目次

1　小学生コース

問 1 物理室

問題

とある学校には A 棟と B 棟があり，両棟合わせて 54 教室あります。A 棟は B 棟よりも 4 教室多いです。また，B 棟の特別教室の数は B 棟の 24% を占めます。B 棟の特別教室は何室あるか答えなさい。

まずは，A 棟の教室数を a，B 等の教室数を b とおきます。すると，

$$a + b = 54 \tag{1}$$
$$a = b + 4 \tag{2}$$

と書けます。(2) を (1) に代入して，

$$\begin{aligned}(b+4) + b &= 54 \\ 2b+ &= 54 - 4 \\ b &= 25\end{aligned}$$

よって，B 棟の教室数は 25 棟とわかりました。B 棟の特別教室はこの 24% なので，

$$25 \times \frac{24}{100} = 6 \qquad \underline{\text{答え. 6 室}}$$

問 2 化学室

問題

$$0,\ 1,\ \frac{5}{3},\ 1\frac{2}{9},\ 1\ \text{割}\ 2\ \text{分}$$

大きい順に並べましょう。

このままでは比べられないので，小数に変換しましょう。

$\frac{5}{3} = 1.66\ldots$, $1\frac{2}{9} = 1.22\ldots$, 1 割 2 分 $= 1.2$ なので，

0	1	$\frac{5}{3}$	$1\frac{2}{9}$	1 割 2 分
0	1	1.66...	1.22...	1.2

このように対応します。よって答えは,

$$\underline{\frac{5}{3},\ 1\frac{2}{9},\ 1\text{割}2\text{分},\ 1,\ 0}$$

問 3 生物室

問題

時刻が 9 月 10 日深夜 1 時 20 分です。30 分前は，何時何分でしょう。

9 月 10 日深夜 1 時 20 分の 20 分前は 9 月 10 日深夜 1 時 00 分になります。そこからさらに 10 分前は 9 月 10 日深夜 0 時 50 分です。よって，　答え．0 時 50 分

問 4 特別棟 4 階

問題

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \cdots$$

上の数列はある規則に沿って並んでいます。30 番目の数はいくつでしょう。

この数列は，数字がその数字の数だけ並んで続いていきます。よって書き出すと,

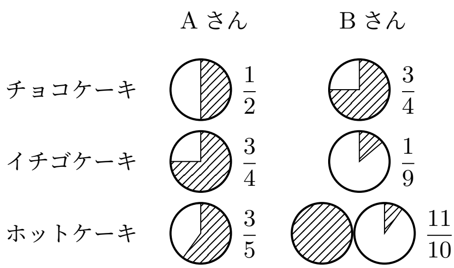
$$\begin{gathered}1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,\\ 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6,\\ 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8\end{gathered}$$

となるので，　答え．8

問 5 昇降口

問題

A さんと B さんの取ったケーキの分量の差はいくらでしょう。ただし，ケーキの大きさはどの種類も同じとします。



通分して，分数の足し算・引き算をしましょう。

Aさん

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\\
=&\frac{10}{20}+\frac{15}{20}+\frac{12}{20}\\
=&\frac{37}{20}
\end{aligned}
$$

Bさん

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{4}+\frac{1}{9}+\frac{11}{10}\\
=&\frac{135}{180}+\frac{20}{180}+\frac{198}{180}\\
=&\frac{353}{180}
\end{aligned}
$$

2人の分量の差は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{353}{180}-\frac{37}{20}\\
=&\frac{353}{180}-\frac{333}{180}\\
=&\frac{20}{180}\\
=&\frac{1}{9} \qquad \underline{答え．\frac{1}{9}}
\end{aligned}
$$

問6 セミナーハウス

問題

A空港とB空港の間は5100 km 離れています。その間を時速900 km の飛行機で移動すると，何時間何分かかるでしょう。

距離と速さがわかっていて，時間を求める問題です。「み・は・じ」[*1]を使って解くと，

$$\frac{5100}{900}=\frac{17}{3}=5+\frac{2}{3} \quad [時間]$$

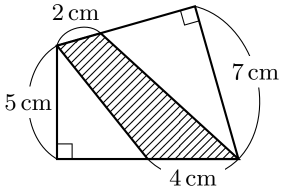
$\frac{2}{3}$ 時間は40分なので，　　<u>答え．5時間40分</u>

*1 み は|じ。「き・は・じ」や「は・じ・き」と言ったりもする。

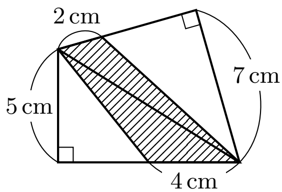
問 7 体育館

問題

斜線部の面積を求めましょう。



右の図のように補助線を引きます。すると，底辺が 2，高さが 7 の三角形と底辺が 4，高さが 5 の三角形に分けることができます。よって面積は,



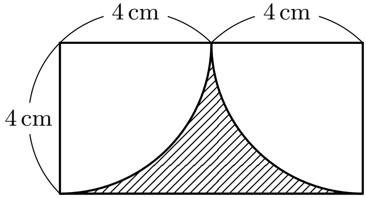
$$
\begin{aligned}
2 \times 7 \div 2 + 4 \times 5 \div 2 &= 7 + 10 \\
&= 17
\end{aligned}
$$

答え. $17\,\mathrm{cm}^2$

問 8 本部前

問題

斜線部の面積を求めましょう。ただし，円周率は 3.14 とする。



斜線部の面積は，$4\,\mathrm{cm} \times 8\,\mathrm{cm}$ の長方形から半径 $4\,\mathrm{cm}$ の半円を引いたものに等しいので,

$$
4 \times 8 - 4 \times 4 \times 3.14 \div 2 = 32 - 25.12 = 6.88
$$

答え. $6.88\,\mathrm{cm}^2$

問 9 水道前

問題

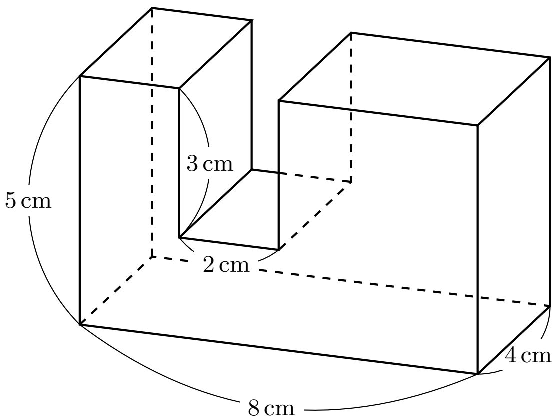
仕入れた状態で 300 円の洋服を 20% の利益をつけて売りたい。この洋服を何円で売ればよいだろうか。

300 円の洋服に 20% の利益をつけるので，利益は $300 \times \dfrac{20}{100} = 60$ 円。
売値は原価 + 利益なので，$300 + 60 = 360$　　答え．360 円

問 10 屋上入口

問題

次の立体の体積を求めましょう。



このような立体の体積は底面積×高さで求めることができます（同じ形の板がたくさん重なっているイメージ）。この問題では底面は手前に向いている面です。
底面積は 5×8 の長方形から 2×3 の長方形を引いたものなので，

$$\begin{aligned}(5 \times 8 - 2 \times 3) \times 4 &= 34 \times 4 \\ &= 136\end{aligned}$$

答え．$136\,\mathrm{cm}^3$

問 11 徘徊者

問題

81 をある 1 より大きい整数で割ると，小数の部分のどこかに 1995 という数の並びが現れました。このような整数のうち，最も小さいものを求めましょう。

求める数を x とおきます。$\dfrac{81}{x} = \cdots . \cdots 1995 \cdots$
小数を $10, 100$ 倍していくと小数点を右にずらせる。さらに整数部分を引くと，

$$\frac{a}{x} = 0.1995\cdots (a \text{ は 1 以上の整数})$$

まず，これを満たす x を見つける。

$$0.1995 \leqq \frac{a}{x} \leqq 0.1996$$

5 倍して，1 から引くと，

$$0.002 \leqq \frac{b}{x} \leqq 0.0025 \quad (b = x - a)$$

これを変形して，

$$400b \leqq x \leqq 500b$$

このとき，x の最小値を求めればいいので，$b = 1$ の時を考える。
$x = 400$ のとき，0.205 となる。
$x = 401$ のとき，$0.201995\cdots$ となり，条件を満たす。よって 答え. 401

2 中学生コース

問 1 物理室

問題

-2^2 を計算しなさい。

指数の 2 は -2 の中の 2 のみにかかっているので，答えは

$$\begin{aligned} -2^2 &= -(2^2) \\ &= -(2 \times 2) \\ &= \mathbf{-4} \end{aligned}$$

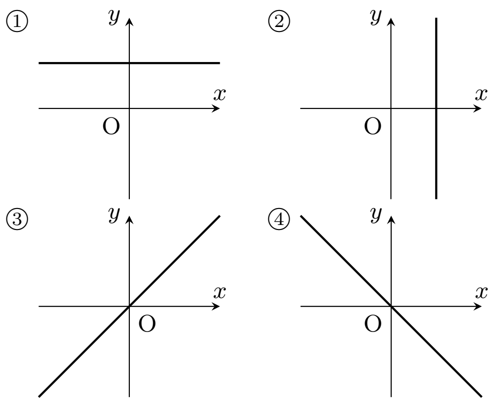
ちなみに $(-2)^2$ の指数 2 は，(-2) 全体にかかっているので，

$$
\begin{aligned}
(-2)^2 &= (-2) \times 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

問 2 化学室

問題

次の中で関数 $y = x$ のグラフとして最も適するものを①~④の中から一つ選びなさい。



解法① 表を作って考える

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

これらの点を通るのは，**③**のグラフ。

解法② $y = x$ のグラフはどのようなグラフになるのか考える

$y = x$ は比例定数 1 の比例の関係になっている。比例のグラフは原点を通る直線なので，条件を満たすのは**③**のグラフ。

問 3 生物室

問題

次のデータは，生徒 8 人のテストの結果を得点が低い順に並べたものである。このとき，中央値（メジアン）の値を求めなさい。

No.	1	2	3	4	5	6	7	8
得点	53	57	65	66	68	69	78	82

中央値（メジアン）はデータを小さい順に並べたものの中で真ん中にあたるものです。データの数は偶数で真ん中が 2 つ出てくるので，2 つの値（得点）の平均を取ります。よって，$\dfrac{66+68}{2} = \mathbf{67}$ **点**となります。

問 4 特別棟 4F

問題

大小 2 つのサイコロをそれぞれ 1 回振るとき，出目の積が偶数になる確率を求めなさい。ただし，サイコロの出目は同様に確からしいものとする。

サイコロを 2 個振る問題は 6×6 の表を使って考えます。表を作ると，

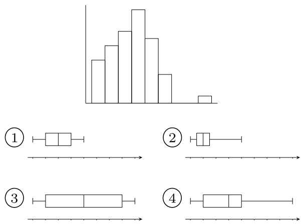
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

となり，この中で偶数は 27 つあるので，求める確率は，$\dfrac{27}{36} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$ となります。

問 5 昇降口

問題

次のヒストグラム（柱状図）と同じデータを用いて表された箱ひげ図として最も適するものを①~④の中から一つ選びなさい。



箱ひげ図は，最大値，最小値，第◯四分位数に注目します。最大値より，①,②は間違いです。また，第 3 四分位数より，③は間違いです。
よって，正しい箱ひげ図は**④**です。

問 6 セミナーハウス

問題

$(x-3)^2 = 2$ を解きなさい。

二次方程式の解き方はいくつかありますが，今回は普段使わない平方完成 $\big((x-a)^p$の形にすること$\big)$ を使います。それぞれの根 ($\sqrt{\ }$) をとって，

$$\begin{aligned}(x-3)^2 &= 2\\ x-3 &= \pm\sqrt{2}\\ x &= \mathbf{3 \pm \sqrt{2}}\end{aligned}$$

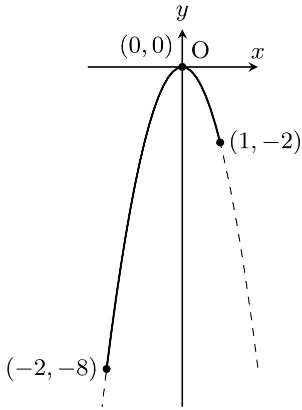
平方完成は二次方程式の解の公式の証明に使うので，覚えておくといいかもしれません。

問 7 体育館

問題

関数 $y = -2x^2$ において，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域を求めなさい。

この問題は，グラフを描いて求めます。実際に描くと，右のようになります。
よって，この時の y の最大値は 0，y の最小値は -8 となるので，求める範囲は $\boldsymbol{-8 \leqq y \leqq 0}$



問 8 本部前

問題

関数 $y = \dfrac{a}{x}$ について，x が 2 から 6 まで増加するときの y の増加量が 1 であった。このとき，a の値を求めなさい。

この問題では，a の値を求める問題なので，a に関する方程式を作ります。
また，増加量は，増加後の値 − 増加前の値で求められるので，

$$\frac{a}{6} - \frac{a}{2} = 1$$

という方程式が成り立ちます。この方程式を解いて，$a = \boldsymbol{-3}$

問 9 水道前

問題

$\dfrac{(11^4-2^2)(4^4-1^2)}{(44^2-11^2)+2(4^2-1^2)}$ を計算しなさい。

このままでも計算できますが，累乗が多くあるので，因数分解，約分を駆使して簡単にすることができます。特に和と差の積 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ が使えることが多いです。

$$\begin{aligned}\frac{(11^4-2^2)(4^4-1^2)}{(44^2-11^2)+2(4^2-1^2)} &= \frac{(11^4-2^2)(4^4-1^2)}{11^2(4^2-1^2)+2(4^2-1^2)}\\ &= \frac{(11^2+2)(11^2-2)(4^2+1)(4^2-1)}{(11^2+2)(4^2-1^2)}\\ &= (11^2-2)(4^2+1)\\ &= 119\times 17\\ &= \mathbf{2023}\end{aligned}$$

この問題では 2023 を扱った問題でしたが，2023/9/18 現在で中 3 の人は 2024，中 2 の人は 2025...を扱った問題が高校入試で出ると考えられます。そのため，それぞれの年に対応する素因数分解した形，そして学年ごとに関係なく 11^2 から 20^2 までは覚えておきましょう。

問 10 屋上入口

問題

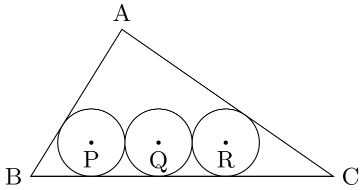
$\triangle$ABC が半径 2 の円に内接している。$\angle A=45^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=75^\circ$ であるとき，$\triangle$ABC の面積を求めなさい。

円の中心を O とすると，$OB=OC=2$ なので，$BC=2\sqrt{2}$
C から垂線 CH を引くと，　$BH=\sqrt{2}$，$CH=\sqrt{6}$
$HC=AH$ より，　$AH=\sqrt{6}$
よって，　$AB=\sqrt{2}+\sqrt{6}$
$\triangle$ABC の面積は　$\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}=\mathbf{3+\sqrt{3}}$

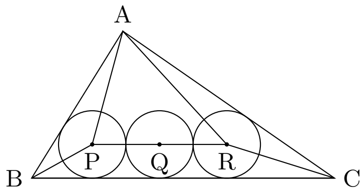
問 11 徘徊者

問題

AB $=6$, BC $=10$, CA $=8$ の △ABC がある。この三角形の中に大きさの等しい円 P, Q, R が図のように接しているとき，これらの円の半径を求めよ。



この問題は図を描いてから求めます。図のように補助線を引き, △ABP, △APR, △ACR, 台形BCRP を作ります。
また，円 P, Q, R の半径を r とします。ここで，△ABC の面積を 2 通りの方法で表してみます。



まず三平方の定理の逆より,

$$\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$$

よって，　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{6 \times 8}{2} = 24$

ここで，A から BC に交点をひき，BC との交点を H とし，AH の長さを h とすると,

$$\triangle \mathrm{ABP} = \frac{10 \times h}{2} = 24$$

これを解いて,　$h = \dfrac{24}{5}$

また,

$$\triangle \mathrm{ABP} = \frac{6 \times r}{2} = 3r$$

$$\triangle \mathrm{APR} = \frac{8 \times r}{2} = 4r$$

$$\triangle \mathrm{APR} = \frac{(\frac{24}{5}) \times 4r}{2} = \frac{48r}{5}$$

$$台形\mathrm{BCRP} = \frac{(4r + 10) \cdot \frac{24}{5}}{2} = \frac{48r + 120}{5}$$

これらを足した面積が △ABC の面積と等しくなるので，$r = \boldsymbol{\dfrac{10}{9}}$

3　数 I・A コース

問 1 物理室

問題

$\sqrt{16+6\sqrt{7}}$ を計算しなさい。

二重根号は，$\sqrt{(a^2+b^2)}$ の形にして求めます。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{16+6\sqrt{7}} &= \sqrt{16+2\sqrt{63}} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{9}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} \\
&= \sqrt{9}+\sqrt{7} \\
&= \mathbf{3}+\boldsymbol{\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

問 2 化学室

問題

$(x-2)(4-x)>0$ を解いたとき，解として最も適するものを①~④から 1 つ選べ。

$$
\begin{aligned}
(x-2)(4-x) &> 0 \\
-x^2+6x-8 &> 0 \\
x^2-6x+8 &< 0 \\
(x-2)(x-4) &< 0
\end{aligned}
$$

よって，解は $\boldsymbol{2<x<4}$

問 3 生物室

問題

下の $\boxed{}$ に最も適するものを①~④から 1 つ選べ。
a,b が自然数であることは，a^2b が自然数であることの $\boxed{}$ 。

① 必要十分条件である。
② 必要条件であるが，十分条件でない。
③ 十分条件であるが，必要条件でない。
④ 必要条件でも十分条件でもない。

a, b が自然数 $\Longrightarrow$ a^2b が自然数は真である。
a^2b が自然数 $\Longrightarrow$ a, b が自然数は偽である（反例 $a = \sqrt{2}$, $b = 1$）。
よって，$\boxed{}$ に入るのは**③**

問 4 特別棟 4F

問題

$\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。$\sin A = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，$\cos B$ を求めよ。

$\angle \mathrm{B} = 90^\circ - \angle \mathrm{A}$ であるので，

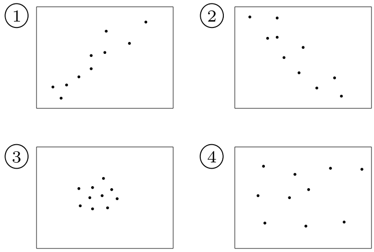
$$\begin{aligned}\cos B &= \cos(90^\circ - A)\\ &= \sin A\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}\end{aligned}$$

問 5 昇降口

問題

10 人の生徒に，2 つのテスト A,B を行った。すると，それぞれのテストの得点の分散，共分散は以下の表のようになった。このとき，A,B のテストの得点の散布図として，最も適するものを①〜④から 1 つ選べ。

テスト A の分散	$\frac{11}{5}$
テスト B の分散	$\frac{44}{5}$
テスト A,B の共分散	4



A の標準偏差は $\sqrt{\frac{11}{5}}$，B の標準偏差は $\sqrt{\frac{44}{5}}$。よって相関係数は，

$$\frac{4}{\sqrt{\frac{11}{5}}\cdot\sqrt{\frac{44}{5}}}=\frac{10}{11}$$

よって，相関係数が正で，正の相関があるため**①**が最も適する。

問 6 セミナーハウス

問題

KENKASHI の 8 文字を並べ変えたとき，2 つの K が隣り合わない確率を求めよ。

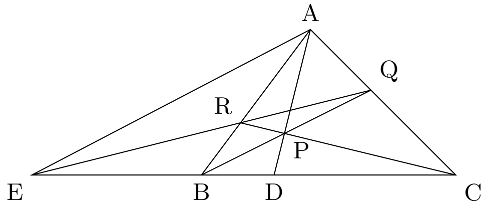
文字の並べ方はそれぞれの文字を区別すると 8! 通り
その中で，2 つの K が隣り合う並べ方は $7!\cdot 2$ 通り
よって，求める確率は

$$1-\frac{7!\cdot 2}{8!}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

問 7 体育館

問題

下の図において，D は BC を 2 : 5 に内分している。BD = 6 のとき，EC を求めよ。



チェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

よって，

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \frac{2}{5}$$

BE : EC = 2 : 5 より，BC = 21
よって，BE : EC = 2 : 5 なので，EC = **35**

問 8 本部前

問題

自然数 $m, n\,(m \neq 10,\, n \neq 1)$ が

$$m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$$

を満たしているとき，m, n を求めよ。

因数分解して、999 の約数から場合分けする方法もありますが、とっても簡単に解く方法（知識）があります。詳しいエピソードは割愛します（タクシー数などと検索すれば分

かると思います）が、$12^3+1=1729=10^3+9^3$ と 1729 は 2 通りの立方の和で表される最小の数です。
これを知っていれば、すぐに $\boldsymbol{m=12, n=9}$ と分かります。

問 9 水道前

問題

x, y を実数とするとき、$x^2+4xy+5y^2-2y+3$ の最小値を求めよ。

$$x^2+4xy+5y^2-2y+3=(x+2y)^2+y^2-2y+3$$

このとき、$x=-2y$ のときに最小値 y^2-2y+3 をとることが分かります。そのため、y^2-2y+3 の最小値を求めると、

$$y^2-2y+3=(y-1)^2+2$$

よって、$y=1$ のときに最小値 $\mathbf{2}$ をとる。

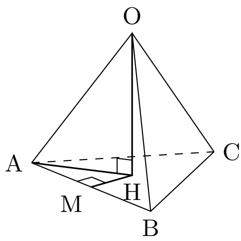
問 10 屋上入口

問題

半径 a の球に外接する正四面体の体積を求めよ。

正四面体の一辺の長さを b とおく。すると，各面は一辺が b の正三角形だから面積は,

$$\begin{aligned} S &= b \times \frac{\sqrt{3}}{2}b \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \end{aligned}$$

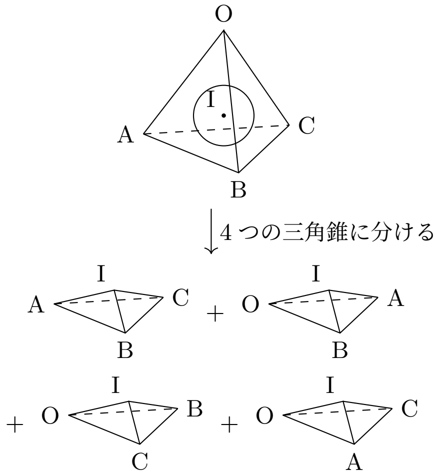


右のように H,M をおくと，△AHM は 3 つの角が 30°, 60°, 90° の直角三角形だから,

$$\begin{aligned} \mathrm{AH} &= \frac{b}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}b \end{aligned}$$

△AHO で三平方の定理を用いると, 正四面体の高さは

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}^2 &= \mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH} \\ &= b^2 - \frac{1}{3}b^2 \\ &= \frac{2}{3}b^2 \\ \mathrm{OH} &= \frac{\sqrt{6}}{3}b\end{aligned}$$



よって正四面体の体積は

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3 \tag{1}$$

また、図のように 4 つに分割して考えると、正四面体の体積は底面積 S, 高さ a の三角錐 4 つの体積に等しいから,

$$\begin{aligned}V &= \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \times a \times \frac{1}{3} \times 4 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}ab^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

(1), (2) を連立させて、体積は　　$\boldsymbol{8\sqrt{3}a^3}$

問 11 徘徊者

問題

n^2 を 120 で割ると 1 余るような 120 以下の自然数 n はいくつあるか。

$$n^2 = 120k + 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5k + 1 \ (k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表せる。よって、n^2 を 8, 3, 5 で割るとそれぞれの余りが 1 であればよい。
n^2 は奇数であるため、n も奇数である。
また、n^2 は 8 で割り切れないので、n^2 は 4 で割り切れない。
このとき、n が奇数ならば n^2 を 8 で割ると 1 余る（証明略)。
ここで、奇数かつ 3 で割ると 1 余る数を考えると、

$$n = 6a + 1,\ 6a + 5 \ (a \text{ は整数})$$

と表せる。また、5 で割って 1 余る数を考えると、

$$n = 5b + 1,\ 5b + 4\ (b \text{ は整数})$$

と表せる。$n = 6a + 1$ のとき、$n = 5a + (a + 1)$ なので、

$$a + 1 = 5c + 1,\ 5c + 4\ (c \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

よって、　$n = 30c + 1,\ 30c + 19$
$n = 6a + 5$ のとき、$n = 5(a + 1) + a$ なので、　$a = 5c + 1,\ 5c + 4$
よって、　$n = 30c + 11,\ 30c + 29$
この 4 式のいずれかを満たせばよいので、n の個数は $4 \times 4 = \mathbf{16}$ 個

4　数 II・B コース

問 1 物理室

　掲載していた問題内容に誤りがありました。以下は正しい問です。ご迷惑おかけしました。

問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\tan\theta \geqq -2-\sqrt{3}$ の範囲を以下の選択肢から選べ。

① $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{17}{18}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{35}{18}\pi \leqq \theta < 2\pi$

② $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{23}{36}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi < \theta \leqq \dfrac{59}{36}\pi$

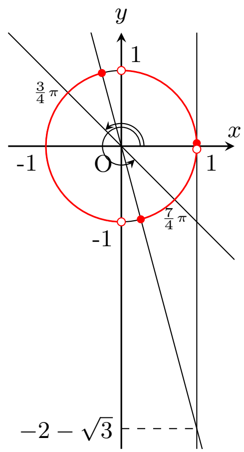
③ $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{17}{18}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi < \theta \leqq \dfrac{35}{18}\pi$

④ $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{7}{12}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{19}{12}\pi \leqq \theta < 2\pi$

　不等式の示す概形は右の図の赤色の部分のようになる。②，③は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を含んでいないため，不適。

①は $\dfrac{3}{4}\pi < \dfrac{17}{18}\pi$ より，不適。

よって正解は④



問 2 化学室

問題

定義に従って，関数 $f(x) = 4x$ の導関数を求めよ。

導関数の定義より，

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{4(x+h) - 4x}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} \\ &= \mathbf{4}\end{aligned}$$

問 3 生物室

問題

以下の数列の□に入る，最も適当な数を答えよ。

$$2,\ 3,\ 7,\ 16,\ 32,\ \square,\ 93,\ \cdots$$

この数列は階差数列 b_n が $b_n = n^2$ となっている。よってもとの数列の第 6 項は，

$$32 + 5^2 = \mathbf{57}$$

問 4 特別棟 4F

問題

$a > -3$ のとき，$\dfrac{a^3 + 6a + 18}{a+3}$ の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\frac{a^3 + 6a + 18}{a+3} &= \frac{(a+3)^2 + 9}{a+3} \\ &= a + 3 + \frac{9}{a+3}\end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の関係より,

$$\begin{aligned} a+3+\frac{9}{a+3} &\geqq 2\sqrt{(a+3)\cdot\frac{9}{a+3}} \\ a+3+\frac{9}{a+3} &\geqq 2\sqrt{9} \\ a+3+\frac{9}{a+3} &\geqq 6 \end{aligned}$$

最小値は $a+3=\dfrac{9}{a+3}$ のときなので,

$$\begin{aligned} a+3 &= \frac{9}{a+3} \\ (a+3)^2 &= 9 \\ a+3 &= \pm 3 \\ a &= 0 \quad (\because a > -3) \end{aligned}$$

よって, **$a=0$のとき，最小値6**

問 5 昇降口

問題

xy 平面上の 3 点 $(1,2), (2,1), (p,q)$ の重心が $(8,5)$ のとき, p と q の和を求めよ。

重心の x 座標は,

$$\begin{aligned} \frac{1+2+p}{3} &= 8 \\ p &= 8\cdot 3-3=21 \end{aligned}$$

重心の y 座標は,

$$\begin{aligned} \frac{2+1+q}{3} &= 5 \\ q &= 5\cdot 3-3=12 \end{aligned}$$

よって　$p+q=21+12=\mathbf{33}$

問 6 セミナーハウス

問題

平行な 2 直線 $4x-3y+3=0,\ 4x-3y-1=0$ の距離を求めよ。

$4x-3y+3=0\cdots$①, $4x-3y-1=0\cdots$② とおく。すると，2 直線の距離は①上の任意の点と②の直線の距離である。①上の点を $(0,1)$ とすると，2 直線の距離は

$$\frac{|4\cdot 0-3\cdot 1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-4|}{5}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

問 7 体育館

問題

$\log_2 9$, $\log_4 3$, $\log_3 3$, 0.4 を小さい順に並べたとき，3 番目に来るものを答えよ。

$$\begin{aligned}\log_3 3 &= 1\\ \log_2 8 = 3\text{より}, \log_2 9 &\geqq 3\\ \log_4 4 = 1\text{より}, \log_2 9 &\leqq 1\end{aligned}$$

よって 3 番目は　　$\mathbf{\log_3 3}$

問 8 本部前

問題

次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$f(x)=x^2-6x$$

$f(x)=0$ の解は，$x=0,6$，また，領域は x 軸の下側にある。よって面積は,

$$\begin{aligned}-\int_0^6 (x^2-6x)dx &= -\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2\right]_0^6\\ &= -\left(\frac{1}{3}\cdot 6^3-3\cdot 6^2\right)\\ &= -(72-108)\\ &= \mathbf{36}\end{aligned}$$

問 9 水道前

問題

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ で表される数列はどのような数列か。

答．フィボナッチ数列，Fibonacci series，美しい数列 など

別解

特性方程式 $x^2 = x + 1$ の解 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ をそれぞれ α, β とすると，

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

となる。$a_{n+1} - \alpha a_n$ は初項 $a_2 - \alpha a_1 = 1 - \alpha$，公比 β の等比数列だから，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= (1-\alpha)\beta^{n-1} \\ &= \beta^n \quad (\because 1 - \alpha = \beta) \end{aligned} \tag{1}$$

同様に $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ だから，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \beta a_n &= (1-\beta)\alpha^{n-1} \\ &= \alpha^n \quad (\because 1 - \beta = \alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

(2) − (1) より，

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)a_n &= \alpha^n - \beta^n \\ a_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

よって，　**一般項が $\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$ である数列。**

問 10 屋上入口

問題

関数 $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ を微分せよ。

$y=(3x+1)^{\frac{1}{3}}$, $u=3x+1$ とすると,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{d}{dx}(3x+1) \\
&= \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot 3 \\
&= (3x+1)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}}
\end{aligned}$$

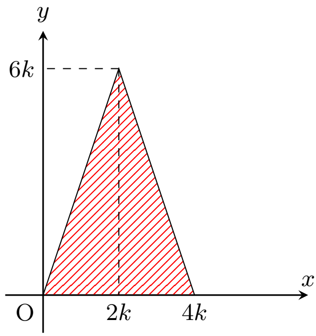
（数 II・B コースの解説は次ページに続く。）

問 11 徘徊者

問題

座標平面上で，x 座標，y 座標ともに整数である点を格子点という。座標平面上で，3 つの不等式 $y \geqq 0$, $y \leqq 3x$, $y \leqq -3x+12k$（k は自然数）によって表される領域に含まれる格子点の個数を k を用いて表すと整数 a, b, c を用いて ak^2+bk+c となる。a, b, c の和を求めよ。

3 直線 $y=0 \cdots$①, $y=3x \cdots$②, $y = -3x+12k$ (kは自然数) $\cdots$③ について，①と②の交点の座標は $(0, 0)$，①と③の交点の座標は $(4k, 0)$，②と③の交点の座標は $(2k, 6k)$ であるから，$y \geqq 0$, $y \leqq 3x$, $y \leqq -3x+12k$ によって表される領域 D は，3 点 $(0,0), (2k,6k), (4k,0)$ を頂点とする三角形の周および内部である（右図の赤色部分で境界を含む)。



整数 j が $0 \leqq j \leqq 2k$ を満たすとき，D に含まれる格子点座標が 0 以上 $2k$ 以下である点の個数 q を k を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
q &= \sum_{j=0}^{2k}(3j+1) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{2k}(3j+1) \\
&= 1 + 3\sum_{j=1}^{2k} j + \sum_{j=1}^{2k} 1 \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2k(k+1) + 2k \\
&= 6k^2 + 5k + 1
\end{aligned}
$$

である。さらに，D に含まれる格子点で x 座標が $(2k+1)$ 以上 $4k$ 以下である点の個数を求めて q に加えれば，D に含まれる格子点の数が求まる。直線 $2k$ に対して対称である

ことを利用すれば

$$\begin{aligned}
q &= q + \{q - (x = 2k\text{上にある } D \text{ に含まれる格子点個数})\} \\
&= 2q - \{(2k,0),(2k,1),\ldots,(2k,6k)\text{の } 6k+1 \text{ 個}\} \\
&= 2\left(6k^2+5k+1\right) - (6k+1) \\
&= 12k + 4k + 1
\end{aligned}$$

よって $a = 12, b = 4, c = 1$ なので，$a + b + c = \mathbf{17}$

5　数 III・C コース

問 1 物理室

問題

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 4$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

$|\vec{a}+\vec{b}| = 4$ より，

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ を代入して，

$$\begin{aligned}
2^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} &= 16 \\
2\vec{a}\cdot\vec{b} &= 3 \\
\text{よって}\quad \vec{a}\cdot\vec{b} &= \mathbf{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

問 2 化学室

問題

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ の和を求めよ。

第 n 項までの部分和を S とすると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}$$

これを計算して，

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{11}{6}=\frac{11}{18}\end{aligned}$$

よってこの無限級数の和は $\boldsymbol{\dfrac{11}{18}}$

問 3 生物室

問題

xy 平面上の楕円 $\dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ の焦点の座標を求めよ。

楕円 $\dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1\cdots$①は,楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1\cdots$②を x 軸方向に -1, y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。$\sqrt{4-3}=1$ より,②の焦点の座標は

$$(0,1),(0,-1)$$

よって,①の焦点の座標は

$$\boldsymbol{(-1,3),(-1,1)}$$

問 4 特別棟 4F

問題

行列 $A=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}$ に対して,A^2 を $pA+qE\,(p,q:\text{定数})$ の形で表せ。

行列 $A=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}$ において,ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$\begin{aligned}A^2-(4+2)A+(4\cdot2-3\cdot1)E=0\\ A^2-6A+5E=0\end{aligned}$$

よって,　　$\underline{A^2=6A-5E}$

問 5 昇降口

問題

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ を計算して♡

$t=-x$ とすると，$x=-t$ であり，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ だから，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)\left(\sqrt{t^2-t}+t\right)}{\sqrt{t^2-t}+t}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(t^2-t)-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{1}+1} = -\mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

問 6 セミナーハウス

問題

p を素数としたとき，$2p+1$, $4p+1$ がいずれも素数であるような p の値をすべて求めよ。

p は素数であることから，2 以上の整数である。よって，p は正の整数 n を用いて，$p=3n$, $p=3n+1$, $p=3n-1$ のいずれかで表される。

- $p=3n$ のとき
  p が素数となるのは $n=1$ のとき，つまり $p=3$ のときのみである。このとき，$2p+1=7$, $4p+1=13$ はともに素数だから，条件を満たす。
- $p=3n+1$ のとき
  $2p+1=2(3n+1)+1=3(2n+1)$ と表され，$n\geqq 1$ より $2n+1>1$ だから，$2p+1$ は 3 より大きい 3 の倍数で，素数ではない。
  よって，$p=3n+1$ は条件を満たさない。
- $p=3n-1$ のとき

$4p+1=4(3n-1)+1=3(4n-1)$ と表され，$n \geqq 1$ より $4n-1>1$ だから，$4n+1$ は 3 より大きい 3 の倍数で, 素数ではない。

よって，$p=3n-1$ は条件を満たさない。

以上から，条件を満たす p の値は $\boldsymbol{p=3}$ のみである。

問 7 体育館

問題

3 円切手と 8 円切手がたくさんあります。これらを用いて作ることのできない金額は何種類あるか。

N を 0 以上の整数とする。作りたい金額を N 円とすると，N は 0 以上の整数 k を用いて $N=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ のいずれかで表すことができる。

- $N=3k$ のとき
  3 円切手を k 枚使えば，すべての N をつくることができる。
- $N=3k+1$ のとき
  $k \geqq 5 (N=16, 19, 22, \ldots)$ の場合は，3 円切手 $(k-5)$ 枚と 8 円切手 2 枚を使えば，すべての N をつくることができる。
  $k=0$(すなわち$N=1$) の場合にはつくることができない。
  以下同様に，$k=1(N=4)$, $k=2(N=7)$, $k=3(N=10)$, $k=4(N=13)$ の場合もつくることができない。
- $N=3k+2$ のとき
  $k \geqq 2 (N=8, 11, 14, \ldots)$ の場合は 3 円切手 $(k-2)$ 枚と 8 円切手 1 枚を使えば，すべての N をつくることができる。
  $k=0(N=2)$, $k=1(N=5)$ の場合はつくることができない。

以上から，つくることのできない金額は，1 円，2 円，4 円，5 円，7 円，10 円，13 円
よって 個数は　7 個

問 8 本部前

問題

二次方程式 $x^2+ax+b=0\,(a, b:$ 実数$)$ の 2 つの解 α, β が $|\alpha| \leqq 1$ かつ $|\beta| \leqq 1$ を満たすとき，点 (a, b) の存在範囲の領域の面積を求めよ。

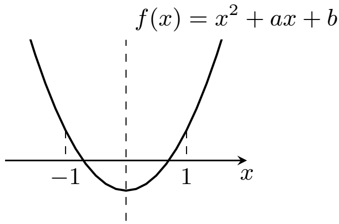
与えられた方程式は実数係数の 2 次方程式あるから，α, β は，ともに実数，ともに虚数のいずれかである。

(i) ともに実数の場合　判別式 D について，

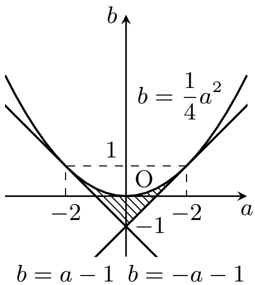
$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b \geqq 0 \text{ より，} b \leqq \frac{1}{4}a^2$$

このとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ で 2 つの解をもつ条件は，$f(x) = x^2 + ax + b$ について，

$$\begin{aligned} &-1 \leqq -\frac{a}{2} \leqq 1, \\ &\quad 2 \geqq a \geqq -2 \\ &f(1) = 1 + a + b \geqq 0, \\ &\quad b \geqq -a - 1 \\ &f(-1) = 1 - a + b \geqq 0, \\ &\quad b \geqq a - 1 \end{aligned}$$



したがって，$\begin{cases} b \leqq \dfrac{1}{4}a^2 \\ -2 \leqq a \leqq 2 \\ b \geqq -a - 1 \\ b \geqq a - 1 \end{cases}$



(ii) ともに虚数の場合　判別式 D について，

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b < 0 \text{より}, b > \frac{1}{4}a^2$$

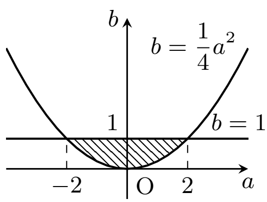
このとき，虚数解 α, β は共役複素数どうしであるから実数 p, q を用いて，$\alpha = p + qi$, $\beta = p - qi$ と表せる。すると，

$$|\alpha| = |\beta| = \sqrt{(p + qi)(p - qi)} = \sqrt{p^2 + q^2} \leqq 1$$

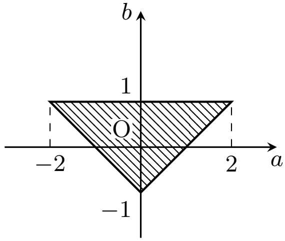
$$p^2 + q^2 \leqq 1$$

また，解と係数の関係から，

$$\begin{aligned} \alpha\beta =& (p + qi)(p - qi) \\ =& p^2 + q^2 = b \text{より}, \\ & 0 \leqq b \leqq 1 \end{aligned}$$



したがって，
$$\begin{cases} b > \dfrac{1}{4}a^2 \\ 0 \leqq b \leqq 1 \end{cases}$$



よって，(i)，また (ii) より，右の図の斜線部分で境界を含む。よってこの領域の面積は，
$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = \mathbf{4}$$

問 9 水道前

問題

方程式 $x^3 = k(x+1)^2$ が相異なる 3 つの実数解を持つような定数 k の値の範囲を求めよ。

$x = -1$ は方程式を満たさない。
よって，$x \neq 1$ のとき，方程式は $\dfrac{x^3}{(x+1)^2} = k$

求める実数解の個数は，関数 $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の個数に等しい。

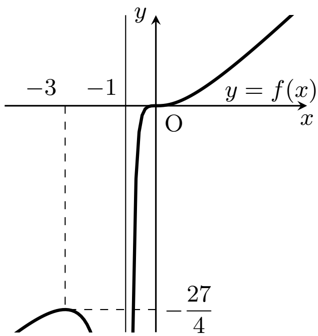
$f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ $(x \neq -1)$ とおくと
$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -3, 0$
$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\dfrac{27}{4}$	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$

よって，$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



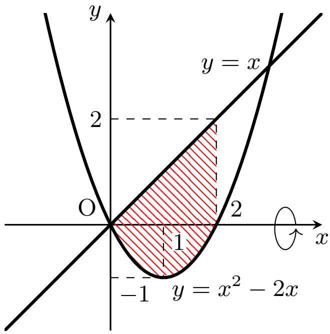
直線 $y = k$ との共有点の個数を調べると，方程式 $x^3 = k(x+1)^2$ が相異なる 3 つの実数解を持つような k の値の範囲は　$\boldsymbol{k < -\dfrac{27}{4}}$

問 10 屋上入口

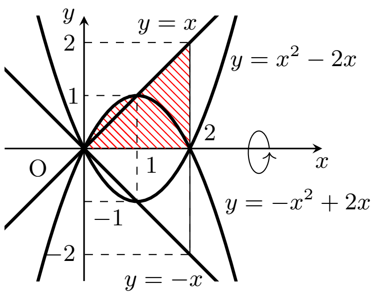
問題

連立不等式 $y \geqq x^2 - 2x$, $y \leqq x$, $x \leqq 2$ の表す領域を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

連立不等式 $y \geqq x^2$, $y \leqq x$, $x \leqq 2$ の表す領域は右の図の斜線部分である。



この部分の周りの回転体は，右下の図の斜線部分の回転体と同じである。したがって



$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 (-x^2 + 2x)^2 dx + \pi \int_1^2 x^2 dx \\
&= \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx + \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 + \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) + \frac{7}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{43}{15}\pi}
\end{aligned}
$$

問 11 徘徊者

問題

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$ の値を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left\{ (\sin^2 x)^{\tan^2 x} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left\{ (1 - \cos^2 x)^{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left\{ (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} \right\}^{\frac{1}{2}(1-\cos^2 x)}
\end{aligned}
$$

ここで，$\cos^2 x = t$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left\{ (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} \right\}^{\frac{1}{2}(1-\cos^2 x)} \\
=&\lim_{t \to 0} \left\{ (1 - t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{\frac{1}{2}(1-t)} \\
=&\left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{2}} \\
=&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}
\end{aligned}
$$