Dédicaces

- *A mes très chers parents pour les peines consenties à mon épanouissement et leur soutien*
- *A mes très chères sœurs pour leur compréhension et surtout pour le don de soi*
- *Et enfin à toute les personnes qui me sont chères*

Je dédie ce mémoire

Larissa DENAKPO

- *A ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*
- *A mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.*
- *A mes frères, sœurs, oncles, tantes et grands parents.*
- *Et enfin à toute les personnes qui me sont chères.*

Je dédie ce mémoire

Kenneth ASSOGBA

Remerciements

- *A l'administration de l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) et à tout ceux qui ont participé d'une manière ou d'une autre à notre formation notamment :Pr Carlos OGOUYANDJOU, Pr Joël TOSSA, Pr Aboubakar MARCOS, Dr Freedath DJIBRIL MOUSSA, Dr Pélagie HOUNGUE, Pr Gabriel AVOSSEVOU, Dr Guy DEGLA*
- *Au Pr Léonard TODJIHOUNDE, notre maître de mémoire pour son investissement sans retenu dans la réalisation du travail.*
- *A Monsieur Cyrille D., doctorant à l'IMSP pour les corrections et améliorations apportées*
- *A Monsieur Ludovic VALET pour avoir répondu à nos préoccupations*
- *A tous nos camarades de promotion.*

Sommaire

Introduction

Les polynômes orthogonaux sont un sujet d'étude pour les mathématiciens depuis des décennies. À titre d'exemple, Adrien-Marie Legendre en était arrivé dès le XIX^{e} à considérer la suite de polynômes auxquelles son nom est maintenant associé (les polynômes de Legendre) dans le cadre de ses calculs concernant la mécanique céleste. Depuis cette époque jusque aujourd'hui, la théorie concernant ces polynômes n'a cessé de se développer en précision et aussi en importance avec d'autres applications dans différents domaines. En effet les polynômes orthogonaux sont utiles en physique mathématiques lors de la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (Laplace, Schrödinger) par la méthode de séparation des variables. Aussi, en analyse numérique, avec l'avènement des ordinateurs, ils sont un des outils d'approximation et d'encodage-décodage.
Les familles de polynômes vérifient souvent certaines relations de récurrence et sont aussi solutions d'équations différentielles. Nous présenterons dans un premier temps la théorie générale sur ces polynômes et nous montrerons ensuite quelques propriétés qu'ils vérifient. Dans la deuxième partie on s'intéressera à des familles particulières de polynômes orthogonaux classiques à savoir les polynômes de Legendre, de Tchebychev, de Laguerre et de Hermite. Pour terminer, nous aborderons quelques applications importantes des polynômes orthogonaux dans le domaine scientifique.

Chapitre 1

Présentation générale des polynômes orthogonaux

1.1 Espaces préhilbertiens

1.1.1 Formes hermitiennes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1.
Une forme hermitienne sur E est une application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x, y)$
2. $\forall x, y, z \in E, \phi(x + z, y) = \phi(x, y) + \phi(z, y)$
3. $\forall x, y \in E, \phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme hermitienne est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple 1.1.1.

1. *Soient $E = \mathbb{K}^n, n$ entier naturel non nul, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de E. L'application ϕ définie par*

$$\phi(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

   est une forme hermitienne sur E.

2. *Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. L'application ϕ définie par*

$$\phi(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

   est une forme hermitienne sur E.

Définition 1.1.2.

1. *Soit ϕ une forme hermitienne sur E. On appelle noyau de ϕ le sous-ensemble défini par*

$$\textit{ker}\ \phi = \{x \in E / \ \phi(x, y) = 0, \forall y \in E\}.$$

2. *Une forme hermitienne est dite non dégénéré si son noyau est réduit au sous-espace nul ; i.e si :*

$$\phi(x, y) = 0, \forall y \in E \Leftrightarrow x = 0_E.$$

3. *Deux vecteurs X et Y de E sont dits orthogonaux relativement à la forme hermitienne ϕ si :*
$$\phi(X,Y) = 0.$$
Si A est un sous ensemble de E, l'orthogonal de A est le sous ensemble
$$A^{\perp} = \{x \in E/\ \phi(x,y) = 0, \forall y \in A\}.$$
4. *La forme hermitienne ϕ est dite positive (resp. définie positive) si :*
$$\forall X \in E, X \neq 0_E,\ \textit{on a } \phi(X,X) \geqslant 0 \textit{ resp. } \phi(X,X) > 0.$$

Définition 1.1.3.
On appelle produit scalaire sur E toute forme hermitienne ϕ définie positive (i.e positive et non dégénéré sur) E. Tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.
On définit une norme N sur E par $N(x) = \sqrt{\phi(x,x)}, \forall x \in E$.

Exemple 1.1.2.
Les formes hermitiennes définies dans l'exemple 1.1.1 sont des produits scalaires.

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien qui est complet relativement à la structure métrique définie par la norme associée au produit scalaire.
Rappel : Complet $\Leftrightarrow$ toute suite de Cauchy est convergente.

Dans toute la suite, un produit scalaire sera noté $\langle\ ,\ \rangle$, la norme associée $||\ ||$ si il n'y a pas d'ambiguïté et la distance associée $d(\ ,\ )$.

1.1.2 Projeté orthogonal

Proposition 1.1.1. *Proposition-Définition*
Soit E un espace de Hilbert et A un sous ensemble de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $y \in A$ tel que :
$$d(x,A) = ||x-y||.$$
L'élément y est appelé projeté orthogonal de x sur A. L'application $P_A : E \longrightarrow A$ qui à tout élément de E on associe son projeté orthogonal sur A est appelée projection orthogonale sur A.

Proposition 1.1.2.
Soit E un espace de Hilbert, A un sous ensemble de E et $x \in E$. L'élément $y = P_A(x)$ est caractérisé par :

1. $y \in A$
2. $\forall\ z \in A, \langle x-y, z\rangle = 0.$

1.1.3 Bases hilbertiennes

Définition 1.1.4.
On dit qu'une famille $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base hilbertienne de E si elle est orthonormée, c'est à dire :

1. $\forall\ (i,j),\ i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$
2. $\forall\ i \geqslant 1,\ ||e_i|| = 1$

et si elle est complète ou totale, c'est à dire que le sous-espace qu'elle engendre est dense dans E.

1.1.4 Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soient E un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ un système libre. On note $E_n = Vect(e_1, \ldots, e_n)$ et on pose :

$$u_1 = e_1 \text{ et } u_{n+1} = e_{n+1} - P_{E_n}(e_{n+1})$$

Proposition 1.1.3.
Le système $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construit est orthogonal et $E_n =$ Vect$(u_1, \ldots, u_n)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- Pour $n = 1$, la famille $(e_n)_{n\geqslant 1}$ étant libre, $e_1 \neq 0$, donc $u_1 = e_1$ est a lui seul une famille orthogonale qui convient.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre n. Posons $E_n = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$
  On a $u_{n+1} \in E_n^{\perp}$ par définition de la projection orthogonale (Proposition 1.1.1).
  Mais E_n est engendré par $u_1, \ldots, u_n$ par hypothèse, par conséquent
  $\langle u_j, u_{n+1}\rangle = 0, \forall j = 1, \ldots, n$.
  Par définition, $u_{n+1} \in E_{n+1}$ car $u_{n+1} = e_{n+1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$.
  On a $e_{n+1} = u_{n+1} + P_{E_n}(e_{n+1}) = u_{n+1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$.
  Ce qui prouve que le sous espace E_{n+1} est engendré par engendré par $u_1, \ldots, u_{n+1}$.
- Calcul de u_{n+1}
  D'après ce qui précède, on a : $u_{n+1} = e_{n+1} - \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$.
  Il s'agit de calculer les coefficients $\alpha_j, j = 1, \ldots, n$. On a :

$$\begin{aligned} \langle u_{n+1}, e_j\rangle &= \langle e_{n+1}, e_j\rangle - \alpha_j ||e_j||^2 \\ &= 0, \ \forall\ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

  D'où on obtient : $\alpha_j = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \langle e_{n+1}, u_j\rangle}{||u_j||^2}$

□

1.2 Polynômes orthogonaux et leurs propriétés

Définition 1.2.1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction densité une fonction $w : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n w(x)\ dx < +\infty$$

Soit $I \subset \mathbb{R}$. On considère l'espace $L^2(I, d\lambda) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} /\ f^2 \text{ est } d\lambda \text{ intégrable}\}$ où $d\lambda$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la fonction densité est continue et strictement positive sur I ; i.e : $d\lambda(x) = w(x)dx$. Munit du produit scalaire définit par

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\ dx,$$

$L^2(I, d\lambda)$ est un espace de Hilbert.
On voudrait construire sur $L^2(I, d\lambda)$ des bases hilbertiennes constituées uniquement de polynômes. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt assure l'existence d'une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, deux à deux orthogonaux tel que
$\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$.
La méthode consistera a choisir la famille libre $(f_n)_n$ avec $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, à laquelle on

applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour en faire une base hilbertienne de $L^2(I, d\lambda)$. Cette famille sera appelé la famille des polynômes orthogonaux associés à w.
Le choix de la famille $(X_n)_n$ vient du fait que cette famille est totale dans $L^2(I, w)$. Différents choix adéquats de l'intervalle I et de la fonction w permettront d'obtenir différentes familles orthonormées de polynômes orthogonaux.

Théorème 1.2.1.
Supposons qu'il existe un réel r tel que $\int_I e^{r|x|} w(x)dx < +\infty$. Alors la suite de polynômes orthonormés associés à w forme une base de $L^2(I, d\lambda)$.

Proposition 1.2.1.
On peut toujours écrire un polynôme quelconque q_n de degré n comme d'une combinaison linéaire de $P_k,\ k = 0, \ldots, n$.

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \ \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.2.2.
Soit q_k un polynôme quelconque de degré k, $k = 1, \ldots, n-1$. Alors :

$$\langle q_k, P_n \rangle = 0.$$

Dans la suite de cette section l'intervalle considéré sera $I = [a, b]$.

Proposition 1.2.3.
On suppose que $[a, b]$ est symétrique par rapport à l'origine et que la fonction densité w est paire. Alors P_n a la parité de n c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a, b]$ on a : $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Démonstration.
Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \ \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ \in \mathbb{R}$.
Supposons $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Alors $P_n(-x) = (-1)^n a_n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \qquad (1).$
D'autre part,on sait que $P_n(-x)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P_n(-x) &= \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x) + \cdots + \alpha_0 P_0(x) \qquad (2) \\ &= \alpha_n a_n x^n + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} + \cdots + \alpha_0 P_0(x) \qquad (3) \end{aligned}$$

En égalisant (1) et (3) on obtient :

$$a_n (-1)^n = \alpha_n a_n \Longrightarrow \alpha_n = (-1)^n \qquad (4)$$

De plus : $\langle P_n(-x), P_{n-1}(x) \rangle = \alpha_{n-1} ||P_{n-1}||^2 = 0$
Il s'en suit que $\alpha_{n-1} = 0$ car $||P_{n-1}||^2 \neq 0$.
En répétant la même opération avec $P_{n-2}(x), \ldots, P_0(x)$ on a

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0.$$

Alors (2) devient $P_n(-x) = \alpha_n P_n(x)$
Il s'en suit d'après (4) que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. □

1.2.1 Formule de récurrence et formule de Darboux Christoffel

Théorème 1.2.2. *Formule de récurrence*
Soit k_n le coefficient directeur de P_n.
Les polynômes P_n satisfont la formule de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x),\ n \geqslant 1$$

où $A_n,\ B_n,\ C_n$ sont les constantes suivantes :

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n},\ B_n = -A_n \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle},\ C_n = A_n \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Démonstration.
Considérons le polynôme $P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x)$. De la définition de la constante A_n, nous voyons que les termes en x^{n+1} s'annulent et donc que ce polynôme est de degré au plus n.

Il peut donc s'écrire sous la forme

$$P_{n+1}(x) - xA_nP_n(x) = a_nP_n(x) + \cdots + a_0P_0(x) \text{ où } a_o, \ldots,\ a_n \text{ sont des constantes.}$$

La valeur de chaque a_j peut être trouvée en prenant le produit scalaire de cette expression avec le P_j correspondant. Pour $0 \leqslant j < n-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x), P_j(x) \rangle &= \langle P_{n+1}(x), P_j(x) \rangle - A_n \langle xP_n(x), P_j(x) \rangle \\
&= \langle P_{n+1}(x), P_j(x) \rangle - A_n \langle P_n(x), xP_j(x) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les degrés de P_j et xP_j sont strictement inférieurs au degré de P_n.
Or $\langle P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x), P_j(x) \rangle = a_j \langle P_j(x), P_j(x) \rangle$, par suite $a_j = 0$.
D'où $P_{n+1}(x) - xA_nP_n(x) = a_nP_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x)$.
Pour $j = n-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x), P_{n-1}(x) \rangle &= \langle P_{n+1}(x), P_{n-1}(x) \rangle - A_n \langle xP_n(x), P_{n-1}(x) \rangle \\
&= -A_n \langle xP_n(x), P_{n-1}(x) \rangle
\end{aligned}$$

Par suite $-A_n \langle P_n(x), xP_{n-1}(x) \rangle = a_{n-1} \langle P_{n-1}(x), P_{n-1}(x)$,

$$\Rightarrow\ a_{n-1} = -A_n \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \equiv C_n$$

.
De même, pour $j = n$; on obtient $a_n = -A_n \dfrac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \equiv B_n$. □

Remarque 1.2.1. $C_n = \dfrac{A_n}{A_{n-1}}$.
On sait que $\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle$.

$$\begin{aligned}
xP_{n-1} &= x(k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_0) \\
&= k_{n-1}x^n + \cdots + k_0 x \\
&= \frac{k_{n-1}}{k_n}(k_n x^n + \cdots + \frac{k_0 k_n}{k_{n-1}} x) \\
&= \frac{1}{A_{n-1}}(P_n + K_{n-1}) \text{ \textit{avec} } K_{n-1} \text{ \textit{un polynôme de degré} } n-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{\textit{Par suite,} } \langle P_n, xP_{n-1} \rangle &= \frac{1}{A_{n-1}} \langle P_n, P_n + K_{n-1} \rangle \\
&= \frac{1}{A_{n-1}} (\langle P_n, P_n \rangle + \langle P_n, K_{n-1} \rangle) \\
&= \frac{1}{A_{n-1}} \langle P_n, P_n \rangle
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.3. *Formule de Darboux-Chritoffel*
On a les formules suivantes pour $x \neq y$:

1. $K_n(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \dfrac{k_n}{k_{n+1}}[\dfrac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}]$
2. $K_n(x,x) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(x)^2 = \dfrac{k_n}{k_{n+1}}[P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)] \geqslant 0$

Les fonctions K_n sont appelées noyaux de Christoffel.

Démonstration.

1. L'identité 1 découle facilement de la formule de récurrence.

$$P_k(y)P_{k+1}(x) - P_k(x)P_{k+1}(y) = [(A_kx+B_k)P_k(x) - C_kP_{k-1}(x)]P_k(y) - [(A_ky+B_k)P_k(y) - C_kP_{k-1}(y)]P_k(x)$$

$$= A_k(x-y)P_k(x)P_k(y) + C_k[P_{k-1}(x)P_k(y) - P_{k-1}(y)]P_k(x)]$$

Ainsi on a,

$$\frac{1}{A_k}[\frac{P_k(y)P_{k+1}(x) - P_k(x)P_{k+1}(y)}{x-y}] = P_k(x)P_k(y) + \frac{C_k}{A_k}[\frac{P_{k-1}(x)P_k(y) - P_{k-1}(y)]P_k(x)}{x-y}].$$

Or $\dfrac{C_k}{A_k} = \dfrac{1}{A_{k-1}}$, posons $U_{k+1} = \dfrac{1}{A_k}[\dfrac{P_k(y)P_{k+1}(x) - P_k(x)P_{k+1}(y)}{x-y}]$.

On a $U_{k+1} - U_k = P_k(x)P_k(y)$.
En faisant la somme pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{1}{k_{A_{n+1}}}[\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}] - P_0(x)P_0(y)$$

.
D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}}[\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}]$.

2.

$$\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} = \frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y) + P_n(x)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(x)}{x-y}$$

$$= P_n(x)[\frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)}{x-y}] - P_{n+1}(x)[\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y}].$$

Il suffit de passer à la limite quand y tend vers x de l'identité 1 pour avoir le résultat.

□

1.2.2 Les zéros des polynômes orthogonaux

Théorème 1.2.4. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n sont simples et sont contenus dans $[a,b]$.*

Démonstration.
Soit $m \geqslant 0$ le nombre de zéros de P_n qui soient réels et dans $[a,b]$. Le théorème fondamental de l'algèbre assure que $m \leqslant n$.
Soit donc $\phi = \{x_1, x_2, \dots,\ x_m\}$ l'ensemble potentiellement vide des dits zéros de P_n.
Soit de plus le polynôme $S_n = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$, (un produit vide vaut 1).
Ce polynôme possède les mêmes propriétés que P_n dans $[a,b]$, donc le produit $S(x)P_n(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$ et s'annule en chaque $x_i,\ i = 1,\dots,m$. Il en est de même pour le produit $S(x)P_n(x)w(x)$, car $w(x)$ est positif sur $[a,b]$.
Ainsi, $\langle S, P_n\rangle \neq 0$ car nous intégrons une fonction non identiquement nulle qui garde un signe constant, or P_n est orthogonal à tout les polynômes de degré inférieur à n ; il s'en suit que $m \geqslant n$. On a donc $m = n$, d'où le résultat. □

Théorème 1.2.5.
Les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont pas de racines en communs et de plus les racines de P_n et P_{n+1} sont alternées.

Démonstration.
Si P_n et P_{n+1} avaient un zéro en commun, x_0, ce serait aussi le zéro de P_{n-1}.
En faisant une itération, on obtiendrait $0 = P_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) = P_{n-1}(x_0) = \cdots = P_0(x_0) = k_0$, ce qui est absurde car $k_0 \neq 0$.

Nous avons vu que $K_n(x,x) = \dfrac{k_n}{k_{n+1}}[P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)] \geqslant 0$.
Soient donc deux zéros consécutifs α, β de P_{n+1}.
Comme ils sont consécutifs, $P'_{n+1}(\alpha)$ et $P'_{n+1}(\beta)$ doivent être de signes opposés.
Par suite on a, d'après le noyau : $P_n(\alpha)P'_{n+1}(\alpha) \geqslant 0, P_n(\beta)P'_{n+1}(\beta) \geqslant 0$.
Il suit que $P_n(\alpha)$ et $P_n(\beta)$ sont de signes opposés et donc que P_n a un zéro dans $[\alpha, \beta]$ par le théorème des valeurs intermédiaires.
On montre de même que P_{n+1} s'annule au moins une fois entre deux zéros de P_n. $\square$

Chapitre 2

Étude de quelques familles classiques de polynômes orthogonaux

Certaines familles de polynômes orthogonaux revêtent une importance particulière puisqu'elles apparaissent dans de nombreuses applications. Ces polynômes vérifient la relation de récurrence (théorème 1.2.2) et ils ont, de plus, en commun des propriétés que nous allons mettre en évidence. Ils sont tous solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre.
On considère un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, une mesure $d\lambda(x)$ dont la fonction densité w est continue et strictement positive sur I telle que : $\displaystyle\int_I |x|^n w(x)\ dx < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$, on se place sur $L^2(I, w)$.

2.1 Formule de Rodrigues

La formule de Rodrigues permet de calculer directement une suite de polynômes orthogonaux $(p_n)_n, n \in \mathbb{N}$, dans le cas des polynômes orthogonaux classiques en fonction du poids w et d'un polynôme Q.
Elle permet en outre, le calcul explicite des formules de récurrence et de retrouver les équations différentielles associées a chaque polynôme.

Théorème 2.1.1.
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ (on la définit plus bas), $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1. *(ϕ_n) est de classe C^n sur $]a, b[$*
2. *${\phi_n}^{(k)}(a^+) = {\phi_n}^{(k)}(b^-) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$*
3. *$T_n \equiv \frac{1}{e_n w}{\phi_n}^{(n)}$ est un polynôme de degrés n.*

Alors $(T_n)_n$ est une suite orthogonale. La réciproque est vraie quand $w(x)$ est C^∞.

Démonstration.
La preuve repose sur une application répétée de la formule d'intégration par parties dans le cas où tous les termes convergent et où les termes intégrés (termes entre crochets) apparaissant successivement sont tous nuls.
Soit P un polynôme de degrés $\leqslant n-1$, $(T_n)_n$ vérifiant 1), 2) et 3), il s'agit de s'assurer que la

famille est orthogonale.

$$\begin{aligned}\int_a^b T_n(x)P(x)w(x)dx &= \int_a^b {\phi_n}^{(n)}(x)P(x)dx \\ &= \int_a^b {\phi_n}^{(n-1)}(x)P'(x)dx \\ &= \cdots \\ &= (-1)^n \int_a^b \phi_n(x)P^{(n)}(x)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Car $\deg(P) < n$.
Réciproquement, on pose $w(x)P_n(x) = {\phi_n}^{(n)}(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b q_{n-1}(x){\phi_n}^{(n)}(x)dx = 0$ avec q_{n-1} un polynôme de degrés au plus $n-1$ quelconque.
Par intégrations par parties successives, on obtient :
$\left[q_{n-1}(x){\phi_n}^{(n)}(x) - q_{n-1}(x){\phi_n}^{(n)}(x) + ... + q_{n-1}(x){\phi_n}^{(n)}(x)\right]_a^b = 0.$
Ceci étant vrai pour tout polynôme de degrés $< n$ on en déduit que ${\phi_n}^{(k)}(a^+) = {\phi_n}^{(k)}(b^-) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ □

2.2 Définition des familles classiques

On considère une famille de polynômes orthogonaux donnée par une formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{e_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n}(w(x)[Q(x)]^n)$$

Q est un polynôme en x de degrés k.
Les nombres e_n dépendent de la normalisation.

Remarque 2.2.1.
On note $P_n(x) = k_n x^n + \cdots$. Un choix systématique des k_n est appelé normalisation de la famille de polynômes orthogonaux. On peut choisir tous les polynômes unitaires $k_n := 1$. On peut aussi normer la suite, en remplaçant k_n par $\frac{k_n}{\|P_n\|}$. Dans le cas des polynômes orthogonaux classiques, d'autres normalisations se sont souvent imposées par exemple $P_n(1) = 1$ pour les polynômes de Legendre.

Pour $n = 1$:

$$e_1 P_1(x) = Q' + Q\frac{w'(x)}{w(x)}$$

Polynômes de Hermite
En considérant le degrés de Q, $k = 0$, Q est constante, par exemple 1.
$\frac{w'(x)}{w(x)} = e_1 P_1(x)$ est une fonction linéaire en x qu'on peut ramener a $\frac{w'(x)}{w(x)} = -2x$ par un changement de variable.
Les polynômes issus de la formule de Rodrigues déterminée par :

$$Q = 1,\ w(x) = \exp(-x^2)\, e_n$$

sont appelés polynômes de Hermite.

Polynômes de Laguerre
En considérant $k = 1$ on se ramène a $\dfrac{w'(x)}{w(x)} = -1 + \dfrac{a}{x}$, on s'intéresse au cas $a = 0$
Les polynômes issus de la formule de Rodrigues déterminée par :

$$Q = x,\ w(x) = \exp(-x),\ e_n$$

sont appelés polynômes de Laguerre.

Supposons $k \geq 2$, on peut prendre $Q = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)$.
Supposons les a_i distincts. On peut écrire $\dfrac{w'(x)}{w(x)} = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{a_i}{x - a_i} \Rightarrow w(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{a_i}$. Cela nous donne :

$$P_n(x) = \frac{1}{e_n \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{a_i}} \frac{d^n}{dx^n} (\prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n+a_i})$$

On remarque que $\forall k > 2$, $P_2(x)$ n'est pas de degrés 2, $k = 2$ est la seule valeur qui convient. Supposons donc $k = 2$, le cas ou Q admet une racine double conduit a une absurdité. Le seul cas possible est donc $k = 2$ et $a_1 \neq a_2$.
Par un changement de variable on peut se ramener a $a_1 = -1, a_2 = 1$. Les polynômes issus de la formule de Rodrigues déterminée par :

$$Q = 1 - x^2,\ w(x) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta},\ \alpha, \beta > -1,\ e_n$$

sont appelés :

Polynômes de Tchebychev
Pour $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$, $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Polynômes de Legendre
Pour $\alpha = \beta = 0$, $w(x) = 1$

On considère $k \in \{0, 1, 2\}$ dans la suite du mémoire.

2.3 Équations différentielles

Théorème 2.3.1.
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes orthogonaux définie a l'aide de la formule de Rodrigues, alors $P_n(x)$ satisfait, pour $n \geqslant 0$, une equation différentielle de la forme :

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0$$

Démonstration.
Posons $D = \dfrac{d}{dx}$, on rappelle la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
D^{n+1}[QD(wQ^n] &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k Q^{(k)} D^{n+1-k}[D(wQ^n]\\
&= C_{n+1}^0 QD^{n+1}[D(wQ^n)] + C_{n+1}^1 Q' D^n[D(wQ^n)] + C_{n+1}^2 Q'' D^{n-1}[D(wQ^n)]\\
&\quad + \sum_{k=3}^{n+1} C_{n+1}^k Q^{(k)} D^{n+1-k}[D(wQ^n]
\end{aligned}$$

Or $Q^{(0)} = Q$ et $\sum_{k=3}^{n+1} C_{n+1}^k Q^{(k)} D^{n+1-k}[D(wQ^n] = 0$ car $Q^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 3$

Par suite, $D^{n+1}[QD(wQ^n] = QD^{n+2}(wQ^n) + (n+1)Q' D^{n+1}(wQ^n) + \frac{n(n+1)}{2} Q'' D^n(wQ^n)$

D'après la formule de Rodrigues $D^n(wQ^n) = e_n w P_n$, donc

$$D^{n+1}[QD(wQ^n] = e_n \left[QD^{(2)}(wP_n) + (n+1)Q' D(wP_n) + \frac{n(n+1)}{2} Q''(wP_n) \right]$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
D^{n+1}[QD(wQ^n] &= D^{n+1}[Q(D(w)Q^n + nQ'Q^{n-1}w)]\\
&= D^{n+1}[Q^n(QD(w) + nwQ')]\\
&= D^{n+1}[Q^n(D(Qw) + (n-1)wQ')]
\end{aligned}$$

D'après la formule de Rodrigues pour $n = 1$, $D(Qw) = e_1 w P_1$ alors

$$\begin{aligned}
D^{n+1}[QD(wQ^n] &= D^{n+1}[wQ^n(e_1P_1 + (n-1)Q')]\\
&= C_{n+1}^0 D^{n+1}(wQ^n)(e_1P_1 + (n-1)Q') + C_{n+1}^1 D^n(wQ^n)(e_1{P'}_1 + (n-1)Q'')\\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^k D^{(n+1-k)}(wQ^n)(e_1P_1 + (n-1)Q')^{(k)}\\
&= D^{n+1}(wQ^n)(e_1P_1 + (n-1)Q') + (n+1)D^n(wQ^n)(e_1{P'}_1 + (n-1)Q'')
\end{aligned}$$

car ${P_1}^{(k)} = 0,\ Q^{(k+1)} = 0\ \forall k \geqslant 2.$

On utilise la formule de Rodrigues :

$$\begin{aligned}
D^{n+1}[QD(wQ^n] &= e_n D(wP^n)(e_1P_1 + (n-1)Q') + (n+1)we_nP^n(e_1{P'}_1 + (n-1)Q'')\\
&= e_n[D(wP^n)(e_1P_1 + (n-1)Q') + (n+1)wP^n(e_1{P'}_1 + (n-1)Q'')]
\end{aligned}$$

On identifie ces deux valeurs de $D^{n+1}[QD(wQ^n]$:

$$\begin{aligned}
QD^{(2)}(wP_n) + (n+1)Q'D(wP_n) + \frac{n(n+1)}{2}Q''(wP_n) &= D(wP^n)(e_1P_1 + (n-1)Q')\\
&\quad + (n+1)wP^n(e_1{P'}_1 + (n-1)Q'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow QD^{(2)}(wP_n) + D(wP_n)[(n+1)Q' - e_1P_1 - (n-1)Q']\\
&\qquad + (wP_n)\left[\frac{n(n+1)}{2}Q'' - (n+1)e_1{P'}_1 - (n+1)(n-1)Q''\right] = 0\\
&\Leftrightarrow QD^{(2)}(wP_n) + D(wP_n)\left[(2Q' - e_1P_1] + (wP_n)[-\frac{n^2+n+2}{2}Q'' - (n+1)e_1{P'}_1\right] = 0\\
&\Leftrightarrow Q(w''P_n + 2w'{P'}_n + w{P''}_n) + (w'P_n + w{P'}_n)[(2Q' - e_1P_1]\\
&\qquad + (wP_n)\left[-\frac{n^2+n+2}{2}Q'' - (n+1)e_1{P'}_1\right] = 0\\
&\Leftrightarrow Qw{P''}_n + {P'}_n[2w'Q + w(2Q' - e_1P_1)]\\
&\qquad + P_n[Qw'' + w'(2Q' - e_1P_1) - w\frac{n^2+n+2}{2}Q'' - w(n+1)e_1{P'}_1] = 0\\
&\Leftrightarrow Q{P''}_n + \frac{{P'}_n}{w}[2(wQ)' - we_1P_1]
\end{aligned}$$

$$+\frac{P_n}{w}\left[(Qw)''-wQ''-w'e_1P_1-w\frac{n^2+n+2}{2}Q''-w(n+1)e_1P'_1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow QP''_n+\frac{P'_n}{w}[2(wQ)'-we_1P_1]$$

$$+\frac{P_n}{w}\left[(e_1(P'_1w+w'P_1)-w'e_1P_1+w\frac{-n^2+n}{2}Q''-w(n+1)e_1P'_1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ QP''_n+e_1P_1P'_n+P_n\left[e_1P'_1+\frac{w}{w'}e_1P_1-\frac{w}{w'}e_1P_1+\frac{-n^2+n}{2}Q''-(n+1)e_1P'_1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\quad QP''_n+e_1P_1P'_n+P_n\left[\frac{-n^2+n}{2}Q''-n+e_1P'_1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow QP''_n+e_1P_1P'_n+P_n\left[-n(\frac{n-1}{2}Q''+e_1P'_1)\right]=0$$

$$A(x)=Q(x)$$

$$B(x)=e_1P_1(x)$$

$$\lambda_n=-n\left(\frac{n-1}{2}Q''+e_1k_1\right)$$

□

2.4 Fonctions génératrices

Les polynômes orthogonaux classiques peuvent être obtenus comme coefficients d'un développement en série entière d'une fonction génératrice.

Définition 2.4.1.
A une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe les séries formelles :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}U_nx^n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{U_n}{n!}x^n$$

La première est appelée série génératrice, la seconde série génératrice exponentielle.

2.5 Polynômes de Legendre

On rappelle que les polynômes de Legendre P_n sont obtenus en considérant :
$Q=1-t^2$, le poids $w(t)=1$, l'intervalle $I=[-1,1]$ (délimité par les racines de Q).
Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt donne :
$u_0(t)=1, u_1(t)=t, u_2(t)=t^2-\frac{1}{3}, u_3(t)=t^3-\frac{3}{5}t.$
La normalisation traditionnelle est $P_n(1)=1$, soit : $P_0(t)=1, P_1(t)=t$
$P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1), P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t)$
Notons $p_n(t):=\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$. D'après la formule de Rodrigues : $P_n(t)=\frac{1}{2^nn!}p_n(t)$.

Proposition 2.5.1. *Relation de récurrence*
La relation de récurrence pour les polynômes de Legendre est :

$$(n+1)P_{n+1}(t)=(2n+1)tP_n(t)-nP_{n-1}(t).$$

Démonstration.
On pose $D=\frac{d}{dt}$. En appliquant la formule de Leibniz a $p_n(t):=\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n=D^n(t^2-1)^n$ on

obtient :

$$\begin{aligned}
p_n(t) &= D^n(t-1)^n(t+1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; D^k(t-1)^n D^{n-k}(t+1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; n(n-1)\cdots(n-k-1)n(n-1)\cdots(k+1)(t-1)^{n-k}(t+1)^k \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2(t-1)^{n-k}(t+1)^k \\
P_n(t) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2(t-1)^{n-k}(t+1)^k
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$. On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de t^n dans $P_n(x)$ est $2^{-n}C_{2n}^n$.
Par suite, on calcule aisément les coefficients de l'équation de récurrence (théorème 1.2.2) □

Proposition 2.5.2. *Équation différentielle*
Les polynômes P_n de Legendre sont solution de l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$$

Démonstration.
On calcule aisément les coefficients de l'équation différentielle (théorème 2.3.1) □

Proposition 2.5.3. *Fonction génératrice*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n = (1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Démonstration.
Partons de la relation de récurrence décrivant les polynômes de Legendre, à savoir

$$nP_n(t) = (2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t)$$

Multiplions par x^{n-1} et sommons sur les n :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(t)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)tL_n(t)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)L_{n-2}(t)x^{n-1}$$

Posons

$$h(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} L_n x^n \Rightarrow h'(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} nL_n x^{n-1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)tL_n(t)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)L_n x^{n+1} \\
&= 2tx\sum_{n=0}^{+\infty} nL_n(t)x^{n-1} + t\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} nL_n(t)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^{n+1} \\
&= 2txh'(x) + th(x) - x^2h'(x) - xh(x)
\end{aligned}$$

Et donc

$$(t-x)h(x) = (1-2tx+x^2)h'(x)$$
$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{t-x}{1-2tx+x^2}$$

En intégrant, nous obtenons

$$\ln(h(x)) = -\frac{1}{2}\ln(1-2tx+x^2)$$

D'où

$$h(x) = (1-2tx+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

□

2.6 Polynômes de Laguerre

Considérons l'espace $L^2([0,+\infty[,e^{-x})$ des fonctions de carrés intégrable pour la mesure de densité $w = e^{-x}$ par la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à cette famille fournit une base orthogonale de polynôme l_n avec deg $l_n = n$.
Les calculs de ce cas sont particulièrement simples et utilisent l'égalité $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

Ainsi on trouve que : $l_0(x) = 1,\ l_1(x) = x-1,\ l_2(x) = x^2-4x+2,\ l_3(x) = x^3-9x^2+18x-6$. Qui vérifient la relation :

$$l_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

On obtient donc les polynômes de Laguerre $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normalisés par la relation

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} l_n(x).$$

Ils forment une base orthogonale de l'espace $L^2(]0,+\infty[,e^{-x}dx)$ et sont exprimé à l'aide de la formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

.

Proposition 2.6.1.
La relation de récurrence pour les polynômes de Laguerre est :

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = xL_n(x)$$

Proposition 2.6.2.
Les polynômes de Laguerre vérifient l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

.

Démonstration.
On calcule aisément les coefficients de l'équation différentielle (théorème 2.3.1) □

2.7 Polynômes de Hermite

Nous avons vu que les polynômes de Hermite $H_n(t)$ sont une famille de polynômes orthogonaux associés au poids $w(t) = \exp(-t^2)$ sur la droite $\mathbb{R}$.
On a la formule de Rodrigues : $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$
Les premiers polynômes de Hermite sont donc : $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = 2t$, $H_2(t) = 4t^2 - 2$, $H_3(t) = 8t^3 - 12t$ et $H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12$.

Proposition 2.7.1. *Norme.*
On a :

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

δ_{nm} est le delta de Kroenecker, $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$

Démonstration.
Supposons $n \geqslant m$, on a :

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} H_m(t) dt$$

On applique la formule d'intégration par parties généralisée et on obtient
$\langle H_n, H_m \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (H_m)^{(n)}(t) dt.$
Si $n > m$, on retrouve $\langle H_n, H_m \rangle = 0$, et, si $n = m$ on obtient $\|H_n\|^2 = 2^n n! \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi}$ □

Proposition 2.7.2. *Fonction génératrice*
Soit $G(t,z) = e^{2tz - z^2}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z \to G(t,z)$ est une fonction entière, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} H_n(t) \frac{z^n}{n!}$ converge et on a :

1. $G(t,z) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} H_n(t) \frac{z^n}{n!}$
2. $H_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} n! \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2t)^{n-2k}}{(n-2k)!}$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$, la fonction $z \longmapsto G(t,z) = e^{2tz} e^{-t^2}$ est le produit de deux fonctions entières, elle est donc entière.
On remarque $e^{-t^2} G(t,z) = e^{-(t-z)^2}$, la fonction du membre de gauche étant entière, elle est égale a la somme de Taylor a l'origine.
Pour tout réel x, $\dfrac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-z)^2} = e^{-(t-z)^2} H_n(t-x)$.
Ainsi $e^{-t^2} G(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) \frac{z^n}{n!}$ soit $G(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(t) \frac{z^n}{n!}$
En faisant le produit des deux séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2t)^n z^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}$, de rayon de convergence $+\infty$ et de sommes respectives e^{2tz} et e^{z^2}, on obtient :
$G(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} n! \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2t)^{n-2k}}{(n-2k)!}) z^n \right)$ et on en déduit (2). □

Proposition 2.7.3. *Relations de récurrence*

1. $H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0$
2. $H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t)$

Démonstration.
(1) On utilise la formule de Rodrigues, $D = \dfrac{d}{dt}$. On a :

$$\begin{aligned} D^{n+1}(e^{-t^2}) &= D^n(-2te^{-t^2}) \\ &= -2tD^n(e^{-t^2}) - 2nD^{n-1}(e^{-t^2}) \end{aligned}$$

En multipliant l'égalité par $(-1)^{n+1}$, on obtient le résultat.

(2) On a $H'_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^{n+1}(e^{-t^2}) + (-1)^n 2te^{t^2} D^n(e^{-t^2})$, c'est a dire :
$H'_n(t) = -H_{n+1}(t) + 2tH_n(t)$. En utilisant (1), on obtient

$$\begin{aligned} H'_n(t) &= -2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) + 2tH_n(t) \\ &= 2nH_{n-1}(t) \end{aligned}$$

□

Proposition 2.7.4. *Équation différentielle*
Les polynômes H_n de Hermite sont solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

Démonstration.
On calcule aisément les coefficients de l'équation différentielle (théorème 2.3.1) □

2.8 Polynômes de Tchebychev

Nous avons vu que les polynômes T_n de Tchebychev sont orthogonaux sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ pour la fonction poids $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $Q = 1 - t^2$.
Les polynômes de Tchebychev sont les polynômes définis par la relation :

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),\ \forall\theta \in \mathbb{R} \text{ soit } T_n(x) = \cos(n\arccos(x)),\ \forall x \in]-1, 1[.$$

L'identité trigonométrique

$$2\cos m\theta cos n\theta = cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \qquad (1)$$

a pour conséquence que

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0 \text{ pour } m \neq n.$$

Effectuons le changement de variable $x = \cos\theta$ et posons $T_n(x) = \cos n\theta$.
L'équation précédente devient

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{1/2}dx = 0 \text{ pour } m \neq n.$$

Les T_n sont des polynômes en x. En effet, nous avons $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ et l'identité (1) avec $n = 1$ nous donne :

Proposition 2.8.1. *Relation de récurrence*
La relation de récurrence pour les polynômes de Tchebychev est :

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t).$$

Proposition 2.8.2. *Équation différentielle*
Les polynômes T_n de Tchebychev sont solution de l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y'' - ty' + n^2 y = 0$$

Démonstration.
On calcule aisément les coefficients de l'équation différentielle (théorème 2.3.1) □

Proposition 2.8.3. *Racines*
Les racines de T_n sont les $t_{k,n} = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$

Démonstration.
On utilise la propriété caractéristique : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$.
On a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = 0$ si et seulement si $n\theta$ est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, c'est a dire $\theta = \dfrac{k}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont des racines de T_n.
On cherche maintenant combien de valeurs distinctes prennent les $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
La fonction $\cos$ étant 2π-périodique et paire, on peut l'étudier sur $\theta \in [0,\pi]$ soit $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
Or, $\cos$ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, les $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$ sont distincts. On obtient ainsi n racines de T_n.
Comme $\deg T_n = n$ ce sont les seules racines de T_n □

Proposition 2.8.4. *Fonction génératrice*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n = \frac{1-xt}{1-2xt+x^2}$$

Démonstration.
Considérons la relation de récurrence que suivent les polynômes Tchebychev, à savoir :

$$T_0(t) = 1,\ T_1(t) = t,\ T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(x)$$

.
Multiplions par x^n et sommons sur les n.Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} T_n(t)x^n &= 2t\sum_{n=2}^{+\infty} T_{n-1}(t)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} T_{n-2}(t)x^n \\ &= 2tx\sum_{n=2}^{+\infty} T_{n-1}(t)x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{+\infty} T_{n-2}(t)x^{n-2}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n - tx - 1 &= 2xt\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)x^n - x^2\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n \\ &= 2tx\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n - 2tx - x^2\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n\end{aligned}$$

Donc

$$1 + tx - 2tx = (1 - 2tx + t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n$$

C'est a dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n = \frac{1-tx}{1-2xt+t^2}$$

□

Chapitre 3

Quelques domaines d'application des polynômes orthogonaux

3.1 Quadrature de Gauss en analyse numérique

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, les méthodes de quadrature sont les approximations de la valeur numérique d'une intégrale. En général, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérées prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. La méthode de quadrature de Gauss est une méthode de quadrature avec une très faible marge d'erreur pour un polynôme de degré $2n-1$.

Théorème 3.1.1.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $(P_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de polynômes orthogonaux par rapport à la mesure $d\lambda(x)$ associé à la densité w, avec $w : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ sont les racines de $P_n(x)$ alors il existe une suite de réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\int_I f(x)d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$$

où $f(x)$ est une fonction polynomiale de degré $2n-1$.

Remarque 3.1.1.
- *Le choix de la famille $(P_n)_{n\geq 1}$ dépend de l'intervalle d'intégration et de la fonction densité w (Annexe A).*
- *Lorsque $I = [a, b]$, on peut se ramener à une intégrale sur $[-1, 1]$ en faisant le changement de variable $x = \dfrac{(b-a)t + (a+b)}{2}$.*

Proposition 3.1.1.
Les nombres a_k sont appelés nombres de Christoffel et vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall k = 1, \ldots, n, a_k > 0$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \int_a^b d\lambda(x)$
3. $a_k = \dfrac{1}{K_n(x_k, x_k)}$.

Exemple 3.1.1.
On cherche à déterminer l'approximation numérique de $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx$.
On veut intégrer un polynôme de degré 2, deux points suffisent. Dans notre cas $w(x) = 1$ et $I = [-1, 1]$, on utilisera donc les polynômes de Legendre.

n	a_n	*Racines*	P_n
1	2	0	x
2	$1;1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3x^2-1}{2}$
3	$\frac{5}{9}; \frac{8}{9}; \frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}; 0; \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5x^3-3x}{2}$

On obtient donc :

$$\int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx = 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + 1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 = \frac{8}{3}.$$

On peut facilement vérifier ce résultat :

$$\int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

3.2 Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique classique est un corps de masse m attaché a un ressort linéaire. L'importance de ce système vient du fait qu'il approxime assez généralement tout système proche d'un état d'équilibre stable, par exemple le cas du pendule simple. Le potentiel associé à un oscillateur harmonique est quadratique et de la forme $V(x) = cx^2$ où c est une constante.
Considérons un potentiel $U(x)$ arbitraire mais possédant un minimum en $x = x_0$. En développant $U(x)$ au voisinage de x_0 on obtient :

$$U(x) = U(x_0) + (x-x_0)U'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 U''(x_0) + O((x-x_0)^3).$$

U atteignant son minimum en x_0, on a $U'(x_0) = 0$ et $U''(x_0) \geqslant 0$. En redéfinissant le potentiel de façon à ce que $U(x_0) = 0$, on obtient

$$U(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 U''(x_0) + O((x-x_0)^3).$$

Si les mouvements de la particule autour de x_0 sont suffisamment petits pour que le terme $O((x-x_0)^3)$ soit négligeable, nous pouvons considérer que nous avons affaire à un oscillateur harmonique. C'est de cette façon que sont étudiés les vibrations des atomes d'une molécule autour de leur position d'équilibre ou encore des ions dans un réseau cristallin.
Introduisons donc l'équation de Schrödinger qui, en mécanique quantique, régit le comportement des particules ayant une certaine masse m placée dans un certain potentiel V. Rappelons également que h est la constante de Planck.

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t).$$

Dans la suite nous travaillerons en dimension 1 avec $V(x) = \frac{h^2}{2mx^2}$, i.e un oscillateur harmonique indépendant du temps avec une constante de rappel bien choisie. L'équation devient :

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t).$$

Utilisons la méthode de séparation de variable et posons $\psi(x,t) = A(x)B(x)$. L'équation devient :

$$\frac{ih}{B(t)}\frac{dB(t)}{dt} = \frac{1}{A(x)}\left[\frac{-h^2}{2m}\frac{d^2A(x)}{dx^2}\right] + V(x).$$

En utilisant $E = hw$ comme constante de séparation on obtient :

$$ih\frac{dB(t)}{dt} = hwB(t) \Longrightarrow B(t) = ae^{-iwt}$$

$$\frac{-h^2}{2m}\frac{d^2A(x)}{dx^2} + V(x)A(x) = hwA(x)$$

Réécrivons la seconde équation en insérant le potentiel V choisi, on a :

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mw}{h} - x^2\right)A(x) = 0.$$

Posons $\frac{2mw}{h} = 2n + 1$. Nous obtenons

$$\frac{d^2A}{dx^2} + (2n + 1 - x^2)A = 0.$$

En posant maintenant $u = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)A(x)$, l'équation précédente devient

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2nu = 0$$

qui n'est rien d'autre que l'équation différentielle dont les solutions utiles sont les polynômes de Hermite.

Annexe A

Obtention des polynômes orthogonaux classiques par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Nous donnons ci-dessous différents choix de l'intervalle Iet de la fonction densité w conduisant à des familles de polynômes orthogonaux classiques connues.

Polynômes de Legendre
Les polynômes de Legendre P_n sont obtenus en considérant

$$I = [-1, 1] \text{ et } w(x) = 1,\ \forall x \in [-1, 1].$$

Les polynômes de Legendre P_n vérifient la relation :

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n,\ \forall\ x \in [-1, 1].$$

Polynômes de Laguerre
Les polynômes de Laguerre L_n sont obtenus en choisissant

$$I = [0, +\infty[\text{ et } w(x) = e^{-x},\ \forall\ x \in [0, +\infty[$$

Les polynômes de Laguerre L_n vérifient la relation :

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n),\ \forall x \in [0, +\infty[.$$

Polynômes de Hermite
Les polynômes de Hermite H_n sont obtenus en considérant

$$I = \mathbb{R} \text{ et } w(x) = e^{-x^2},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Les polynômes de Hermite H_n vérifient la relation :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Polynômes de Tchebychev
Les polynômes de Tchebychev T_n sont obtenus en choisissant

$$I =]-1,1[\text{ et } w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall\ x \in]-1,1[.$$

Les polynômes de Tchebychev T_n vérifient la relation :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),\ \forall x \in]-1,1[.$$

Annexe B

Définition alternative des polynômes orthogonaux comme solutions d'un problème de Sturm-Liouville

Une importante classe des polynômes orthogonaux provient d'une équation différentielle de Liouville de la forme

$$Q(x)f'' + L(x)f' + \lambda f = 0$$

où Q est un polynôme quadratique donné et L un polynôme linéaire donné. La fonction f est inconnue, et la constante λ est un paramètre.
Une solution polynômiale est a priori envisageable pour une telle équation. Cependant, les solutions de cette équation différentielle ont des singularités, à moins que λ ne prenne des valeurs spécifiques. La suite de ces valeurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ conduit a une suite de polynômes solution $P_0, P_1, P_2, \ldots$ si l'une des assertions suivante est vérifiée :

- Q est de degré 2 et a deux racines réelles distinctes, L est linéaire et la racine de L est située entre les racines de Q et les termes de plus haut degré de Q et L ont le même signe.
- Q est linéaire, L est linéaire, les racines de Q et L sont différentes et les termes de plus haut degré de Q et L ont le même signe si la racine de L est plus petite que celle de Q ou inversement.
- Q est un polynôme constant non nul, L est linéaire et le terme de plus haut degré de L est de signe opposé à celui de Q.

Ces trois cas conduisent respectivement aux polynômes de Jacobi, de Laguerre et de Hermite.

Pour chacun de ces cas :

- La solution est une suite de polynômes $P_0, P_1, P_2, \ldots$, chaque P_n étant de degré n et correspondant au nombre λ_n.
- L'intervalle d'orthogonalité I est limitée par les racines de Q.
- La racine de L est a l'intérieur de I.
- En notant $R(x) = e^{\int_I \frac{L(t)}{Q(t)}dt}$, les polynômes sont orthogonaux sous le poids $w(x) = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.
- Le poids $w(x)$ doit être choisi positif sur l'intervalle (multiplier l'équation par -1 si nécessaire)
- $w(x)$ ne peut pas s'annuler ou prendre une valeur infinie dans l'intervalle bien qu'il puisse le faire aux extrémités.

En raison de la constante d'intégration, la quantité $R(x)$ est définie à une constante multiplicative près.

Conclusion

La motivation de ce mémoire était de présenter de façon rigoureuse la théorie des polynômes orthogonaux. Dans ce but, nous avons introduit le sujet par l'intermédiaire de la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Nous avons ensuite décortiqué certaines propriétés de base desdits polynômes, et finalement, nous avons abordé les applications.
Ceci est sans parler des sujets que nous n'avons pas abordé du tout, mentionnons la théorie des mesures secondaires, ou encore l'utilisation d'ensembles de polynômes dits « biorthogonaux » en codage et décodage de signaux.
Les objets en apparence simples mais pleins de potentiels que sont les polynômes sont encore étudiés sous plusieurs angles. Il est donc justifié de croire que la théorie continuera encore de se développer et de donner des applications intéressantes.

Bibliographie

[1] L. TODJIHOUNDE : *Cours de Topologie Licence 3*, ©IMSP

[2] J-P. RAMIS et A. WARUSFEL : *Mathématiques Tout-en-un pour la licence*. Dunod Paris, 2006

[3] A.NIKIFOROV et V.OUVAROV : *Fonctions spéciales de la Physique Mathématique*, Editions Mir - Moscou, 1978

[4] L. VALET : *Généralités sur les polynômes orthogonaux*. Mémoire de DEA, ©Université de Angers, 2000

[5] M. PAGÉ : *Polynômes orthogonaux et polynômes de McDonald*. Mémoire présenté comme exigence partielle de la maitrise en Mathématiques, ©Université du Québec a Montréal, Novembre 2006.

[6] M. LAVOIE : *Polynômes orthogonaux*. Mémoire de maitrise en Mathématiques, ©Université de Laval, 2015