
Bienvenue

Étude de quelques familles classiques de polynômes orthogonaux

Kenneth ASSOGBA & Larissa DENAKPO
kennethassogba@gmail.com

larel5000@gmail.com

Université de Abomey-Calavi (*UAC*)
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (*IMSP*)

Soutenance de Licence Spéciale des classes préparatoires

Superviseur:

Prof. **Léonard TODJIHOUNDE**

26 septembre 2016

Introduction

Les polynômes orthogonaux sont un sujet d'étude pour les mathématiciens depuis des décennies. La théorie concernant ces polynômes n'a cessé de se développer en précision et aussi en importance avec des applications dans différents domaines. En effet les polynômes orthogonaux sont utiles en physique mathématiques lors de la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (Laplace, Schrödinger) par la méthode de séparation des variables. Aussi, en analyse numérique, avec l'avènement des ordinateurs, ils sont un des outils d'approximation et d'encodage-décodage. Ces familles de polynômes orthogonaux vérifient souvent certaines relations de récurrence et sont aussi solutions d'équations différentielles.

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Formes hermitiennes et produit scalaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition : Forme hermitienne

Une forme hermitienne sur E est une application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x, y)$
2. $\forall x, y, z \in E, \phi(x + z, y) = \phi(x, y) + \phi(z, y)$
3. $\forall x, y \in E, \phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$

Définition : Produit scalaire

Soit ϕ une forme hermitienne sur E. ϕ est appelé produit scalaire sur E si elle définie positive i.e

$$\forall X \in E,\ \phi(X, X) > 0 \quad (1)$$

Formes hermitiennes et produit scalaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition : Forme hermitienne

Une forme hermitienne sur E est une application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x,y)$
2. $\forall x, y, z \in E, \phi(x+z, y) = \phi(x,y) + \phi(z,y)$
3. $\forall x, y \in E, \phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)}$

Définition : Produit scalaire

Soit ϕ une forme hermitienne sur E. ϕ est appelé produit scalaire sur E si elle définie positive i.e

$$\forall\, X \in E,\ \phi(X,X) > 0 \tag{1}$$

Espace préhilbertien et espace de Hilbert

Définition : Espace préhilbertien

Tout espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien. On définit une norme N sur E par

$$N(x) = \sqrt{\phi(x,x)}, \forall x \in E. \tag{2}$$

Définition : Espace de Hilbert

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien qui est complet relativement à la structure métrique définie par la norme associée au produit scalaire.

Espace préhilbertien et espace de Hilbert

Définition : Espace préhilbertien

Tout espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien. On définit une norme N sur E par

$$N(x) = \sqrt{\phi(x,x)}, \forall x \in E. \tag{2}$$

Définition : Espace de Hilbert

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien qui est complet relativement à la structure métrique définie par la norme associée au produit scalaire.

13

Dans toute la suite on notera :
un produit scalaire

$$\langle \, , \, \rangle \tag{3}$$

la norme associée

$$|| \; || \tag{4}$$

la distance associée

$$d(\, , \,) \tag{5}$$

Base hilbertienne

Soit E un espace de Hilbert.
On dit qu'une famille $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base hilbertienne de E si :

elle est orthonormée, c'est à dire

1. $\forall\,(i,j),\ i\neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$
2. $\forall\, i\geqslant 1,\ ||e_i|| = 1$

et si elle est complète ou totale dans E.

Projeté orthogonal

Proposition-Définition : Projeté orthogonal

Soit E un espace de Hilbert et A un sous ensemble de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $y \in A$ tel que :

$$d(x,A) = ||x-y||.$$

y est appelé projeté orthogonal de x sur A.

L'application $P_A : E \longrightarrow A$ qui à tout élément de E on associe son projeté orthogonal sur A est appelée projection orthogonale sur A.

Caractérisation du projeté orthogonal

Proposition

Soit E un espace de Hilbert, A un sous ensemble de E et $x \in E$. L'élément $y = P_A(x)$ est caractérisé par :

1. $y \in A$
2. $\forall\, z \in A, \langle x - y, z \rangle = 0.$

Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soient E un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ un système libre.
On note $E_n = Vect(e_1, \ldots, e_n)$ et on pose :

$$u_1 = e_1 \tag{6}$$

$$u_{n+1} = e_{n+1} - P_{E_n}(e_{n+1}) \tag{7}$$

Proposition : Gram Schmidt

Le système $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construit est orthogonal et $E_n = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Espace L^2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition : Densité

On appelle fonction densité une fonction $w : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n w(x)\, dx < +\infty \quad (8)$$

On note $L^2(I, d\lambda) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} / f^2 \text{ est } d\lambda \text{ intégrable}\}$.

$$d\lambda(x) = w(x)dx. \quad (9)$$

Espace L^2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition : Densité

On appelle fonction densité une fonction $w : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_I |x|^n w(x)\, dx < +\infty \tag{8}$$

On note $L^2(I, d\lambda) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} / f^2 \text{ est } d\lambda \text{ intégrable}\}$.

$$d\lambda(x) = w(x)dx. \tag{9}$$

Espace L^2 (suite)

Munit du produit scalaire définit par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\ dx, \tag{10}$$

$L^2(I, d\lambda)$ est un espace de Hilbert.

Polynômes orthogonaux

D'après Gram-Schmidt on peut construire une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, deux à deux orthogonaux tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$.

On choisi la famille libre $(f_n)_n$ avec $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, à laquelle on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Cette famille sera appelée la famille des polynômes orthogonaux associés à w.

Dans la suite de cette section l'intervalle considéré sera $I = [a,b]$

Polynômes orthogonaux

D'après Gram-Schmidt on peut construire une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, deux à deux orthogonaux tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$.

On choisi la famille libre $(f_n)_n$ avec $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, à laquelle on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Cette famille sera appelée la famille des polynômes orthogonaux associés à w.

Dans la suite de cette section l'intervalle considéré sera $I = [a,b]$

Propriétés

Soit q_n un polynôme quelconque de degré n. Alors :

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \;\in \mathbb{R}. \tag{11}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n \;\in \mathbb{R}.$

Propriétés

Soit q_k un polynôme quelconque de degré k, $k = 0, \ldots, n-1$. Alors :

$$\langle q_k, P_n \rangle = 0.$$

On suppose que $[a,b]$ est symétrique par rapport à l'origine et que la fonction densité w est paire. Alors P_n a la parité de n c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$ on a : $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Propriétés

Soit q_k un polynôme quelconque de degré k, $k = 0, \ldots, n-1$. Alors :

$$\langle q_k, P_n \rangle = 0.$$

On suppose que $[a,b]$ est symétrique par rapport à l'origine et que la fonction densité w est paire. Alors P_n a la parité de n c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$ on a : $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Formule de récurrence

Soit k_n le coefficient directeur de P_n.

Proposition : Formule de récurrence

Les polynômes P_n satisfont la formule de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \; n \geqslant 1 \tag{12}$$

avec :

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \tag{13}$$

$$B_n = -A_n \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \tag{14}$$

$$C_n = A_n \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \tag{15}$$

Formules de Darboux Christoffel

Formules de Darboux

On a les formules suivantes pour $x \neq y$:

1. $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}}[\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}]$
2. $K_n(x,x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)^2 = \frac{k_n}{k_{n+1}}[P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)] \geqslant 0$
   Les fonctions K_n sont appelées noyaux de Christoffel.

Les zéros des polynômes orthogonaux

Proposition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n sont simples et sont contenus dans $[a, b]$.

Proposition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont pas de racines en communs et de plus les racines de P_n et P_{n+1} sont alternées.

Les zéros des polynômes orthogonaux

Proposition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n sont simples et sont contenus dans $[a,b]$.

Proposition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont pas de racines en communs et de plus les racines de P_n et P_{n+1} sont alternées.

Plan

Formule de Rodrigues

Théorème

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ (on la définit plus bas), $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1. (ϕ_n) est de classe C^n sur $]a,b[$
2. ${\phi_n}^{(k)}(a^+) = {\phi_n}^{(k)}(b^-) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$
3. $T_n \equiv \frac{1}{e_n w}{\phi_n}^{(n)}$ est un polynôme de degrés n.

Alors $(T_n)_n$ est une suite orthogonale. La réciproque est vraie quand $w(x)$ est C^∞.

Équations différentielles

Théorème

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes orthogonaux définie a l'aide de la formule de Rodrigues, alors $P_n(x)$ satisfait, pour $n \geqslant 0$, une equation différentielle de la forme :

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[Q\frac{d}{dx}(wQ^n)] \tag{16}$$

$$A(x) = Q(x) \tag{17}$$

$$B(x) = e_1 P_1(x) \tag{18}$$

$$\lambda_n = -n\left(\frac{n-1}{2}Q''(x) + e_1 k_1\right) \tag{19}$$

Fonctions génératrices

Définition

A une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe les séries formelles :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n x^n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{U_n}{n!} x^n$$

Les familles classiques

On considère une famille de polynômes orthogonaux donnée par une formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{e_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(w(x) [Q(x)]^n \right) \tag{20}$$

Q est un polynôme en x de degrés k.
Les nombres e_n dépendent de la normalisation.

Pour $n = 1$:

$$e_1 P_1(x) = Q'(x) + Q(x) \frac{w'(x)}{w(x)} \tag{21}$$

Polynômes de Hermite

On considère $k = 0$, Q est constante, par exemple 1.

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = e_1 P_1(x) \tag{22}$$

est une fonction linéaire en x, on fait le changement de variable

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2x \tag{23}$$

Les polynômes issus de la formule de Rodrigues déterminée par :

$$I = \mathbb{R},\ Q(x) = 1,\ w(x) = \exp(-x^2),\ e_n \tag{24}$$

sont appelés polynômes de Hermite.

Polynômes de Hermite

Proposition : Formule de Rodrigues

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} \quad (25)$$

Proposition : Norme

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad (26)$$

δ_{nm} est le delta de Kroenecker, $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$

Polynômes de Hermite

Proposition : Formule de Rodrigues

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} \tag{25}$$

Proposition : Norme

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \tag{26}$$

δ_{nm} est le delta de Kroenecker, $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$

Polynômes de Hermite

Proposition : Relations de récurrence

$$H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0 \tag{27}$$

$$H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t) \tag{28}$$

Proposition : Équation différentielle

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{29}$$

Polynômes de Hermite

Proposition : Relations de récurrence

$$H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0 \tag{27}$$

$$H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t) \tag{28}$$

Proposition : Équation différentielle

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{29}$$

Polynômes de Hermite

Proposition : Fonction génératrice

Soit $G(t,z) = e^{2tz-z^2}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z \to G(t,z)$ est une fonction entière, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} H_n(t)\frac{z^n}{n!}$ converge et on a :

$$G(t,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} H_n(t)\frac{z^n}{n!} \tag{30}$$

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} n!\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2t)^{n-2k}}{(n-2k)!} \tag{31}$$

Polynômes de Laguerre

En considérant $k = 1$ on fait le changement de variable $\dfrac{w'(x)}{w(x)} = -1 + \dfrac{a}{x}$, on s'intéresse au cas $a = 0$

Les polynômes issus de la formule de Rodrigues déterminée par :

$$I = [0, +\infty[, \; Q(x) = x, \; w(x) = \exp(-x), \; e_n \tag{32}$$

sont appelés polynômes de Laguerre.

Polynômes de Laguerre

Proposition : Formule de Rodriguez

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{33}$$

Polynômes de Laguerre

Proposition : Relation de récurrence

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = xL_n(x) \tag{34}$$

Polynômes de Laguerre

Proposition : Équation différentielle

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{35}$$

Polynômes de Tchebytchev - Polynômes de Legendre

Supposons $k \geq 2$, on prends donc $Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)$.

Supposons les a_i distincts. On peut écrire

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{x - a_i} \Rightarrow w(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{a_i} \tag{36}$$

Cela nous donne :

$$P_n(x) = \frac{1}{e_n \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{a_i}} \frac{d^n}{dx^n} \left(\prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n + a_i} \right) \tag{37}$$

$$Q(x) = x^2 - 1, \; w(x) = (1 - x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta}, \; \alpha, \beta > -1, \; e_n \tag{38}$$

Polynômes de Tchebytchev

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

Les polynômes issus de la formule de Rodrigues déterminée par :

$$I =]-1, 1[,\ Q(x) = x^2 - 1,\ w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ e_n \qquad (39)$$

sont appelés polynômes de Tchebytchev.

Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont les polynômes définis par la relation :

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),\ \forall\theta \in \mathbb{R} \text{ soit } T_n(x) = \cos(n\arccos(x)),\ \forall x \in]-1, 1[\tag{40}$$

Polynômes de Tchebychev

Proposition : Relation de récurrence

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \tag{41}$$

Polynômes de Tchebychev

Proposition : Équation différentielle

$$(1-t^2)y'' - ty' + n^2 y = 0 \tag{42}$$

Polynômes de Tchebychev

Proposition : Racines

Les racines de T_n sont les $t_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$

Polynômes de Tchebychev

Proposition : Fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)x^n = \frac{1-xt}{1-2xt+x^2} \tag{43}$$

Polynômes de Legendre

$$\alpha = \beta = 0$$

Les polynômes issus de la formule de Rodrigues déterminée par :

$$I = [-1, 1],\ Q(x) = x^2 - 1,\ w(x) = 1,\ e_n \tag{44}$$

sont appelés polynômes de Legendre.

Polynômes de Legendre

Proposition : Formule de Rodriguez

Notons $p_n(t) := \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$. D'après la formule de Rodrigues : $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} p_n(t)$.

Proposition : Relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t) \tag{45}$$

Polynômes de Legendre

Proposition : Formule de Rodriguez

Notons $p_n(t) := \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$. D'après la formule de Rodrigues : $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}p_n(t)$.

Proposition : Relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t) \tag{45}$$

Polynômes de Legendre

Proposition : Équation différentielle

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0 \tag{46}$$

Proposition : Série génératrice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t)x^n = (1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{47}$$

Polynômes de Legendre

Proposition : Équation différentielle

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0 \tag{46}$$

Proposition : Série génératrice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t)x^n = (1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{47}$$

Plan

Quadrature de Gauss en analyse numérique

Théorème

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $(P_n)_{n \geqslant 1}$ une famille de polynômes orthogonaux par rapport à la mesure $d\lambda(x)$ associée à la densité w, avec $w : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ sont les racines de $P_n(x)$ alors il existe une suite de réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\int_I f(x) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \tag{48}$$

où $f(x)$ est une fonction polynomiale de degré $2n - 1$.

Quadrature de Gauss en analyse numérique

Les nombres a_k sont appelés nombres de Christoffel et sont déterminés par :

$$a_k = \frac{1}{K_n(x_k, x_k)} \tag{49}$$

Quadrature de Gauss en analyse numérique

Exemple

Approximation numérique de $\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx$. On utilisera les polynômes de Legendre.

n	a_n	Racines	P_n
1	2	0	x
2	$1;1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3x^2-1}{2}$
3	$\frac{5}{9};\frac{8}{9};\frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}};0;\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5x^3-3x}{2}$

Quadrature de Gauss en analyse numérique

Exemple

Approximation numérique de $\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx$. On utilisera les polynômes de Legendre.

n	a_n	Racines	P_n
1	2	0	x
2	$1;1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3x^2-1}{2}$
3	$\frac{5}{9};\frac{8}{9};\frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}};0;\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5x^3-3x}{2}$

Quadrature de Gauss en analyse numérique

Exemple

(suite) On obtient :

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx = 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + 1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 = \frac{8}{3}.$$

On peut facilement vérifier ce résultat :

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique classique est un corps de masse m attaché a un ressort linéaire. Potentiel associé à un oscillateur harmonique :

$$V(x) = cx^2 \tag{50}$$

où c est une constante.

Oscillateur harmonique

Introduisons l'équation de Schrödinger qui, en mécanique quantique, régit le comportement des particules ayant une certaine masse m placée dans un certain potentiel V. h est la constante de Planck.

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t). \quad (51)$$

Dans la suite nous travaillerons en dimension 1 avec

$$V(x) = \frac{h^2}{2mx^2} \quad (52)$$

Oscillateur harmonique

Introduisons l'équation de Schrödinger qui, en mécanique quantique, régit le comportement des particules ayant une certaine masse m placée dans un certain potentiel V. h est la constante de Planck.

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t). \tag{51}$$

Dans la suite nous travaillerons en dimension 1 avec

$$V(x) = \frac{h^2}{2mx^2} \tag{52}$$

Oscillateur harmonique

L'équation devient :

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t). \tag{53}$$

Posons $\psi(x,t) = A(x)B(t)$ et $E = hw$ comme constante de séparation. on obtient :

$$ih\frac{dB(t)}{dt} = hwB(t) \Longrightarrow B(t) = ae^{-iwt} \tag{54}$$

$$\frac{-h^2}{2m}\frac{d^2A(x)}{dx^2} + V(x)A(x) = hwA(x) \tag{55}$$

Oscillateur harmonique

Réécrivons la seconde équation en insérant le potentiel V choisi. on obtient :

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mw}{h} - x^2\right)A(x) = 0. \tag{56}$$

Posons maintenant $\frac{2mw}{h} = 2n+1$. Nous obtenons

$$\frac{d^2A}{dx^2} + (2n+1-x^2)A = 0 \tag{57}$$

Oscillateur harmonique

Réécrivons la seconde équation en insérant le potentiel V choisi. on obtient :

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mw}{h} - x^2\right)A(x) = 0. \tag{56}$$

Posons maintenant $\frac{2mw}{h} = 2n+1$. Nous obtenons

$$\frac{d^2A}{dx^2} + (2n+1-x^2)A = 0 \tag{57}$$

Oscillateur harmonique

En posant maintenant $u = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) A(x)$, l'équation précédente devient :

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2nu = 0 \tag{58}$$

Les solutions utiles de cette équation sont les polynômes de Hermite.

Oscillateur harmonique

En posant maintenant $u = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)A(x)$, l'équation précédente devient :

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2nu = 0 \tag{58}$$

Les solutions utiles de cette équation sont les polynômes de Hermite.

Plan

Conclusion

La motivation de ce mémoire était de présenter de façon rigoureuse la théorie des polynômes orthogonaux. Dans ce but, nous avons introduit le sujet par l'intermédiaire de la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Nous avons ensuite décortiqué certaines propriétés de base desdits polynômes, et finalement, nous avons abordé les applications.
Ceci est sans parler des sujets que nous n'avons pas abordé du tout, mentionnons la théorie des mesures secondaires, ou encore l'utilisation d'ensembles de polynômes dits « biorthogonaux » en codage et décodage de signaux.
Les objets en apparence simples mais pleins de potentiels que sont les polynômes sont encore étudiés sous plusieurs angles. Il est donc justifié de croire que la théorie continuera encore de se développer et de donner des applications intéressantes.


Merci!