

UNIVERSITE D'ABOMEY CALAVI (UAC)

INSTITUT DE MATHEMATIQUE ET DE SCIENCES PHYSIQUES
(IMSP)

Centre d'Excellence Africain en Science Mathématiques et Applications:
(CEA-SMA)

Projet: Discrétisation d'EDO

Modélisation en dynamique des populations

Présenté par:
Anne-Marie AHOUNOU
Kenneth ASSOGBA

Supervisé par :
Professeur Kaber M. SIDI

La modélisation des dynamiques des populations vise à expliquer, et éventuellement à prévoir, les évolutions d'une population. La plupart du temps, elle se limite à la description des variations de la taille de la population, mais elle peut aussi permettre de décrire l'évolution de sa structure en âge, voire de sa structure génétique. De nombreux scientifiques ont, proposé des modèles, c'est-à-dire des représentations simplifiées de telles dynamiques, le plus souvent sous forme mathématique.

Dans ce rapport pour notre projet de discrétisation d'EDO, nous étudierons quatre modèles notamment ceux de Lotka-Volterra et de Verhulst.

Dans chaque cas, nous ferons une étude des points d'équilibre et une résolution numérique avec Scilab. Enfin nous présenterons une généralisation de l'un des modèles.

1 Équation logistique

L'évolution au cours du temps d'une population évoluant en milieu fermé peut être modélisée par

$$u'(t) = au(t)(1 - bu(t)) \quad (1)$$

Une observation immédiate montre que

1. la fonction constante 0 est solution de cette équation
2. la fonction constante $K = 1/b$ est solution de cette équation

La recherche des fonctions strictement positives solutions du problème de Cauchy avec la condition initiale $u(t_0) = u_0$ conduit à la solution logistique

$$u(t) = \frac{1}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{bu_0} - 1\right)e^{-at}} \quad (2)$$

où l'on observe que **la population tend vers le point $K = 1/b$, qu'elle est croissante si la population initiale est inférieure à K et décroissante sinon.**

1.1 Stabilité des états d'équilibre

On pose $f(u) = au(1 - bu)$

Nous avons déjà les états d'équilibres qui sont solutions de l'équation $f(u) =$

0. Étudions la stabilité de ces solutions.

Par suite $f'(u) = a - 2abu$

Ainsi

1. $f'(0) = a > 0$ c'est un **équilibre instable**
2. $f'(1/b) = a - 2a = -a < 0$ c'est un **équilibre stable**

1.2 Solutions graphiques

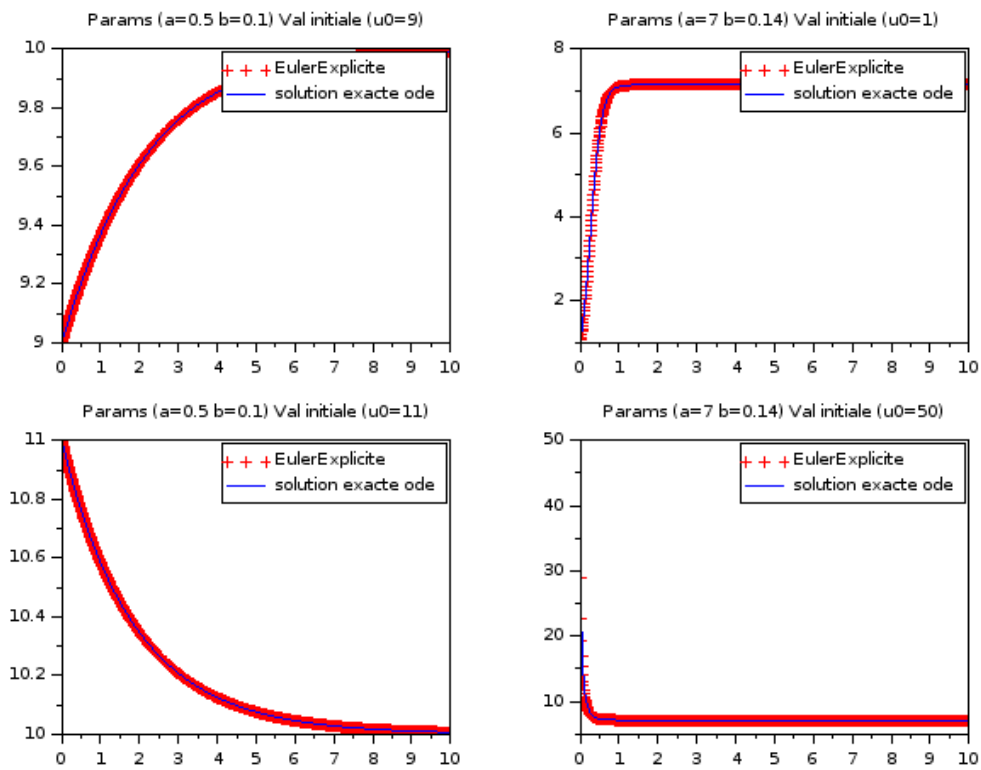


Figure 1: Équation logistique avec Euler explicite et ODE

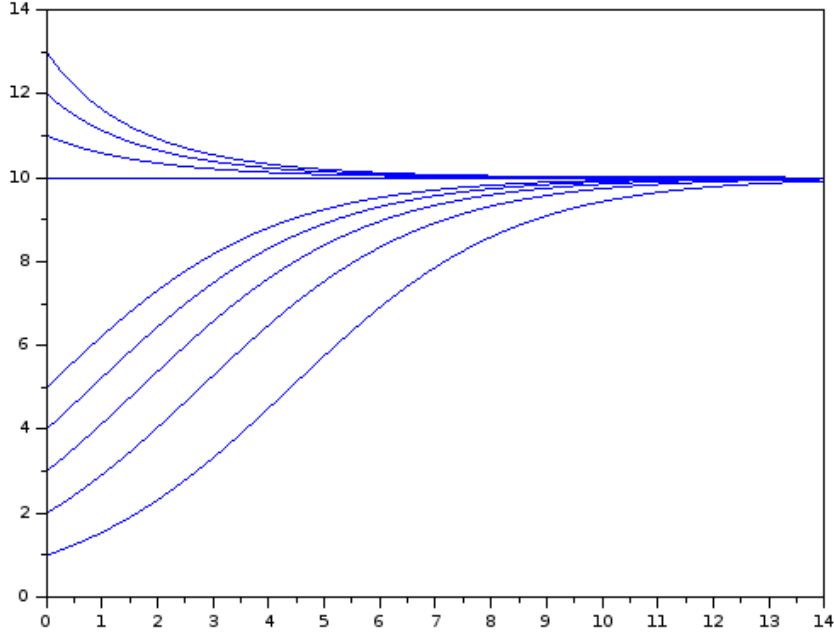


Figure 2: $a=0.5$ $b=0.1$ et u_0 varie.

2 Système de Lotka-Volterra (proies-prédateurs)

On considère cette fois deux populations. Une population de proies dont l'évolution est donnée par $u_1(t)$ et une population de prédateurs dont l'évolution est donnée par $u_2(t)$. Voici une modélisation de l'interaction entre ces deux populations:

$$\begin{cases} u_1'(t) = au_1(t) - bu_1(t)u_2(t) \\ u_2'(t) = -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) \end{cases}$$

2.1 États d'équilibres de la population

Un état d'équilibre de la population est observé quand aucune des deux populations en présence n'évolue, c'est-à-dire quand les dérivées correspondantes sont nulles, ce qui se traduit par le système d'équations:

$$\begin{cases} au_1(t) - bu_1(t)u_2(t) = 0 \\ -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons deux solutions:

$$U_1 = \begin{cases} u_1(t) = 0 \\ u_2(t) = 0 \end{cases}$$

et

$$U_2 = \begin{cases} u_1(t) = c/d \\ u_2(t) = a/b \end{cases}$$

La première solution correspond à une extinction définitive des deux espèces, la seconde à des valeurs pour les deux populations, dépendant des paramètres qui restent stables.

2.2 Stabilité des états d'équilibre

La matrice jacobienne du système est

$$J(u_1(t), u_2(t)) = \begin{bmatrix} a - bu_2(t) & -bu_1(t) \\ du_2(t) & -c + du_1(t) \end{bmatrix}$$

1. Point U_1

Au premier point fixe $(0, 0)$, cette matrice prend la valeur :

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix},$$

qui a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -c.$$

Ces valeurs propres sont toujours de signes opposés, ce qui montre que ce point fixe est un **point col**. Ce n'est donc pas un point fixe stable, ce qui montre en particulier que, suivant ce modèle, **l'extinction des deux espèces est difficile à obtenir**.

2. Point U_2

Au second point fixe, la valeur suivante est obtenue :

$$J\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

et elle a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = i\sqrt{ac}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{ac}$$

Ce point fixe est donc un foyer et plus particulièrement un **centre**, ce qui signifie que **les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe**.

2.3 Solutions graphiques

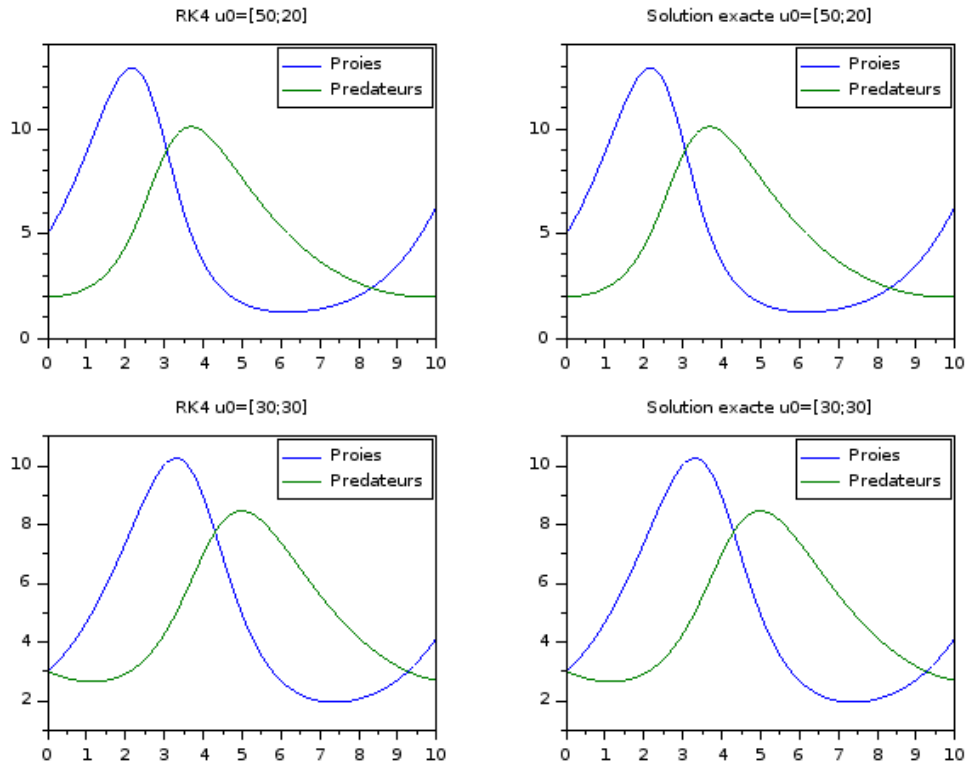


Figure 3: Solutions des équations de Lotka-Volterra obtenues par un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4, pour une valeur de $a=1$, $b=0.2$, $c=0.5$, $d=0.1$

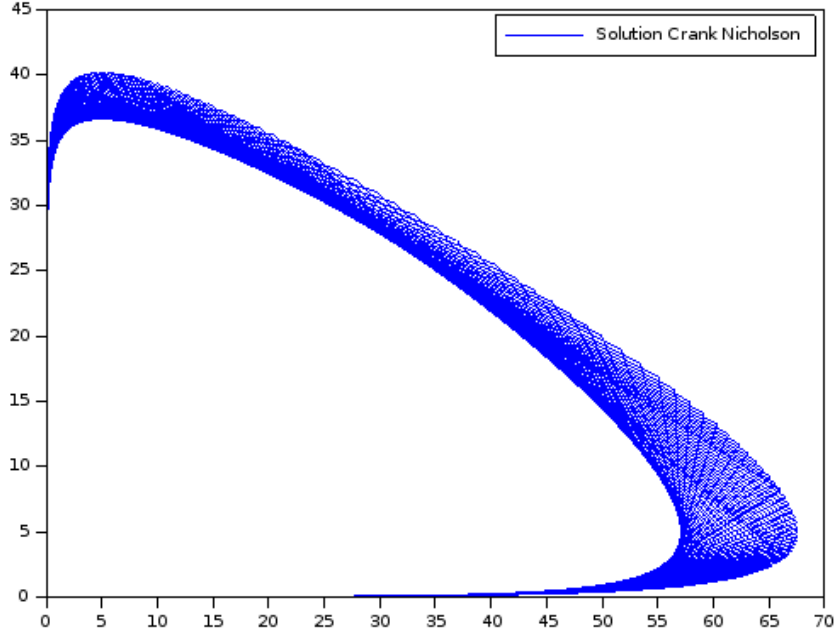


Figure 4: Representation du nombre de predateur en fonction du nombre de proies avec le schema de Crank Nicholson en temps tres grand (T=1000)

3 Modèle logistique de Verhulst

Dans cette modélisation, l'évolution des prédateurs est modifiée en y rajoutant un terme logistique

$$\begin{cases} u_1'(t) = au_1(t) - eu_1(t)^2 - bu_1(t)u_2(t) \\ u_2'(t) = -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) \end{cases}$$

3.1 États d'équilibres de la population

On pose:

$$\begin{cases} au_1(t) - eu_1(t)^2 - bu_1(t)u_2(t) = 0 \\ -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Et on obtient de façon directe comme points d'équilibre: $(0, 0)$ et $(1/e, 0)$

1. si $\frac{c}{d} < \frac{1}{e}$ alors on a 3 points d'équilibre: $(0, 0)$, $(1/e, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}(1 - \frac{ec}{d}))$

2. si $\frac{c}{d} > \frac{1}{e}$ alors on a 2 points d'équilibre: $(0, 0)$ et $(1/e, 0)$

3.2 Stabilité des états d'équilibre

La matrice jacobienne du système est:

$$J(u_1(t), u_2(t)) = \begin{bmatrix} a - 2aeu_1(t) - bu_2(t) & -bu_1(t) \\ -du_2(t) & -c + du_1(t) \end{bmatrix}$$

1. Stabilité de $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

Une des valeurs propres est $a > 0$ **l'équilibre est donc instable**
Quelque soit les valeurs des paramètres a, b, c, d, e et la condition initiale la trajectoire d'une solution s'éloigne toujours de $(0, 0)$

2. Stabilité de $(1/e, 0)$

$$J(1/e, 0) = \begin{bmatrix} -a & \frac{-b}{e} \\ 0 & -c + \frac{d}{e} \end{bmatrix}$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = -a < 0$ et $\lambda_2 = -c + \frac{d}{e}$ **l'équilibre est donc instable**

- a) si $\frac{c}{d} < \frac{1}{e}$ alors $\lambda_2 > 0$ **équilibre instable**

- b) si $\frac{c}{d} > \frac{1}{e}$ alors $\lambda_2 < 0$ **équilibre stable**

3.3 Solutions graphiques

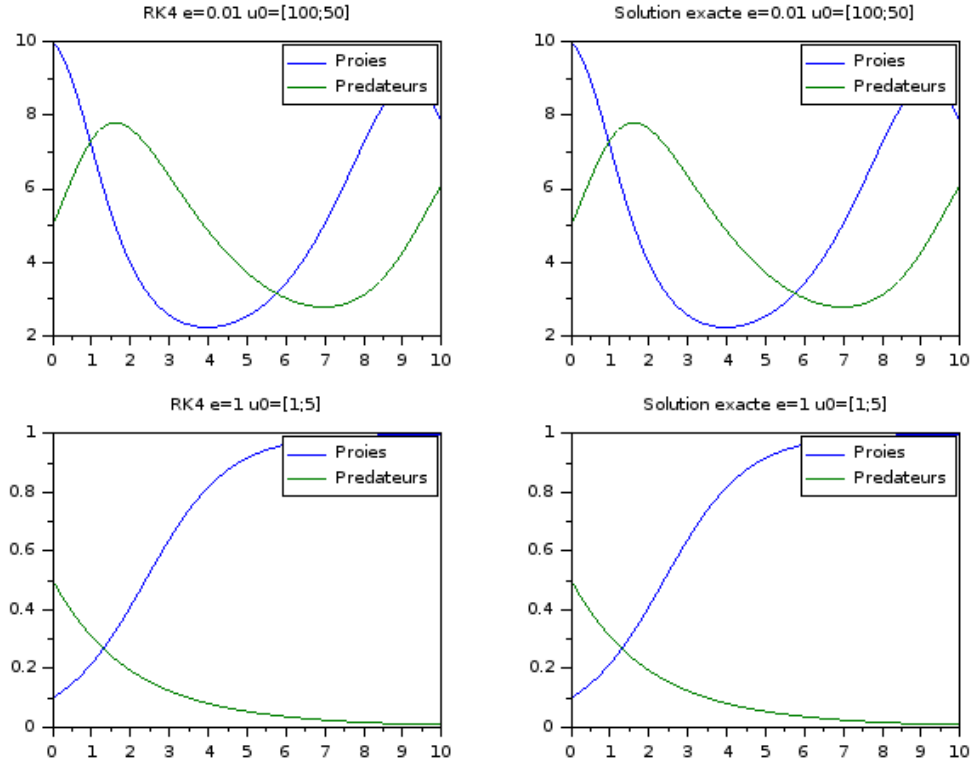


Figure 5: Modèle logistique de Verhulst Schéma RK4

4 Populations en compétition

Les équations sont:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t) (1 - u_1(t) - \theta_{12}u_2(t)) \\ u_2'(t) = au_2(t) (1 - u_2(t) - \theta_{21}u_1(t)) \end{cases}$$

Où θ_{ij} représente l'effet de la population j sur la population i

4.1 États d'équilibres de la population

Les équilibres du système sont les points où les deux dérivées s'annulent simultanément. Il y en a au moins trois: $(0,0)$ correspondant à l'extinction des

deux espèces ainsi que $(1,0)$ et $(0,1)$ correspondants à l'exclusion compétitive de l'une ou l'autre espèce.

4.2 Stabilité des états d'équilibre

La matrice jacobienne du système est:

$$J(u_1(t), u_2(t)) = \begin{bmatrix} 1 - 2u_1(t) - \theta_{12}u_2(t) & -\theta_{12}u_1(t) \\ -\theta_{21}au_2(t) & a(1 - 2u_2(t) - \theta_{21}u_1(t)) \end{bmatrix}$$

1. $(0,0)$ a pour valeur propres associées $(1, a)$. Cet équilibre est donc toujours un **noeud instable**.
2. $(0,1)$ a pour valeurs propres associées $(-1, a(1 - \theta_{12}))$. Cet équilibre est donc un **noeud stable si** $\theta_{12} > 1$.
3. $(1,0)$ a pour valeurs propres associées $(1 - \theta_{21}, -a)$. Cet équilibre est donc un **noeud stable si** $\theta_{21} > 1$.

La coexistence stable des deux espèces n'est possible que si les deux équilibres d'exclusion compétitive sont simultanément instables. C'est à dire si $\theta_{12} < 1$ et $\theta_{21} < 1$. L'interprétation écologique de cette condition est la nécessité que la compétition interspécifique (dont l'intensité est représentée par les paramètres θ_{12} et θ_{21}) soit plus faible que la compétition intraspécifique dont l'intensité vaut ici 1.

4.3 Solutions numeriques

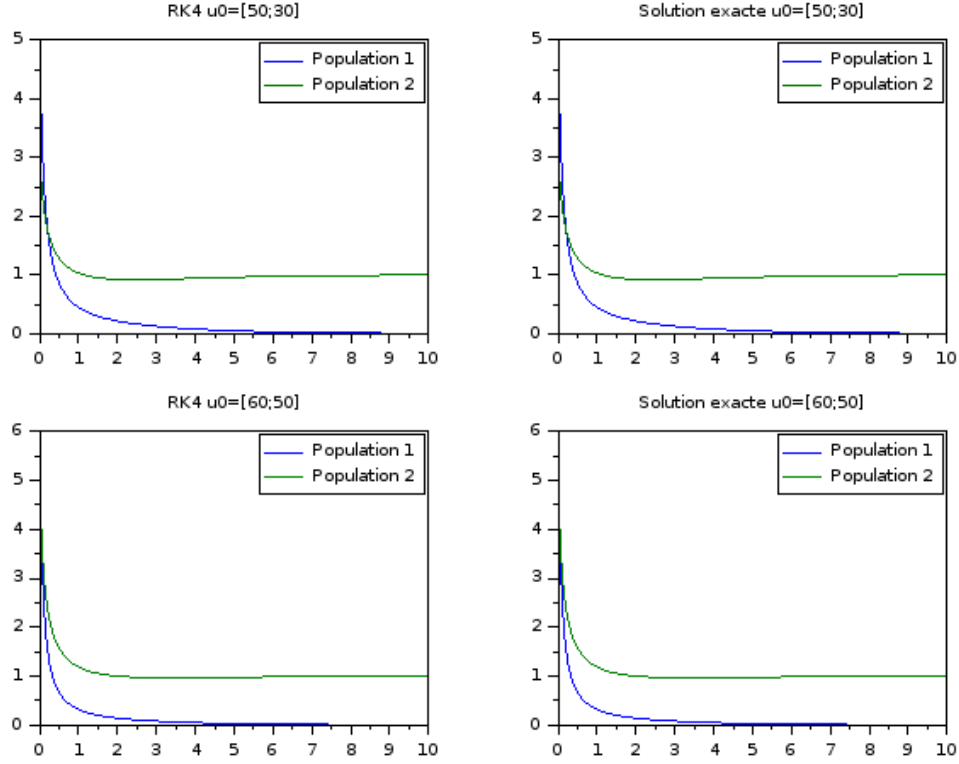


Figure 6: Populations en compétition Schéma RK4

5 Généralisation

Nous nous proposons de generaliser le modele des populations en compétition:

$$\begin{cases} u_1'(t) = r_1 u_1 \left(1 - \left(\frac{u_1 + \theta_{12} u_2}{K_1} \right) \right) \\ u_2'(t) = r_2 u_2 \left(1 - \left(\frac{u_2 + \theta_{21} u_1}{K_2} \right) \right) \end{cases}$$

Avec un taux de croissance $r_1 = 1$ (respectivement $r_2 = a$) et une capacité biotique $K_1 = 1$ (respectivement $K_2 = 1$)

On obtient le modele du projet:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t) (1 - u_1(t) - \theta_{12} u_2(t)) \\ u_2'(t) = a u_2(t) (1 - u_2(t) - \theta_{21} u_1(t)) \end{cases}$$

A l'ordre 3 on obtient:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t)(1 - u_1(t) - \theta_{12}u_2(t) - \theta_{13}u_3(t)) \\ u_2'(t) = au_2(t)(1 - u_2(t) - \theta_{21}u_1(t) - \theta_{23}u_3(t)) \\ u_3'(t) = bu_3(t)(1 - u_3(t) - \theta_{31}u_1(t) - \theta_{32}u_2(t)) \end{cases}$$

Où θ_{ij} représente l'effet de la population j sur la population i

Ce modèle peut être généralisé à un nombre quelconque d'espèces en compétition:

$$u_i'(t) = r_i u_i(t) \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^R \theta_{ij} u_j(t)}{K_i} \right)$$

Où R est le nombre d'espèces en compétition. On remarque l'apparition de terme a_{ii} dont la valeur est généralement fixée à 1 par souci de cohérence avec le modèle de croissance logistique.

5.1 Solutions graphiques

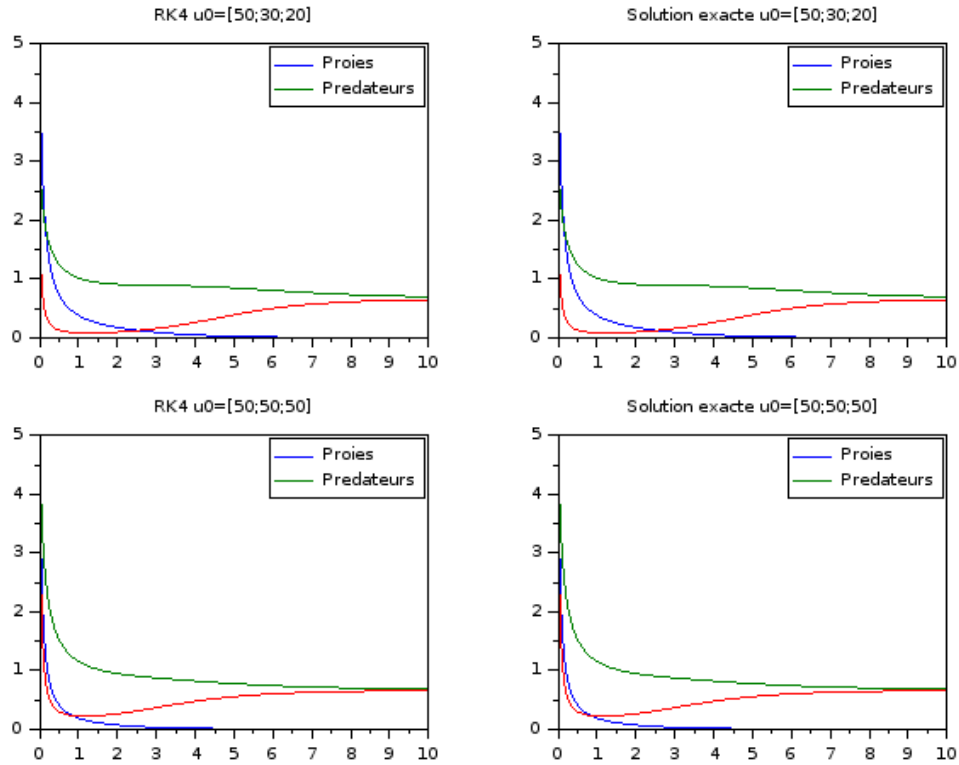


Figure 7: généralisation Populations en compétition 5. Schéma RK4

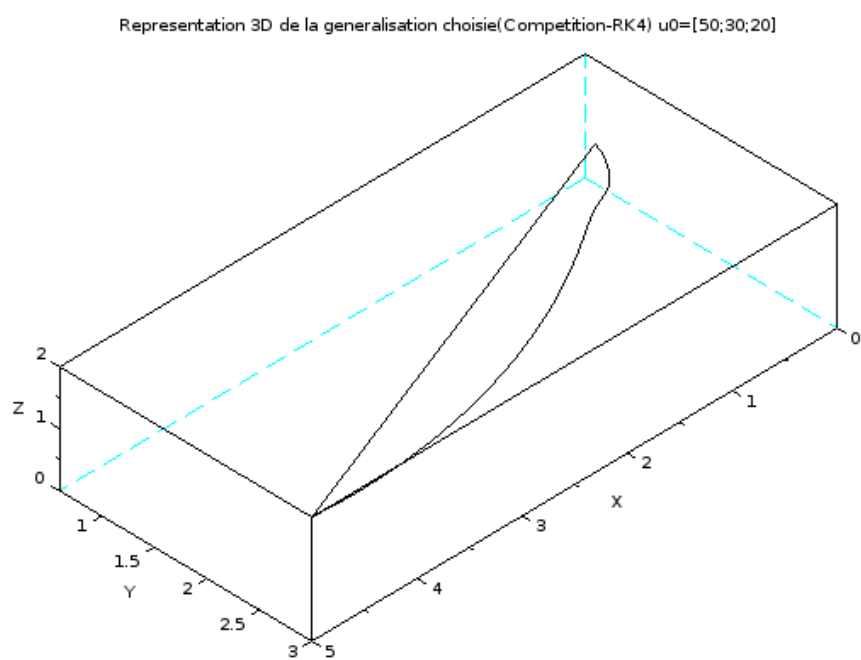


Figure 8: Representation 3D de la generalisation choisie(Competition-RK4)