目次

第8章

最適成長モデル（ラムゼー・モデル）

8.1 概要

この章では，2 期間の最適消費モデルの知識をもとに，無限期間の異時点間の最適消費問題を解く。企業が生産活動を行っている経済に最適な代表的消費者のモデルを組み込むことで，最適成長モデル（ラムゼー・モデル）を構築する。これにより，ソロー・モデルの重要な前提であった貯蓄率一定という仮定が取り除かれる。

プログラミングのセクションでは，最適成長モデルの簡便な解法を紹介する。シンボリック計算と数値最適化の手法を用いる。最後に，発展的な学習に向けて少数の参考文献を紹介する。

8.2 不確実性のないラムゼー問題

8.2.1 セットアップ

無限期間生きる代表的消費者を考える。消費者は現在 0 期の期末にいて，1 期以降の消費の計画を立てている。1 期以降の労働所得が $y_1, y_2, \ldots$ であることを知っている。所得のうち一部を消費し残りを貯蓄する。$(t-1)$ 期末の貯蓄残高 s_{t-1} に対しては，利

子所得 $r_t s_{t-1}$ を t 期に受け取る。毎期の消費から期間効用 $u(c_t)$ を得る。$u(c)$ はその期に消費していたら得たであろう効用の水準である。0 期末で消費計画を立てている消費者は将来の効用を $\beta = 1/(1+\rho)$ で割り引く。したがって，t 期の消費 c_t の現在効用は $\beta^t u(c_t)$ となる。効用関数 u には標準的な仮定を課す[*1]。消費者の目的関数は割引効用の総和を最大にすることとする。

以上のセッティングを効用最大化問題として定式化すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\max_{(c_t)_{t\geq 1}} U = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
&\text{subject to} \\
&\qquad c_t + (s_t - s_{t-1}) = w_t + r_t s_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots \\
&\qquad s_0 : \text{ given.}
\end{aligned}
$$

ここで，w_t,r_t $(t = 1, 2, \ldots)$ と s_0 は既知のパラメータであるとする。このモデルでは将来の所得に関する完全な情報を持っている。つまり，**完全予見**を仮定する。

実はまだ 1 つ足りていない条件がある。これを見るために毎期の入出金の式（フロー予算制約, flow budget constraint）

$$c_t + (s_t - s_{t-1}) = w_t + r_t s_{t-1} \tag{8.1}$$

から生涯消費と生涯所得の関係式を導出しよう。記号を簡単にするため,

$$1 + R_t = (1 + r_1)(1 + r_2) \times \cdots \times (1 + r_t)$$

と定義する。ただし，$R_0 = 0$ とする。R_t は t 期間の累積的な利子率であり，t 期の価値を計画時点（0 期）の価値に換算する割引率である。式 (8.1) を

$$c_t + s_t = w_t + (1 + r_t)s_{t-1}$$

[*1] $u'(\cdot) > 0, u''(\cdot) < 0.$

と変形した上で，t 期分割り戻す。

$$\frac{c_t}{1+R_t}+\frac{s_t}{1+R_t}=\frac{w_t}{1+R_t}+\frac{s_{t-1}}{1+R_{t-1}}$$

これを $t=1,2,...$ で足し上げる。左辺と右辺に同じ式がある場合はキャンセルされる。

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{1+R_1}+\cancel{\frac{s_1}{1+R_1}}&=\frac{w_1}{1+R_1}+\frac{s_0}{1+R_0}\\
\frac{c_2}{1+R_2}+\cancel{\frac{s_2}{1+R_2}}&=\frac{w_2}{1+R_2}+\cancel{\frac{s_1}{1+R_1}}\\
\frac{c_3}{1+R_3}+\frac{s_3}{1+R_3}&=\frac{w_3}{1+R_3}+\cancel{\frac{s_2}{1+R_2}}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$t=T$ まで足し上げると，次の等式を得る。

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{c_t}{1+R_t}+\frac{s_T}{1+R_T}=\sum_{t=1}^{T}\frac{w_t}{1+R_t}+s_0$$

$T\to\infty$ の極限を取ると，

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{c_t}{1+R_t}+\lim_{t\to\infty}\frac{s_t}{1+R_t}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w_t}{1+R_t}+s_0 \tag{8.2}$$

を得る。無限級数は収束することを前提としている。特に，$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{y_t}{1+R_t}<\infty$ は仮定しなければならない。このことは，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_t}{1+R_t}=0$$

を意味する。もし，利子よりも早く所得が増えるのであれば，生涯所得は無限大になり，効用最大化問題は有限の解を持たない。

仮に，無限期先の将来の貯蓄残高の割引現在価値を負にすること，つまり，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{s_t}{1+R_t}<0$$

が許されるとしてみよう。このとき，生涯所得よりも大きな消費ができる。つまり，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{1+R_t} > \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{1+R_t} + s_0$$

とできる。したがって，$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1+R_t}$ をいくらでも大きな負の値にできる場合，効用を最大化する消費を見つけることはできない。なぜなら，消費をどんどん大きくできるので，効用も無限大に発散してしまうからだ。効用最大化問題が意味のある解を持つためには，$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1+R_t}$ は下限を持つ必要がある。通常，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1+R_t} \geq 0 \tag{8.3}$$

を仮定する。(8.3) は非ポンジー・ゲーム条件（No Ponzi Game 条件）と呼ぶ[*2]。非ポンジー・ゲーム条件は，借金を残して死なないという条件で**はない**。負債残高が利子率と同程度以上のスピードで拡大し続けることを禁止する条件である。例えば，1 期に作った負債をまったく返済せずに借り換えし続けるような行動を取れば非ポンジー・ゲーム条件に違反してしまう。

これで条件が出揃った。解くべき最大化問題は次のものである。

$$\max_{(c_t)_{t\geq 1}} U = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

subject to

$$c_t + (s_t - s_{t-1}) = w_t + r_t s_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1+R_t} \geq 0$$

$$s_0 : \text{ given.}$$

[*2] ポンジー・ゲームあるいはポンジー・スキームというのは，無限連鎖講（いわゆるネズミ講）のこと。

あるいは生涯所得制約で置き換えて，

$$\max_{(c_t)_{t\geq 1}} U = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{8.4}$$

subject to

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{1+R_t} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{1+R_t} + s_0 \tag{8.5}$$

$$s_0 : \text{ given.}$$

としても同じ解を得られる。

仮定 8.1. 効用最大化問題 *(8.5),(8.5)* には解が存在して，最適消費計画の総効用は有限である。つまり，$|U| < +\infty$ が成り立つ。

効用関数 u が $u' > 0, u'' < 0$ を満たすとき，u は厳密に凹な関数である。すなわち，任意の x, y と $0 < \lambda < 1$ に対して，

$$u\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) > \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$$

が成り立つ。この事実を使うと，解が一意であることが示せる。

命題 8.1. 効用最大化問題 *(8.5),(8.5)* の解は s_0 ごとに一意に定まる。

証明. $(c_t')_{t\geq 1}$ と $(c_t'')_{t\geq 1}$ がともに効用最大化解であるとしよう。$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t') = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t'')$ が成り立ち，少なくとも 1 つの $t \geq 1$ について，$c_t' \neq c_t''$ が成り立つとする。異なる 2 つの解が存在すると仮定して矛盾を導こう。

任意に $0 < \lambda < 1$ を選ぶ。$(c_t')_{t\geq 1}$ と $(c_t'')_{t\geq 1}$ はどちらも制約条件を満たすので，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda c_t'}{1+R_t} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda w_t}{1+R_t} + \lambda s_0$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda) c_t''}{1+R_t} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda) w_t}{1+R_t} + (1-\lambda) s_0$$

が成り立つ。辺々足すと，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda c_t' + (1-\lambda)c_t''}{1+R_t} \le \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{1+R_t} + s_0$$

を得る。これは，$\left(\lambda c_t' + (1-\lambda)c_t\right)_{t\ge 1}$ で定義される消費計画が制約条件を満たすことを意味している。u が厳密に凹であるから，$c_t' \ne c_t''$ なる t については，

$$u\left(\lambda c_t' + (1-\lambda)c_t\right) > \lambda u\left(c_t'\right) + (1-\lambda)u\left(c_t''\right)$$

が成り立っている。したがって，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u\left(\lambda c_t' + (1-\lambda)c_t''\right) > \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t') = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t'')$$

となる。これは，最初に解として選んだはずの $(c_t')_{t\ge 1}$ と $(c_t'')_{t\ge 1}$ が効用を最大化できていないということだ。異なる 2 つの解が存在すると仮定すると，実はそれらは解ではなかったという矛盾にたどりついてしまう。これで，解は 1 つしかないと結論付けられる。 □

8.2.2　オイラー条件

限界代替率と相対価格が一致するところで最適消費が決まる。t 期と $(t+1)$ 期の消費の限界代替率は (8.4) から，

$$MRS_{t,t+1} = \frac{\partial U/\partial c_t}{\partial U/\partial c_{t+1}} = \frac{\beta^t u'(c_t)}{\beta^{t+1} u'(c_{t+1})} = \frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})}$$

相対価格に相当するものは，(8.5) の c_{t-1}, c_t に掛かる係数を見ればよい。

$$\text{相対価格} = \frac{1/(1+R_t)}{1/(1+R_{t+1})} = 1 + r_{t+1}$$

したがって，最適に選ばれた消費計画は

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1 + r_{t+1}) \tag{8.6}$$

を満たす。(8.6) を**オイラー条件**と呼ぶ。

期間効用関数を CRRA 型 (第 7??章を参照) と仮定すると（$\theta > 0$ を相対的危険回避度の係数とする），$u'(c) = c^{-\theta}$ と特定できるので，

$$c_{t+1} = [\beta(1 + r_{t+1})]^{1/\theta}\, c_t \tag{8.7}$$

が分かる。

8.2.3　最適消費経路

式 (8.6) や (8.7) は今期の消費から次期の消費を作る方程式になっている。しかし，これだけではシミュレーションを実行することはできない。なぜなら，消費系列の初期値 c_1 は問題定式化時点では与えられておらず，効用最大化問題の解として定まるものだからである。シミュレーションを行うには，**どうにかして c_1 を定めなければならない。**

式 (8.2) をもう一度見てみよう。無限期先の将来の貯蓄残高

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1 + R_t}$$

の割引現在価値は非ポンジー・ゲーム条件によって非負であることが分かっている。果たして，正の値を取ることはあるだろうか？

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1 + R_t} > 0 \Longrightarrow \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{1 + R_t} < \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{1 + R_t} + s_0$$

であるから，生涯所得より小さな消費で済ませていることになる。これは効用最大化の観点からは望ましくない。なぜなら，貯蓄を減らして消費を増やせば必ず効用を高めることができるからだ。したがって，$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1+R_t} > 0$ となるような消費計画は最適ではありえない。オイラー条件と $\lim_{t\to\infty} \frac{s_t}{1+R_t} \leq 0$ が成り立つときに消費計画が最適になる

ことが知られている。将来貯蓄に関するこの不等式条件は**横断性条件**（transversality condition）と呼ばれている。非ポンジー・ゲーム条件から将来貯蓄が負になることは排除されているので，次の命題にまとめることができる。

命題 8.2. オイラー条件 *(8.6)* と横断性条件

$$\lim_{t\to\infty}\frac{s_t}{1+R_t}=0 \tag{8.8}$$

を満たす消費計画が最適である。

(8.8) が成り立っていれば，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{s_t}{1+R_t}&=\lim_{t\to\infty}\frac{w_t-c_t+(1+r_t)s_{t-1}}{1+R_t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{w_t-c_t}{1+R_t}+\lim_{t\to\infty}\frac{s_{t-1}}{1+R_{t-1}}\end{aligned}$$

より，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{w_t-c_t}{1+R_t}=0$$

が成り立つ。消費の一般的な極限挙動について議論することは難しい。一例を挙げるとするならば，所得の増加率と消費と増加率が極限で一致する均整成長のケースで，利子率が成長率を平均的に上回るなら，横断性条件が成り立つ。

オイラー条件 (8.6) より，

$$\frac{1}{1+r_{t+1}}=\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+R_t}&=\left(\frac{1}{1+r_1}\right)\left(\frac{1}{1+r_2}\right)\left(\frac{1}{1+r_3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{1+r_t}\right)\\&=\left(\frac{1}{1+r_1}\right)\left(\frac{\beta u'(c_2)}{u'(c_1)}\right)\left(\frac{\beta u'(c_3)}{u'(c_2)}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\beta u'(c_t)}{u'(c_{t-1})}\right)\\&=\left(\frac{1}{1+r_1}\right)\frac{\beta^{t-1}u'(c_t)}{u'(c_1)}\end{aligned}$$

横断性条件は次のように書き換えることができる。

$$\lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} u'(c_t) s_t = 0$$

$\beta^{t-1}u'(c_t)$ は効用で測った貯蓄の機会費用になっている。これは帰属計算された資産価格であり，保有資産の割引現在価値がゼロに収束することを意味する。

式 (8.6) を，未来が現在を決める方程式として眺めてみよう。

$$(1 + r_1)u'(c_1) = (1 + R_t)\beta^{t-1} u'(c_t)$$

この式が任意の t で成り立つので $t \to \infty$ としても成り立つはずだ。すなわち，

$$(1 + r_1)u'(c_1) = \lim_{t\to\infty} (1 + R_t)\beta^{t-1} u'(c_t) \tag{8.9}$$

c_1 を決定するためにこの式を使えそうである。しかし，右辺の極限が収束するかどうかは自明ではない。

予想 8.1. オイラー条件方程式 *(8.6)* と横断性条件 *(8.8)* が成り立つとき，*(8.9)* の右辺が収束して初期値 c_1 が一意に定まる。

証明. To be completed。

$$(1 + r_1)u'(c_1) = \lim_{t\to\infty} (1 + R_t)\beta^{t-1} u'(c_t)\frac{s_t}{s_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta^{t-1}u'(c_t)s_t}{s_t/(1 + R_t)}$$

不定形の極限で，同じスピードで変化しているので，収束するはず・・・・。Stolz–Cesaro の定理に類似した結果（極限がわからなくても収束することさえ言えれば OK）を探す。Cauchy 列になることを示す？

□

8.3　最適成長モデル

最適成長モデルまたはラムゼー・モデルは前節の最適消費モデルを成長モデルに組み込んだものである。

8.3.1　企業の行動と資本蓄積

企業行動はソローモデルとほとんど同じである。総生産は

$$Y_t = F(K_{t-1}, A_{t-1}L_{t-1})$$

によって定まる。Y_t,K_t,L_t,A_t はそれぞれ，t 期の生産，資本ストック，労働需要，技術水準である。F は収穫一定の生産関数である。議論を簡単にするため，ストック変数は各期の期末に測る。すなわち，各期の期首のストックを用いて生産が行われる。

仮定 8.2. 労働 L と技術 A は以下の外生的な成長ルールに従うと仮定する。

$$L_t = (1+n)L_{t-1}$$
$$A_t = (1+g)A_{t-1}$$

n は人口成長率，g は技術進歩率である。

仮定 8.3. 労働需要は完全に非弾力的であり，いつでも，どんな要素価格でも労働供給と需要が一致するとしよう[*3]。

利潤最大化条件により，

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K_{t-1}, A_{t-1}L_{t-1}) = r_t + \delta$$
$$\frac{\partial F}{\partial L}(K_{t-1}, A_{t-1}L_{t-1}) = w_t$$

[*3] 多くのマクロモデルの基礎となっているリアル・ビジネスサイクル・モデルは労働供給が賃金に依存して決まるように拡張したものだ。

が成り立つ。ただし，r_t,w_t,δ はそれぞれ実質利子率，実質賃金，資本減耗率である。

資本蓄積の方程式は,

$$K_t - K_{t-1} = Y_t - C_t - \delta K_{t-1}$$

となる。ここで，C_t は総消費であり，政府のない閉鎖経済を考えているので，$Y_t - C_t$ は t 期の粗投資と一致する。t 気に起こる資本ストックの変化 $K_t - K_{t-1}$ は粗投資から資本減耗を差し引いたものになる。資本蓄積方程式を $A_t L_t$ で除すと

$$\frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{Y_t}{A_t L_t} - \frac{C_t}{A_t L_t} + (1-\delta)\frac{K_{t-1}}{A_t L_t}$$

ここで，効率労働あたりの資本，生産，消費

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}, \quad y_t = f(k_{t-1}) = \frac{Y_t}{A_{t-1} L_{t-1}}, \quad c_t = \frac{C_t}{A_{t-1} L_{t-1}}$$

を導入すると，資本蓄積方程式は,

$$k_t = \frac{f(k_{t-1}) - c_t + (1-\delta)k_{t-1}}{(1+g)(1+n)} \tag{8.10}$$

と書き換えることができる[*4]。

ソロー・モデルとは違って投資の水準が内生的に決まるため，これだけではダイナミクスを決定することはできない。これには家計の行動を記述する必要がある。

8.3.2　家計

家計の行動はラムゼー問題の解によって定まるとする。ここでは，経済のすべての経済主体が 1 つの家計に属していると考えよう。個々の経済主体は t 期に

$$\bar{c}_t = \frac{C_t}{L_{t-1}}$$

[*4] 自分に対するコメント：フロー変数の効率労働あたりの量を $A_{t-1}L_{t-1}$ で除している。ソローモデルの章でもそうした方がよかったのかもしれない。あるいはストックを期首で測る。チェックする。

を消費し，その消費によって $u(\bar{c}_t)$ の当期効用を得る[*5]。家計全体の効用は時間方向には割引現在効用の総和，空間方向には総人口についての総和を取ったものとなる。したがって，家計は目的関数

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} L_{t-1} u(\bar{c}_t)$$

を最大化したい。$L_t = (1+n)^t L_0$ であることに注意すると，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \{\beta(1+n)\}^{t-1} u(\bar{c}_t)$$

を最大化することと同じである。ここで 1 つ仮定を置く必要がある。

仮定 8.4. 割引因子 β と人口成長率 n は以下の関係を満たす。

$$\beta < 1 + n.$$

各期の予算制約は次のように書ける。S_t は家計（マクロ経済）の総貯蓄残高である。

$$\bar{c}_t L_{t-1} + (S_t - S_{t-1}) = r_t S_{t-1} + w_t L_{t-1}$$

1 人あたりに換算すると（$\bar{s}_t = S_t / L_{t-1}$ と置く），

$$\bar{c}_t + \frac{S_t}{L_{t-1}} = \frac{(1+r_t) S_{t-1}}{L_{t-1}} + w_t$$

$$\bar{c}_t + \bar{s}_t = \left(\frac{1+r_t}{1+n}\right) \bar{s}_{t-1} + w_t$$

累積的な利子率を

$$1 + R_t = \left(\frac{1+r_1}{1+n}\right)\left(\frac{1+r_2}{1+n}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1+r_t}{1+n}\right)$$

と定義すれば，前節の問題と同じように扱える。割引現在価値を $t = T$ まで足し上げる

[*5] t 期に生まれる個人は t 期には消費しないとしよう。

と，次の等式を得る。

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{\bar{c}_t}{1+R_t} + \frac{\bar{s}_T}{1+R_T} = \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{1+R_t} + \bar{s}_0$$

$T \to \infty$ の極限を取ると，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_t}{1+R_t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\bar{s}_t}{1+R_t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{1+R_t} + \bar{s}_0 \tag{8.11}$$

非ポンジー・ゲーム条件を課すと，次の生涯の制約条件を得る。

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_t}{1+R_t} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{1+R_t} + \bar{s}_0$$

したがって，家計は次の制約条件付き最大化問題を解いて消費計画を立てる。

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \{\beta(1+n)\}^{t-1} u(\bar{c}_t)$$

subject to

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_t}{1+R_t} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t}{1+R_t} + \bar{s}_0$$

この問題のオイラー条件は

$$\frac{\{\beta(1+n)\}^{t} u'(\bar{c}_t)}{\{\beta(1+n)\}^{t+1} u'(\bar{c}_{t+1})} = \frac{1/(1+R_t)}{1/(1+R_{t+1})}$$

すなわち，

$$\frac{u'(\bar{c}_t)}{u'(\bar{c}_{t+1})} = \beta(1+r_{t+1}) \tag{8.12}$$

である。

ここで，CRRA 型の効用関数を仮定しよう。相対的危険回避度のパラメータを $\theta > 0$ とすると，

$$u'(c) = c^{-\theta}$$

である。したがって，(8.12) は次のように変形できる。

$$\frac{\bar{c}_{t+1}}{\bar{c}_t} = \{\beta(1 + r_{t+1})\}^{1/\theta}$$

$c_t = \bar{c}_t/A_{t-1}$ と $A_t = (1 + g)A_{t-1}$ に注意して効率労働あたりの式に変形すると，

$$\frac{\bar{c}_{t+1}/A_t}{\bar{c}_t/A_t} = \{\beta(1 + r_{t+1})\}^{1/\theta}$$

したがって，

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{\{\beta(1 + r_{t+1})\}^{1/\theta}}{1 + g} \tag{8.13}$$

を得る。このオイラー条件と横断性条件が同時に満たされているときに最適である。

8.3.3　最適経路

最適成長モデルの均衡は次の 3 つを同時に満たしている状態である。

- 企業は毎期の利潤最大化条件を満たしている，かつ，
- 家計は生涯消費を最適に選んでいる。
- 財市場，資本市場の需給が一致している。

定理 8.1. 最適成長モデルの均衡（あるいは，最適経路，*optimal path*）は次の動学方程式で特徴付けられる。

$$k_t = \frac{f(k_{t-1}) - c_t + (1 - \delta)k_{t-1}}{(1 + g)(1 + n)} \tag{8.14}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{[\beta\,\{f'(k_t) + 1 - \delta\}]^{1/\theta}}{1 + g} \tag{8.15}$$

k_0 は所与で，c_1 は横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k_t}{1 + R_t} = 0$$

によって定まる。

証明. 式 (8.10),(8.13) および資本の限界生産性が利子率と一致することを用いている。資本市場精算条件より $S_t = K_t$ が成り立っている。 □

もし，初期値 (k_0, c_1) が決まれば，以後の変数値を順番に計算していくことができる。

- (k_0, c_1) が決まれば，(8.14) より k_1 が決まる。さらに，(8.14) より，c_2 が決まる。
- (k_1, c_2) が決まったので，(8.14) より k_2 が決まる。さらに，(8.14) より，c_3 が決まる。
- 以下同様。

しかし，(8.14),(8.15) は初期値 $k_0 = K_0/(A_0 L_0)$ のみ与えられており，消費の初期値 c_1 は横断性条件によって定められなければならない。これが最適成長モデル，ひいてはマクロ経済モデルをシミュレーションすることの難しさである。

8.3.4　長期均衡

この問題の設定では，定常状態 (k^*, c^*) に収束する経路が最適経路になる。なお，(k^*, c^*) は次の方程式を満たす。

$$k^* = \frac{f(k^*) - c^* + (1-\delta)k^*}{(1+g)(1+n)}$$
$$1 = \frac{\left[\beta\left\{f'(k^*) + 1 - \delta\right\}\right]^{1/\theta}}{1+g}.$$

パラメータ（f,δ,β,g,θ）が与えられれば，コンピュータを用いて数値的に解 (k^*, c^*) を求められる。

最適成長モデルの最適経路 $\{(k_t, c_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}$ は，

$$\lim_{t\to\infty} k_t = k^*, \qquad \lim_{t\to\infty} c_t = c^*$$

を満たす。効率労働あたりの変数が収束したあとの状態を長期均衡と呼ぶ。経済は十分長い時間がたったあとには長期均衡に収束するので，収束後の状態が経済の長期的な動

向を示していると考えるのである。

マクロレベルの集計変数については，長期では

$$K_t \approx A_t L_t k^*, \quad C_t \approx A_{t-1} L_{t-1} c^*$$

などが成り立つ。また，1 人あたりの変数については

$$\frac{K_t}{L_t} \approx A_t k^*, \quad \frac{C_t}{L_{t-1}} \approx A_{t-1} c^*$$

などが成り立っている。重要なのは成長率であり，次のような性質が成り立つ。

定理 8.2. 最適成長モデルの長期均衡は以下の性質を持つ。

- 効率労働あたりの変数は定数である。
- *1* 人あたりの変数は g の率で成長する。
- 集計量は $g + n + gn$ の率で成長する。

系 8.1. 最適成長モデルの長期均衡では，次のことが言える。

- 実質利子率は定数である。
- 賃金は g の率で成長する。

つまり，長期均衡における成長率に注目する限り，最適成長モデルとソロー・モデルでは同じ結論が成り立っている。

8.4　プログラミング

(8.14),(8.15) のような式があれば，シミュレーションのコードを自力で書けそうな気がするだろうか。

実は，このモデルのシミュレーションは，これまでに学んできた方法では実行できない。なぜなら，2 変数の動学方程式に対して初期値が 1 つ（k_0）しか与えられていないからだ。消費の「初期値」c_1 は横断性条件を用いなければ決まらない。つまり，適当

に c_1 を選んでシミュレーションして $k_t \to k^*$ と $c_t \to c^*$ が成り立っていることを確認して，ようやくそれが最適経路であるとわかる。手当たりしだいに c_1 を変化させてシミュレーションすることもできるが効率がよくないので，ここでは蓮見 (2020) で紹介されている方法を採用しよう。

動学方程式は

$$k_t = \frac{f(k_{t-1}) - c_t + (1-\delta)k_{t-1}}{(1+g)(1+n)} \qquad c_{t+1} = \frac{c_t \left[\beta \left\{f'(k_t) + 1 - \delta\right\}\right]^{1/\theta}}{1+g}$$

で与えられている。$t = 0$ に対して，

$$k_1 = \frac{f(k_0) - c_1 + (1-\delta)k_0}{(1+g)(1+n)} \qquad c_2 = \frac{c_1 \left[\beta \left\{f'(k_1) + 1 - \delta\right\}\right]^{1/\theta}}{1+g}$$

$t = 1, 2, \ldots, T-1$ に対して，

$$k_2 = \frac{f(k_1) - c_2 + (1-\delta)k_1}{(1+g)(1+n)} \qquad c_3 = \frac{c_2 \left[\beta \left\{f'(k_2) + 1 - \delta\right\}\right]^{1/\theta}}{1+g}$$

$$k_3 = \frac{f(k_2) - c_3 + (1-\delta)k_2}{(1+g)(1+n)} \qquad c_4 = \frac{c_3 \left[\beta \left\{f'(k_3) + 1 - \delta\right\}\right]^{1/\theta}}{1+g}$$

$$\vdots$$

$$k_T = \frac{f(k_{T-1}) - c_T + (1-\delta)k_{T-1}}{(1+g)(1+n)} \qquad c_{T+1} = \frac{c_T \left[\beta \left\{f'(k_T) + 1 - \delta\right\}\right]^{1/\theta}}{1+g}$$

$t = 0$ から $t = T-1$ までの $2T$ 本の方程式がある。変数は 2 種類，$2T+2$ 個含まれている：

- $k_0, k_1, \ldots k_T$ で $T+1$ 個
- $c_1, c_2, \ldots, c_{T+1}$ で $T+1$ 個

初期条件 k_0 と，終端条件 $c_{T+1} = c^*$ を代入することで，未知変数の数を $2T$ 個に減ら

してやれば，最適経路を近似的に導くことができる。$k_T = k^*$ を代入しないことに注意せよ[*6]。

準備

必要なライブラリと関数をインポートする。

```
import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

動学方程式 (8.10),(8.15) を定義するために必要最小限のシンボルを導入しよう。

```
k1, k0, c1, c0, g, n = sp.symbols("k1 k0 c1 c0 g n")
alpha, beta, delta, theta = sp.symbols("alpha beta delta theta")
```

生産関数はコブ＝ダグラス型とする。

```
f = sp.Lambda(k0, k0**alpha)
f(k0)
```

$$k_0^{\alpha}$$

動学方程式

動学方程式 (8.14),(8.13) において，ゼロになるべき関数を定義する。

```
EK = k1 - (f(k0) - c0 + (1 - delta) * k0) / (1 + g) / (1 + n)
EK
```

$$k_1 - \frac{-c_0 + k_0 (1 - \delta) + k_0^{\alpha}}{(g + 1)(n + 1)}$$

および,

```
EC = c1 - c0 * (beta * (f(k0).diff(k0) + 1 - delta)) ** (1 / theta) / (1 + g)
```

[*6] これをやってしまうと解けなくなる。

```
EC
```

$$-\frac{c_0 \left(\beta \left(\frac{\alpha k_0^{\alpha}}{k_0} - \delta + 1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c_1$$

定常状態 (k^*, c^*) を求めるためには，次のベクトル関数がゼロになる点を探せばよい。

```
E = sp.Matrix([EK, EC]).subs({k1: k0, c1: c0})
E
```

$$\left[\begin{matrix} k_0 - \frac{-c_0 + k_0(1-\delta) + k_0^{\alpha}}{(g+1)(n+1)} \\ -\frac{c_0 \left(\beta \left(\frac{\alpha k_0^{\alpha}}{k_0} - \delta + 1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c_0 \end{matrix}\right]$$

定常状態を数値的に求める

以下のパラメータを用いる。

```
params = {
    alpha: 0.33,
    delta: 0.03,
    g: 0.02,
    n: 0.01,
    theta: 0.8,
    beta: 0.98
}
```

数値関数に変換する。これには，`sp.lambdify()` を用いる。ヤコビ行列も求めておこう。

```
E_lam = sp.lambdify([[k0, c0]], np.squeeze(E.subs(params)))
J_lam = sp.lambdify([[k0, c0]], E.jacobian([k0, c0]).subs(params))
```

`fsolve()` を用いて定常状態を求める。

```
ss = fsolve(func=E_lam, x0=[4, 4], fprime=J_lam)
ss
```

```
[10.87371171  1.54328611]
```

定常状態の値は $(k^{*}, c^{*}) \approx (10.874, 1.543)$ であることが分かる。

最適経路を求める

たくさんのシンボル変数を作るには次のようにすればよい[*7]。シンボルのタプルが生成される。負数のインデックスを使うと「最後から n 個目」のような指定ができることを思い出そう。

```
T = 80
c = sp.symbols(f"c[:{T+2}]")
k = sp.symbols(f"k[:{T+1}]")

c[:3], c[-3:]
```

$$((c[0],\ c[1],\ c[2]),\ (c[79],\ c[80],\ c[81]))$$

最適経路上では次の行列値関数がゼロになる。数が多いので最初の 3 行のみ出力する。

```
eqm = sp.Matrix([[EK.subs({k0: k[i], k1: k[i+1], c0: c[i+1], c1: c[i+2]}),
                  EC.subs({k0: k[i], k1: k[i+1], c0: c[i+1], c1: c[i+2]})]
                 for i in range(T)])
eqm[:3, :]
```

$$\begin{bmatrix} k[1] - \frac{-c[1]+k[0](1-\delta)+k[0]^{\alpha}}{(g+1)(n+1)} & -\frac{c[1]\left(\beta\left(\frac{\alpha k[0]^{\alpha}}{k[0]}-\delta+1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c[2] \\ k[2] - \frac{-c[2]+k[1](1-\delta)+k[1]^{\alpha}}{(g+1)(n+1)} & -\frac{c[2]\left(\beta\left(\frac{\alpha k[1]^{\alpha}}{k[1]}-\delta+1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c[3] \\ k[3] - \frac{-c[3]+k[2](1-\delta)+k[2]^{\alpha}}{(g+1)(n+1)} & -\frac{c[3]\left(\beta\left(\frac{\alpha k[2]^{\alpha}}{k[2]}-\delta+1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c[4] \end{bmatrix}$$

列ベクトルに変換しておこう。`.T` で転置行列を作ってからリシェイプする。

```
eqm_col = eqm.T.reshape(2*T, 1)
eqm_col[:3, :], eqm_col[T:T+3, :]
```

[*7] `c[0]` は使わない。

$$\left(\begin{bmatrix} k[1] - \frac{-c[1]+k[0](1-\delta)+k[0]^{\alpha}}{(g+1)(n+1)} \\ k[2] - \frac{-c[2]+k[1](1-\delta)+k[1]^{\alpha}}{(g+1)(n+1)} \\ k[3] - \frac{-c[3]+k[2](1-\delta)+k[2]^{\alpha}}{(g+1)(n+1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{c[1]\left(\beta\left(\frac{\alpha k[0]^{\alpha}}{k[0]}-\delta+1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c[2] \\ -\frac{c[2]\left(\beta\left(\frac{\alpha k[1]^{\alpha}}{k[1]}-\delta+1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c[3] \\ -\frac{c[3]\left(\beta\left(\frac{\alpha k[2]^{\alpha}}{k[2]}-\delta+1\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}}{g+1} + c[4] \end{bmatrix}\right)$$

初期値 k_0 と終端条件 $c_{T+1} = c^*$ を与えて数値関数に変換し，解を求める。ヤコビ行列の自動計算は時間がかかるので省略しよう[*8]。

```
k_init = 1.0


eqm_param = eqm_col.subs(params).subs({k[0]: k_init, c[-1]: ss[1]})
eqm_param = np.squeeze(eqm_param)
eqm_num = sp.lambdify([[*k[1:], *c[1:-1]]], eqm_param)
solution = fsolve(eqm_num, x0=np.ones(2*T))
```

得られた結果には k_0 と c_{T+1} が含まれていないので，これを補う。

```
k_sol = np.r_[k_init, solution[:T]]
c_sol = np.r_[solution[T:], ss[1]]
```

結果をプロットしたものが図 8.1 である。次のコードで生成した。

```
plt.quiver(k_sol[:-1], c_sol[:-1],
           k_sol[1:] - k_sol[:-1],
           c_sol[1:] - c_sol[:-1],
           scale_units='xy', angles='xy', scale=1)

plt.xlabel(r"$k_{t}$")
plt.ylabel(r"$c_{t+1}$")
plt.show()
```

*8 均衡を規定する方程式の構造に注目すれば効率よくヤコビ行列を定義できる。

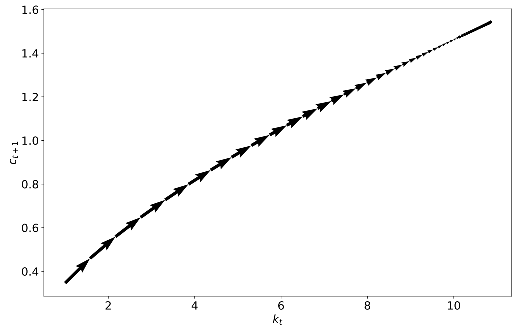

図 8.1: 最適成長経路

関数にまとめる

試行錯誤がある程度落ち着いたら一連の作業を関数にまとめておこう。2 つの関数を作る。

- `solve_ss`: 資本蓄積方程式およびオイラー条件のシンボリックな表現，モデルのパラメータを引数に取り，定常状態 (k^*, c^*) の値を出力する関数
- `solve_optimal_growth`: 資本蓄積方程式およびオイラー条件のシンボリックな表現，k の初期値，c の終端条件，モデルのパラメータを引数に取り，最適経路 $\left(\{k_t\}_{t=0}^{T}, \{c_t\}_{t=1}^{T+1}\right)$ を出力する関数

■`solve_ss`　定常状態を求める関数は次のように定義する。

```
def solve_ss(eqm_k, eqm_c, param, x0):
    c, k = sp.symbols("c, k")
    eqm = sp.Matrix([eqm_k.subs({k0: k, k1: k, c0: c, c1: c}),
                     eqm_c.subs({k0: k, k1: k, c0: c, c1: c})])

    eqm_lam = sp.lambdify([[k, c]], np.squeeze(eqm.subs(param)))
    J_lam = sp.lambdify([[k, c]], eqm.jacobian([k, c]).subs(param))
```

```
    ss = fsolve(func=eqm_lam, x0=x0, fprime=J_lam)
    return ss
```

仮引数は次のような意味である。

- eqm_k: 均衡条件 (8.10) のシンボリックな表現
- eqm_c: 均衡条件 (8.15) のシンボリックな表現
- param: モデルのパラメータを格納する辞書
- x0: 解探索の初期値

本体部分は上で説明したものとほとんど同じなので，解説は省略する。

■solve_optimal_growth　均衡経路を求める関数を次のように定義する。

```
def solve_optimal_growth(eqm_k, eqm_c, k_init, c_final, param, T):

    c = sp.symbols(f"c[:{T+2}]")
    k = sp.symbols(f"k[:{T+1}]")
    eqm = sp.Matrix([[eqm_k.subs({k0: k[i], k1: k[i+1], c0: c[i+1], c1: c[i+2]}),
                      eqm_c.subs({k0: k[i], k1: k[i+1], c0: c[i+1], c1: c[i+2]})]
                      for i in range(T)])
    eqm_col = eqm.T.reshape(2*T, 1)

    eqm_param = eqm_col.subs(param).subs({k[0]: k_init, c[-1]: c_final})
    eqm_param = np.squeeze(eqm_param)

    eqm_num = sp.lambdify([[*k[1:], *c[1:-1]]], eqm_param)
    solution = fsolve(eqm_num, x0=np.ones(2*T))

    k_sol = np.r_[k_init, solution[:T]]
    c_sol = np.r_[solution[T:], c_final]
```

```
    return (k_sol, c_sol)
```

仮引数は次のような意味である。

- eqm_k: 均衡条件 (8.10) のシンボリックな表現
- eqm_c: 均衡条件 (8.15) のシンボリックな表現
- k_init:k の初期値
- c_final: 消費の終端条件。定常状態を事前に求めておく。
- param: モデルのパラメータを格納する辞書
- T: シミュレーションの期間

■使用例　定義した関数は，次のように使用する（結果は図 8.2)。$k_0 > k^*$ から出発しても同じ定常状態に収束していく様子を確認できる。パラメータを変更するなど，各自で色々と試してほしい。

```
ss1 = solve_ss(EK, EC, params, x0=[4, 4])
k_sol, c_sol = solve_optimal_growth(EK, EC, 30.0, ss1[1], params, 50)

plt.quiver(k_sol[:-1], c_sol[:-1],
           k_sol[1:] - k_sol[:-1],
           c_sol[1:] - c_sol[:-1],
           scale_units='xy', angles='xy', scale=1)

plt.xlabel(r"$k_{t}$")
plt.ylabel(r"$c_{t+1}$")
plt.show()
```

比較動学分析

長期均衡にある経済に対してパラメータ変化のショックが生じると，その後，経済はどのように変化するだろうか。この手の分析を比較動学分析と呼ぶ。

例えば，次のようなシナリオを考えよう。

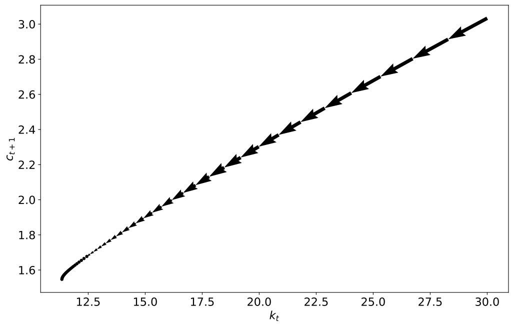

図 8.2: 最適成長経路

- 元のパラメータに対する定常状態にある経済に対して，
- 技術進歩を加速するイノベーションが起こり，g が 0.02 から 0.03 に上昇した。

やることは 3 つ。

1. 変化前のパラメータに対応する定常状態を求める。（ss1 として実行済み）
2. 変化後のパラメータに対応する定常状態を求める。
3. 変化後のパラメータに対して最適経路を求める。

パラメータの更新と新しい定常状態は次のように計算できる。

```
params.update({g: 0.03})
ss2 = solve_ss(EK, EC, params, x0=[4, 4])
```

パラメータ変化後の最適経路を導出する。変化前の定常状態を初期値として付加しておこう。

```
sol2 = solve_optimal_growth(EK, EC, ss1[0], ss2[1], params, 80)
k_sol2 = np.r_[ss1[0], sol2[0]]
c_sol2 = np.r_[ss1[1], sol2[1]]
```

最後に可視化する（結果は図 8.3）。パラメータ変化のタイミングで効率労働あたりの

消費がジャンプしていることに気がつくだろう。将来の経済状況に関する予想が修正されると，フロー変数には大きな変化が起こる。ソロー・モデルにはない，ラムゼー・モデルの特徴である。

```
plt.quiver(k_sol2[:-1], c_sol2[:-1],
           k_sol2[1:] - k_sol2[:-1],
           c_sol2[1:] - c_sol2[:-1],
           scale_units='xy', angles='xy', scale=1)

plt.xlabel(r"$k_{t}$")
plt.ylabel(r"$c_{t+1}$")
plt.show()
```

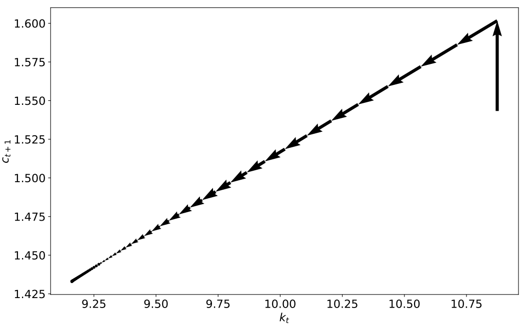

図 8.3: 移行過程

8.5　まとめと注意

この章では，最適成長モデルは均衡経路が近似的に満たすべき連立方程式を用いて均衡経路を数値的に求めた。ソローモデルのシミュレーションとは違って，すべての時点の解が一斉に求まるような解法になっている。最適成長モデルは将来の情報に依存して現在の行動が定まるようなモデルだからだ。未来が現在を定める性質を持つモデルを，

フォワード・ルッキングなモデルと呼ぶ。

フォワード・ルッキングなモデルの解法はこの章で紹介した方法がベストという訳ではない。うまく行かない例を見つけるには，さきほどのコードを T を小さくして再実行してみてほしい。定常状態周りの挙動が安定しないことに気づくと思う。定常状態に有限ステップでたどり着くような点はそれ自身を除いて存在しないので，$c_{T+1} = c^*$ が成り立つなら必ず $k_T \neq k^*$ になってしまうのだ。

この章で用いた解法は理論的に高度なことが要求されないという大きな利点があるものの，定常状態の周りで不安定になるので，少し使いにくいケースもある。マクロ経済分析の多くは定常状態の周りの状況を分析することを主眼としているからだ。定常状態の周りの分析をきちんと実行するためには，別の手法を用いる方がよい。非線形性と真っ向勝負するなら動的計画法を用いる (Stachurski, 2009)。関数解析の入門的な知識が必要になるのでじっくり取り組もう。非線形性が強くない場合や，おおよその傾向を掴むことが目的であれば，定常状態周りの線形近似を用いることもできる (加藤, 2006)。こちらは線形代数学のやや高度な技術が駆使される。いずれの方向に進むにせよ，蓮見 (2020) はよい出発点だろう。

参考文献

Stachurski, John (2009) *Economic Dynamics: Theory and Computation*: MIT Press.

加藤涼 (2006)『現代マクロ経済学講義—動学的一般均衡モデル入門』, 東洋経済新報.

蓮見亮 (2020)『動学マクロ経済学へのいざない』, 日本評論社.