

Progetto di Fondamenti di Automatica

Traccia nr. 28

Esercizio A

Si consideri un sistema LTI a TC descritto dalla seguente risposta al gradino

$$y(t) = \left(-\frac{81}{122} * e^{-2*t} - \frac{2589}{4514} * e^{-\frac{t}{3}} * \sin(2 * t) + \frac{1224}{2257} * e^{-\frac{t}{3}} * \cos(2 * t) + \frac{9}{74} \right) * 1(t)$$

Determinare:

1. La funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri

>> Folder Esercizio_1 >> ese1.mw

```
restart : with(inttrans) :
y_step := t -> \left( -\frac{81}{122} \cdot e^{-2 \cdot t} - \frac{2589}{4514} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \sin(2 \cdot t) + \frac{1224}{2257} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \cos(2 \cdot t) + \frac{9}{74} \right) \cdot \text{Heaviside}(t) :
u_step := t -> \text{Heaviside}(t) :
```

Per prima cosa mi determino la funzione di trasferimento del sistema nel dominio della Trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}(y(t)) \\ U(s) &= \mathcal{L}(u(t)) \end{aligned}$$

E dalla seguente relazione si ottiene:

$$Y(s) = G(s) U(s) \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

La trasformata di Laplace del gradino la si può calcolare facilmente a “mano”, infatti

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = \mathcal{L}(1(t)) = \int_0^{+\infty} 1(t) * e^{-(s*t)} * dt = \int_0^{+\infty} e^{-s*t} * dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{e^{-s*T}}{-s} - \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e^{-s*T}}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s} \quad \text{con} \quad \Omega = \{ s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0 \}$$

$$\begin{aligned} Y_{step} &:= s \rightarrow \text{laplace}(y_{step}(t), t, s) : \\ Y_{step}(s) & \end{aligned}$$

$$-\frac{9(4s-1)}{s((3s+1)^2+36)(s+2)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U_{step} &:= s \rightarrow \text{laplace}(u_{step}(t), t, s) : \\ U_{step}(s) & \end{aligned}$$

$$\frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} G &:= s \rightarrow \frac{(1)}{(2)} : \\ G(s) & \end{aligned}$$

$$-\frac{9(4s-1)}{((3s+1)^2+36)(s+2)} \quad (3)$$

Definendo $G(s) = \frac{\eta(s)}{\partial(s)}$ allora zeri e poli della funzione di trasferimento del sistema sono definiti come:

$$zeros : \{ z \in \mathbb{C} : \eta(z) = 0 \}, poles : \{ p \in \mathbb{C} : \partial(s) = 0 \}$$

Ovvero gli zeri della f.d.t. del sistema è l'insieme di tutte le radici che annullano il numeratore di $G(s)$ mentre i poli della f.d.t. del sistema è l'insieme di tutte le radici che annullano di denominatore di $G(s)$.

`Zeros := solve(numer(G(s)))`

`Poles := solve(denom(G(s)))`

$$\frac{1}{4}$$

(4)

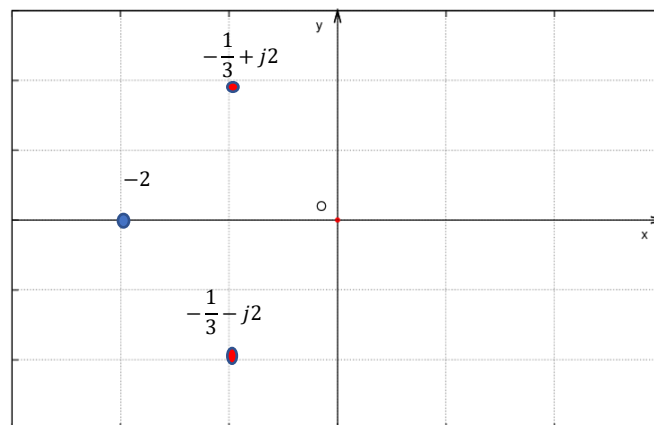
$$-2, -\frac{1}{3} + 2i, -\frac{1}{3} - 2i$$

(5)

Una definizione alternativa di zeri e poli del sistema può essere la seguente:

$$zeros : \{ z \in \mathbb{C} : G(z) = 0 \} \text{ and } poles : \left\{ p \in \mathbb{C} : \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = 0 \right\}$$

In questo caso, abbiamo un solo zero reale e 3 poli, di cui uno reale con molteplicità algebrica 1 e due poli complessi e coniugati. Sul piano di Gauss, zeri e poli del sistema sono situati nel seguente modo:



Dagli zeri e dai poli della funzione di trasferimento, possiamo ricavare informazioni sul sistema come:

- Essendo $card(\{zeri\}) < card(\{poli\})$ allora il sistema è proprio, cioè l'uscita non dipende dal valore corrente dell'ingresso, ma solo dai suoi valori passati.
- Il sistema è BIBO STABILE poiché la $\Re(p) < 0 \forall p \in \{ poles \}$

2. I modi di evoluzione libera del sistema

I modi di evoluzione libera di un sistema sono quelle componenti presenti nella:

- Risposta transitoria
- Risposta all'impulso
- Risposta in evoluzione libera

Avendo l'insieme dei poli della funzione di trasferimento, il numero di modi di evoluzione libera del sistema sarà pari ad

$$r = card(\{ poles \}) = \text{ordine del sistema}$$

Data la funzione di trasferimento del sistema nella seguente forma:

$$G(s) = \frac{\eta(s)}{\partial(s)} = \frac{\eta(s)}{\dots * (s - p_i) * \dots * (s - p_j)^v * \dots * (s^2 + a_1 * s + a_2) * \dots}$$

Allora i modi di evoluzione libera possono essere determinati nel seguente modo:

- Per un polo reale p con molteplicità 1 avremo un solo modo

$$(s - p_i) \rightarrow e^{p_i t} * 1(t)$$

- Per un polo reale p con molteplicità v avremo v modi

$$(s - p_j)^\kappa \rightarrow \frac{t^\kappa}{\kappa!} * e^{p_j t} * 1(t) \quad \text{per } \kappa = 0, \dots, v - 1$$

- Per un trinomio non scomponibile in \mathbb{R}

$$s^2 + a_1 * s + a_2$$

$$\text{per } s^2 + a_1 * s + a_2 = 0 \quad p_1, p_2 = \alpha \pm j\beta \in \mathbb{C}$$

$$s^2 + a_1 * s + a_2 \rightarrow e^{\alpha t} * \cos(\beta * t) * 1(t), \quad e^{\alpha t} * \sin(\beta * t) * 1(t)$$

Nel sistema in esame quindi per

$$G(s) = \frac{\eta(s)}{(s - p) * (s - p_1) * (s - p_2)}$$

Mi aspetto i seguenti $r = 3$ modi di evoluzione libera

1. Per $p = -2$ polo semplice con molteplicità 1

$$(s + 2) \rightarrow e^{-2t} * 1(t)$$

2. Per p_1 e p_2 poli e complessi e coniugati $-\frac{1}{3} \pm j2$

$$\left(s + \left(\frac{1}{3} \mp j * 2\right)\right) \rightarrow e^{-\frac{1}{3}t} * \cos(2 * t) * 1(t), -e^{-\frac{1}{3}t} * \sin(2 * t) * 1(t)$$

Una controprova alla correttezza di tale risultato la si può fare osservando la risposta forzata al gradino (argomento che sarà pienamente discusso nel 3 punto dell'esercizio a)

$$y_{step}(t) = y_{regime}(t) + y_{transitoria}(t)$$

Dove:

$$y_{regime}(t) = \frac{9}{74} * 1(t)$$

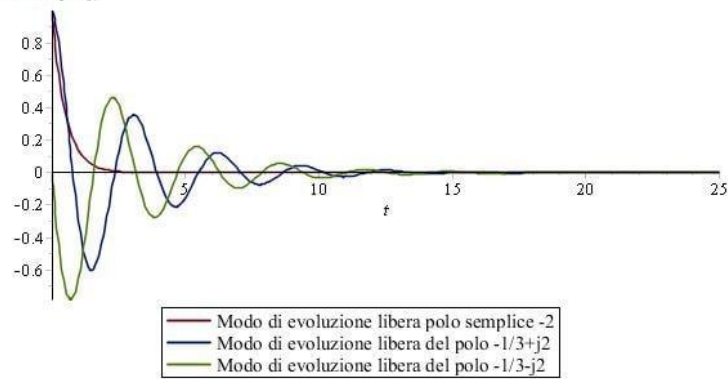
Che rappresenta il contributo legato algebricamente all'ingresso, mentre:

$$y_{transitoria}(t) = \left(-\frac{81}{122} * e^{-2t} + \frac{2589}{4514} * (-e^{-\frac{t}{3}} * \sin(2 * t)) + \frac{1224}{2257} * e^{-\frac{t}{3}} * \cos(2 * t)\right) * 1(t)$$

È il contributo legato ai poli del sistema, caratterizzato dai $r = 3$ modi di evoluzione libera messi in evidenza.

Di seguito vi è il grafico dei modi di evoluzione libera del sistema.

```
modi_di_evoluzione_libera := [ e^{Poles[1] \cdot t} \cdot Heaviside(t), e^{Re(Poles[2]) \cdot t} \cdot \cos(Im(Poles[2]) \cdot t) \cdot Heaviside(t), e^{Re(Poles[3]) \cdot t} \cdot \sin(Im(Poles[3]) \cdot t) \cdot Heaviside(t) ] :
plot(modi_di_evoluzione_libera, t = 0 .. 25, legend = ["Modo di evoluzione libera polo semplice -2", "Modo di evoluzione libera del polo -1/3+j2", "Modo di evoluzione libera del polo -1/3-j2"])
```



3. Risposta all'impulso del sistema

La Risposta all'impulso di un sistema è la sua uscita quando è soggetto ad un ingresso a Delta di Dirac, in particolare l'impulso di Dirac è quel particolare segnale tale per cui:

$$Y(s) = G(s) * U(s) = G(s) \quad \text{per } U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = 1 \quad \text{dove } u(t) = \delta(t)$$

La Risposta impulsiva coincide con l'anti-trasformata di Laplace della funzione di trasferimento del sistema quando il sistema è sollecitato in ingresso dal segnale impulso di Dirac:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

Oppure coincide con una combinazione lineare dei modi di evoluzione libera del sistema, ed effettuando un'espansione in fratti semplici di $G(s)$:

$$G(s) = \frac{\eta_G(s)}{(s - p_1)^{v_1} (s - p_2)^{v_2} \dots (s - p_r)^{v_r}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{v_i} \frac{C_{ij}}{(s - p_i)^j}$$

I coefficienti si determinano con la formula di Heaviside:

$$C_{ij} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(v_i - j)!} * \frac{d^{v_i - j}}{ds} ((s - p_i)^{v_i} G(s)) \quad \text{con } i = 1, \dots, r \text{ e } j = 1, \dots, v_i$$

In questo caso, l'espansione in fratti semplice sarà:

$$G(s) = \frac{C_{11}}{s + 2} + \frac{C_{21}}{s + \frac{1}{3} - j2} + \frac{C_{31}}{s + \frac{1}{3} + j2}$$

In cui:

- $C_{11} = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2) * G(s)$
- $C_{21} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{3} + j2} \left(s + \frac{1}{3} - j2 \right) * G(s)$
- $C_{31} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{3} - j2} \left(s + \frac{1}{3} + j2 \right) * G(s)$

$$C_{11} := \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot G(s)$$

$$\frac{81}{61}$$

$$C_{21} := \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{3} + I \cdot 2} \left(s + \frac{1}{3} - I \cdot 2 \right) \cdot G(s)$$

$$-\frac{81}{122} + \frac{109}{244} I$$

$$C_{31} := \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{3} - I \cdot 2} \left(s + \frac{1}{3} + I \cdot 2 \right) \cdot G(s)$$

$$-\frac{81}{122} - \frac{109}{244} I$$

I coefficienti di Heaviside di una coppia di poli complessi e coniugati, sono anch'essi complessi e coniugati.

$$\frac{C_{11}}{s+2} + \frac{C_{21}}{s + \frac{1}{3} - I \cdot 2} + \frac{C_{31}}{s + \frac{1}{3} + I \cdot 2}$$

$$\frac{81}{61(s+2)} + \frac{-\frac{81}{122} + \frac{109}{244} I}{s + \frac{1}{3} - 2I} + \frac{-\frac{81}{122} - \frac{109}{244} I}{s + \frac{1}{3} + 2I}$$

Sfruttando la *proprietà di linearità* della L-trasformata e con la presenza di una coppia di poli complessi e coniugati allora:

$$\mathcal{L}(G(s)) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{v_i} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}\right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{v_i} C_{ij} * \frac{1}{\mathcal{L}((s-p_i)^j)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{v_i} C_{ij} * \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} * e^{p_i * t} * 1(t) (=)$$

$$(\Rightarrow) \sum_{i=1}^{r'} \sum_{j=1}^{v_i} C_{ij} * \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} * e^{p_i * t} * 1(t) + 2 * \sum_{i=1}^{r'+c} \sum_{j=1}^{v_i} |C_{ij}| * \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} * e^{\Re(p_i) * t} * \cos(\Im(p_i) * t + \psi) 1(t)$$

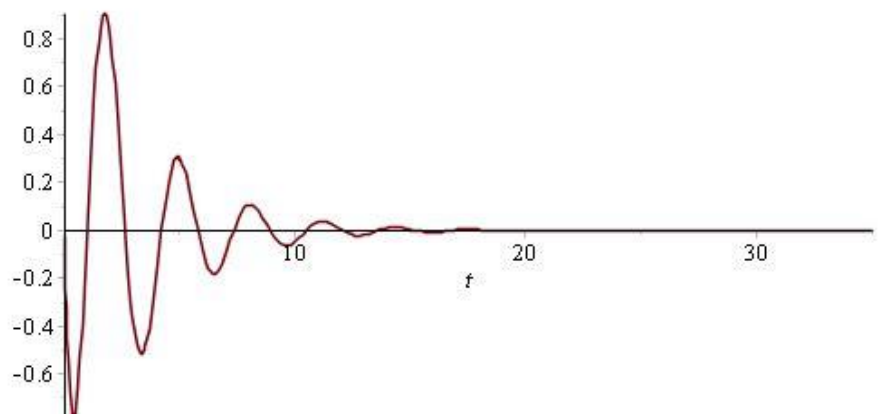
Quindi mi aspetto che la risposta all'impulso del sistema abbia struttura simile a quale descritta, infatti:

`invlaplace((9), s, t) · Heaviside(t)`

$$\left(\frac{81}{61} e^{-2t} - \frac{1}{122} e^{-\frac{1}{3}t} (162 \cos(2t) + 109 \sin(2t)) \right) \text{Heaviside}(t)$$

E il relativo grafico:

`plot((10), t=0..35)`



4. Il grafico della Risposta al gradino

Dalla traccia del primo esercizio del progetto si ha la risposta al gradino del sistema, che è caratterizzata dalla somma dei contributi legati all'ingresso e ai modi di evoluzione libera del sistema, cioè:

$$y(t) = y_{step}(t) = y_{regime}(t) + y_{transitoria}(t)$$

Per distinguere tali contributi della risposta al gradino nel dominio del tempo, passando al dominio della trasformata di Laplace si ha che:

$$\mathcal{L}(y_{step}(t)) = Y_{step}(s) = G(s) * \mathcal{L}(1(t)) = G(s) * \frac{1}{s}$$

Anche se $Y_{step}(s)$ è stata già precedentemente valutata, l'idea è quella di espandere in fratti semplici la risposta al gradino nel dominio 's'

$$Y_{step}(s) = G(s) * \frac{1}{s} = \frac{\eta_G(s)}{(s - p_1) * \dots * (s - p_n)} * \frac{1}{s} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - p_i} + \frac{C_{n+1}}{s}$$

I coefficienti si possono calcolare usando la cosiddetta formula di espansione di Heaviside, che nel caso in esame risulta "semplificata" essendo tutti i poli del sistema con molteplicità unitaria

$$C_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) Y_{step}(s) = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \frac{G(s)}{s}$$

Allora i coefficienti di:

$$Y_{step}(s) = \frac{C_1}{s + 2} + \frac{C_2}{s + \frac{1}{3} - j * 2} + \frac{C_3}{s + \frac{1}{3} + j * 2} + \frac{C_{n+1}}{s}$$

Si calcolano come:

$$C_1 := \lim_{s \rightarrow Poles[1]} (s - Poles[1]) \cdot \left(\frac{G(s)}{s} \right) = -\frac{81}{122} \quad (6)$$

$$C_2 := \lim_{s \rightarrow Poles[2]} (s - Poles[2]) \cdot \left(\frac{G(s)}{s} \right) = \frac{612}{2257} + \frac{2589}{9028} I \quad (7)$$

$$C_3 := \lim_{s \rightarrow Poles[3]} (s - Poles[3]) \cdot \left(\frac{G(s)}{s} \right) = \frac{612}{2257} - \frac{2589}{9028} I \quad (8)$$

$$C_{n+1} := \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{G(s)}{s} \right) = \frac{9}{74} \quad (9)$$

Il coefficiente C_{n+1} coincide anche con la funzione di trasferimento valutata in $s=0$. È tale quantità moltiplicata per $1(t)$ identifica la risposta a regime del sistema, cioè:

$$eval(G(s), s=0)$$

$$\frac{9}{74}$$

$$y_{ss, step} := t \rightarrow (10) \cdot Heaviside(t) :$$

La quantità $G(0)$ è il cosiddetto *guadagno statico* del sistema e dato un sistema LTI TC BIBO stabile, è il rapporto tra l'ampiezza del gradino della risposta a regime e l'ampiezza del gradino in ingresso, quindi rappresenta il fattore di distorsione sul gradino indotto dal sistema. In questo caso l'ampiezza del gradino è unitaria, quindi $G(0) =$ ampiezza del gradino della risposta a regime.

La risposta transitoria sarà caratterizzata dai restanti operandi legati ai poli del sistema, cioè ai modi in evoluzione libera discussi precedentemente (punto 2).

$$\frac{C_1}{s - \text{Poles}[1]} + \frac{C_2}{s - \text{Poles}[2]} + \frac{C_3}{s - \text{Poles}[3]} = -\frac{81}{122(s+2)} + \frac{\frac{612}{2257} + \frac{2589}{9028}I}{s + \frac{1}{3} - 2I} + \frac{\frac{612}{2257} - \frac{2589}{9028}I}{s + \frac{1}{3} + 2I} \quad (11)$$

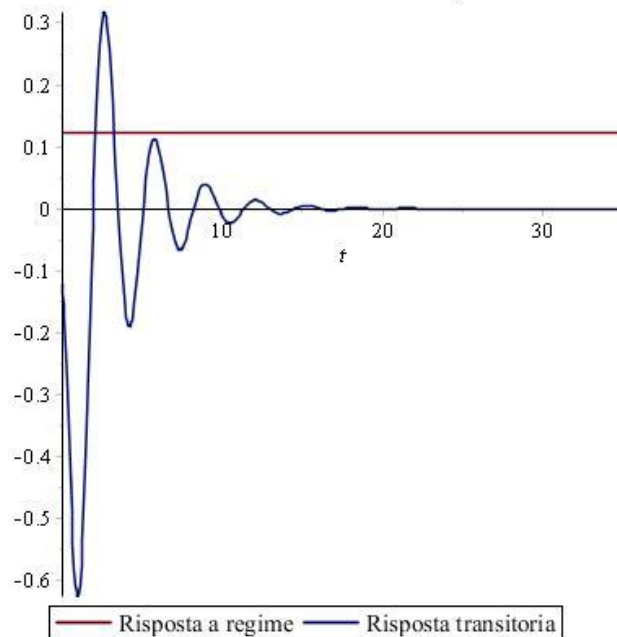
$\text{invlaplace}((11), s, t)$

$$-\frac{81}{122}e^{-2t} + \frac{3}{4514}(816\cos(2t) - 863\sin(2t))e^{-\frac{1}{3}t} \quad (12)$$

$y_{\text{transitoria, step}} := t \rightarrow (12) \cdot \text{Heaviside}(t) :$

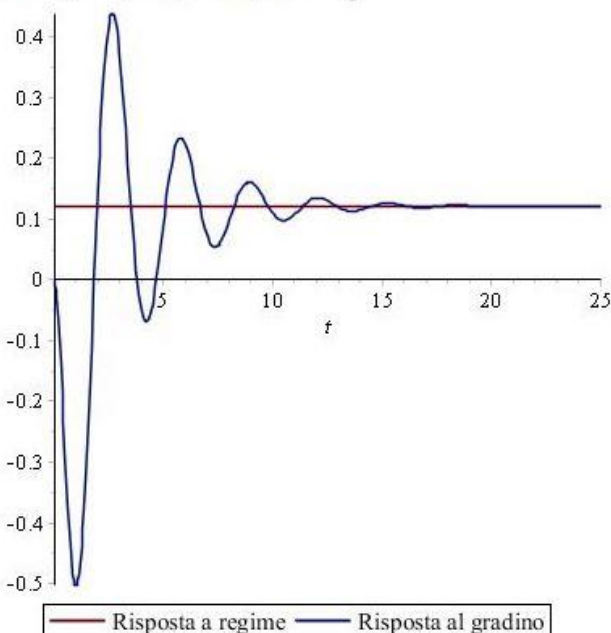
Rappresentazione grafica della risposta a regime e della risposta transitoria

$\text{plot}([y_{ss, step}(t), y_{\text{transitoria, step}}(t)], t = 0 \dots 35, \text{legend} = ["\text{Risposta a regime}", "\text{Risposta transitoria}"])$



Graficamente e matematicamente, si può osservare come la risposta al gradino complessiva del sistema tenda alla risposta a regime a transitorio esaurito

$\text{plot}([y_{ss, step}(t), y_{\text{step}}(t)], t = 0 \dots 25, \text{legend} = ["\text{Risposta a regime}", "\text{Risposta al gradino}"])$



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{step}}(t) = \frac{9}{74}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{ss, step}(t) = \frac{9}{74}$$

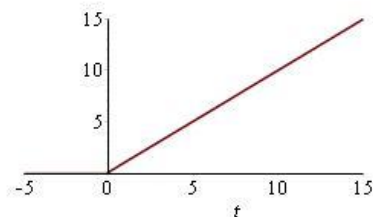
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{transitoria, step}}(t) = 0$$

5. Risposta alla rampa

La funzione rampa è un segnale right-sided così definito:

$$u_{rampa} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} :$$

$$\text{plot}(u_{rampa}(t), t = -5 \dots 15)$$



E la risposta alla rampa è definita come:

$$\mathcal{L}^{-1}(y_{rampa}(t)) = Y_{rampa}(s) = G(s) U_{rampa}(s)$$

Dove la L-trasformata della funzione rampa la si può facilmente calcolare a "mano":

$$\mathcal{L}(u_{rampa}(t)) = \mathcal{L}(t * 1(t)) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} = U_{rampa}(s)$$

Ovvero sfruttando la conoscenza della trasformata di Laplace del segnale gradino unitario e *il teorema della moltiplicazione per t*.

$$U_{rampa} := s \rightarrow \text{laplace}(u_{rampa}(t), t, s) :$$

$$U_{rampa}(s)$$

$$\frac{1}{s^2}$$

La risposta all'ingresso rampa del sistema nel dominio di Laplace e nel dominio del tempo sarà:

$$G(s) \cdot U_{rampa}(s)$$

$$-\frac{9(4s-1)}{((3s+1)^2+36)(s+2)s^2}$$

$$Y_{rampa} := s \rightarrow (17) :$$

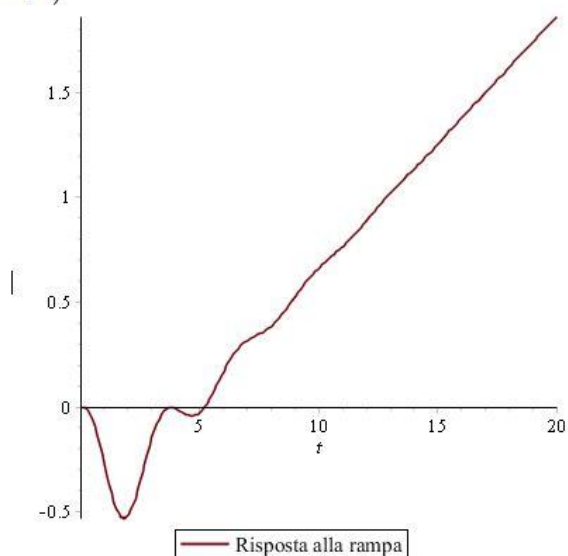
$$\text{invlaplace}(Y_{rampa}(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$\left(-\frac{3105}{5476} + \frac{9}{74}t + \frac{81}{244}e^{-2t} + \frac{9}{167018}e^{-\frac{1}{3}t} (4362 \cos(2t) + 5759 \sin(2t)) \right) \text{Heaviside}(t)$$

$$y_{rampa} := t \rightarrow (18) :$$

Graficamente si ha che:

$$\text{plot}(y_{rampa}(t), t = 0 \dots 20, \text{legend} = \text{"Risposta alla rampa"})$$



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{rampa}(t) = \infty$$

A transitorio esaurito, la risposta alla rampa tende all'infinito.

6. Un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio.

>> Folder Esercizio_1 >> script ese_ARMA.mw

La rappresentazione I-U, è la rappresentazione di un sistema dinamico lineare mediante un'equazione differenziale a coefficienti reali α, β

$$y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1} y'(t) + \alpha_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \beta_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + \beta_{m-1} u'(t) + \beta_m u(t)$$

Dove $n \geq m$ e tale forma di rappresentazione di un sistema prende il nome di *modello ARMA*.

Per ottenere il modello ARMA del sistema in esame, essendo nel dominio di Laplace la risposta del sistema:

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

La funzione di trasferimento, con l'ipotesi di essere real-razionale, la si può esprimere come:

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$$

Il polinomio al denominatore prende il nome di *polinomio caratteristico del sistema* e identifica l'*ordine del sistema* che sappiamo coincidere con il numero di radici dell'*equazione caratteristica del sistema* $d_G(s) = 0$.

Allora esprimendo $Y(s) = G(s) U(s)$ come $Y(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} U(s)$ si ottiene la forma $Y(s) d_G(s) = U(s) n_G(s)$.

$$Y(s) \cdot \text{denom}(G(s)) = U(s) \cdot \text{numer}(G(s))$$

$$Y(s) (9s^2 + 6s + 37) (s+2) = U(s) (-36s + 9) \quad (1)$$

$$\text{expand}((1))$$

$$9Y(s)s^3 + 24Y(s)s^2 + 49Y(s)s + 74Y(s) = -36U(s)s + 9U(s) \quad (2)$$

Successivamente, si effettua l'anti-trasformata di Laplace e con il teorema della derivata

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(s) \rightarrow \mathcal{L}(y^{(N)}(t)) = s^N Y(s) - \sum_{i=N-1}^0 s^i y^{(i)}(0)$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = U(s) \rightarrow \mathcal{L}(u^{(N)}(t)) = s^N U(s) - \sum_{i=N-1}^0 s^i u^{(i)}(0)$$

Per poter esprimere:

$$\mathcal{L}^{-1}(s^N Y(s) - \sum_{i=N-1}^0 s^i y^{(i)}(0)) = y^{(N)}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(s^N U(s) - \sum_{i=N-1}^0 s^i u^{(i)}(0)) = u^{(N)}(t)$$

$$\text{invlaplace}((2), s, t)$$

$$9 \text{invlaplace}(Y(s)s^3, s, t) + 24 \text{invlaplace}(Y(s)s^2, s, t) + 49 \text{invlaplace}(Y(s)s, s, t) + 74 \text{invlaplace}(Y(s), s, t) = -36 \text{invlaplace}(U(s)s, s, t) + 9 \text{invlaplace}(U(s), s, t) \quad (3)$$

$$\text{eq_diff} := \text{subs}(\{\text{invlaplace}(Y(s), s, t) = y(t), \text{invlaplace}(s \cdot Y(s), s, t) = y'(t), \text{invlaplace}(s^2 \cdot Y(s), s, t) = y''(t), \text{invlaplace}(s^3 \cdot Y(s), s, t) = y'''(t), \text{invlaplace}(U(s), s, t) = u(t), \text{invlaplace}(s \cdot U(s), s, t) = u'(t)\}, (3))$$

$$9 \mathcal{D}^{(3)}(y)(t) + 24 \mathcal{D}^{(2)}(y)(t) + 49 \mathcal{D}(y)(t) + 74 y(t) = -36 \mathcal{D}(u)(t) + 9 u(t) \quad (4)$$

Normalizzando, (dividendo per il coefficiente $\alpha_0 = 9$), si ottiene il modello ARMA:

$$y'''(t) + \frac{8}{3} y''(t) + \frac{49}{9} y'(t) + \frac{74}{9} y(t) = -4 u'(t) + u(t)$$

7. Tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il transitorio della risposta al gradino è nullo.

Dalla rappresentazione I-U calcolata nell'esercizio precedente, si ritorna nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} & \text{laplace}(eq_diff, t, s) \\ & s^3 \text{laplace}(y(t), t, s) - D^{(2)}(y)(0) - sD(y)(0) - s^2 y(0) + \frac{8}{3} s^2 \text{laplace}(y(t), t, s) - \frac{8}{3} D(y)(0) - \frac{8}{3} s y(0) + \frac{49}{9} s \text{laplace}(y(t), t, s) - \frac{49}{9} y(0) \\ & + \frac{74}{9} \text{laplace}(y(t), t, s) = -4 s \text{laplace}(u(t), t, s) + 4 u(0) + \text{laplace}(u(t), t, s) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \text{subs}(\{\text{laplace}(y(t), t, s) = Y(s), \text{laplace}(u(t), t, s) = U(s)\}, (6)) \\ & Y(s) s^3 - D^{(2)}(y)(0) - sD(y)(0) - s^2 y(0) + \frac{8}{3} Y(s) s^2 - \frac{8}{3} D(y)(0) - \frac{8}{3} s y(0) + \frac{49}{9} Y(s) s - \frac{49}{9} y(0) + \frac{74}{9} Y(s) = -4 U(s) s + 4 u(0) + U(s) \end{aligned} \quad (7)$$

Dopo aver annullato l'ingresso all'istante $t=0$, determino $Y(s)$ risposta del sistema nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} & \text{eval}((7), u(0) = 0) \\ & Y(s) s^3 - D^{(2)}(y)(0) - sD(y)(0) - s^2 y(0) + \frac{8}{3} Y(s) s^2 - \frac{8}{3} D(y)(0) - \frac{8}{3} s y(0) + \frac{49}{9} Y(s) s - \frac{49}{9} y(0) + \frac{74}{9} Y(s) = -4 U(s) s + U(s) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \text{solve}((8), Y(s)) \\ & - \frac{-9 s^2 y(0) + 36 U(s) s - 9 s D(y)(0) - 24 s y(0) - 9 U(s) - 9 D^{(2)}(y)(0) - 24 D(y)(0) - 49 y(0)}{9 s^3 + 24 s^2 + 49 s + 74} \end{aligned} \quad (9)$$

Essendo la risposta del sistema composta dai contributi $Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s)$, in cui

- $Y_f(s)$ è la cosiddetta risposta forzata del sistema, dipendente dall'ingresso
- $Y_l(s)$ è la cosiddetta risposta in evoluzione libera del sistema, dipendente dalle condizioni iniziali del sistema y_0

Allora:

$$\begin{aligned} & \text{collect}((9), U(s)) \\ & - \frac{(36 s - 9) U(s)}{9 s^3 + 24 s^2 + 49 s + 74} - \frac{-9 s^2 y(0) - 9 s D(y)(0) - 24 s y(0) - 9 D^{(2)}(y)(0) - 24 D(y)(0) - 49 y(0)}{9 s^3 + 24 s^2 + 49 s + 74} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & Y_f := \text{op}(1, (10)) \\ & - \frac{(36 s - 9) U(s)}{9 s^3 + 24 s^2 + 49 s + 74} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & Y_l := \text{op}(2, (10)) \\ & - \frac{-9 s^2 y(0) - 9 s D(y)(0) - 24 s y(0) - 9 D^{(2)}(y)(0) - 24 D(y)(0) - 49 y(0)}{9 s^3 + 24 s^2 + 49 s + 74} \end{aligned} \quad (12)$$

Valuto la risposta forzata del sistema all'ingresso gradino unitario

$$\begin{aligned} & \text{laplace}(\text{Heaviside}(t), t, s) \\ & \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \text{eval}\left(Y_f, U(s) = \frac{1}{s}\right) \\ & - \frac{36 s - 9}{(9 s^3 + 24 s^2 + 49 s + 74) s} \end{aligned} \quad (14)$$

Essendo la risposta forzata composta dai contributi $Y_f(s) = Y_{ss}(s) + Y_{tr}(s)$, in cui

- $Y_{ss}(s)$ è la cosiddetta risposta a regime del sistema, dipendente dall'ingresso, ed in questo caso essendo $u(t)$ un gradino, mi aspetto una risposta a "forma" di gradino
- $Y_{tr}(s)$ è la cosiddetta risposta transitoria del sistema, che è una combinazione lineare dei modi di evoluzione libera che caratterizzano il sistema

Allora si può effettuare un'ulteriore distinzione delle componenti che caratterizzano la risposta del sistema, tenendo in considerazione che la risposta transitoria è legata ai modi di evoluzione libera del sistema, che a loro volta sono legati ai poli della funzione di trasferimento.

`solve(denom(G(s)))`

$$-2, -\frac{1}{3} + 2I, -\frac{1}{3} - 2I$$

(15)

`convert((14), parfrac, s)`

$$-\frac{81}{122(s+2)} + \frac{9}{74s} + \frac{1}{2257} \frac{11016s - 19629}{9s^2 + 6s + 37}$$

(16)

`Yss := op(2, (16))`

$$\frac{9}{74s}$$

(17)

`Ytr := op(1, (16)) + op(3, (16))`

$$-\frac{81}{122(s+2)} + \frac{1}{2257} \frac{11016s - 19629}{9s^2 + 6s + 37}$$

(18)

Sommo i contributi risposta transitoria e risposta libera che caratterizzano il 'transitorio' della risposta al gradino del sistema:

`simplify(Ytr + Yl)`

$$\frac{1}{74} \frac{666s^2y(0) + 666sD(y)(0) + 1776sy(0) - 81s^2 + 666D^{(2)}(y)(0) + 1776D(y)(0) + 3626y(0) - 216s - 3105}{9s^3 + 24s^2 + 49s + 74}$$

(19)

È evidente che il transitorio è identicamente nullo quando il suo numeratore è nullo

`numer((19))`

$$666s^2y(0) + 666sD(y)(0) + 1776sy(0) - 81s^2 + 666D^{(2)}(y)(0) + 1776D(y)(0) + 3626y(0) - 216s - 3105$$

(20)

`coeff((20), s, 0)`

$$666D^{(2)}(y)(0) + 1776D(y)(0) + 3626y(0) - 3105$$

(21)

`coeff((20), s, 1)`

$$666D(y)(0) + 1776y(0) - 216$$

(22)

`coeff((20), s, 2)`

$$666y(0) - 81$$

(23)

Estratti i coefficienti in s del polinomio, li azzerò in corrispondenza delle condizioni iniziali del sistema, che saranno in numero pari all'ordine del sistema meno uno.

`solve({coeff((20), s, 0), coeff((20), s, 1), coeff((20), s, 2)}, {y(0), y'(0), y''(0)})`

$$\left\{ y(0) = \frac{9}{74}, D(y)(0) = 0, D^{(2)}(y)(0) = 4 \right\}$$

(24)

Valutando la risposta al gradino del sistema in corrispondenza delle condizioni iniziali appena calcolate

`simplify(eval(Yf + Ytr, {y(0) = 9/74, D(y)(0) = 0, D^{(2)}(y)(0) = 4, U(s) = 1/s}))`

$$\frac{9}{74s}$$

(25)

Si può dimostrare come per:

$$\begin{cases} y(0) = \frac{9}{74} \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 4 \end{cases}$$

La risposta al gradino del sistema: $Y(s) = Y_f(s) = Y_{ss}(s)$.

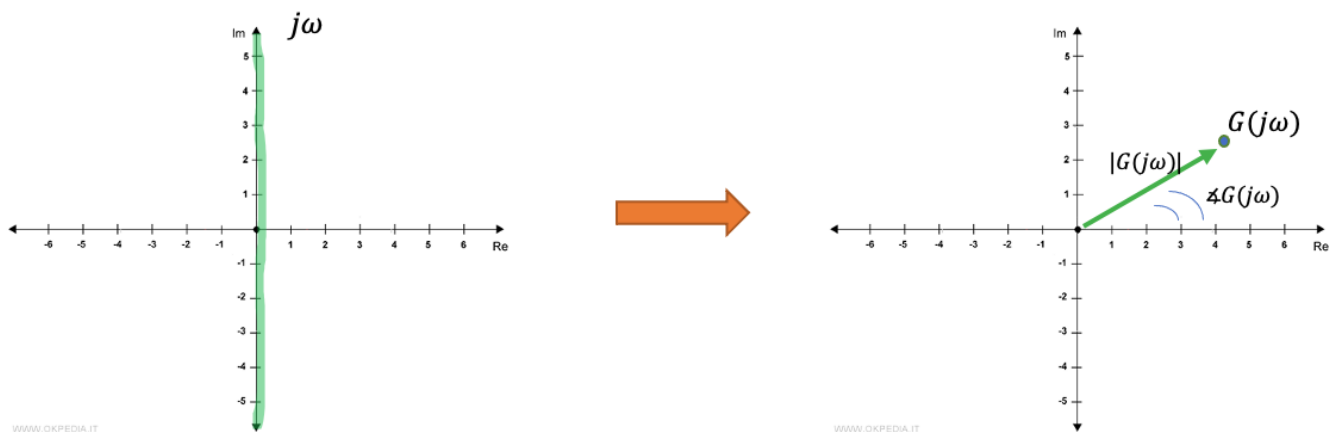
Esercizio B

Determinare e discutere il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 50 * \frac{1 + \frac{s}{30}}{s * (s^2 - 12 * s + 36)}$$

Il diagramma di Bode è una rappresentazione grafica della risposta in frequenza $G(j\omega)$, ovvero la restrizione della funzione di trasferimento di un sistema sull'asse immaginario per pulsazioni ω variabili.

Con il diagramma di Bode vi è una rappresentazione grafica separata del modulo $|G(j\omega)|$ e della fase $\angle G(j\omega)$ della risposta di frequenza al variare di $\omega \in (-\infty, +\infty)$.



Essendo valida la seguente uguaglianza:

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Allora nota la $G(j\omega)$ per $\omega \in [0, +\infty)$ la risposta in frequenza per pulsazioni negative si ottiene calcolando il coniugato della risposta in frequenze per pulsazioni positive.

Essendo lo studio basato su un ampio spettro di pulsazioni, l'ascissa dei diagrammi di modulo e fase è rappresentato mediante scala logaritmica, cioè l'incremento e il decremento delle pulsazioni si effettuano con un ordine di grandezza rispetto alla base 10.

Il modulo viene espresso in decibel, $\forall \omega \in \mathbb{R}, |G(j\omega)|_{db} = 20 * \log_{10}(|G(j\omega)|)$, mentre le fasi sono espresse in radianti.

>> folder Esercizio_2 >> script ese2.mw

```
restart : with(intrans) : with(DynamicSystems) : with(plots) :
G := s -> 50 * (1 + s/30) / (s * (s^2 - 12 * s + 36)) :
```

Per prima cosa si riconduce la $G(s)$ nella cosiddetta forma di Bode:

$$G(s) = K_b * \frac{\prod_{i=1}^{n_z} 1 + \text{sgn}(-z_i) * \frac{s}{\Omega_i}}{s^\mu * \prod_{i=1}^r 1 + \text{sgn}(-p_i) * \frac{s}{\omega_i}} * \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Dove:

- K_b è il cosiddetto *guadagno di Bode* e sarà pari al $\lim_{s \rightarrow 0} s^\mu * G(s)$
- Ω_i rappresenta la 'frequenza di taglio' dello zero z_i e si calcola come il $|z_i|$
- ω_i rappresenta la 'frequenza di taglio' del polo p e si calcola come il $|p_i|$
- ω_n è la cosiddetta *pulsazione naturale* e si calcola come i moduli dei poli complessi e coniugati del fattore trinomio non scomponibile
- δ è il cosiddetto *smorzamento* e si ottiene considerando la parte reale dei poli complessi e coniugati del trinomio non scomponibile cambiato di segno e dividere per la ω_n
- μ rappresenta il numero di poli nell'origine
- n_z rappresenta il numero di zeri
- n_p rappresenta il numero di poli ed è dato dalla $r + \mu$ dove r rappresenta il numero di poli semplici

Calcolando poli e zeri della funzione di trasferimento:

```
zeros := [solve(numer(G(s)), s)]
poles := [solve(denom(G(s)), s)]
```

[-30]
[0, 6, 6]

È evidente l'assenza di poli complessi e coniugati, detti anche risonanti, e la presenza di un fattore integrale e di un polo reale con molteplicità 2.

Inoltre, si può fare una distinzione di zeri e poli, cioè:

- Se $z_i < 0$ è detto *zero a fase minima*
- Se $z_i > 0$ è detto *zero a fase non-minima*
- Se $p_i < 0$ è detto *polo stabile*
- Se $p_i > 0$ è detto *polo instabile*

In questo caso si ha uno zero a fase minima e due poli coincidenti instabili.

Valuto i parametri di interesse per riscrivere $G(s)$ nelle forme di Bode:

```
zeros := [solve(numer(G(s)), s)]
poles0 := [solve(denom(G(s)), s)]
mu := numboccur(poles0, 0)
poles := remove(x -> x = 0, poles0)
nz := numelems(zeros)
r := numelems(poles)

Kb := lim_{s -> 0} s^mu * G(s)
Omega := abs~(zeros)
w := abs~(poles)
```

[-30]
[0, 6, 6]
1
[6, 6]
1
2
 $\frac{25}{18}$
[30]
[6, 6]

Ottenendo così:

$$G_b \cdot \prod_{i=1}^{n_z} \left(1 + \frac{\text{signum}(-zeros[i]) \cdot s}{\Omega[i]} \right) \cdot \frac{s^\mu \cdot \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{\text{signum}(-poles[i]) \cdot s}{w[i]} \right)}{\frac{25}{18} \frac{1 + \frac{1}{30} s}{s \left(1 - \frac{1}{6} s \right)^2}} \quad (11)$$

$G_{Bode} := s \rightarrow (11)$:

Dalla forma di Bode si possono ricavare modulo e fase che saranno la somma di contributi legati agli zeri e ai poli della funzione di trasferimento:

$$|G(j\omega)|_{db} = |K_b|_{db} + \sum_{i=1}^{n_z} \left| 1 + \frac{\text{sgn}(-z_i)j\omega}{\Omega_i} \right|_{db} + |j\omega|^\mu_{db} - \sum_{i=1}^{n_p} \left| 1 + \frac{\text{sgn}(-p_i)j\omega}{\omega_i} \right|_{db}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle K_b + \sum_{i=1}^{n_z} \angle \left(1 + \frac{\text{sgn}(-z_i)j\omega}{\Omega_i} \right) + \angle (j\omega)^\mu - \sum_{i=1}^{n_p} \angle \left(1 + \frac{\text{sgn}(-p_i)j\omega}{\omega_i} \right)$$

Per la costruzione del diagramma di Bode, si effettua un'analisi dei vari contributi di modulo e fase della risposta in frequenza.

Prima di tutto si determinano le pulsazioni di taglio più in BASSA ed ALTA frequenza di modulo e fase, cioè:

$\omega_{left\ modulo} := 0.1 \cdot \min(\Omega, w)$	Una decade prima e dopo della frequenza di taglio in bassa e alta frequenza	0.6
$\omega_{right\ modulo} := 10 \cdot \max(\Omega, w)$		300
$\omega_{left\ fase} := 0.1 \cdot \min(0.1 \cdot \Omega, 0.1 \cdot w)$	I diagrammi della fase iniziano a variare la pendenza una decade e dopo la pulsazione di rottura in alta e bassa frequenza	0.06
$\omega_{right\ fase} := 10 \cdot \max(10 \cdot \Omega, 10 \cdot w)$		3000

- Diagramma di bode del guadagno

In decibel il contributo del guadagno di Bode si calcola come $|K_b|_{db} = 20 * \log_{10}(|K_b|)$ e per:

$ K_b $	$ K_b _{db}$
$ K_b > 1$	$ K_b _{db} > 0$
$ K_b < 1$	$ K_b _{db} < 0$
$ K_b = 1$	$ K_b _{db} = 0$

Essendo $|K_b| = \left|\frac{25}{18}\right| > 1$ allora mi aspetto che $|K_b|_{db} > 0 \forall \omega$

$$K_{b,db} := \omega \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|K_b|)$$

$$\omega \rightarrow 20 \log_{10}(|K_b|)$$

`semilogplot($K_{b,db}(\omega)$, $\omega = \omega_{left modulo} .. \omega_{right modulo}$, $axis = [gridlines]$, $tickmarks = [default, default]$, $title = "Diagramma dei moduli del guadagno di Bode"$)`



Sul diagramma della fase del guadagno si può dire che:

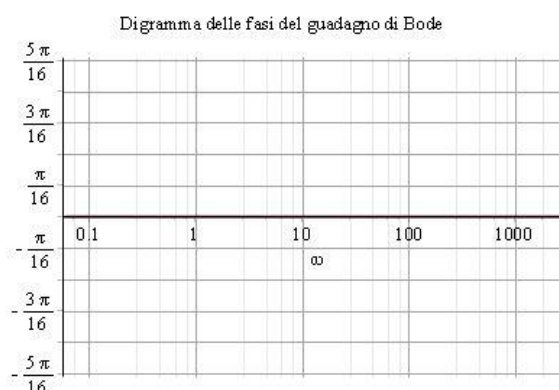
K_b	$\angle K_b$
$K_b > 0$	$\angle K_b = 0$
$K_b < 0$	$\angle K_b = \pm \pi$

Essendo $K_b = \frac{25}{18} > 0$ allora mi aspetto che $\angle K_b = 0 \forall \omega$, infatti:

$$K_{b,phase} := \omega \rightarrow \text{argument}(K_b)$$

$$\omega \rightarrow \text{argument}(K_b)$$

`semilogplot($K_{b,phase}(\omega)$, $\omega = \omega_{left phase} .. \omega_{right phase}$, $axis = [gridlines]$, $tickmarks = [default, piticks]$, $title = "Diagramma delle fasi del guadagno di Bode"$)`



- **Diagramma di bode del fattore integrale**

Consideriamo il contributo legato al polo nell'origine nel diagramma dei moduli

$$\left| \frac{1}{(j\omega)^\mu} \right|_{db} = 20 * \log_{10} \left(\left| \frac{1}{(j\omega)^\mu} \right| \right) = -20 * \log_{10} (|(j\omega)^\mu|) = -20 * \log_{10}(\omega^\mu) = -20 * \mu * \log_{10}(\omega)$$

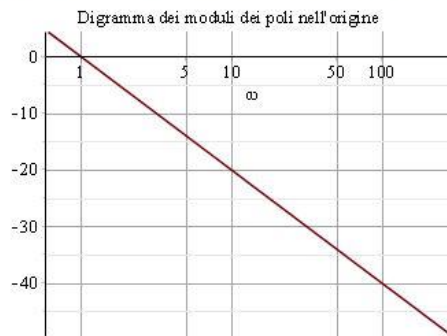
Caratterizza sul diagramma dei moduli una retta passante per l'origine degli esponenti delle pulsazioni, cioè per $\omega = 1$ e di pendenza $-20 * \mu$.

In questo caso avendo un solo fattore integrale, ci si aspetta una retta di pendenza -20

$$poli_origine_modulo := \omega \rightarrow -20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega)$$

$$\omega \rightarrow -20 \mu \log_{10}(\omega)$$

$$semilogplot(poli_origine_modulo(\omega), \omega = \omega_{left_modulo} .. \omega_{right_modulo}, axis = [gridlines], tickmarks = [default, default], title = "Digramma dei moduli dei poli nell'origine")$$



Nel diagramma delle fasi invece:

$$\text{per } \mu = 1 \text{ e } \omega > 0 \text{ si ha } \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle j\omega = -\frac{\pi}{2}$$

Allora

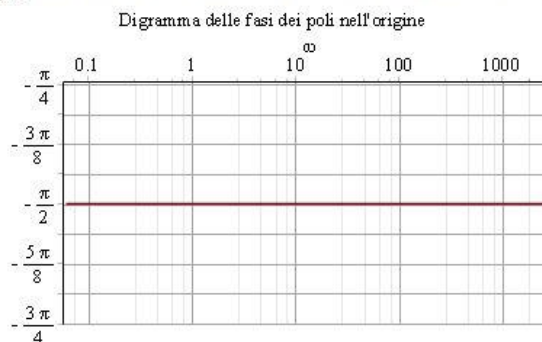
$$\text{per } \mu \in \mathbb{N} \text{ e } \omega > 0 \text{ si ha che } \angle \frac{1}{(j\omega)^\mu} = -\mu * \angle j\omega = -\mu * \frac{\pi}{2}$$

Caratterizza sul diagramma delle fasi una retta in ritardo di $\mu * \frac{\pi}{2}$. In questo caso si ha una retta parallela all'asse delle pulsazioni passante per $-\frac{\pi}{2}$.

$$poli_origine_fase := \omega \rightarrow -\mu \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\omega \rightarrow -\frac{1}{2} \mu \pi$$

$$semilogplot(poli_origine_fase(\omega), \omega = \omega_{left_fase} .. \omega_{right_fase}, axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], title = "Digramma delle fasi dei poli nell'origine")$$



- **Diagramma dei moduli dei fattori** $+|1 + \frac{\text{sgn}(-z_i)j\omega}{\Omega_i}|$ e $-|1 + \frac{\text{sgn}(-p_i)j\omega}{\omega_i}|$

Lo studio di uno dei due contributi determina la conoscenza del contributo non analizzato, basta un semplice ribaltamento del grafico, in questo caso si procederà con l'analisi del contributo legato agli zeri.

Essendo $+|1 + \frac{\text{sgn}(-z_i)j\omega}{\Omega_i}| = +|1 \pm \frac{j\omega}{\Omega_i}|$ e sapendo che $|1 + \frac{j\omega}{\Omega_i}| = |1 - \frac{j\omega}{\Omega_i}|$ allora basterà lo studio del

$$\left|1 + \frac{j\omega}{\Omega_i}\right|_{db} = 20 * \log_{10} \left(\left|1 + \frac{j\omega}{\Omega_i}\right| \right) = 20 * \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Omega_i^2}} \right)$$

Facendo un'approssimazione asintotica di $20 * \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Omega_i^2}} \right)$ si può ottenere una stima del suo andamento in *bassa* e *alta* frequenza, in particolare con Ω_i pulsazione di taglio degli zeri si ottiene che:

- *Bassa frequenza:* con $\frac{\omega}{\Omega_i} \ll 1$ si ha che

$$20 * \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Omega_i^2}} \right) \approx 20 * \log_{10}(1) = 0_{db}$$

- *Alta frequenza:* con $\frac{\omega}{\Omega_i} \gg 1$ si ha che

$$20 * \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Omega_i^2}} \right) \approx 20 * \log_{10} \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\Omega_i^2}} \right) = 20 * [\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\Omega_i)]$$

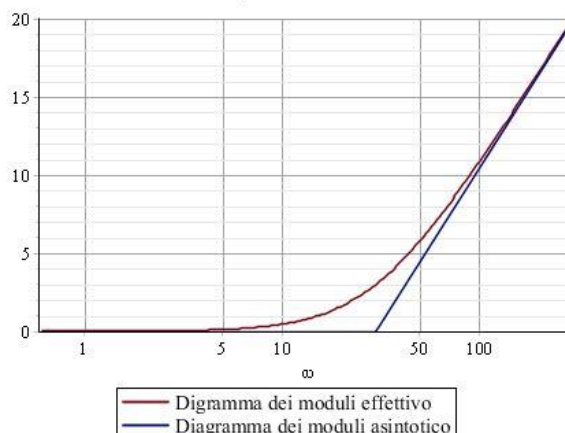
Ossia un asintoto orizzontale per $\omega < \Omega_i$ e un asintoto obliquo per $\omega > \Omega_i$. In questo caso si ha un solo zero e quindi un'unica pulsazione di taglio.

$\Omega := \Omega[1] :$

$zero_eff_modulo := (\omega, \Omega) \rightarrow 20 \cdot \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2}} \right) :$

$zero_appr_modulo := (\omega, \Omega) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\Omega} < 1 \\ 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) & \frac{\omega}{\Omega} \geq 1 \end{cases} :$

$semilogplot([zero_eff_modulo(\omega, \Omega), zero_appr_modulo(\omega, \Omega)], \omega = \omega_{left_modulo} .. \omega_{right_modulo}, axis = [gridlines], tickmarks = [default, default], legend = ["Diagramma dei moduli effettivo", "Diagramma dei moduli asintotico"])$



L'approssimazione asintotica commette un errore di circa 3db in corrispondenza della pulsazione di taglio dello zero

$$errore := evalf(zero_eff_modulo(\Omega, \Omega) - zero_appr_modulo(\Omega, \Omega))$$

- **Diagramma delle fasi dei fattori** $\pm 1 + \frac{\text{sgn}(-z_i)j\omega}{\Omega_i}$ e $\pm 1 + \frac{\text{sgn}(-p_i)j\omega}{\omega_i}$

In questo caso, si ha uno zero a *fase minima* e due poli *instabili*, cioè si analizzeranno

$$\pm 1 + \frac{j\omega}{\Omega_i} \quad \text{e} \quad \pm 1 - \frac{j\omega}{\omega_i}$$

Effettuando un'approssimazione asintotica si ottiene che:

- *Bassa frequenza* per $\frac{\omega}{\Omega_i} \ll 0.1$ si ha che $\pm 1 + \frac{j\omega}{\Omega_i} \approx \pm 1 = 0$
- *Alta frequenza* per $\frac{\omega}{\Omega_i} \gg 10$ si ha che $\pm 1 + \frac{j\omega}{\Omega_i} \approx \pm \frac{j\omega}{\Omega_i} = \frac{\pi}{2}$
- *Media frequenza* per $0.1 \ll \frac{\omega}{\Omega_i} \ll 10$ si ha che $\pm 1 + \frac{j\omega}{\Omega_i}$ è un segmento di pendenza

$$\frac{\left(\pm 1 + \frac{10 * j * \Omega_i}{\Omega_i} - \pm 1 + \frac{0.1 * j * \Omega_i}{\Omega_i} \right)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Su un intervallo di pulsazioni pari a $\frac{10}{10^{-1}} = 10^2$ cioè di due decadi.

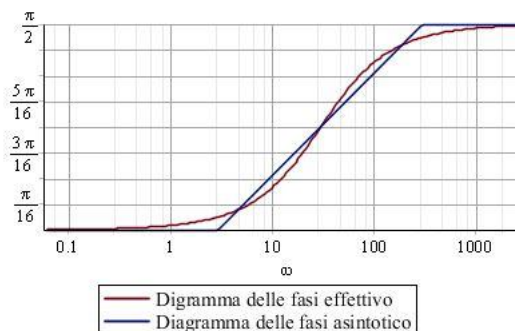
```

zero_eff_fase := (omega, Omega) -> argument(1 + j*omega/Omega);

zero_app_fase := (omega, Omega) -> {
    0                                     omega/Omega < 0.1;
    (Pi/4) * log10(10*omega/Omega)      0.1 <= omega/Omega < 10;
    Pi/2                                 omega/Omega >= 10;
};

semilogplot([zero_eff_fase(omega, Omega), zero_app_fase(omega, Omega)], omega = omega_left_fase..omega_right_fase, axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], legend = ["Diagramma delle fasi effettivo", "Diagramma delle fasi asintotico"]);

```



Per quanto riguarda i poli instabili, con l'approssimazione asintotica si ottiene:

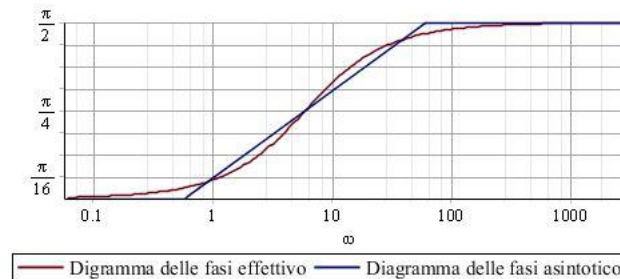
- *Bassa frequenza* per $\frac{\omega}{\omega_i} \ll 0.1$ si ha che $\pm 1 - \frac{j\omega}{\omega_i} \approx \pm 1 + \frac{j\omega}{\omega_i} = 0$
- *Alta frequenza* per $\frac{\omega}{\omega_i} \gg 10$ si ha che $\pm 1 - \frac{j\omega}{\omega_i} \approx -\left(\pm 1 + \frac{j\omega}{\omega_i}\right) = \frac{\pi}{2}$
- *Media frequenza* per $0.1 \ll \frac{\omega}{\omega_i} \ll 10$ si ha che $\pm 1 - \frac{j\omega}{\omega_i}$, facendo le stesse considerazioni precedenti si ha sempre un segmento di pendenza $\frac{\pi}{4}$ in un intervallo di due decadi.

$w := w[1] :$

$polo_eff_{fase} := (\omega, w) \rightarrow -\arg\left(1 - \frac{j\omega}{w}\right) :$

$polo_appr_{fase} := (\omega, w) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{w} < 0.1 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \log_{10}\left(\frac{10 \cdot \omega}{w}\right) & 0.1 \leq \frac{\omega}{w} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\omega}{w} \geq 10 \end{cases} :$

$semilogplot([polo_eff_{fase}(\omega, w), polo_appr_{fase}(\omega, w)], \omega = \omega_{left\ fase} .. \omega_{right\ fase}, axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], legend = ["Diagramma delle fasi effettivo", "Diagramma delle fasi asintotico"])$



Infine, si procede con la costruzione del diagramma di Bode complessivo, tracciando il diagramma effettivo ed approssimato di modulo e fase.

DIAGRAMMA DI BODE DEI MODULI complessivo

$$|G(j\omega)|_{db} = |K_b|_{db} + \left|\frac{1}{j\omega}\right|_{db} + \left|1 + \frac{j\omega}{30}\right|_{db} - \left|1 - \frac{j\omega}{6}\right|_{db} - \left|1 - \frac{j\omega}{6}\right|_{db} = |K_b|_{db} + \left|\frac{1}{j\omega}\right|_{db} - \left|1 - \frac{j\omega}{6}\right|_{db}$$

$modulo_eff := \omega \rightarrow K_{b,db}(\omega) + poli_origine_modulo(\omega) - zero_eff_modulo(\omega, \Omega) :$

$modulo_appr := \omega \rightarrow K_{b,db}(\omega) + poli_origine_modulo(\omega) - zero_appr_modulo(\omega, \Omega) :$

$semilogplot([modulo_eff(\omega), modulo_appr(\omega)], \omega = \omega_{left\ modulo} .. \omega_{right\ modulo}, axis = [gridlines], tickmarks = [default, default], legend = ["Diagramma dei moduli effettivo", "Diagramma dei moduli asintotico"], title = "Diagramma dei moduli complessivo")$

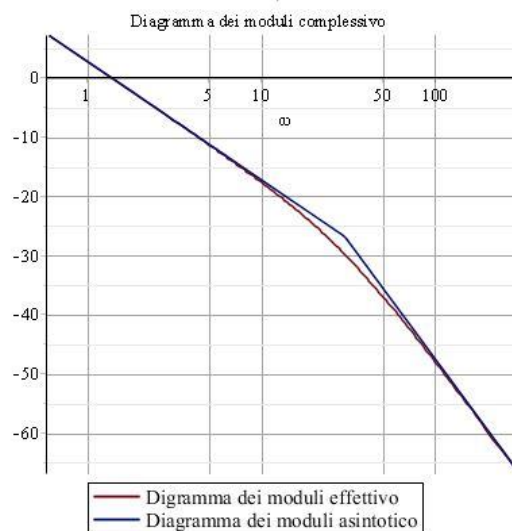
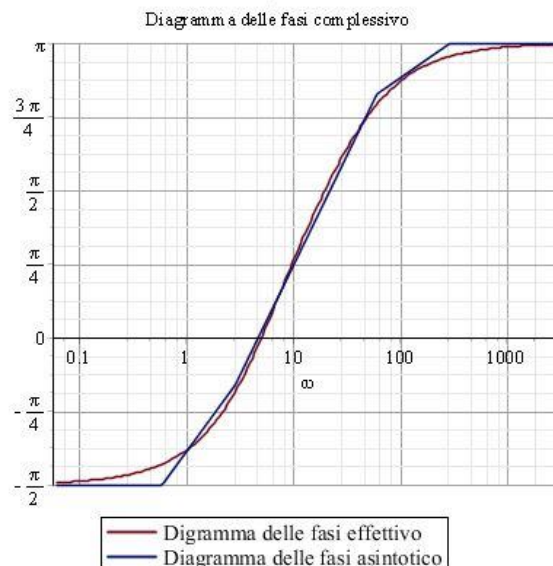


DIAGRAMMA DI BODE DELLE FASI complessivo

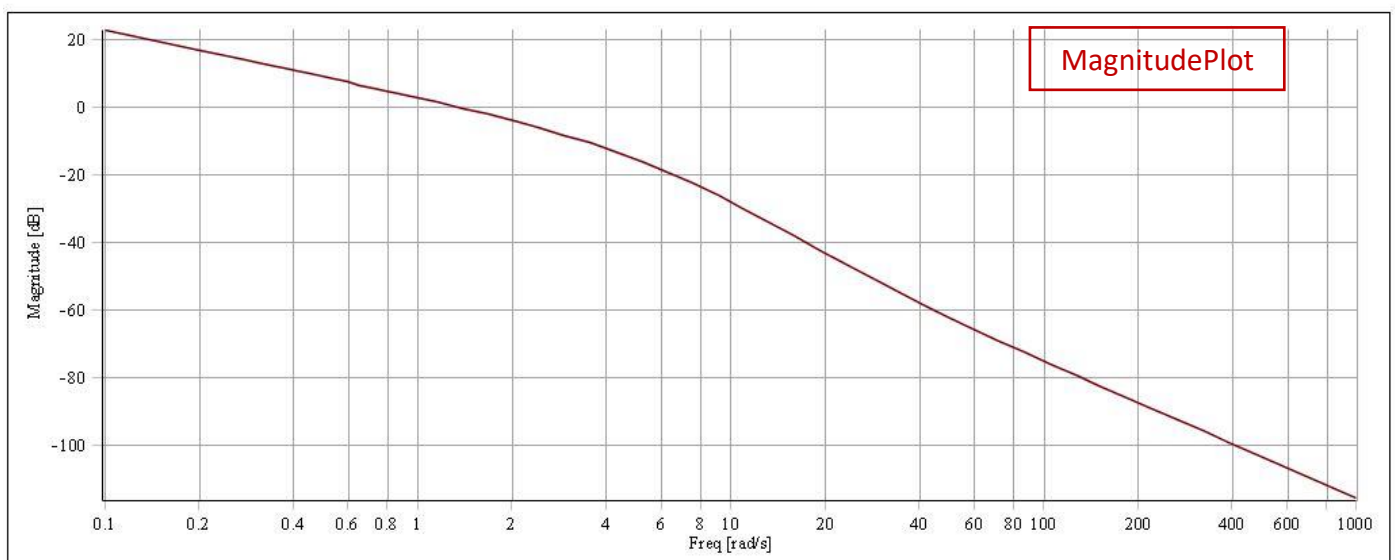
$$\angle G(j\omega) = \angle K_b + \angle \frac{1}{j\omega} + \angle 1 + \frac{j\omega}{30} - \angle 1 - \frac{j\omega}{6} - \angle 1 - \frac{j\omega}{6} = \angle K_b + \angle \frac{1}{j\omega} + \angle \left(1 + \frac{j\omega}{30}\right) - 2 \cdot \angle \left(1 - \frac{j\omega}{6}\right)$$

```
fase_eff := ω → K_b, fase(ω) + poli_origine_fase(ω) + zero_eff_fase(ω, Ω) + 2 · polo_eff_fase(ω, ω) :
fase_appr := ω → K_b, fase(ω) + poli_origine_fase(ω) + zero_appr_fase(ω, Ω) + 2 · polo_appr_fase(ω, ω) :
semilogplot([fase_eff(ω), fase_appr(ω)], ω = ω_left_fase .. ω_right_fase, axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], legend = ["Diagramma delle fasi effettivo",
"Diagramma delle fasi asintotico"], title = "Diagramma delle fasi complessivo")
```



Si è verificata la correttezza dei diagrammi tracciati:

```
Gm := TransferFunction( ( 50 · ( 1 + s/30 ) ) / ( s · ( s^2 - 12 · s + 36 ) ) ) :
BodePlot(Gm)
```



La pendenza in bassa ed alta frequenza del diagramma dei moduli

$$Pendenza_{BF} = -20 \mu \left[\frac{db}{decade} \right]$$

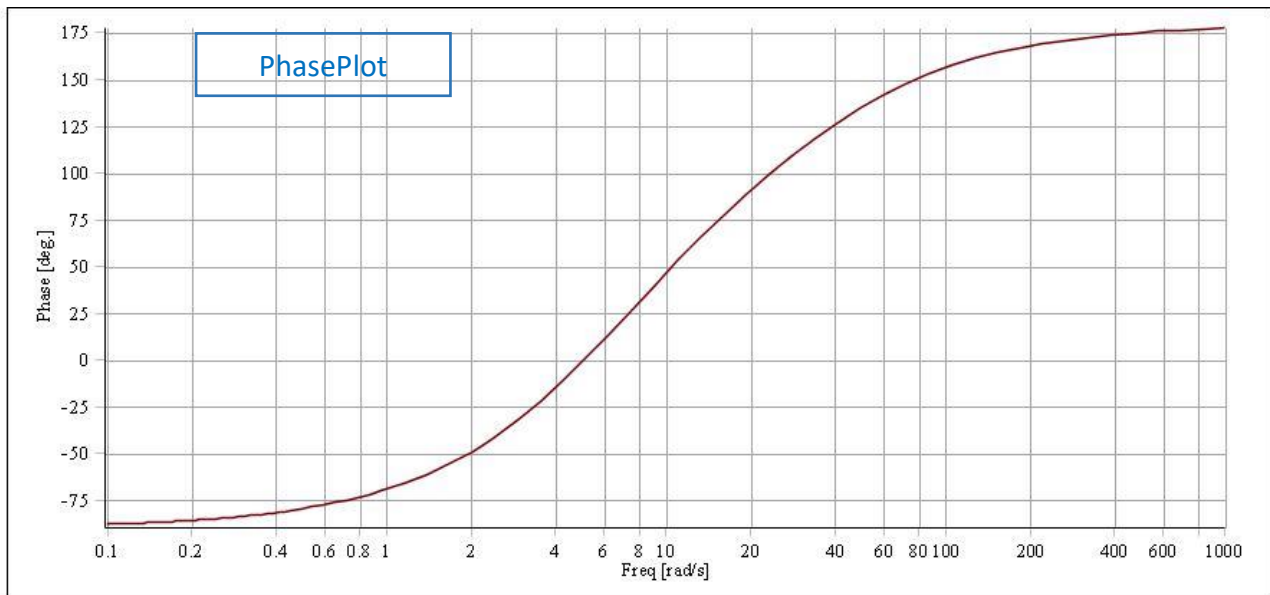
$$Pendenza_{AF} = -20 \mu + 20 n_z - 20 r \left[\frac{db}{decade} \right]$$

$$pendenza_{bf} := -20 \cdot \mu$$

-20

$$pendenza_{af} := -20 \cdot \mu + 20 \cdot n_z - 20 \cdot r$$

-40



Per la fase in bassa ed alta frequenza del diagramma delle fasi, si individuano le seguenti quantità:

- n_z^+ che rappresenta il numero di zeri a fase non minima
- n_z^- che rappresenta il numero di zeri a fase minima
- n_p^+ che rappresenta il numero di poli instabili
- n_p^- che rappresenta il numero di poli stabili

$$Fase_{BF} = (1 - \text{sgn}(K_b)) * \frac{\pi}{2} - \mu * \frac{\pi}{2}$$

$$Fase_{AF} = Fase_{BF} + (n_z^- - n_z^+) * \frac{\pi}{2} - (n_p^- - n_p^+) * \frac{\pi}{2}$$

$$n_z^+ := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{zeros}))$$

0

$$n_z^- := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{zeros}))$$

1

$$n_p^+ := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{poles}))$$

2

$$n_p^- := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{poles}))$$

0

$$fase_{bf} := \frac{(1 - \text{signum}(K_b)) \cdot \text{Pi}}{2} - \frac{\mu \cdot \text{Pi}}{2}$$

$-\frac{1}{2} \pi$

$$fase_{af} := fase_{bf} + \frac{(n_z^- - n_z^+) \cdot \text{Pi}}{2} - \frac{(n_p^- - n_p^+) \cdot \text{Pi}}{2}$$

π

Un ulteriore dato che si può ricavare è il cosiddetto sfasamento relativo

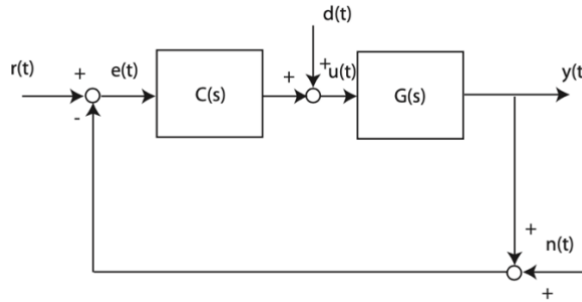
$$\text{sfasamento}_{\text{relativo}} := fase_{af} - fase_{bf}$$

$\frac{3}{2} \pi$

In questo caso è $\frac{3}{2} \pi$ in anticipo.

Esercizio C

Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.



Dove $G(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento del processo

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 100}$$

>> folder Esercizio_3 >> script.m, ese3.mw

Si chiede di determinare un regolatore $C(s)$ di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- **Errore di inseguimento inferiore al 10% per un riferimento a rampa.**

Un problema di controllo in retroazione presenta un controllore con la seguente forma:

$$C(s) = \frac{K}{s^r} \prod_{i=1}^n C_i(s) = C_s(s) * C_{rete}(s)$$

In cui $C_s(s) = \frac{K}{s^r}$ è la componente relativa alla *precisione statica*, mentre $C_{rete}(s) = \prod_{i=1}^n C_i(s)$ è la serie di componenti relative alla cosiddetta *precisione dinamica*.

Per quanto riguarda la taratura per un errore di inseguimento a regime $e_{v,\infty} \leq 10\%$, si tratta di un problema di asservimento di velocità (*precisione statica*) in cui il riferimento è una rampa di pendenza R generica.

$$r(t) = R * t * 1(t) \quad \text{con } R \in \mathbb{R}$$

Per *precisione statica* si intende l'analisi delle uscite a transitorio esaurito delle uscite dello schema di controllo a fronte di un certo riferimento $r(t)$ e/o agli ingressi $d(t)$ e $n(t)$.

Nel seguente caso, si pongono $d(t) = n(t) = 0$, ottenendo così $e(t) = r(t) - y(t) \leftrightarrow E(s) = R(s) - Y(s)$

Per costruire $C_s(s) = \frac{K}{s^r}$ si devono determinare i parametri K ed r .

Dall'ipotesi di *Bibo Stabilità* della retroazione, se l'ingresso riferimento è limitato allora le uscite risulteranno anch'esse limitate, ma essendo il riferimento rampa un ingresso non limitato allora imponendo:

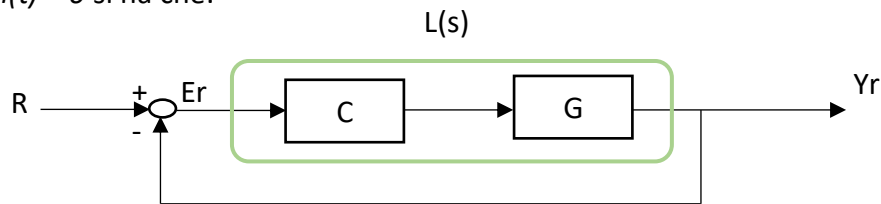
$$e_{v,\infty} < \infty \Leftrightarrow L(s) \text{ di tipo } 1$$

La funzione di anello è detta di tipo 1 se e solo se presenta un effetto integrale. La funzione di trasferimento dell'impianto $G(s)$, non presenta poli nell'origine, quindi oltre all'azione proporzionale K , il regolatore $C(s)$ presenta anche un effetto integrale ($r=1$).

Quindi si ha:

$$C(s) = \frac{K}{s}$$

Nel dominio di Laplace, applicando il teorema del valore finale e considerando lo schema di retroazione con i contributi $d(t) = n(t) = 0$ si ha che:



$$e_{v,\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s * E_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \left(\frac{1}{1 + L(s)} \right) * R(s)$$

In cui $L(s) = C_s(s)G(s)$ è la cosiddetta funzione di anello mentre $R(s) = \mathcal{L}(r(t)) = \mathcal{L}(R * t * 1(t)) = \frac{R}{s^2}$

Risolvendo il seguente limite:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{1}{1 + C_s(s) \cdot G(s)} \right) \cdot \left(\frac{R}{s^2} \right)$$

$$\frac{10 R}{K}$$

Supponendo che il riferimento sia una rampa con pendenza unitaria, il parametro K lo si determina come:

$$e_{v,\infty} \leq 10\% \Rightarrow 10 \frac{R}{K} \leq \frac{10}{100} \Rightarrow \frac{R}{K} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow K \geq 100 R \Rightarrow K \geq 100$$

Essendo $e_{v,\infty} = 10 \frac{R}{K}$, è evidente il rapporto tra $e_{v,\infty}$ e K . Per $K \uparrow$ si ha che $e_{v,\infty} \downarrow$, cioè più precisione statica.

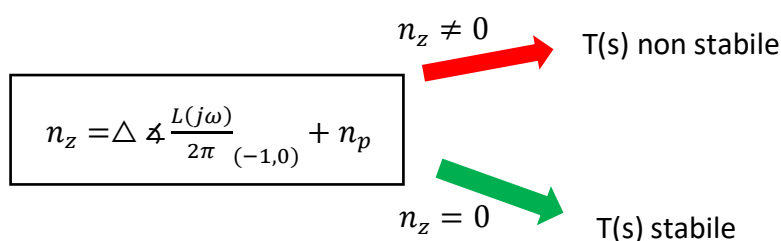
Scelto $K = 102$ e $r = 1$, si ha che:

$$C_s(s) = \frac{K}{s^r} = \frac{100}{s}$$

E che la precisione statica $e_{v,\infty} = 10 \frac{R}{K} = \frac{10}{102} \cong 0.098 < 0.1$ come richiesto dall'esercizio.

Per l'analisi di stabilità in retroazione dello schema di controllo parziale, si fa ricorso ad un approccio *Ex-Ante*. L'idea è quella di analizzare la stabilità dello schema senza dover 'chiudere' la retroazione.

Con il criterio di Nyquist, allora:



Dove:

- n_z rappresenta il numero di poli nel semipiano dx della $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ e coincide con il numero di zeri della $L(s)$ nel semipiano dx
- n_p rappresenta il numero di poli nel semipiano dx della $L(s)$
- $N = \Delta \oint \frac{L(j\omega)}{2\pi} (-1,0)$ rappresenta il numero di giri della curva "D" attorno al punto (-1,0)


```

fprintf('Analisi di Stabilità con L(s)=C_s(s)G(s):');
L=series(C_s,G)

% applico il criterio di Nyquist
[L_p,L_z]=pzmap(L);
nz=0; % numero di zeri nel semipiano dx compreso jw
for i=1:length(L_z)
    if real(L_z(i))>=0
        nz=nz+1;
    end
end

np=0; % numero di poli nel semipiano dx compreso jw
for i=1:length(L_p)
    if real(L_p(i))>=0
        np=np+1;
    end
end

```

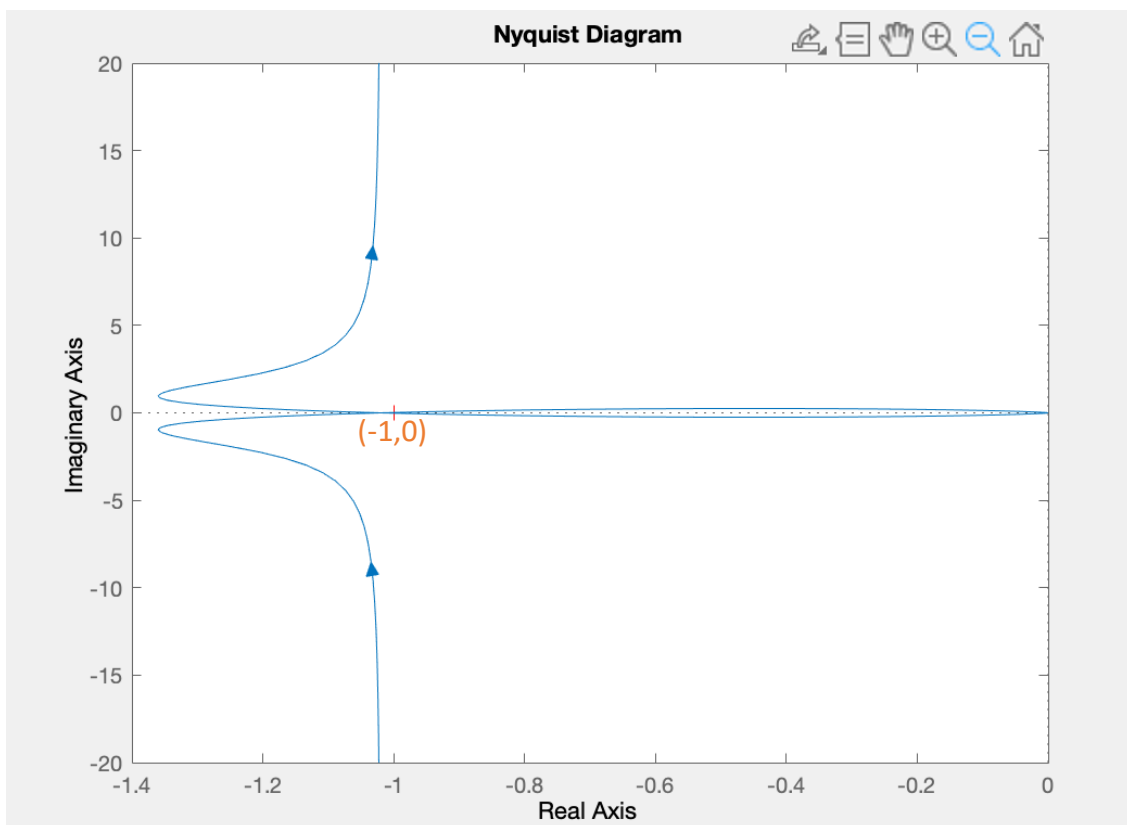
Si passa con la valutazione del diagramma di Nyquist e con il verificare la stabilità del sistema

```

figure(1)
nyquist(L)
N=input('Numero di giri attorno al punto critico (-1,0)=');

if nz==N+np & nz==0
    fprintf('L(s) è bipo stabile secondo il criterio di Nyquist \n');
    figure(2)
    margin(L);
else
    fprintf('L(s) non è bipo stabile secondo il criterio di Nyquist \n');
end

```



Essendo presente in $L(s)$ un polo nell'origine, il diagramma di Nyquist non descrive una curva chiusa al finito, ciò significa che sarà 'raccordata' con la "D" con il raggio che tende all'infinito.

Lo script richiede in input il numero di giri attorno a $(-1,0)$. Ingrandendo il diagramma sull'intorno di $(-1,0)$, si può notare come la curva 'avvolga' il punto una volta ed un'altra volta raccordando la "D". Il senso della curva è antiorario, quindi $N>0$ ottenendo così $N=2$.

```

Analisi di Stabilità con L(s)=C_s(s)G(s):
L =

      1020
-----
s (s^2 + 10s + 100)

Continuous-time zero/pole/gain model.

Numero di giri attorno al punto critico (-1,0)=2
L(s) non è bibo stabile secondo il criterio di Nyquist
>> nz

nz =

      0

>> np

np =

      1

```

Il sistema parziale risulta essere instabile a causa del polo nell'origine. Controprova a tale risultato la si può ottenere eseguendo lo script con L(s) senza fattore integrale.

```

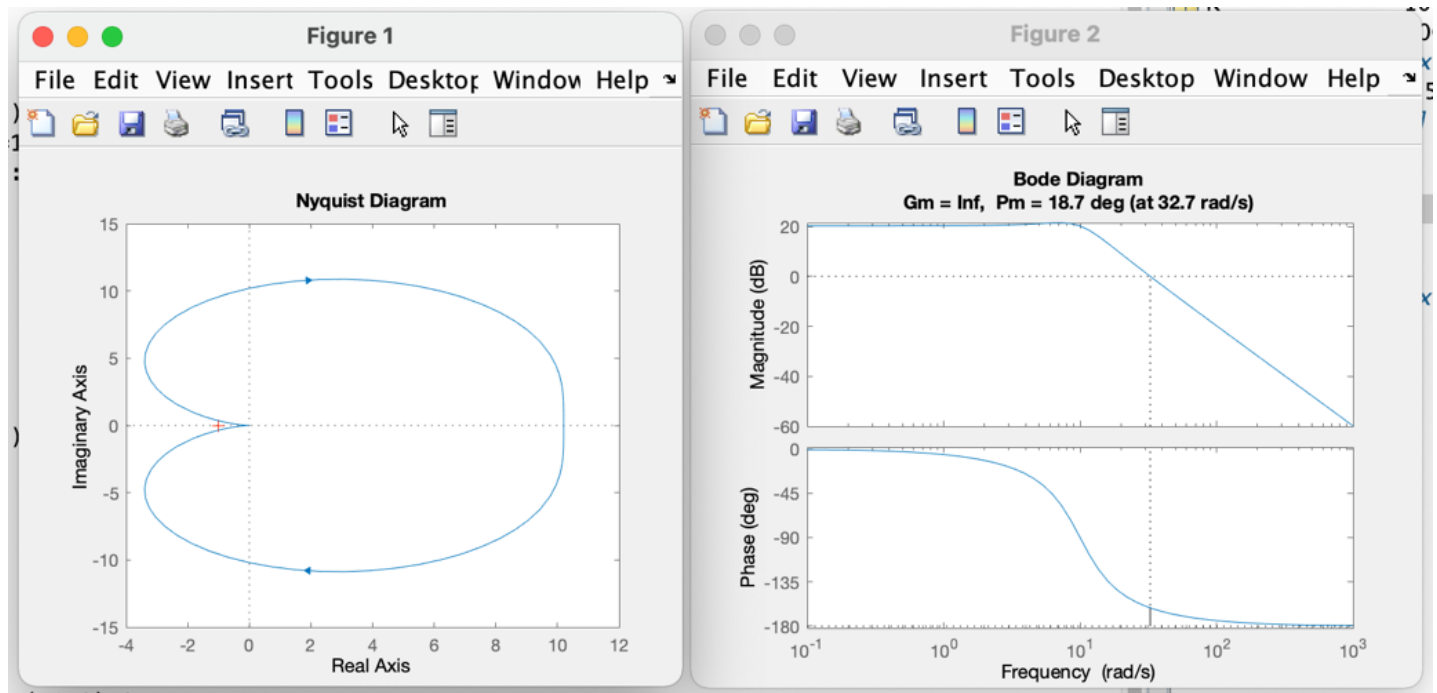
Analisi di Stabilità con L(s)=C_s(s)G(s):
L =

      1020
-----
(s^2 + 10s + 100)

Continuous-time zero/pole/gain model.

Numero di giri attorno al punto critico (-1,0)=0
L(s) è bibo stabile secondo il criterio di Nyquist

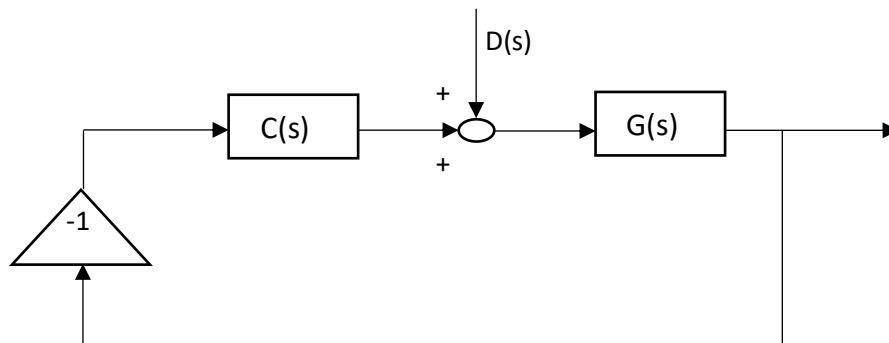
```



- **Reiezione per un disturbo di carico a gradino.**

La reiezione è una strategia di progettazione del regolatore che ha il compito di attenuare il più possibile sorgenti aggiuntive quali *disturbo* e *rumore*.

In questo caso è richiesta la reiezione per un disturbo $d(t) = D * 1(t)$, e lo schema di controllo da analizzare



Passando al dominio di Laplace, con $D(s) = \mathcal{L}(d(t)) = \mathcal{L}(D * 1(t)) = \frac{D}{s}$ e applicando il teorema del valore finale, allora si ha che:

$$y_{d,\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{1 + L(s)} D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{1 + C_s(s)G(s)} D$$

Essendo $L(s)$ di tipo 1, allora mi aspetto una *reiezione perfetta* $\forall D \in \mathbb{R}$, cioè $y_{d,\infty} = 0$.

assume(Dd,'real') :

$$y_d := \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{G(s)}{1 + C_s(s) \cdot G(s)} \right) \cdot \left(\frac{Dd}{s} \right)$$

0

- **Picco di risonanza $M_{r,db} \leq 3_{db}$ e banda passante $6 \leq \omega_{Bw} \leq 20 \left[\frac{rad}{sec} \right]$.**

Per soddisfare tali specifiche dinamiche, si suppone che $T(s)$ si approssimi ad un sistema del II ordine:

$$\tilde{T}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sapendo che il legame tra *picco di risonanza* e *smorzamento* è di proporzionalità inversa con:

$$M_r = \frac{1}{2} \frac{1}{\delta\sqrt{1-\delta^2}}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cioè per $M_r \uparrow, \delta \downarrow$.

Determino lo smorzamento critico come:

$$\tilde{\delta} : M_{r,db} = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{\delta}\sqrt{1-\tilde{\delta}^2}} \right]_{db} = 3_{db}, \quad 0 < \tilde{\delta} < 0.7071$$

```
%% Quesito 2. Mrdb <= 3db and 6 <= wbw <= 20 rad/sec
```

```
Mr_ub=3; % upper-bound picco di risonanza in db
```

```
delta_cr=smorz_Mr(Mr_ub);
```

```
if delta_cr > 0.7071 || delta_cr < 0
```

```
    fprintf('Errore sullo smorzamento critico, %1.2f',delta_cr);
```

```
end
```

```
fprintf('Lo smorzamento critico è pari a %1.2f \n',delta_cr);
```

Ottenendo un $\tilde{\delta} \cong 0.38$, allora dalla relazione tra picco di risonanza e smorzamento, se:

$$M_r \uparrow, \delta \downarrow \Rightarrow M_r \downarrow, \delta \uparrow$$

$$M_r \downarrow, M_{r,db} \downarrow \Rightarrow M_{r,db} \downarrow, \delta \uparrow$$

Da ciò è semplice comprendere che se $M_{r,db} \leq 3_{db} \Rightarrow \delta \geq \tilde{\delta} \cong 0.38$.

Sapendo che il margine di fase lo si può esprimere in modo approssimativo in funzione dello smorzamento

$$\delta \cong \frac{\phi_m^\circ}{100}$$

Allora per $\delta > \tilde{\delta} \Rightarrow \phi_m^\circ \cong 100 \delta > 100 \tilde{\delta} \Rightarrow \phi_m^\circ > 38^\circ, M_{r,db} < 3_{db}$

Per quanto riguarda le specifiche sulla banda passante, sapendo che $\omega_c \leq \omega_{Bw}$, allora considero una pulsazione di attraversamento compresa nell'intervallo $6 \leq \omega_c \leq 20 \left[\frac{rad}{sec} \right]$.

```
% phim > 38°, vista la relazione tra Mr e phim, scelto un margine di fase
```

```
% campione un pò più alto
```

```
% wc deve appartenere all'intervallo [6,20] rad/sec
```

```
% Obiettivi
```

```
phim_ob=45; % °
```

```
wc_ob=6.5; % rad/sec
```

Scelti gli obiettivi da soddisfare $\hat{\omega}_c$ e $\hat{\phi}_m$, questi parametri sono soddisfatti se la funzione di anello corrente ($L(s) = C_s(s)G(s)$), rispetta le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} |L(j\hat{\omega}_c)| = 1 \\ 180^\circ - |\angle L(j\hat{\omega}_c)| = \hat{\phi}_m \end{cases}$$

```
fprintf('Per la pulsazione di attraversamento obiettivo %2.1f rad/sec \n',wc_ob);
[modulo,argomento]=bode(L,wc_ob);
if modulo>1
    fprintf(' 1) Modulo: %5.2f > 1\n',modulo);
else
    fprintf(' 1) Modulo: %5.2f <= 1 \n',modulo);
end

sfasamento=180-(abs(argomento));
if sfasamento>phim_ob
    fprintf(' 2) Sfasamento: %3.2f ° > %3.2f ° obiettivo \n',sfasamento,phim_ob);
else
    fprintf(' 2) Sfasamento: %3.2f ° <= %3.2f ° obiettivo \n',sfasamento,phim_ob);
end
```

Ottenendo i seguenti risultati nell'intorno della pulsazione di attraversamento obiettivo:

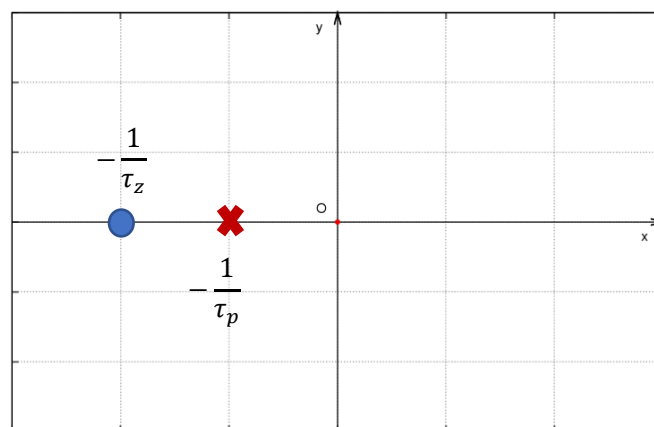
```
Per la pulsazione di attraversamento obiettivo 6.5 rad/sec
1) Modulo: 1.80 > 1
2) Sfasamento: 41.62 ° < 0 = 45.00 ° obiettivo
```

In questo caso, il modulo deve essere **ATTENUATO**, mentre la fase deve crescere, deve essere **ANTICIPATA**. Quindi si deve introdurre una rete correttrice che sarà caratterizzata dalla cascata di due 'stadi', uno che ha l'obiettivo di attenuare il modulo e il secondo di aumentare lo sfasamento nell'intorno di $\hat{\omega}_c$.

Entrambi le reti saranno caratterizzate dalla seguente struttura: $C_{lag}(s) = \frac{1+s\tau_z}{1+s\tau_p}$, $\tau_z > 0$ e $\tau_p > 0$

RETE ATTENUATRICE

$C_{lag}(s) = \frac{1+s\tau_z}{1+s\tau_p}$ è una rete attenuatrice se il polo è *dominante* rispetto allo zero, ossia $\tau_p > \tau_z > 0$.



dove le costanti di tempo dello zero e del polo sono definite come:

- $\tau_z = \frac{m - \cos(\theta)}{\hat{\omega}_c \sin(\theta)}$
- $\tau_p = \frac{m \cos(\theta) - 1}{\hat{\omega}_c m \sin(\theta)}$

Mentre i parametri m, θ :

- $m = \frac{1}{|L(j\hat{\omega}_c)|}$
- $\theta \in [-5^\circ, -2^\circ]$
-

Si noti come il parametro $|L(j\hat{\omega}_c)| > 1 \Rightarrow m < 1$. Mi aspetto che $\tau_p > 0$ e $\tau_z > 0$, $m < 1$ e $\theta \in [-5^\circ, -2^\circ]$

```
fprintf('\n***Rete Attenuatrice***\n');
m=1/modulo;
fprintf(' 1) m: %5.2f \n',m);
theta=-5; %°
fprintf(' 2) theta: %3.2f \n',theta);

[tz,tp]=generica(wc_ob,m,theta);
if tz < 0 || tp < 0 || tp < tz
    fprintf('Errore sulle costanti di tempo tz=%d e tp=%d \n',tz,tp);
    return
end
fprintf('Le costanti di tempo sono tz=%5.2f e tp=%5.2f \n',tz,tp);

fprintf('Costruisco la rete \n');
C_lag=(1+s*tz)/(1+s*tp)
```

```
***Rete Attenuatrice***
 1) m:  0.55
 2) theta: -5.00
Le costanti di tempo sono tz= 0.78 e tp= 1.43
Costruisco la rete

C_lag =

      0.54677 (s+1.281)
      -----
      (s+0.7006)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Le costanti di tempo soddisfano i vincoli, perciò, la costruzione della $C_{lag}(s)$ è avvenuta con successo.

```
fprintf('Funzione di anello con C_lag(s)\n');
L_lag=series(series(C_s,C_lag),G)

figure(1)
hold on
margin(L)
bode(C_lag)
margin(L_lag)

[modulo,argomento]=bode(L_lag,wc_ob);
fprintf('* Modulo attenuato: %5.2f \n',modulo);
```

La nuova funzione di anello sarà composta dalla serie: $L(s) = C_s(s) C_{lag}(s) G(s) = L_{lag}(s)$.

Funzione di anello con $C_{lag}(s)$

$L_{lag} =$

$$\frac{557.71 (s+1.281)}{s (s+0.7006) (s^2 + 10s + 100)}$$

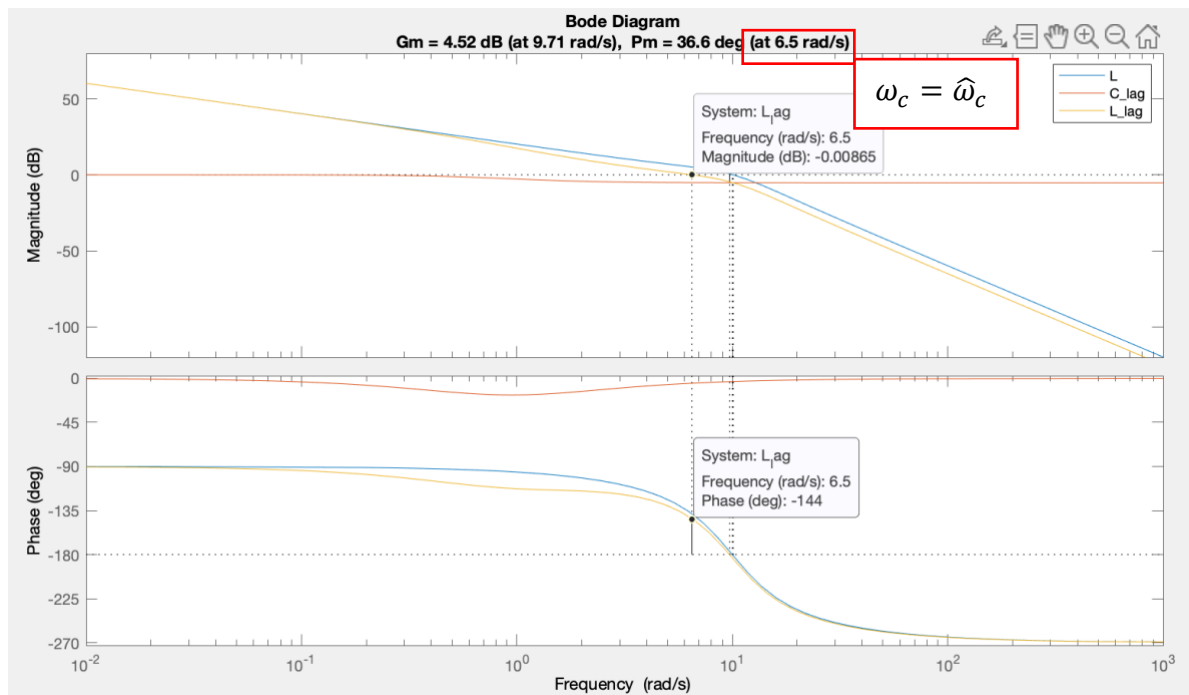
Continuous-time zero/pole/gain model.

* Modulo attenuato: 1.00



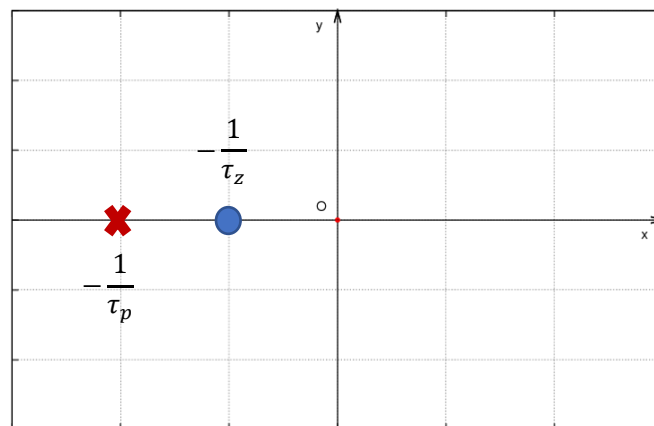
$$|L(j\hat{\omega}_c)| = |L_{lag}(j\hat{\omega}_c)| = 1$$

Confronto dei Diagrammi di Bode della vecchia funzione di anello, della rete attenuatrice e della funzione di anello compensata.



RETE ANTICIPATRICE

$C_{lead}(s) = \frac{1+s\tau_z}{1+s\tau_p}$ è una rete anticipatrice se lo zero è *dominante* rispetto al polo, ossia $\tau_z > \tau_p > 0$.



dove le costanti di tempo dello zero e del polo sono definite come:

- $\tau_z = \frac{m - \cos(\theta)}{\hat{\omega}_c \sin(\theta)}$
- $\tau_p = \frac{m \cos(\theta) - 1}{\hat{\omega}_c m \sin(\theta)}$

Mentre i parametri m, θ :

- $m = \frac{1}{|L(j\hat{\omega}_c)|}$
- $\theta = 180^\circ - |\angle L(j\hat{\omega}_c)|$

In questo caso mi aspetto che $\tau_p > 0$ e $\tau_z < 0$, $m > 1$ e θ .

```

fprintf('\n*** Rete Anticipatrice ***\n');
m=1/modulo;
fprintf(' 1) m: %5.2f \n',m);
theta=phim_ob-sfasamento; % °
fprintf(' 2) theta: %3.2f \n',theta);

[tz,tp]=generica(wc_ob,m,theta);
if tz < 0 || tp < 0 || tz < tp
    fprintf('Errore sulle costanti di tempo tz=%d e tp=%d \n',tz,tp);
    return
end
fprintf('Le costanti di tempo sono tz=%5.2f e tp=%5.2f \n',tz,tp);

fprintf('Costruisco la rete \n');
C_lead=(1+s*tz)/(1+s*tp)

```

```

*** Rete Anticipatrice ***
1) m: 1.07
2) theta: 13.58
Le costanti di tempo sono tz= 0.06 e tp= 0.03
Costruisco la rete

```

$$C_{lead} = \frac{2.4731 (s+16.02)}{(s+39.63)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

Funzione di anello con $C_{lag_lead}(s)$

Le costanti di tempo soddisfano i vincoli, perciò, la costruzione della $C_{lead}(s)$ è avvenuta con successo.

```

fprintf('Funzione di anello con C_lag_lead(s)\n');
L_lag_lead=series(series(C_s,series(C_lag,C_lead)),G)

figure(2)
hold on
margin(L)
bode(C_lead)
margin(L_lag_lead)

[modulo,argomento]=bode(L_lag_lead,wc_ob);
fprintf('* Modulo attenuato: %5.2f \n',modulo);
sfasamento=180-abs(argumento);
fprintf('* Sfasamento anticipato: %3.2f °\n',sfasamento);

```

La nuova funzione di anello finale sarà composta dalla serie: $L_{lag_lead}(s) = C_s(s) C_{lag}(s) C_{lead}(s) G(s)$.

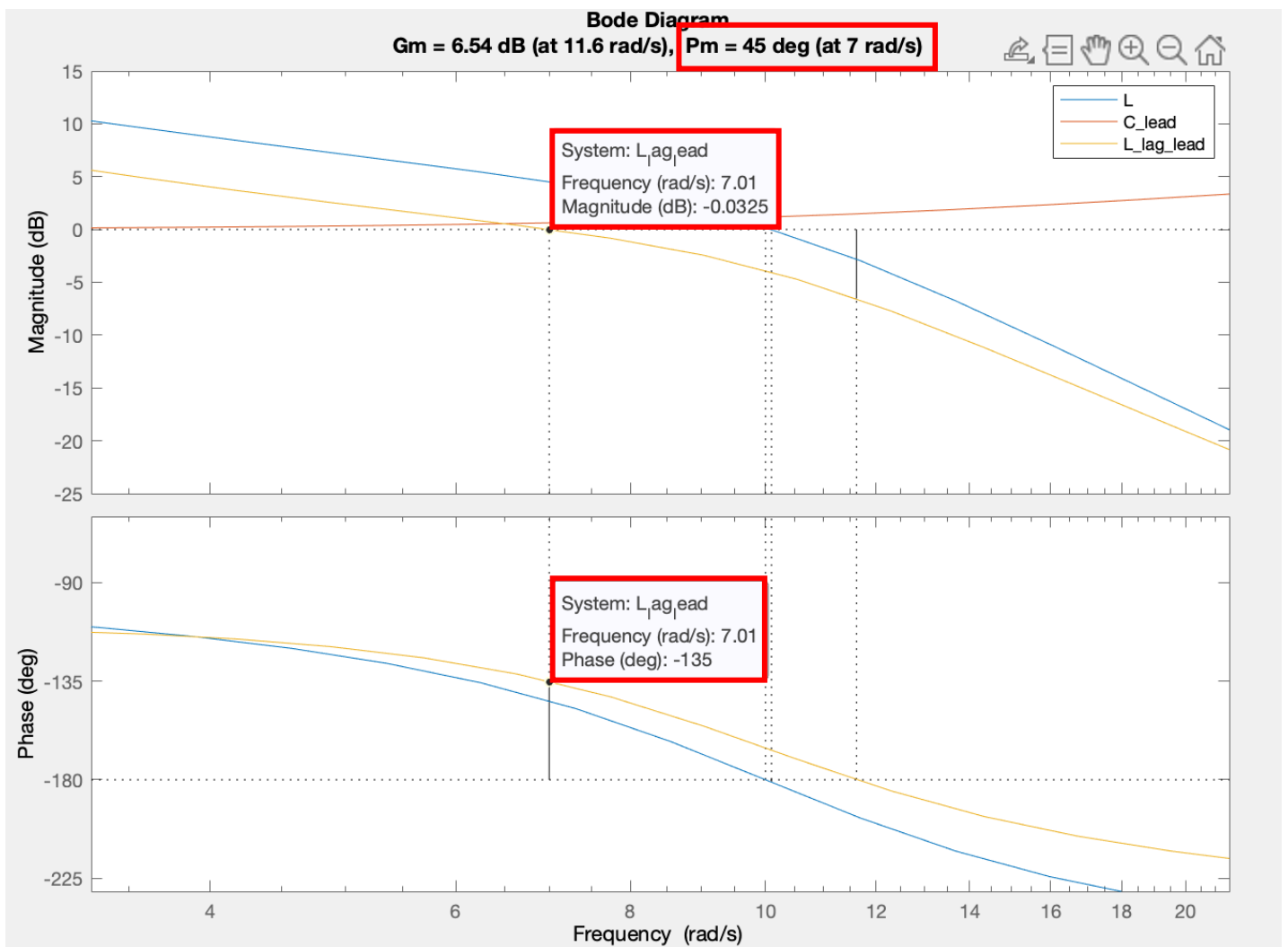
$$L_{lag_lead} = \frac{1379.3 (s+16.02) (s+1.281)}{s (s+39.63) (s+0.7006) (s^2 + 10s + 100)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```

* Modulo attenuato: 1.00
* Sfasamento anticipato: 45.00 °

```



La rete correttiva ha reso il sistema BIBO stabile compensando l'instabilità del regolatore parziale $C_s(s)$.

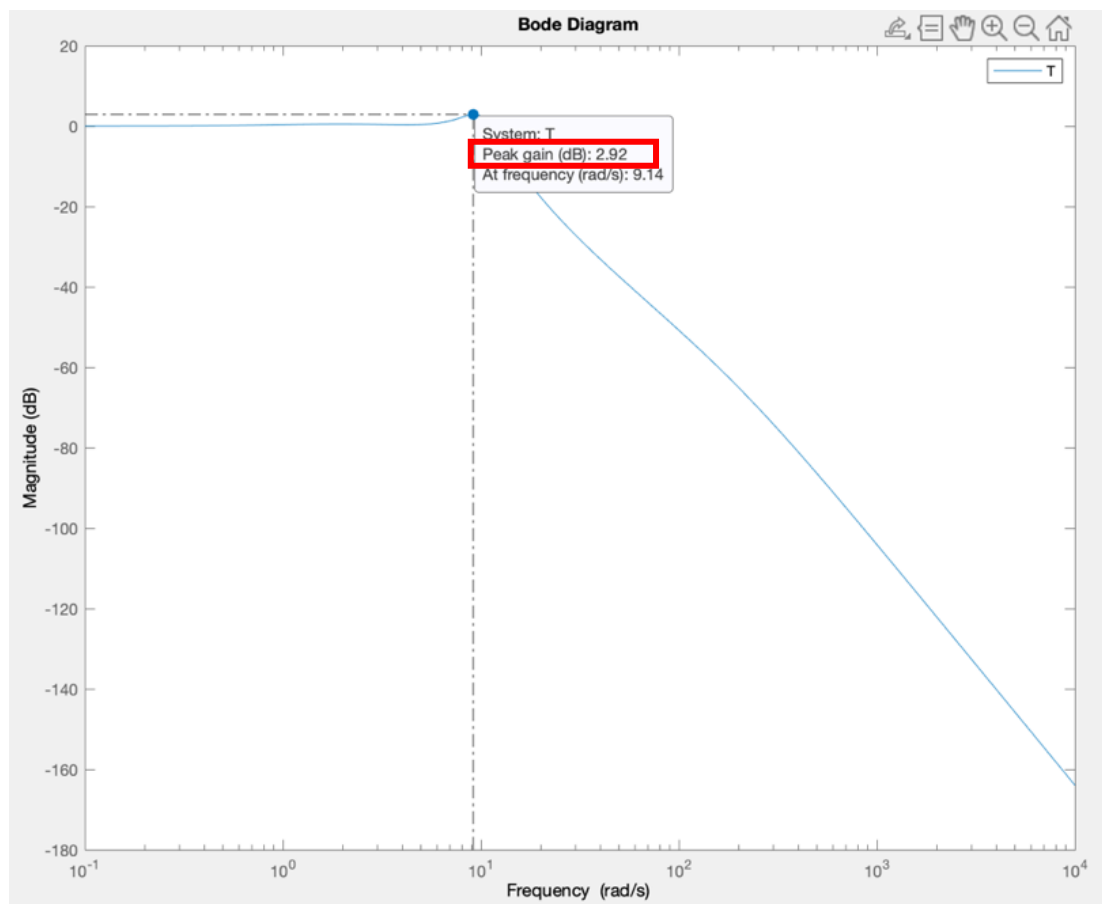
Criterio di Bode

BIBO stabilità $\longleftrightarrow \phi_m^\circ > 0^\circ$

Per verificare se il picco di risonanza $M_{r,db} \leq 3_{db}$, essendo lo schema di controllo in retroazione BIBO stabile, chiudendo lo schema, si fa un'analisi del diagramma dei moduli della retroazione algebrica unitaria

```
% T(s)=L(s)/1+L(s) con naturalmente L(s)=L_lag_lead(s)
T=feedback(L_lag_lead,1)
bodemag(T);
```

Per $\hat{\phi}_m^\circ = 45^\circ$ il picco di risonanza risultava essere maggiore al vincolo imposto, così si è rieseguito lo script con un valore di margine di fase obiettivo $\hat{\phi}_m^\circ = 45^\circ$.



Ottenendo un picco di risonanza pari a $M_{r,db} \cong 2.92 \text{ db}$.