

# 目次

1	小学生コース	2
2	中学生コース	7
3	数Ⅰ・Aコース	14
4	数Ⅱ・Bコース	21
5	数Ⅲ・Cコース	28

# 1 小学生コース

## 問 1 物理室

問題

とある学校には A 棟と B 棟があり、両棟合わせて 54 教室あります。A 棟は B 棟よりも 4 教室多いです。また、B 棟の特別教室の数は B 棟の 24% を占めます。B 棟の特別教室は何室あるか答えなさい。

まずは、A 棟の教室数を  $a$ 、B 等の教室数を  $b$  とおきます。すると、

$$a + b = 54 \quad (1)$$

$$a = b + 4 \quad (2)$$

と書けます。(2) を (1) に代入して、

$$(b + 4) + b = 54$$

$$2b + 4 = 54 - 4$$

$$b = 25$$

よって、B 棟の教室数は 25 棟とわかりました。B 棟の特別教室はこの 24% なので、

$$25 \times \frac{24}{100} = 6 \quad \underline{\text{答え. 6 室}}$$

## 問 2 化学室

問題

$$0, 1, \frac{5}{3}, 1\frac{2}{9}, 1 \text{ 割 } 2 \text{ 分}$$

大きい順に並べましょう。

このままでは比べられないので、小数に変換しましょう。

$$\frac{5}{3} = 1.66\ldots, 1\frac{2}{9} = 1.22\ldots, 1 \text{ 割 } 2 \text{ 分} = 1.2 \text{ なので,}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & \frac{5}{3} & 1\frac{2}{9} & 1 \text{ 割 } 2 \text{ 分} \\ 0 & 1 & 1.66\ldots & 1.22\ldots & 1.2 \end{array}$$

このように対応します。よって答えは、

$$\frac{5}{3}, 1\frac{2}{9}, 1\text{割}2\text{分}, 1, 0$$

### 問 3 生物室

問題

時刻が 9 月 10 日深夜 1 時 20 分です。30 分前は、何時何分でしょう。

9 月 10 日深夜 1 時 20 分の 20 分前は 9 月 10 日深夜 1 時 00 分になります。そこからさらに 10 分前は 9 月 10 日深夜 0 時 50 分です。よって、 答え. 0 時 50 分

### 問 4 特別棟 4 階

問題

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, …

上の数列はある規則に沿って並んでいます。30 番目の数はいくつでしょう。

この数列は、数字がその数字の数だけ並んで続いていきます。よって書き出すと、

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,

5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6,

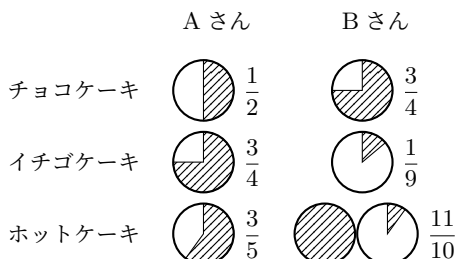
6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8

となるので、 答え. 8

### 問 5 昇降口

問題

A さんと B さんの取ったケーキの分量の差はいくらでしょう。ただし、ケーキの大きさはどの種類も同じとします。



通分して、分数の足し算・引き算をしましょう。

A さん

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{10}{20} + \frac{15}{20} + \frac{12}{20} \\ &= \frac{37}{20} \end{aligned}$$

B さん

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} + \frac{1}{9} + \frac{11}{10} \\ &= \frac{135}{180} + \frac{20}{180} + \frac{198}{180} \\ &= \frac{353}{180} \end{aligned}$$

2 人の分量の差は、

$$\begin{aligned} & \frac{353}{180} - \frac{37}{20} \\ &= \frac{353}{180} - \frac{333}{180} \\ &= \frac{20}{180} \\ &= \frac{1}{9} \quad \text{答え. } \frac{1}{9} \end{aligned}$$

## 問 6 セミナーハウス


問題

A 空港と B 空港の間は 5100 km 離れています。その間を時速 900 km の飛行機で移動すると、何時間何分かかかるでしょう。

距離と速さがわかっていて、時間を求める問題です。「み・は・じ」\*1を使って解くと、

$$\frac{5100}{900} = \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \quad [\text{時間}]$$

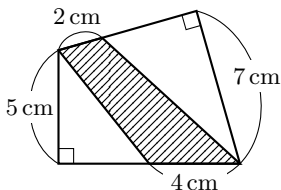
$\frac{2}{3}$  時間は 40 分なので、答え. 5 時間 40 分

\*1 。「き・は・じ」や「は・じ・き」と言ったりもする。

## 問 7 体育館

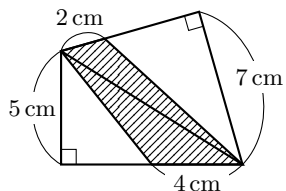
問題

斜線部の面積を求めましょう。



右の図のように補助線を引きます。すると、底辺が 2、高さが 7 の三角形と底辺が 4、高さが 5 の三角形に分けることができます。よって面積は、

$$2 \times 7 \div 2 + 4 \times 5 \div 2 = 7 + 10 \\ = 17$$

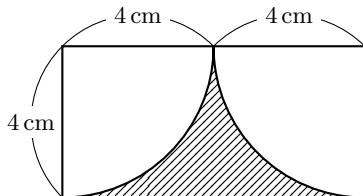


答え.  $17 \text{ cm}^2$

## 問 8 本部前

問題

斜線部の面積を求めましょう。ただし、円周率は 3.14 とする。



斜線部の面積は、 $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$  の長方形から半径  $4 \text{ cm}$  の半円を引いたものに等しいので、

$$4 \times 8 - 4 \times 4 \times 3.14 \div 2 = 32 - 25.12 = 6.88$$

答え.  $6.88 \text{ cm}^2$

## 問 9 水道前

### 問題

仕入れた状態で 300 円の洋服を 20% の利益をつけて売りたい。この洋服を何円で売ればよいだろうか。

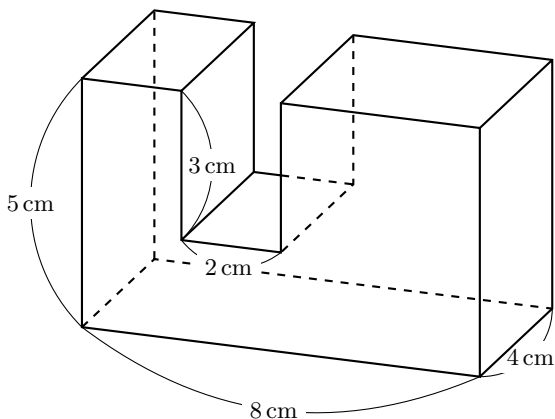
300 円の洋服に 20% の利益をつけるので、利益は  $300 \times \frac{20}{100} = 60$  円。

売値は原価 + 利益なので、 $300 + 60 = 360$     答え. 360 円

## 問 10 屋上入口

### 問題

次の立体の体積を求めましょう。



このような立体の体積は底面積×高さで求めることができます（同じ形の板がたくさん重なっているイメージ）。この問題では底面は手前に向いている面です。

底面積は  $5 \times 8$  の長方形から  $2 \times 3$  の長方形を引いたものなので、

$$\begin{aligned}(5 \times 8 - 2 \times 3) \times 4 &= 34 \times 4 \\ &= 136\end{aligned}$$

答え.  $136 \text{ cm}^3$

## 問 11 徘徊者

### 問題

81 をある 1 より大きい整数で割ると、小数の部分のどこかに 1995 という数の並びが現れました。このような整数のうち、最も小さいものを求めましょう。

求める数を  $x$  とおきます。 $\frac{81}{x} = \dots\dots 1995\dots$

小数を 10, 100 倍していくと小数点を右にずらせる。さらに整数部分を引くと、

$$\frac{a}{x} = 0.1995\dots (a \text{ は } 1 \text{ 以上の整数})$$

まず、これを満たす  $x$  を見つける。

$$0.1995 \leq \frac{a}{x} \leq 0.1996$$

5 倍して、1 から引くと、

$$0.002 \leq \frac{b}{x} \leq 0.0025 \quad (b = x - a)$$

これを変形して、

$$400b \leq x \leq 500b$$

このとき、 $x$  の最小値を求めればいいので、 $b = 1$  の時を考える。

$x = 400$  のとき、0.205 となる。

$x = 401$  のとき、0.201995... となり、条件を満たす。よって 答え. 401

## 2 中学生コース

### 問 1 物理室

### 問題

$-2^2$  を計算しなさい。

指数の 2 は  $-2$  の中の 2 のみにかかっているので、答えは

$$\begin{aligned} -2^2 &= -(2^2) \\ &= -(2 \times 2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

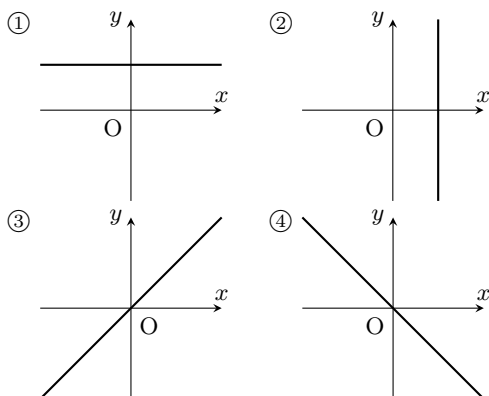
ちなみに  $(-2)^2$  の指数 2 は,  $(-2)$  全体にかかっているので,

$$\begin{aligned}(-2)^2 &= (-2) \times 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

## 問 2 化学室

### 問題

次の中で関数  $y = x$  のグラフとして最も適するものを①~④の中から一つ選びなさい。



### 解法① 表を作って考える

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-3	-2	-1	0	1	2	3

これらの点を通るのは, ③のグラフ。

### 解法② $y = x$ のグラフはどのようなグラフになるのか考える

$y = x$  は比例定数 1 の比例の関係になっている。比例のグラフは原点を通る直線なので, 条件を満たすのは③のグラフ。



### 問 3 生物室

#### 問題

次のデータは、生徒 8 人のテストの結果を得点が低い順に並べたものである。このとき、中央値（メジアン）の値を求めなさい。

No.	1	2	3	4	5	6	7	8
得点	53	57	65	66	68	69	78	82

中央値（メジアン）はデータを小さい順に並べたものの中で真ん中にあたるものです。データの数に偶数で真ん中が 2 つ出てくるので、2 つの値（得点）の平均を取ります。

よって、 $\frac{66 + 68}{2} = 67$  点となります。

### 問 4 特別棟 4F

#### 問題

大小 2 つのサイコロをそれぞれ 1 回振るとき、出目の積が偶数になる確率を求めなさい。ただし、サイコロの出目は同様に確からしいものとする。

サイコロを 2 個振る問題は  $6 \times 6$  の表を使って考えます。表を作ると、

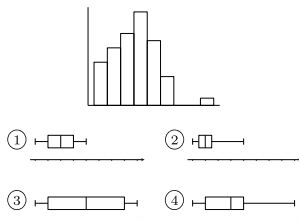
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

となり、この中で偶数は 27 つあるので、求める確率は、 $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$  となります。

## 問 5 昇降口

### 問題

次のヒストグラム（柱状図）と同じデータを用いて表された箱ひげ図として最も適するものを①～④の中から一つ選びなさい。



箱ひげ図は、最大値、最小値、第○四分位数に注目します。最大値より、①,②は間違いです。また、第3四分位数より、③は間違いです。よって、正しい箱ひげ図は④です。

## 問 6 セミナーハウス

### 問題

$(x - 3)^2 = 2$  を解きなさい。

二次方程式の解き方はいくつかありますが、今回は普段使わない平方完成  $((x - a)^p$  の形にすること) を使います。それぞれの根 ( $\sqrt{\quad}$ ) をとって、

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 &= 2 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= 3 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

平方完成は二次方程式の解の公式の証明に使うので、覚えておくといいかもしれません。

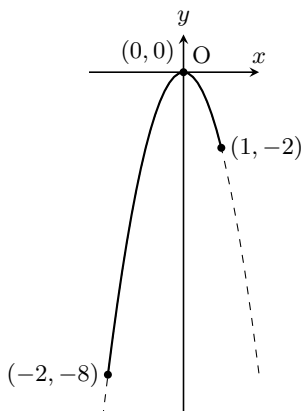
## 問 7 体育館

### 問題

関数  $y = -2x^2$  において、 $x$  の変域が  $-2 \leq x \leq 1$  のとき、 $y$  の変域を求めなさい。

この問題は、グラフを描いて求めます。実際に描くと、右のようになります。

よって、この時の  $y$  の最大値は 0、 $y$  の最小値は  $-8$  となるので、求める範囲は  $-8 \leq y \leq 0$



## 問 8 本部前

### 問題

関数  $y = \frac{a}{x}$  について、 $x$  が 2 から 6 まで増加するときの  $y$  の増加量が 1 であった。このとき、 $a$  の値を求めなさい。

この問題では、 $a$  の値を求める問題なので、 $a$  に関する方程式を作ります。  
また、増加量は、増加後の値  $-$  増加前の値で求められるので、

$$\frac{a}{6} - \frac{a}{2} = 1$$

という方程式が成り立ちます。この方程式を解いて、 $a = -3$

## 問 9 水道前

問題

$\frac{(11^4 - 2^2)(4^4 - 1^2)}{(44^2 - 11^2) + 2(4^2 - 1^2)}$  を計算しなさい。

このままでも計算できますが、累乗が多くあるので、因数分解、約分を駆使して簡単にすることができます。特に和と差の積  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  が使えることが多いです。

$$\begin{aligned}\frac{(11^4 - 2^2)(4^4 - 1^2)}{(44^2 - 11^2) + 2(4^2 - 1^2)} &= \frac{(11^4 - 2^2)(4^4 - 1^2)}{11^2(4^2 - 1^2) + 2(4^2 - 1^2)} \\ &= \frac{(11^2 + 2)(11^2 - 2)(4^2 + 1)(4^2 - 1)}{(11^2 + 2)(4^2 - 1^2)} \\ &= (11^2 - 2)(4^2 + 1) \\ &= 119 \times 17 \\ &= \mathbf{2023}\end{aligned}$$

この問題では 2023 を扱った問題でしたが、2023/9/18 現在で中 3 の人は 2024、中 2 の人は 2025...を扱った問題が高校入試で出ると考えられます。そのため、それぞれの年に対応する素因数分解した形、そして学年ごとに関係なく  $11^2$  から  $20^2$  までは覚えておきましょう。

## 問 10 屋上入口

問題

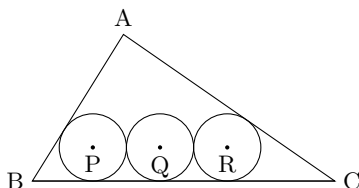
$\triangle ABC$  が半径 2 の円に内接している。 $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 75^\circ$  であるとき、 $\triangle ABC$  の面積を求めなさい。

円の中心を  $O$  とすると、 $OB = OC = 2$  なので、 $BC = 2\sqrt{2}$   
 $C$  から垂線  $CH$  を引くと、 $BH = \sqrt{2}$ ,  $CH = \sqrt{6}$   
 $HC = AH$  より、 $AH = \sqrt{6}$   
よって、 $AB = \sqrt{2} + \sqrt{6}$   
 $\triangle ABC$  の面積は  $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2} = \mathbf{3 + \sqrt{3}}$

## 問 11 徘徊者

### 問題

$AB = 6$ ,  $BC = 10$ ,  $CA = 8$  の  $\triangle ABC$  がある。この三角形の中に大きさの等しい円  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  が図のように接しているとき、これらの円の半径を求めよ。



この問題は図を描いてから求めます。図のように補助線を引き、 $\triangle ABP$ ,  $\triangle APR$ ,  $\triangle ACR$ , 台形BCRP を作ります。

また、円  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  の半径を  $r$  とします。ここで、 $\triangle ABC$  の面積を 2 通りの方法で表してみます。

まず三平方の定理の逆より、

$$\angle BAC = 90^\circ$$

$$\text{よって, } \triangle ABC = \frac{6 \times 8}{2} = 24$$

ここで、 $A$  から  $BC$  に交点をひき、 $BC$  との交点を  $H$  とし、 $AH$  の長さを  $h$  とすると、

$$\triangle ABP = \frac{10 \times h}{2} = 24$$

$$\text{これを解いて, } h = \frac{24}{5}$$

また、

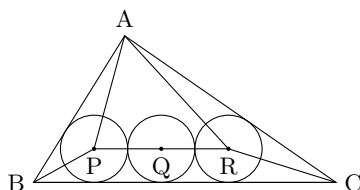
$$\triangle ABP = \frac{6 \times r}{2} = 3r$$

$$\triangle APR = \frac{8 \times r}{2} = 4r$$

$$\triangle APR = \frac{\left(\frac{24}{5}\right) \times 4r}{2} = \frac{48r}{5}$$

$$\text{台形BCRP} = \frac{(4r + 10) \cdot \frac{24}{5}}{2} = \frac{48r + 120}{5}$$

これらを足した面積が  $\triangle ABC$  の面積と等しくなるので、 $r = \frac{10}{9}$



### 3 数Ⅰ・A コース

#### 問1 物理室

問題

$\sqrt{16+6\sqrt{7}}$  を計算しなさい。

二重根号は、 $\sqrt{(a^2+b^2)}$  の形にして求めます。

$$\begin{aligned}\sqrt{16+6\sqrt{7}} &= \sqrt{16+2\sqrt{63}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9})^2 + (\sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{7} \\ &= 3 + \sqrt{7}\end{aligned}$$

#### 問2 化学室

問題

$(x-2)(4-x) > 0$  を解いたとき、解として最も適するものを①~④から1つ選べ。

$$(x-2)(4-x) > 0$$

$$-x^2 + 6x - 8 > 0$$

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$(x-2)(x-4) < 0$$

よって、解は  $2 < x < 4$

### 問 3 生物室

問題

下の  に最も適するものを①~④から 1 つ選べ。

$a, b$  が自然数であることは,  $a^2b$  が自然数であることの  。

- ① 必要十分条件である。
- ② 必要条件であるが, 十分条件でない。
- ③ 十分条件であるが, 必要条件でない。
- ④ 必要条件でも十分条件でもない。

$a, b$  が自然数  $\implies a^2b$  が自然数は真である。

$a^2b$  が自然数  $\implies a, b$  が自然数は偽である (反例  $a = \sqrt{2}, b = 1$ )。

よって,  に入るのは③

### 問 4 特別棟 4F

問題

$\angle C = 90^\circ$  の直角三角形 ABC がある。 $\sin A = \frac{\sqrt{6}}{3}$  のとき,  $\cos B$  を求めよ。

$\angle B = 90^\circ - \angle A$  であるので,

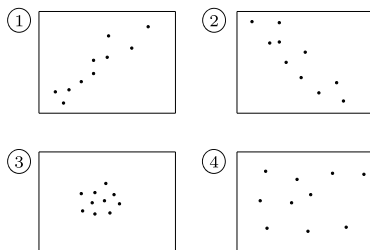
$$\begin{aligned}\cos B &= \cos(90^\circ - A) \\ &= \sin A \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

## 問 5 昇降口

### 問題

10 人の生徒に、2 つのテスト A,B を行った。すると、それぞれのテストの得点の分散、共分散は以下の表のようになった。このとき、A,B のテストの得点の散布図として、最も適するものを①～④から 1 つ選べ。

テスト A の分散	$\frac{11}{5}$
テスト B の分散	$\frac{44}{5}$
テスト A,B の共分散	4



A の標準偏差は  $\sqrt{\frac{11}{5}}$ , B の標準偏差は  $\sqrt{\frac{44}{5}}$ 。よって相関係数は、

$$\frac{4}{\sqrt{\frac{11}{5}} \cdot \sqrt{\frac{44}{5}}} = \frac{10}{11}$$

よって、相関係数が正で、正の相関があるため①が最も適する。

## 問 6 セミナーハウス

### 問題

KENKASHI の 8 文字を並べ変えたとき、2 つの K が隣り合わない確率を求めよ。

文字の並べ方はそれぞれの文字を区別すると  $8!$  通り  
 その中で、2 つの K が隣り合う並べ方は  $7! \cdot 2$  通り  
 よって、求める確率は

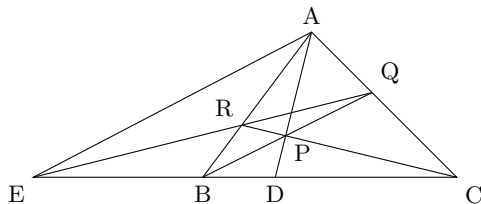
$$1 - \frac{7! \cdot 2}{8!} = \frac{3}{4}$$



## 問 7 体育館

### 問題

下の図において、D は BC を 2 : 5 に内分している。BD = 6 のとき、EC を求めよ。



チェバの定理より,

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

メネラウスの定理より,

$$\frac{BE}{EC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} &= \frac{5}{2} \\ \frac{BE}{EC} &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

BE : EC = 2 : 5 より, BC = 21

よって, BE : EC = 2 : 5 なので, EC = **35**

## 問 8 本部前

### 問題

自然数  $m, n$  ( $m \neq 10, n \neq 1$ ) が

$$m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$$

を満たしているとき,  $m, n$  を求めよ。

因数分解して、999 の約数から場合分けする方法もありますが、とっても簡単に解く方法（知識）があります。詳しいエピソードは割愛します（タクシー数などと検索すれば分

かると思います) が、 $12^3 + 1 = 1729 = 10^3 + 9^3$  と 1729 は 2 通りの立方の和で表される最小の数です。

これを知っていれば、すぐに  $m = 12, n = 9$  と分かります。

## 問 9 水道前

問題

$x, y$  を実数とすると、 $x^2 + 4xy + 5y^2 - 2y + 3$  の最小値を求めよ。

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - 2y + 3 = (x + 2y)^2 + y^2 - 2y + 3$$

このとき、 $x = -2y$  のときに最小値  $y^2 - 2y + 3$  をとることが分かります。そのため、 $y^2 - 2y + 3$  の最小値を求めると、

$$y^2 - 2y + 3 = (y - 1)^2 + 2$$

よって、 $y = 1$  のときに最小値 **2** をとる。

## 問 10 屋上入口

問題

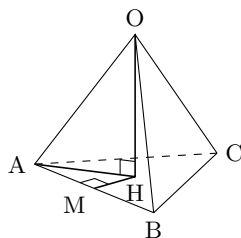
半径  $a$  の球に外接する正四面体の体積を求めよ。

正四面体の一辺の長さを  $b$  とおく。すると、各面は一辺が  $b$  の正三角形だから面積は、

$$\begin{aligned} S &= b \times \frac{\sqrt{3}}{2} b \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \end{aligned}$$

右のように  $H, M$  をおくと、 $\triangle AHM$  は 3 つの角が  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  の直角三角形だから、

$$\begin{aligned} AH &= \frac{b}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} b \end{aligned}$$



△AHO で三平方の定理を用いると、正四面体の高さは

$$\begin{aligned} OH^2 &= OA^2 - AH^2 \\ &= b^2 - \frac{1}{3}b^2 \\ &= \frac{2}{3}b^2 \\ OH &= \frac{\sqrt{6}}{3}b \end{aligned}$$

よって正四面体の体積は

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3 \quad (1)$$

また、図のように 4 つに分割して考えると、正四面体の体積は底面積  $S$ 、高さ  $a$  の三角錐 4 つの体積に等しいから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \times a \times \frac{1}{3} \times 4 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}ab^2 \end{aligned} \quad (2)$$

(1), (2) を連立させて、体積は  $8\sqrt{3}a^3$

## 問 11 徘徊者

問題

$n^2$  を 120 で割ると 1 余るような 120 以下の自然数  $n$  はいくつあるか。

$$n^2 = 120k + 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5k + 1 \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表せる。よって、 $n^2$  を 8, 3, 5 で割るとそれぞれの余りが 1 であればよい。

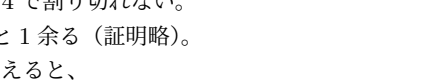
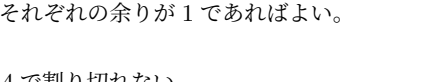
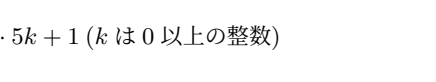
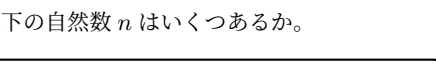
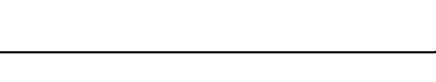
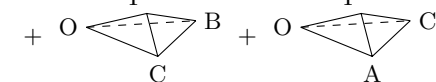
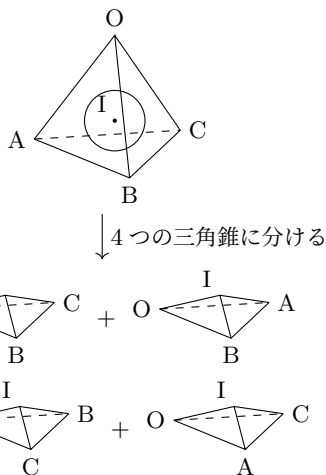
$n^2$  は奇数であるため、 $n$  も奇数である。

また、 $n^2$  は 8 で割り切れないので、 $n^2$  は 4 で割り切れない。

このとき、 $n$  が奇数ならば  $n^2$  を 8 で割ると 1 余る (証明略)。

ここで、奇数かつ 3 で割ると 1 余る数を考えると、

$$n = 6a + 1, 6a + 5 \quad (a \text{ は整数})$$



と表せる。また、5で割って1余る数を考えると、

$$n = 5b + 1, 5b + 4 \text{ (} b \text{ は整数)}$$

と表せる。 $n = 6a + 1$  のとき、 $n = 5a + (a + 1)$  なので、

$$a + 1 = 5c + 1, 5c + 4 \text{ (} c \text{ は 0 以上の整数)}$$

よって、 $n = 30c + 1, 30c + 19$

$n = 6a + 5$  のとき、 $n = 5(a + 1) + a$  なので、 $a = 5c + 1, 5c + 4$

よって、 $n = 30c + 11, 30c + 29$

この4式のいずれかを満たせばよいので、 $n$ の個数は $4 \times 4 = \mathbf{16}$ 個

## 4 数Ⅱ・B コース

### 問 1 物理室

掲載していた問題内容に誤りがありました。以下は正しい問です。ご迷惑おかけしました。

問題

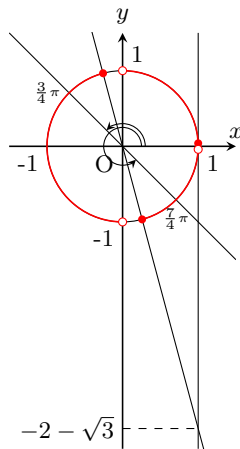
$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、 $\tan \theta \geq -2 - \sqrt{3}$  の範囲を以下の選択肢から選べ。

- ①  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{17}{18}\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi, \frac{35}{18}\pi \leq \theta < 2\pi$
- ②  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{23}{36}\pi, \frac{3}{2}\pi < \theta \leq \frac{59}{36}\pi$
- ③  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{17}{18}\pi, \frac{3}{2}\pi < \theta \leq \frac{35}{18}\pi$
- ④  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi, \frac{19}{12}\pi \leq \theta < 2\pi$

不等式の示す概形は右の図の赤色の部分のようになる。②、③は  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を含んでいないため、不適。

①は  $\frac{3}{4}\pi < \frac{17}{18}\pi$  より、不適。

よって正解は④



## 問 2 化学室

問題

定義に従って、関数  $f(x) = 4x$  の導関数を求めよ。

導関数の定義より、

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h) - 4x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} \\ &= 4\end{aligned}$$

## 問 3 生物室

問題

以下の数列の□に入る、最も適当な数を答えよ。

$$2, 3, 7, 16, 32, \square, 93, \dots$$

この数列は階差数列  $b_n$  が  $b_n = n^2$  となっている。よってもとの数列の第 6 項は、

$$32 + 5^2 = 57$$

## 問 4 特別棟 4F

問題

$a > -3$  のとき、 $\frac{a^3 + 6a + 18}{a + 3}$  の最小値と、そのときの  $a$  の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\frac{a^3 + 6a + 18}{a + 3} &= \frac{(a + 3)^2 + 9}{a + 3} \\ &= a + 3 + \frac{9}{a + 3}\end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の関係より,

$$a+3+\frac{9}{a+3} \geq 2\sqrt{(a+3) \cdot \frac{9}{a+3}}$$

$$a+3+\frac{9}{a+3} \geq 2\sqrt{9}$$

$$a+3+\frac{9}{a+3} \geq 6$$

最小値は  $a+3 = \frac{9}{a+3}$  のときなので,

$$a+3 = \frac{9}{a+3}$$

$$(a+3)^2 = 9$$

$$a+3 = \pm 3$$

$$a = 0 \quad (\because a > -3)$$

よって,  $a = 0$  のとき, 最小値 **6**

## 問 5 昇降口

問題

$xy$  平面上の 3 点  $(1, 2), (2, 1), (p, q)$  の重心が  $(8, 5)$  のとき,  $p$  と  $q$  の和を求めよ。

重心の  $x$  座標は,

$$\frac{1+2+p}{3} = 8$$

$$p = 8 \cdot 3 - 3 = 21$$

重心の  $y$  座標は,

$$\frac{2+1+q}{3} = 5$$

$$q = 5 \cdot 3 - 3 = 12$$

よって  $p+q = 21+12 = \mathbf{33}$

## 問 6 セミナーハウス

問題

平行な 2 直線  $4x - 3y + 3 = 0, 4x - 3y - 1 = 0$  の距離を求めよ。

$4x - 3y + 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$ ,  $4x - 3y - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$  とおく。すると、2 直線の距離は①上の任意の点と②の直線の距離である。①上の点を  $(0, 1)$  とすると、2 直線の距離は

$$\frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-4|}{5} = \frac{4}{5}$$

## 問 7 体育館

問題

$\log_2 9$ ,  $\log_4 3$ ,  $\log_3 3$ ,  $0.4$  を小さい順に並べたとき、3 番目に来るものを答えよ。

$$\log_3 3 = 1$$

$$\log_2 8 = 3 \text{ より, } \log_2 9 \geq 3$$

$$\log_4 4 = 1 \text{ より, } \log_4 3 \leq 1$$

よって 3 番目は  $\log_3 3$

## 問 8 本部前

問題

次の曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$f(x) = x^2 - 6x$$

$f(x) = 0$  の解は、 $x = 0, 6$ 、また、領域は  $x$  軸の下側にある。よって面積は、

$$\begin{aligned} - \int_0^6 (x^2 - 6x) dx &= - \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{6}{2} x^2 \right]_0^6 \\ &= - \left( \frac{1}{3} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 \right) \\ &= -(72 - 108) \\ &= \mathbf{36} \end{aligned}$$



## 問 9 水道前

問題

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で表される数列はどのような数列か。

答. フィボナッチ数列, Fibonacci series, 美しい数列 など

別解

特性方程式  $x^2 = x + 1$  の解  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  をそれぞれ  $\alpha, \beta$  とすると,

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

となる。 $a_{n+1} - \alpha a_n$  は初項  $a_2 - \alpha a_1 = 1 - \alpha$ 、公比  $\beta$  の等比数列だから,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= (1 - \alpha)\beta^{n-1} \\ &= \beta^n \quad (\because 1 - \alpha = \beta) \end{aligned} \tag{1}$$

同様に  $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$  だから,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \beta a_n &= (1 - \beta)\alpha^{n-1} \\ &= \alpha^n \quad (\because 1 - \beta = \alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

(2) - (1) より,

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)a_n &= \alpha^n - \beta^n \\ a_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

よって, 一般項が  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$  である数列。

## 問 10 屋上入口

問題

関数  $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$  を微分せよ。

$y = (3x + 1)^{\frac{1}{3}}$ ,  $u = 3x + 1$  とすると,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} \left( u^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{d}{dx} (3x + 1) \\ &= \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 \\ &= (3x + 1)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{(3x + 1)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

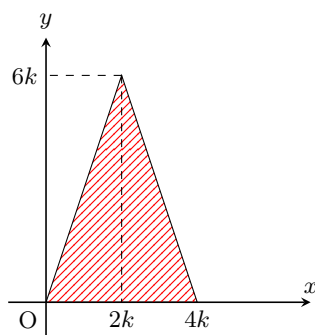
## 問 11 徘徊者

### 問題

座標平面上で、 $x$  座標、 $y$  座標ともに整数である点を格子点という。座標平面上で、3つの不等式  $y \geq 0$ ,  $y \leq 3x$ ,  $y \leq -3x + 12k$  ( $k$  は自然数) によって表される領域に含まれる格子点の個数を  $k$  を用いて表すと整数  $a, b, c$  を用いて  $ak^2 + bk + c$  となる。 $a, b, c$  の和を求めよ。

3 直線  $y = 0 \cdots \textcircled{1}$ ,  $y = 3x \cdots \textcircled{2}$ ,  
 $y = -3x + 12k$  ( $k$  は自然数)  $\cdots \textcircled{3}$  について、 $\textcircled{1}$  と  $\textcircled{2}$  の交点の座標は  $(0, 0)$ ,  $\textcircled{1}$  と  $\textcircled{3}$  の交点の座標は  $(4k, 0)$ ,  $\textcircled{2}$  と  $\textcircled{3}$  の交点の座標は  $(2k, 6k)$  であるから、 $y \geq 0$ ,  $y \leq 3x$ ,  $y \leq -3x + 12k$  によって表される領域  $D$  は、3 点  $(0, 0)$ ,  $(2k, 6k)$ ,  $(4k, 0)$  を頂点とする三角形の周および内部である (右図の赤色部分で境界を含む)。

整数  $j$  が  $0 \leq j \leq 2k$  を満たすとき、 $D$  に含まれる格子点座標が  $0$  以上  $2k$  以下である点の個数  $q$  を  $k$  を用いて表すと



$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{j=0}^{2k} (3j + 1) \\
 &= 1 + \sum_{j=1}^{2k} (3j + 1) \\
 &= 1 + 3 \sum_{j=1}^{2k} j + \sum_{j=1}^{2k} 1 \\
 &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2k(k + 1) + 2k \\
 &= 6k^2 + 5k + 1
 \end{aligned}$$

である。さらに、 $D$  に含まれる格子点で  $x$  座標が  $(2k + 1)$  以上  $4k$  以下である点の個数を求めて  $q$  に加えれば、 $D$  に含まれる格子点の数が求まる。直線  $2k$  に対して対称である

ことを利用すれば

$$\begin{aligned}q &= q + \{q - (x = 2k \text{ 上にある } D \text{ に含まれる格子点個数})\} \\&= 2q - \{(2k, 0), (2k, 1), \dots, (2k, 6k) \text{ の } 6k + 1 \text{ 個}\} \\&= 2(6k^2 + 5k + 1) - (6k + 1) \\&= 12k + 4k + 1\end{aligned}$$

よって  $a = 12, b = 4, c = 1$  なので,  $a + b + c = 17$

## 5 数Ⅲ・C コース

### 問 1 物理室

問題

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = 4$  のとき, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ。

$|\vec{a} + \vec{b}| = 4$  より,

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$  を代入して,

$$2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$$

$$\text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{6}{1} = 6$$

### 問 2 化学室

問題

無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$  の和を求めよ。

第  $n$  項までの部分和を  $S$  とすると,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)}$$

これを計算して,

$$S_n = \frac{1}{3} \left( \frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( \frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{18}\end{aligned}$$

よってこの無限級数の和は  $\frac{11}{18}$

### 問 3 生物室

問題

$xy$  平面上の楕円  $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$  の焦点の座標を求めよ。

楕円  $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \cdots \textcircled{1}$  は、楕円  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \cdots \textcircled{2}$  を  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $2$  だけ平行移動したものである。 $\sqrt{4-3}=1$  より、 $\textcircled{2}$  の焦点の座標は

$$(0, 1), (0, -1)$$

よって、 $\textcircled{1}$  の焦点の座標は

$$(-1, 3), (-1, 1)$$

### 問 4 特別棟 4F

問題

行列  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  に対して、 $A^2$  を  $pA + qE$  ( $p, q$ : 定数) の形で表せ。

行列  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  において、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - (4+2)A + (4 \cdot 2 - 3 \cdot 1)E = 0$$

$$A^2 - 6A + 5E = 0$$

よって、 $\underline{A^2 = 6A - 5E}$

## 問 5 昇降口

問題

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$  を計算して♡

$t = -x$  とすると,  $x = -t$  であり,  $x \rightarrow -\infty$  のとき,  $t \rightarrow \infty$  だから,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t} - t) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - t} - t)(\sqrt{t^2 - t} + t)}{\sqrt{t^2 - t} + t} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - t) - t^2}{\sqrt{t^2 - t} + t} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2 - t} + t} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t}} + 1} \\&= \frac{-1}{\sqrt{1} + 1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

## 問 6 セミナーハウス

問題

$p$  を素数としたとき,  $2p + 1$ ,  $4p + 1$  がいずれも素数であるような  $p$  の値をすべて求めよ。

$p$  は素数であることから, 2 以上の整数である。よって,  $p$  は正の整数  $n$  を用いて,  $p = 3n$ ,  $p = 3n + 1$ ,  $p = 3n - 1$  のいずれかで表される。

- $p = 3n$  のとき  
 $p$  が素数となるのは  $n = 1$  のとき, つまり  $p = 3$  のときのみである。このとき,  $2p + 1 = 7$ ,  $4p + 1 = 13$  はともに素数だから, 条件を満たす。
- $p = 3n + 1$  のとき  
 $2p + 1 = 2(3n + 1) + 1 = 3(2n + 1)$  と表され,  $n \geq 1$  より  $2n + 1 > 1$  だから,  $2p + 1$  は 3 より大きい 3 の倍数で, 素数ではない。  
よって,  $p = 3n + 1$  は条件を満たさない。
- $p = 3n - 1$  のとき

$4p + 1 = 4(3n - 1) + 1 = 3(4n - 1)$  と表され、 $n \geq 1$  より  $4n - 1 > 1$  だから、 $4n + 1$  は 3 より大きい 3 の倍数で、素数ではない。

よって、 $p = 3n - 1$  は条件を満たさない。

以上から、条件を満たす  $p$  の値は  $p = 3$  のみである。

## 問 7 体育館

### 問題

3 円切手と 8 円切手がたくさんあります。これらを用いて作ることのできない金額は何種類あるか。

$N$  を 0 以上の整数とする。作りたい金額を  $N$  円とすると、 $N$  は 0 以上の整数  $k$  を用いて  $N = 3k, 3k + 1, 3k + 2$  のいずれかで表すことができる。

- $N = 3k$  のとき

3 円切手を  $k$  枚使えば、すべての  $N$  をつくることができる。

- $N = 3k + 1$  のとき

$k \geq 5$  ( $N = 16, 19, 22, \dots$ ) の場合は、3 円切手  $(k - 5)$  枚と 8 円切手 2 枚を使えば、すべての  $N$  をつくることができる。

$k = 0$  (すなわち  $N = 1$ ) の場合にはつくることできない。

以下同様に、 $k = 1$  ( $N = 4$ )、 $k = 2$  ( $N = 7$ )、 $k = 3$  ( $N = 10$ )、 $k = 4$  ( $N = 13$ ) の場合もつくることできない。

- $N = 3k + 2$  のとき

$k \geq 2$  ( $N = 8, 11, 14, \dots$ ) の場合は 3 円切手  $(k - 2)$  枚と 8 円切手 1 枚を使えば、すべての  $N$  をつくることができる。

$k = 0$  ( $N = 2$ )、 $k = 1$  ( $N = 5$ ) の場合はつくることできない。

以上から、つくることのできない金額は、1 円、2 円、4 円、5 円、7 円、10 円、13 円  
よって 個数は 7 個

## 問 8 本部長

### 問題

二次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  ( $a, b$ : 実数) の 2 つの解  $\alpha, \beta$  が  $|\alpha| \leq 1$  かつ  $|\beta| \leq 1$  を満たすとき、点  $(a, b)$  の存在範囲の領域の面積を求めよ。

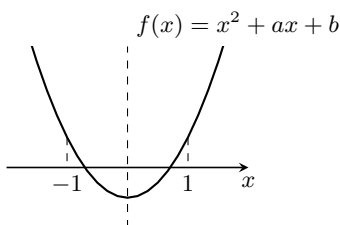
与えられた方程式は実数係数の 2 次方程式あるから、 $\alpha, \beta$  は、ともに実数、ともに虚数のいずれかである。

(i) ともに実数の場合 判別式  $D$  について,

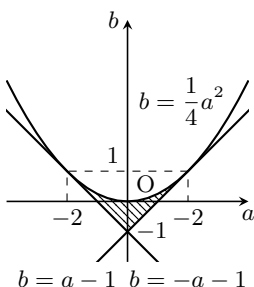
$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b \geq 0 \text{ より, } b \leq \frac{1}{4}a^2$$

このとき,  $-1 \leq x \leq 1$  で 2 つの解をもつ条件は,  $f(x) = x^2 + ax + b$  について,

$$\begin{aligned} -1 &\leq -\frac{a}{2} \leq 1, \\ 2 &\geq a \geq -2 \\ f(1) = 1 + a + b &\geq 0, \\ b &\geq -a - 1 \\ f(-1) = 1 - a + b &\geq 0, \\ b &\geq a - 1 \end{aligned}$$



$$\text{したがって, } \begin{cases} b \leq \frac{1}{4}a^2 \\ -2 \leq a \leq 2 \\ b \geq -a - 1 \\ b \geq a - 1 \end{cases}$$



(ii) ともに虚数の場合 判別式  $D$  について,

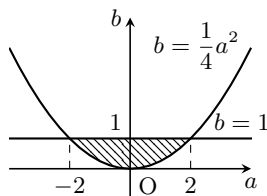
$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b < 0 \text{ より, } b > \frac{1}{4}a^2$$

このとき, 虚数解  $\alpha, \beta$  は共役複素数どうしであるから実数  $p, q$  を用いて,  $\alpha = p + qi$ ,  $\beta = p - qi$  と表せる。すると,

$$\begin{aligned} |\alpha| = |\beta| &= \sqrt{(p + qi)(p - qi)} = \sqrt{p^2 + q^2} \leq 1 \\ p^2 + q^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

また, 解と係数の関係から,

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (p + qi)(p - qi) \\ &= p^2 + q^2 = b \text{ より,} \\ 0 &\leq b \leq 1 \end{aligned}$$

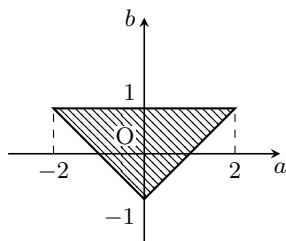




したがって、
$$\begin{cases} b > \frac{1}{4}a^2 \\ 0 \leq b \leq 1 \end{cases}$$

よって、(i)、また (ii) より、右の図の斜線部分で境界を含む。よってこの領域の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$



## 問 9 水道前

問題

方程式  $x^3 = k(x+1)^2$  が相異なる 3 つの実数解を持つような定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

$x = -1$  は方程式を満たさない。

よって、 $x \neq -1$  のとき、方程式は 
$$\frac{x^3}{(x+1)^2} = k$$

求める実数解の個数は、関数  $\frac{x^3}{(x+1)^2}$  のグラフと直線  $y = k$  との共有点の個数に等しい。

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (x \neq -1) \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -3, 0$$

$f(x)$  の増減表は右のようになる。

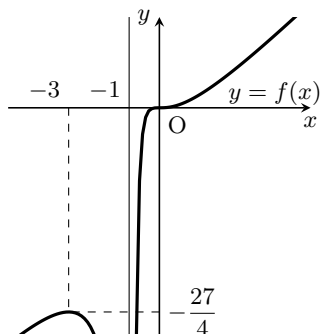
$$\text{また } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

よって、 $y = f(x)$  のグラフは右の図のようになる。

直線  $y = k$  との共有点の個数を調べると、方程式  $x^3 = k(x+1)^2$  が相異なる 3 つの実数解を持つよう

な  $k$  の値の範囲は  $k < -\frac{27}{4}$

$x$	$\cdots$	$-3$	$\cdots$	$-1$	$\cdots$	$0$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$\times$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{27}{4}$	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$



## 問 10 屋上入口

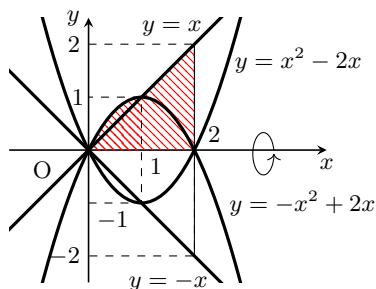
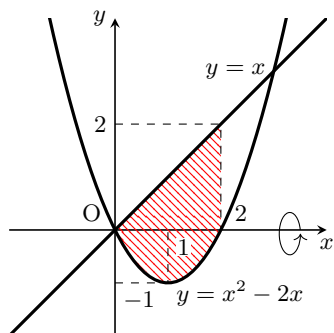
### 問題

連立不等式  $y \geq x^2 - 2x$ ,  $y \leq x$ ,  $x \leq 2$  の表す領域を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ。

連立不等式  $y \geq x^2 - 2x$ ,  $y \leq x$ ,  $x \leq 2$  の表す領域は右の図の斜線部分である。

この部分の周りの回転体は、右下の図の斜線部分の回転体と同じである。したがって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (-x^2 + 2x)^2 dx + \pi \int_1^2 x^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx + \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \pi \left[ \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 + \pi \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \pi \left( \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) + \frac{7}{3}\pi = \frac{43}{15}\pi \end{aligned}$$



## 問 11 徘徊者

問題

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$  の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ (\sin^2 x)^{\tan^2 x} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ (1 - \cos^2 x)^{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} \right\}^{\frac{1}{2}(1 - \cos^2 x)}\end{aligned}$$

ここで、 $\cos^2 x = t$  とおくと、

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} \right\}^{\frac{1}{2}(1 - \cos^2 x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1 - t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{\frac{1}{2}(1 - t)} \\ &= \left( \frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$