Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques

Cours : discrétisation d'EDO (S.-M. Kaber)

Projet

L'objectif de ce travail est de présenter plusieurs modélisations de l'évolution de populations : population isolée, populations composées d'éspèces en "prédation" (prédateurs et de proies), d'éspèces en comptition (partageant la même ressource), . . . Dans chaque cas, la modélisation est donnée par une EDO en dimension 1 *ou* 2*. Pour chaque EDO, vous devez vous poser et répondre aux questions suivantes : quels sont les états d'équilibre ?(s'il y en a). Ces états sont ils stables ? instables ? Selon les cas, vous devez répondre à ces questions en faisant des calculs à la main ou en vous aidant des fonctions de Scilab. Vous devez commenter vos programmes et analyser les résultats obtenus. N'hésitez pas à modifier les paramètres (ainsi que les conditions initiales) donnés dans le texte pour voir et comprendre leur influence sur la solution de l'ODE.*

Une version mise à jour de ce texte est disponible à
https://www.ljll.math.upmc.fr/kaber/IMSP/projet.pdf

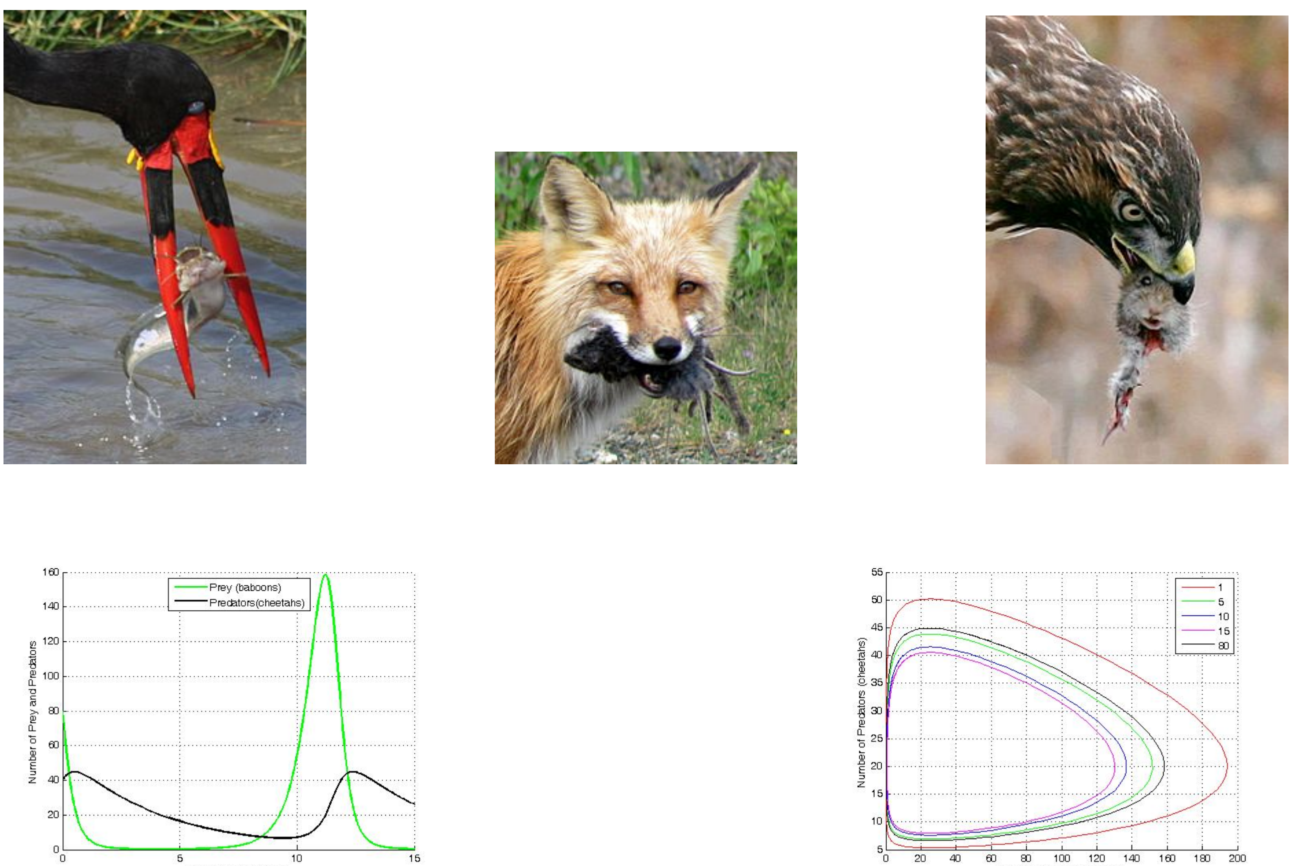

FIGURE 1 – Dynamique de deux populations : proies et prédateurs (source : Wikipedia).

1. **Équation logistique**. L'évolution au cours du temps d'une population évoluant en milieu fermé peut être modélisée par

$$u'(t) = au(t)(1 - bu(t)).$$

Les paramètres a et b sont positifs.

✔ Le terme $au(t)$ modélise l'accroissemnt naturel de la population.

✔ le terme $-abu^2(t)$ freine cette croissance, les ressources disponibles étant limitées.

La condition initiale est $u(t_0) = u_0$, population à un instant donné t_0.

(a) Écrire le schéma d'Euler explicite pour cette équation. Exemples de paramètres $(a, b) = (0.5, 0.1)$, $(a, b) = (7, 0.14)$. On prendra $T = 1$ et on essaiera différentes valeurs initiales u_0.

(b) Même question avec le schéma d'Euler modifié.

(c) Comparer les résultats avec la solution donnée par le solveur `ODE` de `Scilab`.

2. **Système de Lotka-Volterra (proies-prédateurs)**. On considère cette fois deux populations. Une population de proies dont l'évolution est donnée par $u_1(t)$ et une population de prédateurs dont l'évolution est donnée par $u_2(t)$. Voici une modélisation de l'interaction entre ces deux populations

$$\begin{cases} u_1'(t) &=& au_1(t) - bu_1(t)u_2(t) \\ u_2'(t) &=& -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t). \end{cases}$$

Les paramètres a, b, c et d sont positifs. La condition initiale est cette fois un vecteur $(u_1(t_0), u_2(t_0)) = (u_{1,0}, u_{2,0})$, populations à un instant donné t_0.

✔ Le terme $au_1(t)$ modélise l'accroissement naturel des proies.

✔ Le terme $-cu_2(t)$ modélise l'accroissement naturel des prédateurs.

✔ Le produit $u_1(t)u_2(t)$ modélise l'interaction entre les deux populations ; il apparaît avec un signe positif dans l'équation d'évolution des prédateurs et avec un signe négatif dans l'équation d'évolution des proies.

(a) Mettre le problème (2) sous forme d'un système différentiel du premier ordre

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$. On précisera la fonction f et les vecteurs y et y_0.

(b) Écrire le schéma d'Euler explicite pour cette équation. Exemple de paramètres

$$(a, b, c, d) = (1, 0.2, 0.5, .1).$$

On essaiera différentes valeurs initiales, par exemple $(50, 20)$.

(c) Même question avec le schéma RK4.

(d) Même question avec un **schéma RK implicite** de votre choix.

(e) Comparer les résultats avec la solution donnée par le solveur `ODE` de `Scilab`. Comparer les résultats.

3. **Modèle logistique de Verhulst**. Dans cette modèlisation, l'évolution des prédateurs est modifiée en y rajoutant un terme logistique (voir 1).

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(t) & = & au_1(t) - eu_1(t)^2 - bu_1(t)u_2(t) \\ u_2'(t) & = & -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t). \end{array}\right.$$

Résoudre ce problème en utilisant le divers schémas que vous avez programmés aux questions précédentes. Comparer avec les résultats obtenus avec le solveur `ODE` de `Scilab`.
On pourra prendre les paramètres suivants

$$(a, b, c, d) = (1, 0.2, 0.5, .1).$$

et tester plusieurs valeurs du paramètre e. Étudier l'évolution du système en partant de la donnée initiale $(a/e, 0)$.

4. **Populations en compétition**. Les équations sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(t) & = & u_1(t)(1 - u_1 - \theta_{1,2}u_2) \\ u_2'(t) & = & au_2(t)(1 - u_2 - \theta_{2,1}u_1), \end{array}\right.$$

où $\theta_{i,j}$ représente l'effet de la populataion j sur la population i. Résoudre ce problème en utilisant le divers schémas que vous avez programmés aux questions précédentes. Comparer avec les résultats obtenus avec le solveur `ODE` de `Scilab`. On pourra prendre les jeux de paramètres suivants

$$(\varrho, \theta_{1,2}, \theta_{2,1}) =, (1, 3/2, 1/2), (1/2, 2, 3)$$

et bien d'autres ! On essaiera diverses conditions initiales.

5. **Généralisation**. Il vous est demandé de présenter une généralisation de l'un des modèles précédents au cas de trois espèces (ou plus !).