分散　p.60

■平均（期待値）：

$$E[X] = \lambda$$

■分散：

$$V[X] = \lambda$$

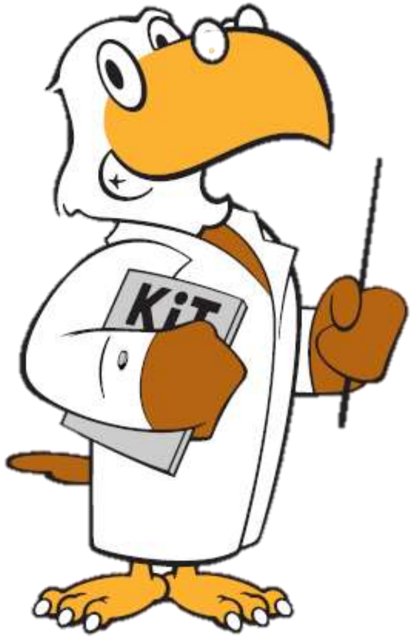
■ ポアソン分布の例

■二項分布で事象が起こる確率が小さいが、多数回繰り返した時の平均値が想定されるケース。

a.　1日に起きる火事の件数（過去の経験から平均λ件）。

b.　毎日5,000個作る製品の不良数（過去の経験から平均λ個）。

次週までの準備



次週までの計画と課題

1．授業資料の復習と教科書予習

→ 教科書 pp.80-103

2．第6回課題　pdfにしてe-Syllabusに提出

11月14日（火）まで　第6回e-Syllabus

次回もPC、電卓を持参のこと

第6回課題

■ 11月14日(火)まで

第6回e-Syllabusに

技術者のための統計	第６回目課題		配布日		提出期限	
事象と確率	クラス		番 号		氏 名	

1．大小２個のサイコロを同時に投げる試行において、次の確率を求めよ。

(1) 大サイコロの目が1，小サイコロの目が奇数　　(2) 出る目の和が６である確率

2．袋Aに赤球 5 個と白球 3 個，袋Bに赤球 4 個，白球 4 個入っている．A,Bの袋から球を 2 個ずつ取り出したとき，次の確率を求めよ．

(1)　すべて同じ色である確率　　(2)　赤球２個，白球２個である確率

3．袋に赤球５個と白球５個入っている．A君，B君のうち最初にA君が２個の球を取り出し，これを袋に戻さない．次に，B君が袋から２個の球を取り出したとき，次の確率を求めよ．

(1) A君の取り出した球が 2 個とも赤球である確率

(2) A君の取り出した球が赤球と白球，B君の取り出した球が白球のみである確率

4．当たりくじ 4 本含むくじ 10 本がある．このくじをA君，B君，C君の 3 人がこの順番にくじを 1 本づつ引く．引いたくじは元に戻さないものとする．このときA君，B君，C君のくじに当たる確率をそれぞれ求めよ．

5．病気(かぜなど)に罹った人 100 人に協力してもらって，ある薬(かぜ薬など)を服用した人，服用しなかった人に分かれて，１日以内に症状の改善が見られたかどうかをテストしたとき，右のような結果が得られたものとする。１日以内に症状の改善が見られた人を選んだとき，その人が薬を服用していた確率はいくらか

	服用した	服用せず
１日以内に改善	３０	１５
１日以内に改善せず	２０	３５

6．この１年のインフルエンザの患者は新型が６０％で旧型が４０％であった。今回新しく開発された薬の治癒率は新型が９０％で旧型が２０％であることがわかっている。今回、この薬で治った患者が新型である確率はいくらか。

7．3回に1回の割合で帽子を忘れるくせのあるK君が正月に A,B,Cの3軒を順に訪問して家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気がついた。3軒目の家 C に忘れてきた確率を求めよ．

8．ゲストが男性なのか女性なのかを当てるクイズを考えます。これまで，このクイズは過去何度も行われており，過去のデータによるとゲストが男性である確率は 60%，女性である確率は 40%であることが分かっています。今日のゲストは身長が 165cm 以上であるというヒントが与えられました。ただし，この世の中では男性の 7 割が 165cm 以上，女性の 2 割が 165cm 以上とします。さて，男性である確率はどれだけですか．

授業後にも
挨拶をします

ありがとうございました。

次回もPC、電卓を持参のこと