

MEMOIRE DE MASTER  
MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET APPLICATIONS

THÈME

---

SCHÉMAS MONOTONES DISCRETS POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

---

**Présenté par :**

**Kenneth ASSOGBA**  
kennethassogba@gmail.com

**Sous la direction de :**

**Prof. Julien SALOMON**  
SORBONNE UNIVERSITÉ, UPMC UNIV PARIS 06,  
UMR 7598, LABORATOIRE JACQUES-LOUIS LIONS,  
PARIS, FRANCE

**Année Académique : 2018-2019**

---

# Dédicaces

---

À ma famille.

À mon frère défunt. La mort n'arrête pas l'amour.

---

# Remerciements

---

Je remercie tout d'abord DIEU qui m'a donné la force et le courage d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire le Professeur Julien SALOMON qui a bien voulu m'accorder sa confiance en me permettant de travailler sur ce thème. Sa patience et son soutien m'ont été précieux pour la conduite de ce travail dans de très bonnes conditions.

Je remercie l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP), l'établissement qui m'a servi de cadre adéquat pendant ces deux ans d'études de Master. Je remercie le Directeur, Professeur Léonard TODJIHOUNDE, le Directeur Adjoint, Professeur Carlos OGOUYANDJOU, les enseignants missionnaires comme locaux ainsi que tout le personnel administratif de l'Institut.

Je tiens à dire merci pour le projet Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications (CEA-SMA) pour son soutien financier. Je remercie également le coordonnateur de ce projet Professeur Joël TOSSA et son coordonnateur adjoint Professeur Aboubakar MARCOS.

Mes remerciements vont également à tous mes amis et camarades ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Enfin j'exprime ma profonde gratitude à ma très chère famille, principalement mes parents.

---

# Résumé

---

## Résumé

Les problèmes de contrôle optimal sur les systèmes quantiques suscitent un vif intérêt, aussi bien pour les questions fondamentales que pour les applications existantes et futures. Un problème important est le développement de méthodes de construction de contrôles pour les systèmes quantiques. Une des méthodes couramment utilisée est la méthode de Krotov initialement proposée dans un cadre plus général dans les articles de V.F. Krotov et I.N. Feldman (1978 [1], 1983 [2]). Cette méthode a été utilisée pour développer une nouvelle approche permettant de déterminer des contrôles optimaux pour les systèmes quantiques dans [3] et dans de nombreux autres travaux de recherche : [4], [5] et [6] notamment. Leur mise en œuvre numérique repose souvent sur des discrétisations liées à des développements limités. Cette approche entraîne cependant parfois des instabilités numériques. Nous présentons ici plusieurs méthodes de discrétisation temporelle qui permettent de résoudre ce problème en conservant au niveau discret la monotonie des schémas.

**Mots-clés :** contrôle optimal, contrôle quantique, schémas monotones, méthode de Krotov.

---

# Abstract

---

## Abstract

Mathematical problems of optimal control in quantum systems attract high interest in connection with fundamental questions and existing and prospective applications. An important problem is the development of methods for constructing controls for quantum systems. One of the commonly used methods is the Krotov method initially proposed beyond quantum control in the articles by V.F. Krotov and I.N. Feldman (1978 [1], 1983 [2]). The method was used to develop a novel approach for finding optimal controls for quantum systems in [3], and in many works of various scientists : [4], [5] and [6] especially. However, the properties of the discrete version of these procedures have not been yet tackled with. We present here a stable time and space discretization which preserves the monotonic properties of the monotonic algorithms.

**Keywords :** optimal control, quantum control, monotonically convergent algorithms, Krotov method

---

# Notations

---

$\Omega$	Espace des configurations
$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert correspondant à un système quantique. $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ ou $\mathbb{C}^N$ en dimension finie
$\mathcal{H}^*$	Dual de $\mathcal{H}$
$\ \cdot\ $	norme associée à $\mathcal{H}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit hermitien sur $\mathcal{H}$ $\langle \psi, \phi \rangle = \sum_{k=1}^N \psi_k^* \phi_k$ en dimension finie $\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\Omega} \psi^*(x) \phi(x) dx$ en dimension infinie on note indifféremment $\langle \psi, \phi \rangle = \langle \psi    \phi \rangle = \langle \psi   \phi \rangle$
$ \phi\rangle$	notation ket de Dirac dans ce memoire on note indifféremment $\phi =  \phi\rangle \in \mathcal{H}$
$\langle \psi $	notation bra de Dirac dans ce memoire on note indifféremment $\psi = \langle \psi  \in \mathcal{H}^*$
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable sur $\Omega$
$ \cdot $	Valeur absolue
$(\cdot, \cdot)$	Produit scalaire de $\mathbb{R}^d$
$\nabla u$	Gradient de la fonction $u$
$\Re$	Partie réelle
$\Im$	Partie imaginaire

---

# Table des matières

---

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Notations</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Mécanique quantique et contrôle quantique</b>	<b>4</b>
1.1 La mécanique quantique en trois postulats . . . . .	4
1.1.1 Premier postulat de la mécanique quantique . . . . .	4
1.1.2 Observables et deuxième postulat . . . . .	5
1.1.3 Equation de Schrödinger et troisième postulat . . . . .	6
1.2 Contrôle quantique . . . . .	7
1.2.1 Exemple de modèle bilinéaire (BLM) . . . . .	7
1.2.2 Cas d'un champs laser . . . . .	8
1.3 Discrétisation temporelle . . . . .	8
1.3.1 Méthode du splitting d'opérateur . . . . .	8
1.3.2 Schéma de Cranck-Nicholson . . . . .	10
<b>2 Schémas monotones pour l'équation de Schrödinger</b>	<b>11</b>
2.1 Cadre général . . . . .	11
2.1.1 Fonctionnelle . . . . .	11
2.1.2 Equations critiques, mutiplicateur de Lagrange . . . . .	12
2.2 Application à l'équation de Schrödinger . . . . .	13
2.2.1 Fonctionnelles de coût . . . . .	14
2.3 Schémas monotones . . . . .	15
<b>3 Schémas monotones discrets</b>	<b>18</b>
3.1 Introduction . . . . .	18
3.2 Variation entre deux itérations successives . . . . .	19
3.3 Schémas implicites . . . . .	24
3.3.1 Existence de solutions . . . . .	27
3.3.2 Unicité et itérations de Picard . . . . .	29
3.3.3 Méthode de Newton . . . . .	30

---

3.3.4	Résultats numériques . . . . .	30
3.4	Schémas explicites . . . . .	31
3.4.1	Résultats numériques . . . . .	32
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>36</b>
<b>Annexe A</b>		<b>36</b>
3.5	Rappels sur les espaces de Hilbert . . . . .	37
3.5.1	Produit scalaire hermitien . . . . .	37
3.5.2	Norme hermitienne . . . . .	38
3.6	Opérateur hermitien . . . . .	39
<b>Annexe B</b>		<b>39</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>41</b>



---

# Table des figures

---

1	Problème de contrôlabilité . . . . .	2
2	Problème de contrôle optimal . . . . .	2
3.1	Schéma implicite - évolution de la fonctionnelle . . . . .	31
3.2	Schéma explicite - évolution de la fonctionnelle . . . . .	33
3.3	Schéma explicite - évolution de la fonctionnelle . . . . .	33
3.4	Schéma explicite - évolution de la fonctionnelle . . . . .	34
3.5	Schéma explicite pour un problème en dimension 10 - évolution de la fonctionnelle . . . . .	35

---

# Introduction

---

## Origines de la mécanique quantique

A la fin du XIXe siècle, les diverses branches de la physique s'intégraient dans un édifice cohérent, basé sur l'étude de deux types d'objets distincts, la matière et le rayonnement :

- La matière est faite de corpuscules parfaitement localisables dont le mouvement peut être décrit par la mécanique de Newton. Les grandeurs physiques associées à ces corpuscules s'expriment en fonction des composantes de la position et de l'impulsion qui sont les variables dynamiques fondamentales.
- Le rayonnement est gouverné par les lois de l'électromagnétisme de Maxwell. Ses variables dynamiques sont les composantes en chaque point de l'espace des champs électrique et magnétique.

Le succès de la physique était à cette époque impressionnant et tous les phénomènes connus trouvaient leur explication dans le cadre de ce programme classique.

A l'aube du XXe siècle et avec l'essor des progrès technologiques, les physiciens se trouvèrent tout à coup confrontés à des phénomènes nouveaux pour lesquels les prévisions de la théorie classique sont en désaccord flagrant avec l'expérience. Il fallait donc jeter les bases d'une nouvelle théorie susceptible de pallier les insuffisances de la conception classique.

## Contrôle optimal et optimisation numérique

L'objet de notre étude est un système quantique, modélisé entre deux mesures par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t) \quad (1)$$

En vue de modéliser les interactions onde-matière à l'échelle atomique, nous introduisons un contrôle, généré par un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\mu(x)$ , émettant un champs (électrique) laser, d'amplitude  $\varepsilon(t)$  dépendant du temps.

La dynamique du système est désormais donnée par :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= H\psi(x, t) - \mu(x)\varepsilon(t)\psi(x, t) \\ \psi(x, t = 0) &= \psi_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

$H$  étant un opérateur hermitien, défini par :

$$H = H_0 + V = -\frac{1}{2m}\Delta + V$$

En posant :

$$A(\psi(t), \varepsilon(t)) = -i(H - \mu(x)\varepsilon(t))\psi(x, t) \quad (3)$$

On se ramène au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= A(\psi(t), \varepsilon(t)) \\ \psi(t=0) &= \psi_0 \end{cases} \quad (4)$$

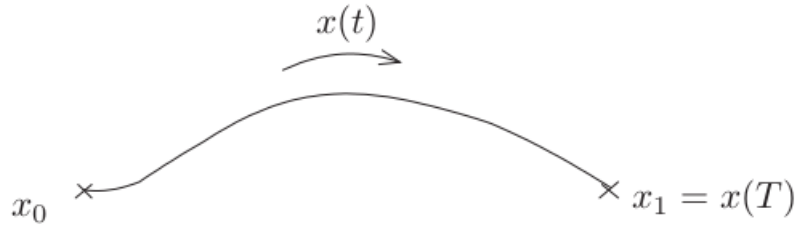
Nous nous posons maintenant deux questions.

## Problème de contrôlabilité

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle. Plus précisément on pose la définition suivante.

**Définition 1.** On dit que le système (4) est contrôlable (ou commandable) si pour tous les états  $\psi_0 \in \mathcal{H}$ ,  $\psi_{cible} \in \mathcal{H}$ , il existe un temps fini  $T$  et un contrôle admissible  $\varepsilon(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\psi_{cible} = \psi(T, \psi_0, \varepsilon(\cdot))$ .

FIGURE 1 – Problème de contrôlabilité

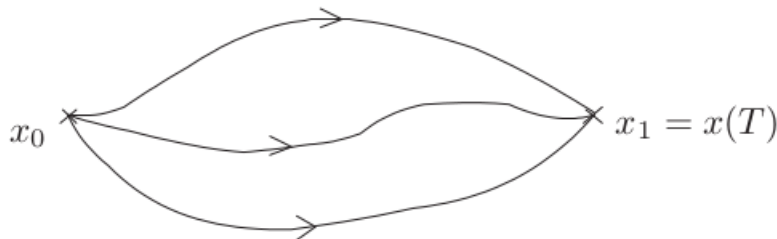


Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant  $\psi_0$  à  $\psi_{cible}$ , et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle  $J(\varepsilon)$  ?

## Contrôle optimal

La fonctionnelle  $J(\varepsilon)$  est un critère d'optimisation, on l'appelle le coût. Par exemple ce coût peut être égal au temps de parcours; dans ce cas c'est le problème du temps minimal.

FIGURE 2 – Problème de contrôle optimal



On considère ainsi une fonctionnelle  $J$

$$J(\varepsilon) = \langle \psi(T) | O | \psi(T) \rangle - \alpha \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (5)$$

et on se pose le problème : Trouver  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon$  résout

$$\max_{\varepsilon \in L^2(0,T)} J(\varepsilon)$$

Au maximum de la fonctionnelle  $J(\varepsilon)$ , les équations de Euler-Lagrange sont satisfaites. Le Lagrangien du système est donné par :

$$L(\psi, \varepsilon, \chi) = J(\varepsilon) - 2\Re \left\{ \int_0^T \langle \chi(t) | \partial_t + i(H_0 + V - \mu(x)\varepsilon(t)) | \psi(t) \rangle dt \right\} \quad (6)$$

## Schémas monotones

Une stratégie efficace de résolution de ces équations est donnée par une classe d'algorithmes relevant du contrôle quantique, les schémas monotones. Ils ont été introduits en 1992 par David Tannor, Vladimir Kazakov et V. Orlov, [3], sur la base des travaux de Krotov [1], [2]. Une amélioration a ensuite été proposée par Wusheng Zhu et Herschel Rabitz [4] en 1998. Une généralisation est donnée par Yvon Maday et Gabriel Turinici en 2003 [5].

Comment construire une discrétisation temporelle puis spatiale de ces algorithmes qui préserve la propriété de monotonie ?

Dans le Chapitre Premier, nous introduisons la mécanique quantique en trois postulats et présentons le cadre général du contrôle quantique. Le Chapitre Deux est dédié aux schémas monotones pour l'équation de Schrödinger. Différentes discrétisations de ces schémas sont proposées dans le Chapitre Trois.

# MÉCANIQUE QUANTIQUE ET CONTRÔLE QUANTIQUE

---

## 1.1 La mécanique quantique en trois postulats

### 1.1.1 Premier postulat de la mécanique quantique

#### Fonction d'onde

En mécanique quantique, l'état d'un système donné, est donné par son vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle$ . L'espace des états dépend du système considéré. Par exemple, dans le cas le plus simple où le système n'a pas de spin, les états quantiques sont des fonctions  $\psi$  :

$$\begin{aligned}\psi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) &\mapsto \psi(x, y, z)\end{aligned}$$

telles que l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$  converge. Dans ce cas,  $\psi$  est appelée la fonction d'onde du système.

#### Cas d'une particule dans l'espace à une dimension

La probabilité pour que la particule soit dans l'intervalle  $[a, b]$  est donnée par l'aire de la courbe située entre  $x = a$  et  $x = b$  (figure si possible)

$$\int_a^b dP(x) = \int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx \quad (1.1)$$

Il est impossible de connaître avec précision la position de la particule à un instant  $t$ . On ne peut que connaître la probabilité  $dP(x)$  pour qu'elle soit entre  $x$  et  $x + dx$ , soit :

$$dP(x) = |\psi(x, t)|^2 dx = \psi(x, t) \overline{\psi(x, t)} dx \quad (1.2)$$

La particule doit être quelque part sur l'axe  $X'OX$ , par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (1.3)$$

pour tout  $t$ .  $\psi$  est donc de carré sommable. La densité de probabilité est donnée par

$$\frac{dP(x, t)}{dx} = |\psi(x, t)|^2 = \rho(x, t) \quad (1.4)$$

### Cas d'une particule dans l'espace à trois dimensions

On a

$$\int dP(\vec{r}, t) = \iiint_{\text{espace}} |\psi(x, t)|^2 d^3r = 1 \quad (1.5)$$

Où  $d^3r$  représente l'élément de volume donnée par :

$$d^3r = dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

### Cas de N particules

L'espace le mieux adapté à la description des systèmes en physique quantique est un espace  $\Omega$ , nommé espace des configurations qui représente l'ensemble de toutes les configurations possibles du système. Par exemple, dans le cas d'un système à  $N$  particules isolées et sans contraintes, l'espace des configurations est  $\Omega = \mathbb{R}^{3N}$  et  $\psi(x, t) \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$ .

**Postulat 1.** *A tout système quantique correspond un espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$ , tel que l'ensemble des états accessibles au système soit en bijection avec la sphère unité de  $\mathcal{H}$ .*

#### 1.1.2 Observables et deuxième postulat

Une observable est l'équivalent en mécanique quantique d'une grandeur physique en mécanique classique, comme la position, la quantité de mouvement, l'énergie, etc. Une observable est formalisée mathématiquement par un opérateur hermitien sur  $\mathcal{H}$  (chaque état quantique est représenté par un vecteur de  $\mathcal{H}$ ).

**Exemple 1.1.** *Exemples d'observables*

1. la position :  $X$
2. l'énergie potentielle :  $V$
3. la quantité de mouvement :  $P = -i\hbar \nabla$
4. l'énergie cinétique :  $H_0 = \frac{P \cdot P}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
5. l'énergie totale, appelée hamiltonien :  $H = H_0 + V$

**Postulat 2.** *A toute grandeur physique représentée par l'observable  $A$  correspond un opérateur  $A$  auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ , vérifiant la propriété suivante : le résultat de la mesure d'une grandeur physique  $A$  ne peut être qu'un élément du spectre de  $A$ .*

Les valeurs propres sont les valeurs pouvant résulter d'une mesure idéale de cette propriété, les vecteurs propres étant l'état quantique du système immédiatement après la mesure et résultant de cette mesure. Ce postulat peut donc s'écrire :

$$A|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle$$

où  $A$ ,  $|\alpha_n\rangle$  et  $a_n$  désignent, respectivement, l'observable, le vecteur propre et la valeur propre correspondante.

Les états propres de tout observable  $A$  forment une base orthonormée dans l'espace de

Hilbert  $\mathcal{H}$ . Cela signifie que tout vecteur  $|\psi(t)\rangle$  peut se décomposer de manière unique sur la base de ces vecteurs propres  $|\phi_i\rangle$  :

$$|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle + \dots + c_n|\phi_n\rangle + \dots$$

La moyenne des mesures de  $\mathcal{A}$  est quant à elle égale à  $\langle\psi|A|\psi\rangle$  où la notation  $\langle\cdot|A|\cdot\rangle$  est définie par :

$$\langle\psi|A|\chi\rangle = \int_{\Omega} \bar{\psi} A \chi \quad (1.6)$$

**Exemple 1.2.** La position moyenne sur l'axe des abscisses :

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx$$

### 1.1.3 Equation de Schrödinger et troisième postulat

L'équation de Schrödinger, proposée par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1926, est une équation fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non relativiste, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique  $\frac{dp}{dt} = F$ .

**Postulat 3.** Entre deux mesures, l'évolution de l'état est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t) \quad (1.7)$$

Considérons le cas d'une particule libre ( $V = 0$ ) et menons notre étude sur  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ) nous étudions alors l'équation

$$u'(t) = Au(t) \quad (1.8)$$

où  $A$  est un opérateur sur  $E = L^2(\mathbb{R}^m)$  défini par

$$Au = ik\Delta u = ik(\partial_1^2 u + \dots + \partial_m^2 u)$$

$k$  une constante réelle. Le domaine de  $A$  est l'ensemble des  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  tel que  $\Delta u$  (au sens des distributions) appartient à  $L^2$ .

**Définition 1.1.** On dit que le problème de Cauchy pour l'équation (1.8) est bien posé si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (a) **Existence et unicité de solutions** : Il existe un sous-espace dense  $D$  de  $E$  tel que, pour tout  $u_0 \in D$ , il existe une unique solution  $u(\cdot)$  de (1.8) avec  $u(0) = u_0$
- (b) **La solution dépend de façon continue des données** Il existe une fonction non décroissante, non négative  $C(t)$  tel que

$$\|u(t)\| \leq C(t)\|u(0)\|$$

En appliquant la transformée de Fourier à (1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[Au](\xi) &= \mathcal{F}[ik\Delta u](\xi) \\ &= ik\mathcal{F}[\Delta u](\xi) \\ &= -ik|\xi|^2\mathcal{F}[u](\xi) \\ \mathcal{F}[Au](\xi) &= -ik|\xi|^2\tilde{u}(\xi)\end{aligned}$$

Alors si  $u_0 \in D(A)$  nous obtenons une solution :

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}(\exp(-ik|\xi|^2 t)\mathcal{F}[u_0](\xi)) \quad (1.9)$$

Puisque  $D(A)$  est dense dans  $E$ , on déduit que (1.8) admet une unique solution sur  $E$ . Ensuite, observons que si  $u \in D(A)$ , alors

$$\begin{aligned}(Au, u) &= (\mathcal{F}[Au], \mathcal{F}[u]) \\ &= ik \int |\xi|^2 |\tilde{u}|^2\end{aligned}$$

Ainsi,  $\Re(Au, u) = 0$

Par conséquent, si  $u(\cdot)$  est une solution de (1.8), nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t ||u(t)||^2 &= 2\Re(u'(t), u(t)) \\ &= 2(Au(t), u(t)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi,  $||u(t)||$  est constante :

$$||u(t)|| = ||u(0)|| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

En conclusion, le problème de Cauchy pour (1.8) est bien posé pour tout  $t$ .

En outre, [10] généralise ce résultat sur  $E = L^p(\mathbb{R}^m)$  avec  $1 \leq p < m$ .

## 1.2 Contrôle quantique

On rappelle que l'état  $\psi(t)$  d'un système quantique évolue conformément à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t), \quad \psi(t=0) = \psi_0 \quad (1.11)$$

où  $H$  est un endomorphisme auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$  appelé Hamiltonien interne du système.  $\hbar$  est la constante de Planck. Dans la suite, nous travaillons en unités atomiques, c'est-à-dire  $\hbar = 1$  et l'état initial a une norme unitaire,  $||\psi_0||^2 \equiv \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$ .

### 1.2.1 Exemple de modèle bilinéaire (BLM)

Pour simplifier, nous considérons un système quantique de dimension finie. C'est une approximation appropriée dans de nombreuses situations pratiques. Pour un système quantique de dimension  $N$ ,  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert complexe de dimension  $N$ .



Les valeurs propres  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$  de  $H$  forment une base orthogonale de  $\mathcal{H}$ .

Dans de nombreuses situations, le contrôle du système peut être réalisé par un ensemble de fonctions de contrôle  $\varepsilon_k(t) \in \mathbb{R}$  couplées au système via une famille d'opérateurs hermitiens indépendants du temps  $\{H_k, k = 1, 2, \dots\}$ . L'Hamiltonien total  $H + \sum_k \varepsilon_k(t)H_k$  détermine alors la nouvelle dynamique du système.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (H + \sum_k \varepsilon_k(t) H_k) \psi(x, t) \quad (1.12)$$

Le but typique d'un problème de contrôle quantique défini sur le système (1.12) est de trouver en temps fini  $T > 0$  un ensemble de contrôles admissibles  $u_k(t) \in \mathbb{R}$  qui conduit le système d'un état initial  $\psi_0$  à un état prescrit  $\psi_{cible}$ .

### 1.2.2 Cas d'un champs laser

En vue de modéliser les interactions onde-matière à l'échelle atomique, nous introduisons un contrôle, généré par un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\mu(x)$ , émettant un champs (électrique) laser, d'amplitude  $\varepsilon(t)$  dépendant du temps. La dynamique du système est désormais donnée par :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= H \psi(x, t) - \mu(x) \varepsilon(t) \psi(x, t) \\ \psi(x, t = 0) &= \psi_0(x) \end{cases} \quad (1.13)$$

## 1.3 Discrétisation temporelle

Choisissons deux paramètres de discrétisation temporelle  $N$  et  $\Delta T$  tels que  $N\Delta T = T$  et notons  $\psi_j$  l'approximation de  $\psi(j\Delta T)$ ,  $0 \leq j \leq N$ .

### 1.3.1 Méthode du splitting d'opérateur

Considérons l'équation différentielle ordinaire scalaire

$$\dot{x} = (a + b)x, \quad x(0) = x_0 \quad (1.14)$$

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires. On connaît la solution exacte de cette equation :

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp((a + b)t)x_0 = \exp(at)\exp(bt)x_0 \quad (\text{methode 1}) \\ &= \exp(bt)\exp(at)x_0 \quad (\text{methode 2}) \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi séparer l'évolution selon (1.14) en deux temps :

$$(L1) \begin{cases} \dot{y} = by, & y(0) = x_0 \\ \dot{x} = ax, & x(0) = y(t) \end{cases}$$

$$(L2) \begin{cases} \dot{y} = ay, & y(0) = x_0 \\ \dot{x} = bx, & x(0) = y(t) \end{cases}$$

Pour le système (L1), on a clairement

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(at)x_0 \\ &= \exp(at)y(t) \\ &= \exp(at)\exp(bt)y(0) \\ &= \exp(at)\exp(bt)x_0 \end{aligned}$$

Pour (L2), le calcul se fait de la même manière et donne le même résultat.

On appelle **splitting de Lie** ou méthode à pas fractionnaire les deux méthodes (L1) et (L2). Pour une equation scalaire, ces deux méthodes sont identiques et reviennent au même que de traiter l'équation en une seule fois. Pour exprimer le splitting dans notre exemple, nous avons été obligés d'introduire une variable intermédiaire  $y$ . Ceci s'avérerait à l'usage peu pratique pour des contextes plus compliqués. Nous introduisons donc le semi-groupe  $S(t)$ .

### Splittings de Strang

L'application qui à  $x_0$  associe  $x(t)$  par le flot de l'EDO est le semi-groupe que nous noterons  $S(t)$

$$x(t) = S(t)x_0 = \exp((a+b)t)x_0 \quad (1.15)$$

On note  $A(t)$  et  $B(t)$  les semi-groupes associés aux deux parties de l'équation, à savoir

$$A(t)x_0 = \exp(at)x_0, \quad B(t)x_0 = \exp(bt)x_0$$

Les deux splittings de Lie (L1) et (L2) consistent donc à écrire

$$\textbf{(L1)} : x(t) = A(t)B(t)x_0, \quad \textbf{(L2)} : x(t) = B(t)A(t)x_0$$

On définit sans effort deux nouveaux types de splitting : les **splittings de Strang** [8]

$$\textbf{(S1)} : x(t) = A\left(\frac{t}{2}\right)B(t)A\left(\frac{t}{2}\right)x_0, \quad \textbf{(S2)} : x(t) = B\left(\frac{t}{2}\right)A(t)B\left(\frac{t}{2}\right)x_0$$

Les méthodes de Lie et de Strang sont respectivement d'ordre 1 et 2.

### Splitting de Strang pour l'équation de Schrödinger

Afin de présenter le schéma de splitting, on considère un problème d'évolution général. Soit  $A$  et  $B$ , deux opérateurs auto-adjoints, tels que :  $D(A) \subset \mathcal{H}$ ,  $D(B) \subset \mathcal{H}$  et  $A+B$  est un opérateur auto-adjoint sur  $D(A) \cap D(B)$ . On note ici  $D(A)$  et  $D(B)$  les domaines respectifs des opérateurs  $A$  et  $B$ . Considérons le problème d'évolution

$$\begin{cases} i\partial_t \psi(x, t) &= A\psi(x, t) + B\psi(x, t), \quad x \in \Omega, t > 0 \\ \psi(x, t = 0) &= \psi_0(x) \in \mathcal{H} \end{cases} \quad (1.16)$$

et notons  $\psi(x, t) = e^{-i(A+B)t}\psi_0(x)$  sa solution pour  $t > 0$ , et  $x \in \Omega$ . Le schéma de splitting consiste à approcher la solution  $\psi$  du problème d'évolution via une approximation de l'opérateur  $e^{-i(A+B)t}$  à travers les opérateurs  $e^{-iA}$  et  $e^{-iB}$ . Ceci permet alors d'avoir à résoudre successivement deux equations plus simples.

Ici,  $A = H_0$  et  $B = V(x) - \mu(x)\varepsilon(t)$  est la partie potentielle. On obtient l'approximation

$$\psi(x, t + \Delta T) \approx e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} e^{-i(V(x) - \mu\varepsilon)\Delta T} e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \psi(x, t) \quad (1.17)$$

**Propriétés 1.1.** Cette méthode conserve la norme  $L^2$  de la fonction d'onde  $\psi$  au cours du temps.

**Preuve.** Les opérateurs exponentiels étant antihermitiens, leurs exponentielles sont unitaires. En effet, notons  $X^T$ ,  $\bar{X}$  et  $X^\dagger = (\bar{X})^T$  respectivement la transposée, la conjuguée et l'adjointe de  $X$ . Puisque  $e^{X^T} = (e^X)^T$  et  $e^{\bar{X}} = \overline{e^X}$  alors  $e^{X^\dagger} = (e^X)^\dagger$ . Il s'ensuit que si  $X$  est antihermitienne, c'est-à-dire  $X^\dagger = -X$ , alors  $(e^X)^{-1} = (e^X)^\dagger : e^X$  est unitaire.

Cette propriété importante (1.10) est donc conservée après discrétisation. D'autres méthodes de résolution approchée peuvent être envisagées : schémas d'Euler, Runge-Kutta... Le problème posé par ces schémas est qu'ils ne conservent pas la norme de la solution en général.

### 1.3.2 Schéma de Cranck-Nicholson

Une exception existe avec le schéma implicite de Cranck-Nicholson défini dans notre cas par :

$$i \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta T} = (H_0 - \mu \varepsilon_j) \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \quad (1.18)$$

En tant que schéma implicite, son inconvénient majeur est d'être coûteux.

# SCHÉMAS MONOTONES POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

## 2.1 Cadre général

Considérons un système décrit par une variable d'état  $X$  appartenant à un espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$  et dont l'évolution est décrite par l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t X + A(u)X &= 0 \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $X_0$  est un état initial,  $u$  un paramètre du modèle appartenant à un ensemble  $\mathcal{U}$ , sur lequel un expérimentateur peut agir et où  $A(u)$  est un opérateur défini sur  $\mathcal{H}$ . Supposons maintenant que l'on souhaite que le système adopte une configuration prescrite. Pour atteindre cet objectif, l'expérimentateur peut jouer sur le paramètre  $u$  auquel il soumet le système. Le processus qui consiste à transférer le système d'un état initial  $X_0$  donné à un état final  $X(T)$  convenable vis-à-vis de critères prédéfinis, portant sur  $X(t)$  ou des caractéristiques du paramètre  $u$ , est appelé contrôle. Par extension, le terme contrôle désigne également la fonction  $u$  par laquelle est réalisée ce processus. L'espace  $\mathcal{U}$  est appelé ensemble des contrôles admissibles.

### 2.1.1 Fonctionnelle

Pour transformer le problème de contrôle en un problème d'optimisation, il nous faut introduire une fonctionnelle. Cette fonctionnelle doit d'une part rendre compte, de l'écart entre l'état final et l'état cible et d'autre part pénaliser le champ de contrôle de sorte qu'il reste physiquement raisonnable. Un cas général fonctionnelle est :

$$J(u) = g(X(T)) + \int_0^T f(X(t))dt + \int_0^T h(u(t))dt \quad (2.2)$$

Dans cette fonctionnelle  $g, f, h$  sont des fonctions définies sur  $\mathcal{H}$ . Le problème peut alors se formuler de la manière suivante.

Chercher  $u^*$  tel que :

$$u^* = \operatorname{argmax} J(u)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \partial_t X + A(u)X &= 0 \\ X(0) &= X_0 \\ u &\in \mathcal{U} \end{cases}$$

Plusieurs méthodes d'optimisation numérique permettent de résoudre ce problème. Nous nous intéressons dans ce mémoire, à une classe d'algorithmes, appelés **schémas monotones** ou encore **algorithmes monotones**. Cette dénomination est due au fait qu'à chaque itération, le champ de contrôle produit par l'algorithme augmente la valeur de la fonctionnelle.

### 2.1.2 Equations critiques, mutiplicateur de Lagrange

Au maximum de la fonctionnelle  $J(u)$ , les équations de Euler-Lagrange sont satisfaites. Le Lagrangien du système (2.1) est donné par :

$$L(u, X, Y) = J(u) - \Re \left\{ \int_0^T \langle Y(t) | \partial_t + A(u(t)) | X(t) \rangle dt \right\} \quad (2.3)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L(u, X, Y) &= g(X(T)) + \int_0^T f(X(t)) dt + \int_0^T h(u(t)) dt \\ &\quad - \Re \left\{ \int_0^T \langle Y(t) | \partial_t + A(u(t)) | X(t) \rangle dt \right\} \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} L(u, X, Y) &= g(X(T)) + \int_0^T f(X(t)) dt + \int_0^T h(u(t)) dt \\ &\quad - \Re \left\{ \int_0^T \langle [\partial_t - A^*(u(t))] Y(t) | X(t) \rangle dt \right\} \end{aligned}$$

Afin d'obtenir les équations de Euler-Lagrange, il nous faut calculer la variation par rapport à  $Y$ ,  $X$ ,  $X(T)$  et  $u$ .

$Y(t)$

$$\begin{aligned} L(u, X, Y + h) - L(u, X, Y) &= -\Re \int_0^T \langle Y(t) + h, (\partial_t + A(u(t))) X(t) \rangle dt \\ &\quad + \Re \int_0^T \langle Y(t), (\partial_t + A(u(t))) X(t) \rangle dt \\ &= \Re \int_0^T \langle h, (\partial_t + A(u(t))) X(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Par suite,

$$\partial_Y L(u, X, Y) = 0 \iff \partial_t X + A(u)X = 0 \quad (2.4)$$

$\mathbf{X}(\mathbf{t})$

$$\begin{aligned}
L(u, X+h, Y) - L(u, X, Y) &= \int_0^T f(X+h)dt - \int_0^T f(X)dt \\
&\quad - \Re \int_0^T \langle (\partial_t - A^*(u(t)))Y, X+h \rangle dt \\
&\quad + \Re \int_0^T \langle (\partial_t - A^*(u(t)))Y, X \rangle dt \\
&= \int_0^T f(X+h) - f(X)dt \\
&\quad - \Re \int_0^T \langle (\partial_t - A^*(u(t)))Y, h \rangle dt
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\partial_X L(u, X, Y) = 0 \iff \partial_t Y - A^*(u)Y = -\nabla f(X) \quad (2.5)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{t})$

$$\begin{aligned}
L(u+h, X, Y) - L(u, X, Y) &= \int_0^T h(u+h)dt - \int_0^T h(u)dt \\
&\quad - \Re \int_0^T \langle Y, (\partial_t + A(u+h))X \rangle dt \\
&\quad + \Re \int_0^T \langle Y, (\partial_t + A(u))X \rangle dt \\
&= \int_0^T h(u+h) - h(u)dt \\
&\quad - \Re \int_0^T \langle Y, (-A(u+h) + A(u))X \rangle dt
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\partial_u L(u, X, Y) = 0 \iff \Re \langle Y | \nabla A(u) | X \rangle = \nabla h(u) \quad (2.6)$$

Au total, nous obtenons :

$$\begin{cases} \partial_t X + A(u)X &= 0 \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \partial_t Y - A^*(u)Y &= -\nabla f(X) \\ Y(T) &= \nabla g(X(T)) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\Re \langle Y | \nabla A(u) | x \rangle = \nabla h(u) \quad (2.9)$$

## 2.2 Application à l'équation de Schrödinger

Considérons un système quantique décrit par une fonction d'onde  $\psi(x, t)$  soumis à un champ électrique  $\varepsilon(t)$  et dont l'état initial  $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$  est supposé connu. Comme stipulé au (1.13), l'évolution d'un tel système est régie par l'équation :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= H\psi(x, t) - \mu(x)\varepsilon(t)\psi(x, t) \\ \psi(x, t=0) &= \psi_0(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

Le moment dipolaire  $\mu$  est supposé connu et indépendant du temps.

### 2.2.1 Fonctionnelles de coût

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $O$  un opérateur symétrique borné,  $T$  un réel positif,  $\varepsilon$  une fonction de  $L^2([0, T], \mathbb{R})$ ,  $\psi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction d'onde dépendant du temps et  $\psi_{cible} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction d'onde fixée.

Nous considérons deux fonctionnelles de coût :

$$J_1(\varepsilon) = \langle \psi(T) | O | \psi(T) \rangle - \alpha \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (2.11)$$

$$J_2(\varepsilon) = 2\Re \langle \psi_{cible} | \psi(T) \rangle - \alpha \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (2.12)$$

$\psi_{cible}$  représente une fonction d'onde cible.  $J_1$  relève du formalisme attaché aux observables tandis que  $J_2$  est plus simple à utiliser au cours des simulations.

$$\begin{aligned} \|\psi_{cible} - \psi(T)\|^2 &= \|\psi_{cible}\|^2 + \|\psi(T)\|^2 + 2\Re \langle \psi_{cible}, -\psi(T) \rangle \\ &= \|\psi_{cible}\|^2 + \|\psi(T)\|^2 - 2\Re \langle \psi_{cible}, \psi(T) \rangle \\ &= 2 - 2\Re \langle \psi_{cible}, \psi(T) \rangle \end{aligned}$$

Ainsi  $2\Re \langle \psi_{cible}, \psi_{cible} \rangle = 2$ . Le maximum du terme  $2\Re \langle \psi_{cible} | \psi(T) \rangle$  est bien atteint pour  $\psi(T) = \psi_{cible}$ .

Les méthodes numérique d'optimisation reposent sur la résolution des équations d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle traitée. Les équations d'Euler-Lagrange sont alors pour  $J_1$  :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H - \varepsilon(t)\mu(x)\psi(x, t) \\ \psi(x, t=0) = \psi_0(x) \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) = H - \varepsilon(t)\mu(x)\chi(x, t) \\ \chi(x, t=T) = O\psi(x, T) \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\alpha \varepsilon(t) = -\Im \langle \chi(t) | \mu | \psi(t) \rangle \quad (2.15)$$

et pour  $J_2$  :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H - \varepsilon(t)\mu(x)\psi(x, t) \\ \psi(x, t=0) = \psi_0(x) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) = H - \varepsilon(t)\mu(x)\chi(x, t) \\ \chi(x, t=T) = \psi_{cible}(x) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\alpha \varepsilon(t) = -\Im \langle \chi(t) | \mu | \psi(t) \rangle \quad (2.18)$$

L'existence de maxima de  $J_1$  et de  $J_2$  et de fonctionnelles plus générales a été montrée dans [15] et [17].

## 2.3 Schémas monotones

Les schémas monotones ont été introduits dans le cadre du contrôle quantique par D. Tannor dans [3] et par W. Zhu et H. Rabitz dans [4] sous deux formes différentes. En 2003, Y. Maday et G. Turinici [5] présentent une classe plus large de schémas monotones qui englobe les deux types d'algorithmes initiaux.

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi^k(x, t) = (H(x) - \mu(x) \varepsilon^k(t)) \psi^k(x, t) \\ \psi(x, t = 0) = \psi_0(x) \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon^k(t) = (1 - \delta) \tilde{\varepsilon}^{k-1}(t) - \frac{\delta}{\alpha} \Im \langle \chi^{k-1} | \mu | \psi^k \rangle(t) \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \chi^k(x, t) = (H(x) - \mu(x) \tilde{\varepsilon}^k(t)) \chi^k(x, t) \\ \chi^k(x, t = T) = O \psi^k(x, T) \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\varepsilon}^k(t) = (1 - \eta) \varepsilon^k(t) - \frac{\eta}{\alpha} \Im \langle \chi^k | \mu | \psi^k \rangle(t) \quad (2.22)$$

où  $\delta$  et  $\eta$  sont deux paramètres réels. Le schéma Tannor [3] correspond au cas où  $(\delta, \eta) = (1, 0)$  tandis que celui de Zhu et Rabitz [4] correspond au cas où  $(\delta, \eta) = (1, 1)$ .

La propriété la plus importante de cet algorithme est donnée dans le théorème suivant [5]

**Théorème 2.1** (Maday, Y., Turinici, G. (2003)). *Supposons que  $O$  soit un opérateur semi-défini positif auto-adjoint. Alors, pour tout  $\eta, \delta \in [0, 2]$  l'algorithme donné par les équations (2.19) à (2.22) converge de façon monotone dans le sens où  $J(\varepsilon^{k+1}) \geq J(\varepsilon^k)$ .*

**Preuve.** *Evaluons la différence entre deux valeurs de la fonctionnelle  $J_1$  entre deux itérations successives  $k, k + 1$ . Supposons que  $\eta \neq 0, \delta \neq 0$ . Alors,*



$$\begin{aligned}
J(\varepsilon^{k+1}) - J(\varepsilon^k) &= \langle \psi^{k+1}(T) | O | \psi^{k+1}(T) \rangle - \alpha \int_0^T \varepsilon^{k+1}(t)^2 dt - \langle \psi^k(T) | O | \psi^k(T) \rangle \\
&\quad + \alpha \int_0^T \varepsilon^k(t)^2 dt \\
&= \langle \psi^{k+1}(T) | O | \psi^{k+1}(T) \rangle - \langle \psi^k(T) | O | \psi^k(T) \rangle \\
&\quad - \alpha \int_0^T \varepsilon^{k+1}(t)^2 dt + \alpha \int_0^T \varepsilon^k(t)^2 dt \\
&= \Re \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^{k+1}(T) + \psi^k(T) \rangle \\
&\quad - \alpha \int_0^T \varepsilon^{k+1}(t)^2 dt + \alpha \int_0^T \varepsilon^k(t)^2 dt \\
&= \Re \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) + \psi^k(T) + \psi^k(T) \rangle \\
&\quad - \alpha \int_0^T \varepsilon^{k+1}(t)^2 dt + \alpha \int_0^T \varepsilon^k(t)^2 dt \\
&= \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) \rangle \\
&\quad + 2\Re \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^k(T) \rangle \\
&\quad + \alpha \int_0^T \varepsilon^k(t)^2 dt - \alpha \int_0^T \varepsilon^{k+1}(t)^2 dt
\end{aligned}$$

Puisque, nous avons aussi

$$\begin{aligned}
2\Re \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^k(T) \rangle &= 2\Re \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T), O\psi^k(T) \rangle \\
&= 2\Re \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T), \chi^k(T) \rangle \\
&= 2\Re \int_0^T \left\langle \frac{\partial(\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t))}{\partial_t}, \chi^k(t) \right\rangle \\
&\quad + \langle \psi^{k+1}(t) - \psi^k(t), \frac{\partial \chi^k(t)}{\partial_t} \rangle dt \\
&= 2\Re \int_0^T \left\langle \frac{H_0 - \mu \varepsilon^{k+1}}{i} \psi^{k+1}(t) - \frac{H_0 - \mu \varepsilon^k}{i} \psi^k(t), \chi^k(t) \right\rangle \\
&\quad + \langle \psi^{k+1}(t) - \psi^k(t), \frac{H_0 - \mu \tilde{\varepsilon}^k}{i} \chi^k(t) \rangle dt \\
&= 2\Re \int_0^T \varepsilon^{k+1} \left\langle \frac{-\mu}{i} \psi^{k+1}(t), \chi^k(t) \right\rangle - \varepsilon^k \left\langle \frac{-\mu}{i} \psi^k(t), \chi^k(t) \right\rangle \\
&\quad + \tilde{\varepsilon}^k \langle \psi^{k+1}(t) - \psi^k(t), \frac{-\mu}{i} \chi^k(t) \rangle dt \\
&= 2 \int_0^T \varepsilon^{k+1} \cdot \frac{\alpha(\varepsilon^{k+1} - (1 - \delta)\tilde{\varepsilon}^k)}{\delta} \\
&\quad - \varepsilon^k \cdot \frac{\alpha(\tilde{\varepsilon}^k - (1 - \eta)\varepsilon^k)}{\eta} \\
&\quad - \tilde{\varepsilon}^k \cdot \frac{\alpha(\varepsilon^{k+1} - (1 - \delta)\tilde{\varepsilon}^k)}{\delta} \\
&\quad + \tilde{\varepsilon}^{k+1} \cdot \frac{\alpha(\tilde{\varepsilon}^k - (1 - \eta)\varepsilon^k)}{\eta} dt
\end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$\begin{aligned} J(\varepsilon^{k+1}) - J(\varepsilon^k) &= \langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) \rangle \\ &\quad + \alpha \int_0^T \left( \frac{2}{\delta} - 1 \right) (\varepsilon^{k+1} - \tilde{\varepsilon}^k)^2 + \left( \frac{2}{\eta} - 1 \right) (\tilde{\varepsilon}^k - \varepsilon^k)^2 dt \end{aligned}$$

qui est positif sous les hypothèses du théorème.

En effet,  $\langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) \rangle \in \mathbb{R}$  et puisque  $O$  est défini positif

$$\langle \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) | O | \psi^{k+1}(T) - \psi^k(T) \rangle \geq 0$$

Notons que le cas  $\delta = 0$  entraîne  $\varepsilon^{k+1} = \tilde{\varepsilon}^k$  et  $\eta = 0$  entraîne  $\tilde{\varepsilon}^k = \varepsilon^k$  et la même conclusion est obtenue.

# SCHÉMAS MONOTONES DISCRETS

---

## 3.1 Introduction

Nous considérons la fonctionnelles :

$$J_1(\varepsilon) = \langle \psi(T) | O | \psi(T) \rangle - \alpha \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (3.1)$$

Pour les simulations numériques, nous considérons

$$J_2(\varepsilon) = 2\Re \langle \psi_{cible} | \psi(T) \rangle - \alpha \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (3.2)$$

Rappelons que l'opérateur  $O$  est défini positif et que  $\psi_{cible}$  représente une fonction de  $L_2(\Omega, \mathbb{C})$  de norme 1, où  $\Omega$  est l'espace des configurations. Rappelons également que les équations d'Euler-Lagrange associées à ces fonctionnelles sont dans le cas de  $J_1$  :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (H - \varepsilon(t) \mu(x)) \psi(x, t) \\ \psi(x, t = 0) = \psi_0(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) = (H - \varepsilon(t) \mu(x)) \chi(x, t) \\ \chi(x, t = T) = O \psi(x, T) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\alpha \varepsilon(t) = -\Im \langle \chi(t) | \mu | \psi(t) \rangle \quad (3.5)$$

et dans le cas de  $J_2$  par :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (H - \varepsilon(t) \mu(x)) \psi(x, t) \\ \psi(x, t = 0) = \psi_0(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) = (H - \varepsilon(t) \mu(x)) \chi(x, t) \\ \chi(x, t = T) = \psi_{cible}(x) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\alpha \varepsilon(t) = -\Im \langle \chi(t) | \mu | \psi(t) \rangle \quad (3.8)$$

où :

- $\psi(x, t)$  est la fonction d'onde du système contrôlé,
- $H$  est l'Hamiltonien interne associé au système,
- $\mu(x)$  est le moment dipolaire, caractéristique lui aussi du système traité. L'opérateur  $\mu$  est donc une fonction de  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$  que nous identifions avec l'opérateur associé :  $\psi \mapsto \mu\psi$ ,

—  $\varepsilon(t)$  est le terme de contrôle, soit, dans les cas qui nous intéressent, un champ électrique.

Sans perte de généralité supposons que l'Hamiltonien s'écrit sous la forme usuelle :

$$H = H_0 + V(x)$$

où  $H_0$  est l'opérateur  $-\Delta$ , opposé du Laplacien et  $V(x)$  est le potentiel électrostatique interne.

Notons  $(\psi_j)_{j=0\dots N}$ ,  $(\chi_j)_{j=0\dots N}$ ,  $(\varepsilon_j)_{j=0\dots N-1}$ , et  $(\tilde{\varepsilon}_j)_{j=0\dots N-1}$  les différentes grandeurs discrétisées à un pas de temps  $\Delta T$ . Les discrétisations des deux fonctionnelles conduisent à :

$$J_{\Delta T,1}(\varepsilon) = \langle \psi(T) | O | \psi(T) \rangle - \alpha \Delta T \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j^2 \quad (3.9)$$

$$J_{\Delta T,2}(\varepsilon) = 2\Re \langle \psi_{cible} | \psi(T) \rangle - \alpha \Delta T \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j^2 \quad (3.10)$$

Les propagations sont effectuées suivant les formules de splitting d'opérateur présentées au Chapitre Un :

$$\chi_j(x) = e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} e^{i(V(x) - \mu(x)\tilde{\varepsilon}_j)\Delta T} e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \chi_{j+1}(x) \quad (3.11)$$

avec la condition  $\chi_N = O\psi_N$  dans le cas de  $J_{\Delta T,1}$  et  $\chi_N = \psi_{cible}$  dans le cas de  $J_{\Delta T,2}$  et

$$\psi_{j+1}(x) = e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} e^{-i(V(x) - \mu(x)\varepsilon_j)\Delta T} e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \psi_j(x) \quad (3.12)$$

avec un état initial  $\psi_0$  fixé.

## 3.2 Variation entre deux itérations successives

Nous reprenons le calcul de variation effectué au Chapitre Deux avec nos fonctionnelles discrètes. Pour commencer, considérons deux contrôles  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , le cas particulier qui va nous intéresser est au final est  $\varepsilon' = \varepsilon^{k+1}$  et  $\varepsilon = \varepsilon^k$ . On note  $\psi'$  et  $\chi'$  respectivement, l'état et l'adjoint associé à  $\varepsilon'$ .

$$\begin{aligned} J_{\Delta T}(\varepsilon') - J_{\Delta T}(\varepsilon) &= \langle \psi'_N | O | \psi'_N \rangle - \alpha \Delta T \left( \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j'^2 \right) \\ &\quad - \langle \psi_N | O | \psi_N \rangle + \alpha \Delta T \left( \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j^2 \right) \\ &= \langle \psi'_N | O | \psi'_N \rangle - \langle \psi_N | O | \psi_N \rangle \\ &\quad + \alpha \Delta T \left( \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j^2 - \varepsilon_j'^2 \right) \\ &= \Re \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi'_N + \psi_N \rangle + \alpha \Delta T \left( \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j^2 - \varepsilon_j'^2 \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J_{\Delta T}(\varepsilon') - J_{\Delta T}(\varepsilon) &= \Re \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi'_N - \psi_N + \psi_N + \psi_N \rangle + \alpha \Delta T \left( \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j^2 - \varepsilon_j'^2 \right) \\ &= \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi'_N - \psi_N \rangle + 2\Re \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle \\ &\quad + \alpha \Delta T \left( \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j^2 - \varepsilon_j'^2 \right) \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur  $O$  est semi-défini positif

$$\langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi'_N - \psi_N \rangle \geq 0$$

Etudions le terme  $2\Re \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle &= \langle \psi'_N - \psi_N, O \psi_N \rangle \\ &= \langle \psi'_N - \psi_N, \chi_N \rangle \\ &= \langle \psi'_N, \chi_N \rangle - \langle \psi_N, \chi_N \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \langle \psi'_{j+1}, \chi_{j+1} - \chi_j \rangle + \langle \psi'_{j+1} - \psi'_j, \chi_j \rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N-1} -\langle \psi_{j+1}, \chi_{j+1} - \chi_j \rangle - \langle \psi_{j+1} - \psi_j, \chi_j \rangle \end{aligned}$$

Posons :

$$\tilde{\psi}_j = e^{-\frac{H_0 \Delta T}{2i}} \psi_j = e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \psi_j \quad (3.13)$$

$$\check{\psi}_j = e^{\frac{H_0 \Delta T}{2i}} \psi_j = e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \psi_j \quad (3.14)$$

$$\check{\chi}_j = e^{-\frac{H_0 \Delta T}{2i}} \chi_j = e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \chi_j \quad (3.15)$$

et

$$\tilde{\chi}_j = e^{\frac{H_0 \Delta T}{2i}} \chi_j = e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \chi_j \quad (3.16)$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \langle \tilde{\psi}'_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} - \check{\chi}_j \rangle + \langle \check{\psi}'_{j+1} - \check{\psi}'_j, \tilde{\chi}_j \rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N-1} -\langle \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} - \check{\chi}_j \rangle - \langle \check{\psi}_{j+1} - \check{\psi}_j, \tilde{\chi}_j \rangle \end{aligned}$$

car en effet,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= e^{-iA} e^{iA} \langle x, y \rangle \\ &= \langle e^{-iA} x, e^{iA} y \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle e^{iA} x, e^{iA} y \rangle \end{aligned}$$

Par suite, posons :

$$\textcircled{1} = \langle \tilde{\psi}'_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} - \check{\chi}_j \rangle + \langle \check{\psi}'_{j+1} - \check{\psi}'_j, \tilde{\chi}_j \rangle \quad (3.17)$$

et

$$\textcircled{2} = -\langle \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} - \check{\chi}_j \rangle - \langle \check{\psi}_{j+1} - \check{\psi}_j, \tilde{\chi}_j \rangle \quad (3.18)$$

Developpons  $\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= -\langle \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} \rangle + \langle \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_j \rangle \\ &\quad - \langle \check{\psi}_{j+1}, \tilde{\chi}_j \rangle + \langle \check{\psi}_j, \tilde{\chi}_j \rangle \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} -\langle \check{\psi}_{j+1}, \tilde{\chi}_j \rangle + \langle \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_j \rangle &= -\langle \psi_{j+1}, \chi_j \rangle + \langle \psi_{j+1}, \chi_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$  devient

$$\textcircled{2} = -\langle \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} \rangle + \langle \check{\psi}_j, \tilde{\chi}_j \rangle$$

Mais puisque,

$$\begin{aligned} \psi_{j+1} &= e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} e^{-i(V - \mu \varepsilon_j) \Delta T} e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \psi_j \\ \Leftrightarrow \psi_{j+1} &= e^{\frac{H_0 \Delta T}{2i}} e^{\frac{V - \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} e^{\frac{H_0 \Delta T}{2i}} \psi_j \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{-\frac{H_0 \Delta T}{2i}} \psi_{j+1} &= e^{\frac{V - \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} e^{\frac{H_0 \Delta T}{2i}} \psi_j \\ \Leftrightarrow \tilde{\psi}_{j+1} &= e^{\frac{V - \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} \check{\psi}_j \end{aligned} \quad (3.20)$$

on obtient,

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= -\langle \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} \rangle + \langle e^{\frac{-V + \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_j \rangle \\ &= \langle \tilde{\psi}_{j+1}, -\check{\chi}_{j+1} \rangle + \langle \tilde{\psi}_{j+1}, e^{\frac{V - \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} \check{\chi}_j \rangle \\ &= \langle \tilde{\psi}_{j+1}, e^{\frac{V - \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} \check{\chi}_j - \check{\chi}_{j+1} \rangle \end{aligned}$$

En utilisant

$$\check{\chi}_j = e^{\frac{-V + \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} \check{\chi}_{j+1} \quad (3.21)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \langle \tilde{\psi}_{j+1}, e^{\frac{V - \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} e^{\frac{-V + \mu \varepsilon_j}{i} \Delta T} \check{\chi}_{j+1} - \check{\chi}_{j+1} \rangle \\ &= \langle \tilde{\psi}_{j+1}, (e^{\frac{\mu(\varepsilon_j - \varepsilon'_j)}{i} \Delta T} - 1) \check{\chi}_{j+1} \rangle \end{aligned}$$

En utilisant la meme demarche, nous obtenons pour  $\textcircled{1}$

$$\textcircled{1} = \langle (e^{\frac{\mu(\varepsilon_j - \varepsilon'_j)}{i} \Delta T} - 1) \check{\psi}_j, \tilde{\chi}_j \rangle$$

Au total :

$$\begin{aligned} \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \langle (e^{\frac{\mu(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon'_j)}{i} \Delta T} - 1) \tilde{\psi}'_j, \tilde{\chi}_j \rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N-1} \langle \tilde{\psi}_{j+1}, (e^{\frac{\mu(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j)}{i} \Delta T} - 1) \tilde{\chi}_{j+1} \rangle \end{aligned}$$

Considerons toujours le terme  $\textcircled{2}$  et posons  $h = -i(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j)\Delta T$ .

Alors,

$$\textcircled{2} = \langle \tilde{\psi}_{j+1}, (e^{\mu h} - 1) \tilde{\chi}_{j+1} \rangle$$

$S(h) = e^{\mu h}$  est le  $C_0$ -semi groupe trivial de générateur infinitésimal  $\mu$ . C'est-à-dire :

$$D(\mu) = \{x \in L^2(\Omega, \mathbb{R}), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe}\}$$

et

$$\mu x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}$$

Nous utiliserons pour la suite, l'application  $\mu^{**}(h) = \frac{S(h) - Id}{h}$ . C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mu^{**}(h) &= \frac{e^{\mu h} - Id}{h} \\ \mu^{**}(-i(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j)\Delta T) &= \frac{e^{-i\mu(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j)\Delta T} - Id}{-i(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j)\Delta T} \end{aligned}$$

Le relation entre  $\mu$  et  $\mu^{**}$  est  $\mu x = \lim_{h \rightarrow 0} \mu^{**}(h)x, \quad \forall x \in D(\mu)$ .

Posons d'une part  $\mu^{**}(h) = \frac{e^{-i\mu h \Delta T} - Id}{-ih \Delta T}$  et d'autre part,

$$\begin{aligned} \mu^*(x, y) &= \mu^{**}(x - y) \\ &= \frac{e^{-i\mu(x-y)\Delta T} - Id}{-i(x-y)\Delta T} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mu^* : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R}) \\ (x, y) &\mapsto i \frac{e^{\frac{\mu(x-y)}{i} \Delta T} - Id}{\Delta T(x-y)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Revenons à  $\langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle$ .

$$\begin{aligned} \Re \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \{ \Re \langle (e^{\frac{\mu(\tilde{\epsilon}_j - \epsilon'_j)}{i} \Delta T} - Id) \check{\psi}'_j, \tilde{\chi}_j \rangle \\ &\quad + \Re \langle \tilde{\psi}_{j+1} (e^{\frac{\mu(\tilde{\epsilon}_j - \epsilon_j)}{i} \Delta T} - Id) \check{\chi}_{j+1} \rangle \} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \{ \Re \langle (e^{\frac{\mu(\tilde{\epsilon}_j - \epsilon'_j)}{i} \Delta T} - Id) \check{\psi}'_j, \tilde{\chi}_j \rangle \\ &\quad + \Re \langle (e^{\frac{\mu(\epsilon_j - \tilde{\epsilon}_j)}{i} \Delta T} - Id) \tilde{\psi}_{j+1}, \check{\chi}_{j+1} \rangle \} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \Re \langle x, y \rangle &= \Im \overline{\langle x, iy \rangle}, \quad (z = a + ib \Rightarrow \Re(z) = \Im(iz)) \\ &= -\Im \langle y, ix \rangle \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Re \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \{ \Im \langle \tilde{\chi}_j | i (e^{\frac{\mu(\tilde{\epsilon}_j - \epsilon'_j)}{i} \Delta T} - Id) | \check{\psi}'_j \rangle \\ &\quad + \Im \langle \check{\chi}_{j+1} | i (e^{\frac{\mu(\epsilon_j - \tilde{\epsilon}_j)}{i} \Delta T} - Id) | \tilde{\psi}_{j+1} \rangle \} \\ &= \alpha \Delta T \sum_{j=0}^{N-1} \{ -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j | \mu^*(\tilde{\epsilon}_j, \epsilon'_j) | \check{\psi}'_j \rangle (\epsilon'_j - \tilde{\epsilon}_j) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \Im \langle \check{\chi}_{j+1} | \mu^*(\epsilon_j, \tilde{\epsilon}_j) | \tilde{\psi}_{j+1} \rangle (\tilde{\epsilon}_j - \epsilon_j) \} \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} a_j(x, y) &= -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j | \mu^*(x, y) | \check{\psi}'_j \rangle \\ b_j(x, y) &= -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \check{\chi}_{j+1} | \mu^*(x, y) | \tilde{\psi}_{j+1} \rangle \end{cases} \quad (3.23)$$

Par consequent :

$$\begin{aligned} \Re \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi_N \rangle &= \alpha \Delta T \sum_{j=0}^{N-1} a_j(\tilde{\epsilon}_j, \epsilon'_j) (\epsilon'_j - \tilde{\epsilon}_j) \\ &\quad + b_{j+1}(\epsilon_j, \tilde{\epsilon}_j) (\tilde{\epsilon}_j - \epsilon_j) \end{aligned}$$

Nous obtenons au total

$$\begin{aligned} J_{\Delta T}(\epsilon') - J_{\Delta T}(\epsilon) &= \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi'_N - \psi_N \rangle \\ &\quad + \alpha \Delta T \sum_{j=0}^{N-1} [(\tilde{\epsilon}_j - a_j(\tilde{\epsilon}_j, \epsilon'_j))^2 - (\epsilon'_j - a_j(\tilde{\epsilon}_j, \epsilon'_j))^2 \\ &\quad + (\epsilon_j - b_{j+1}(\epsilon_j, \tilde{\epsilon}_j))^2 - (\tilde{\epsilon}_j - b_{j+1}(\epsilon_j, \tilde{\epsilon}_j))^2] \end{aligned}$$

Cette formule nous aidera à concevoir des schémas qui restent monotones après la discrétisation dans le temps. En effet, une partie négative des composantes de chaque



somme apparaît explicitement. Annuler ou minimiser ces termes nous permettra de concevoir des schémas monotones.

Posons donc

$$\phi_j(\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon'_j) = (\tilde{\varepsilon}_j - a_j(\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon'_j))^2 - (\varepsilon'_j - a_j(\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon'_j))^2 \quad (3.24)$$

et

$$\tilde{\phi}_j(\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j) = (\varepsilon_j - b_{j+1}(\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j))^2 - (\tilde{\varepsilon}_j - b_{j+1}(\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j))^2 \quad (3.25)$$

Etant donné la suite  $(\varepsilon^k)$  :

1. l'analyse de la partie négative de  $\tilde{\phi}_j(\varepsilon_j^k, \tilde{\varepsilon}_j^k)$  pour chaque  $j$  permet de définir la suite  $(\tilde{\varepsilon}^k)$
2. l'analyse de la partie négative de  $\phi_j(\tilde{\varepsilon}_j^k, \varepsilon_j^{k+1})$  pour chaque  $j$  permet de définir la suite  $(\varepsilon^{k+1})$

Nous en déduisons des schémas implicites.

### 3.3 Schémas implicites

Une première idée simple consiste à annuler les parties négatives de  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$ . C'est-à-dire, connaissant  $(\varepsilon^k)$

$$\textcircled{1} \quad \tilde{\varepsilon}_j - b_{j+1}(\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_j^k = b_{j+1}(\varepsilon_j^k, \tilde{\varepsilon}_j^k)$$

puis

$$\textcircled{2} \quad \varepsilon'_j - a_j(\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon'_j) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_j^{k+1} = a_j(\tilde{\varepsilon}_j^k, \varepsilon_j^{k+1})$$

L'algorithme suivant est ainsi obtenu.

#### Algorithme

Etant donné les suites  $(\varepsilon^0)$ ,  $(\tilde{\varepsilon}^0)$  leurs états  $(\psi^0)$  et adjoint associées  $(\chi^0)$ , supposons que l'on connait  $(\psi^k)$ ,  $(\chi^k)$ ,  $(\varepsilon^k)$  et  $(\tilde{\varepsilon}^k)$ . Définissons :

$$\begin{cases} a_j^k(x, y) &= -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^*(x, y) | \tilde{\psi}_j^{k+1} \rangle \\ b_j^k(x, y) &= -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^*(x, y) | \tilde{\psi}_j^k \rangle \end{cases} \quad (3.26)$$

$\chi_N^k = O\psi_N^k$  ou  $\chi_N^k = \psi_{cible}^k$  selon que la fonctionnelle considérée soit  $J_{\Delta T, 1}$  ou  $J_{\Delta T, 2}$ .

Nous obtenons  $(\psi^{k+1})$ ,  $(\chi^{k+1})$ ,  $(\varepsilon^{k+1})$  et  $(\tilde{\varepsilon}^{k+1})$  de la façon suivante :

- Etant donné  $\psi_0^{k+1}$ , calculer récursivement  $\psi_{j+1}^{k+1}$  à partir de  $\psi_j^{k+1}$  par les deux calculs suivants :

1. Calcul de  $\varepsilon_j^{k+1}$  par résolution de :

$$\varepsilon_j^{k+1} = a_j^k(\tilde{\varepsilon}_j^k, \varepsilon_j^{k+1}) \quad (3.27)$$

2. Calcul de  $\psi_{j+1}^{k+1}$  par :

$$\psi_{j+1}^{k+1} = e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} e^{-i(V(x) - \mu(x)\varepsilon_j)\Delta T} e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \psi_j^{k+1}$$

- Calculer récursivement  $\chi_j^{k+1}$  à partir de  $\chi_{j+1}^{k+1}$  par les opérations suivantes :
  1. Calcul de  $\varepsilon_j^{k+1}$  par résolution de :

$$\tilde{\varepsilon}_j^{k+1} = b_{j+1}^{k+1}(\varepsilon_j^{k+1}, \tilde{\varepsilon}_j^{k+1}) \quad (3.28)$$

2. Calcul de  $\chi_j^{k+1}$  par :

$$\chi_j^{k+1} = e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} e^{i(V(x) - \mu(x)\tilde{\varepsilon}_j)\Delta T} e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \chi_{j+1}^{k+1}$$

Cet algorithme est par construction une discrétisation monotone du schéma monotone décrit dans [4].

Une procédure plus générale, correspondant à la discrétisation implicite de la classe de schémas monotones introduite dans [5] peut être obtenue. Un résultat analogue à celui du Chapitre Deux peut être énoncé.

**Théorème 3.1.** Soit  $(\delta, \eta) \in [0, 2]^2$ . Supposons que les suites  $(\varepsilon_j^k)_{j=0 \dots N-1}^{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\tilde{\varepsilon}_j^k)_{j=0 \dots N-1}^{k \in \mathbb{N}}$  vérifient :

$$\begin{aligned} \forall j, \quad 0 \leq j \leq N, \forall k \in \mathbb{N} \\ \tilde{\varepsilon}_j^k &= (1 - \eta)\varepsilon_j^k - \frac{\eta}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_{j+1}^k | \mu^*(\varepsilon_j^k - \tilde{\varepsilon}_j^k) | \tilde{\psi}_{j+1}^k \rangle \\ \varepsilon_j^{k+1} &= (1 - \delta)\tilde{\varepsilon}_j^k - \frac{\delta}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^*(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k) | \tilde{\psi}_j^{k+1} \rangle \end{aligned} \quad (3.29)$$

alors ces suites entraînent une convergence monotone des fonctionnelles  $J_{\Delta T,1}$  et  $J_{\Delta T,2}$ , dans le sens où :

$$\forall n \in \{1, 2\}, \forall k \in \mathbb{N}, J_{n,\Delta T}(\varepsilon^{k+1}) - J_{n,\Delta T}(\varepsilon^k) \geq 0$$

**Preuve.** Grâce aux formules (3.29), nous obtenons les égalités suivantes :

$$2\Re(\tilde{\chi}_{j+1}^k | e^{-i\mu(\varepsilon_j^k - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T} - Id | \tilde{\psi}_{j+1}^k \rangle - \alpha\Delta T((\varepsilon_j^k)^2 - (\tilde{\varepsilon}_j^k)^2) = \alpha\Delta T(\frac{2}{\eta} - 1)(\tilde{\varepsilon}_j^k - \varepsilon_j^k)^2,$$

$$2\Re(\tilde{\chi}_j^k | e^{i\mu(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T} - Id | \tilde{\psi}_j^{k+1} \rangle - \alpha\Delta T((\varepsilon_j^{k+1})^2 - (\tilde{\varepsilon}_j^k)^2) = \alpha\Delta T(\frac{2}{\delta} - 1)(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)^2$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} J_{\Delta T}(\varepsilon') - J_{\Delta T}(\varepsilon) &= \langle \psi'_N - \psi_N | O | \psi'_N - \psi_N \rangle \\ &\quad + \alpha\Delta T \sum_{j=0}^{N-1} [(\frac{2}{\delta} - 1)(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)^2 \\ &\quad + (\frac{2}{\eta} - 1)(\tilde{\varepsilon}_j^k - \varepsilon_j^k)^2] \end{aligned}$$

On conclut comme dans le cas continu. Aussi, de même que dans le cas continu, un calcul analogue au précédent prouve que le résultat reste valable dans le cas où  $\delta = 0$  ou  $\eta = 0$ .

**Algorithme**

Sur la base du théorème 3.1, nous pouvons alors proposer l'algorithme suivant, en conservant la notation  $\mu^*$  définie en (3.22). Soit  $(\delta, \eta) \in [0, 2]^2$ .

- Etant donné  $(\psi_j^k)_{j=0\dots N}$  et  $(\tilde{\psi}_j^k)_{j=0\dots N}$  et donc  $\chi_N^k = O\psi_N^k$  ou  $\chi_N^k = \psi_{cible}^k$  selon que la fonctionnelle considérée soit  $J_{\Delta T, 1}$  ou  $J_{\Delta T, 2}$ , calculer récursivement  $\chi_j^k$  à partir de  $\chi_{j+1}^k$  par les opérations suivantes :

1. Calcul de  $\tilde{\chi}_{j+1}^k$  par :

$$\tilde{\chi}_{j+1}^k = e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \chi_{j+1}^k$$

2. Calcul de  $\tilde{\epsilon}_j^k$  par résolution de :

$$\tilde{\epsilon}_j^k = (1 - \eta)\epsilon_j^k - \frac{\eta}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_{j+1}^k | \mu^*(\epsilon_j^k, \tilde{\epsilon}_j^k) | \tilde{\psi}_{j+1}^k \rangle \quad (3.30)$$

3. Calcul et sauvegarde de  $\tilde{\chi}_j^k$  par :

$$\tilde{\chi}_j^k = e^{i(V - \mu \tilde{\epsilon}_j^k) \Delta T} \tilde{\chi}_{j+1}^k$$

4. Calcul de  $\chi_j^k$  par :

$$\chi_j^k = e^{iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \tilde{\chi}_j^k$$

- Calculer récursivement  $\psi_{j+1}^{k+1}$  à partir de  $\psi_j^k$  par les deux calculs suivants :

1. Calcul de  $\tilde{\psi}_j^{k+1}$  par :

$$\tilde{\psi}_j^{k+1} = e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \psi_j^k$$

2. Calcul de  $\epsilon_j^{k+1}$  par résolution de :

$$\epsilon_j^{k+1} = (1 - \delta)\tilde{\epsilon}_j^k - \frac{\delta}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^*(\epsilon_j^{k+1}, \tilde{\epsilon}_j^k) | \tilde{\psi}_j^{k+1} \rangle \quad (3.31)$$

3. Calcul et sauvegarde de  $\tilde{\psi}_{j+1}^{k+1}$  par :

$$\tilde{\psi}_{j+1}^{k+1} = e^{-i(V - \mu \epsilon_j^{k+1}) \Delta T} \tilde{\psi}_j^{k+1}$$

4. Calcul de  $\psi_{j+1}^{k+1}$  par :

$$\psi_{j+1}^{k+1} = e^{-iH_0 \frac{\Delta T}{2}} \tilde{\psi}_{j+1}^{k+1}$$

Il nous faut nous assurer de l'existence de solutions et chercher des méthodes pour les résoudre. Ces problèmes sont traités dans les sections suivantes.

### 3.3.1 Existence de solutions

Les équations (3.30) et (3.31) doivent permettre de définir respectivement  $\tilde{\varepsilon}_j^k$  et  $\varepsilon_j^{k+1}$ . Pour dégager des conditions d'existence de solutions à ces équations, montrons tout d'abord que si elles existent, ces solutions sont nécessairement bornées. Notons  $\|\mu\|_*$  la norme de l'opérateur  $\mu$ .

Nous supposons à partir de maintenant que  $\delta \neq 2$  et  $\eta \neq 2$

**Théorème 3.2.** *Supposons que les équations (3.30) et (3.31) admettent comme solutions  $\tilde{\varepsilon}_j^k$  et  $\varepsilon_j^{k+1}$ . Alors il existe un réel positif  $M$ , ne dépendant que de  $\delta, \eta, \|\mu\|_*$  et  $\|O\|_*$  tel que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j, 0 \leq j \leq N-1, |\tilde{\varepsilon}_j^k| \leq M, |\varepsilon_j^{k+1}| \leq M$$

**Preuve.** Définissons  $M$  par :

$$M = \max(\|(\tilde{\varepsilon}_j^0)_{j=0 \dots N-1}\|_\infty, \max(1, \frac{\delta}{2-\delta}, \frac{\eta}{2-\eta}) \frac{\|O\|_* \|\mu\|_*}{\alpha}) \quad (3.32)$$

et raisonnons par récurrence.

Dans un premier temps, on a bien

$$|\tilde{\varepsilon}_j^0| \leq M \quad \forall 0 \leq j \leq N-1$$

Supposons maintenant que nous ayons à l'ordre  $k$  :

$$|\tilde{\varepsilon}_j^k| \leq M$$

Par suite,

$$(3.31) \Rightarrow |\varepsilon_j^{k+1}| \leq |1 - \delta|M + \frac{\delta}{\alpha} \tilde{X}_j^k |\mu^*(\varepsilon_j^{k+1}, \tilde{\varepsilon}_j^k)| \check{\psi}_j^{k+1} > |$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\varepsilon_j^{k+1}| \leq |1 - \delta|M + \frac{\delta}{\alpha} \|\tilde{X}_j^k\|_2 \|\mu^*(\varepsilon_j^{k+1}, \tilde{\varepsilon}_j^k) \check{\psi}_j^{k+1}\|_2$$

De plus, puisque les normes des différentes fonctions sont conservées au cours de la propagation, nous avons :

$$\|\check{\psi}_j^{k+1}\|_2 = 1$$

et

$$\begin{aligned} \|\tilde{\chi}_j^k\|_2 &= \|\chi_N^k\|_2 \\ &= \|O\psi_N^{k-1}\|_2 \\ &\leq \|O\|_* \|\psi_N^{k-1}\|_2 \\ &\leq \|O\|_* \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|\varepsilon_j^{k+1}| \leq |1 - \delta|M + \frac{\delta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu^*\|_\infty$$

D'autre part, posons

$$f(x) = e^{\mu x}$$

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a :

$$\mu^*(\varepsilon_j^{k+1}, \tilde{\varepsilon}_j^k) = \frac{f(-i(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T) - f(0)}{-i(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T - 0}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \leq \|\mu\|_*$$

Alors, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\|\mu^*(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)\| = \left\| \frac{e^{-i\mu(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T} - Id}{-i(\varepsilon_j^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T} \right\| \leq \|\mu\|_*$$

De cette dernière inégalité nous déduisons  $\|\mu^*\|_\infty \leq \|\mu\|_*$ .

Qui permet d'obtenir :

$$|\varepsilon_j^{k+1}| \leq |1 - \delta|M + \frac{\delta}{\alpha} \|0\|_* \|\mu\|_*$$

Si  $\delta \leq 1$ , alors  $|1 - \delta| = 1 - \delta$  et puisque  $\frac{\|0\|_* \|\mu\|_*}{\alpha} \leq M$  :

$$|\varepsilon_j^{k+1}| \leq (1 - \delta)M + \delta M = M$$

Si  $\delta \geq 1$ , alors  $|1 - \delta| = \delta - 1$  et puisque  $\frac{\delta}{2-\delta} \frac{\|0\|_* \|\mu\|_*}{\alpha} \leq M$  :

$$|\varepsilon_j^{k+1}| \leq (\delta - 1)M + (2 - \delta)M = M$$

Partant de cette majoration sur les termes de la suite  $(\varepsilon_j^{k+1})_{j=0 \dots N-1}$ , un raisonnement analogue permet de déduire :

$$\forall j, 0 \leq j \leq N, |\tilde{\varepsilon}_j^{k+1}| \leq M$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

Partant de ce résultat, nous pouvons démontrer l'existence de (3.30) et (3.31).

**Théorème 3.3.** Supposons que les opérateurs  $\mu$  et  $O$  soient bornés, alors il existe une solution  $(\varepsilon_j^{k+1}, \tilde{\varepsilon}_j^{k+1})$  à (3.30) et (3.31).

**Preuve.** Soit  $M$ , le réel défini par (3.32). Raisonnons par récurrence en supposant  $(\tilde{\varepsilon}_j^k)_{j=0 \dots N-1}$  bornée par  $M$ .

Définissons la fonction  $f$  par :

$$f : x \mapsto (1 - \delta)\tilde{\varepsilon}_j^k - \frac{\delta}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^*(x, \tilde{\varepsilon}_j^k) | \tilde{\psi}_j^{k+1} \rangle \quad (3.33)$$

La preuve du théorème 3.2 nous montre que  $\forall x \in [-M, M]$ ,  $f(x) \in [-M, M]$ .

La fonction  $f$  étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de conclure à l'existence d'un point fixe pour cette fonction et donc d'une solution à (3.31). Un raisonnement analogue peut être mené pour prouver l'existence d'une solution à (3.30). Ceci achève la preuve par récurrence.

Le schéma exposé est donc bien défini et produit des champs bornés par le réel  $M$ .

### 3.3.2 Unicité et itérations de Picard

Continuons de noter  $M$  le réel défini dans (3.32). Pour résoudre (3.30) et (3.31) une méthode de Picard peut être employée. Le théorème suivant en donne les conditions de convergence.

**Théorème 3.4.** Soit  $(\tilde{\varepsilon}_j^k)_{j=0\dots N-1}$  une solution de (3.30). Si :

$$\frac{\delta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu\|_*^2 \Delta T < 1, \quad (3.34)$$

alors la solution de (3.31) est unique et est la limite de la suite  $(u_n)_n$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-M, M] \\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases} \quad (3.35)$$

où  $f$  est la fonction définie à l'équation (3.33).

**Preuve.** Ici,  $\mu$  désigne aussi bien la fonction précédemment définie sur  $\Omega$  que son évaluation  $\mu(x)$  en un point quelconque de  $\Omega$ .

Soit  $h$  la fonction continue définie par :

$$h(x) = \begin{cases} i & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^{ix}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) \leq 1$   
 $\mu^*$  défini en (3.22) vérifie :

$$\mu^*(x, \tilde{\varepsilon}_j^k) = -i\mu h(\mu(x - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T)$$

Posons

$$\begin{aligned} \mu^{**}(x - y) &= \mu^*(x, y) \\ &= \frac{e^{-i\mu(x-y)\Delta T} - Id}{-i(x-y)\Delta T} \\ &= -\mu h(\mu(x-y)\Delta T) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{d\mu^{**}(x - \tilde{\varepsilon}_j^k)}{dx} = -i\mu^2 h'(\mu(x - \tilde{\varepsilon}_j^k)\Delta T)\Delta T$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|\mu^{**}(x - \tilde{\varepsilon}_j^k) - \mu^{**}(y - \tilde{\varepsilon}_j^k)| \leq \|\mu\|_*^2 \Delta T |x - y|,$$

par conséquent :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\delta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu\|_*^2 \Delta T |x - y|$$

et donne la conclusion annoncée.

Un résultat analogue peut bien entendu être obtenu pour l'existence de solution à (3.30) sous la condition :

$$\frac{\eta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu\|_*^2 \Delta T < 1 \quad (3.37)$$

Nous déduisons de cette manière une condition suffisante d'unicité des solutions des équations (3.30) et (3.31) et une méthode de résolution.

### 3.3.3 Méthode de Newton

Considérons que les conditions et sont vérifiées. Plutôt que de considérer des itérations sur la fonction  $f$  définie par (3.33), la méthode de Newton prescrit de calculer des itérations sur la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = x - \frac{f(x) - x}{f'(x) - 1}$$

Si  $x_0$  est solution de cette dernière et  $x$  un réel quelconque, il existe une valeur  $c_x$  comprise entre  $x$  et  $x_0$  telle que :

$$g(x) - g(x_0) = g''(c_x) \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

Une estimation grossière de  $g''(c_x)$  peut être faite à partir de la continuité de  $g''$ . Nous pouvons par exemple approcher  $g''(c_x)$  par  $g''(x_0)$ . Un calcul permet d'obtenir :

$$|g''(x_0)| \leq \frac{\frac{\delta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu\|_*^3 \Delta T^2}{1 - \frac{\delta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu\|_*^2 \Delta T} \quad (3.38)$$

Notons que le dénominateur de cette fonction n'est pas nul lorsque la condition du théorème 3.4 est vérifiée. La majoration (3.38) peut être utilisée pour estimer la vitesse de convergence de la méthode de Newton.

L'estimation (3.38) devient dans le calcul de  $\tilde{\varepsilon}$  :

$$|g''(x_0)| \leq \frac{\frac{\eta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu\|_*^3 \Delta T^2}{1 - \frac{\eta}{\alpha} \|O\|_* \|\mu\|_*^2 \Delta T} \quad (3.39)$$

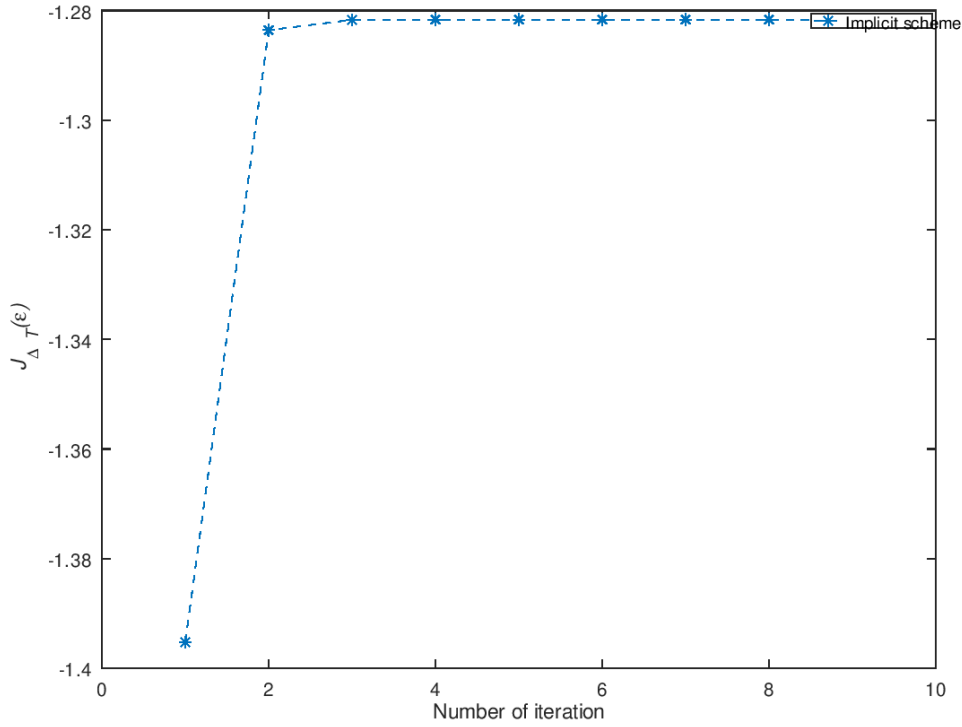
### 3.3.4 Résultats numériques

Nous considérons d'abord le problème simplifié.

$$i\dot{y}(t) = (A + c(t)B)y(t), \quad (3.40)$$

avec un état initial  $y_0$  fixé.  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques.

FIGURE 3.1 – Schéma implicite - évolution de la fonctionnelle



Le schéma est bien monotone et converge de plus très rapidement.

### 3.4 Schémas explicites

Considérons toujours

$$\phi_j(\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon'_j) = (\tilde{\varepsilon}_j - a_j(\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon'_j))^2 - (\varepsilon'_j - a_j(\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon'_j))^2 \quad (3.41)$$

et

$$\tilde{\phi}_j(\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j) = (\varepsilon_j - b_{j+1}(\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j))^2 - (\tilde{\varepsilon}_j - b_{j+1}(\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j))^2 \quad (3.42)$$

Et rappelons que, étant donné la suite  $(\varepsilon^k)$  :

1. l'analyse de la partie négative de  $\tilde{\phi}_j(\varepsilon_j^k, \tilde{\varepsilon}_j^k)$  pour chaque  $j$  permet de définir la suite  $(\tilde{\varepsilon}^k)$
2. l'analyse de la partie négative de  $\phi_j(\tilde{\varepsilon}_j^k, \varepsilon_j^{k+1})$  pour chaque  $j$  permet de définir la suite  $(\varepsilon^{k+1})$

Sans perte de généralité travaillons sur la 2 eme étape. Considérons l'application

$$f : x \mapsto \phi_j(\tilde{\varepsilon}_j^k, x)$$

On remarque que  $f(\tilde{\varepsilon}_j^k) = \phi_j(\tilde{\varepsilon}_j^k, \tilde{\varepsilon}_j^k) = 0$ .

Un choix optimal de  $\varepsilon_j^{k+1}$  est  $\varepsilon_j^{k+1} = \operatorname{argmax}_{\mathbb{R}} f(\cdot)$ . Pour déterminer ce point, l'on fait le



développement limité au voisinage du point  $\tilde{\varepsilon}_j^k$ . Posons  $h = x - \tilde{\varepsilon}_j^k$  et calculons

$$\begin{aligned} a_j^k(\tilde{\varepsilon}_j^k, \tilde{\varepsilon}_j^k + h) &= -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^* (\tilde{\varepsilon}_j^k, \tilde{\varepsilon}_j^k + h) | \check{\psi}_j^{k+1} \rangle \\ &= -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu | \check{\psi}_j^{k+1} \rangle \\ &\quad - h \frac{\Delta T}{2\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^2 | \check{\psi}_j^{k+1} \rangle \\ &\quad + h^2 \frac{\Delta T^2}{6\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^3 | \check{\psi}_j^{k+1} \rangle + o(h^2) \end{aligned}$$

Posons :

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu | \check{\psi}_j^{k+1} \rangle \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta T}{2\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^2 | \check{\psi}_j^{k+1} \rangle \quad (3.44)$$

et

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta T^2}{6\alpha} \Im \langle \tilde{\chi}_j^k | \mu^3 | \check{\psi}_j^{k+1} \rangle \quad (3.45)$$

On remplace dans  $f$  :

$$f(\tilde{\varepsilon}_j^k + h) = (\tilde{\varepsilon}_j^k - \varepsilon_0 + \varepsilon_1 h - \varepsilon_2 h^2)^2 - (\tilde{\varepsilon}_j^k + h - \varepsilon_0 + \varepsilon_1 h - \varepsilon_2 h^2)^2 + o(h^2)$$

Ce polynôme en  $h$  est maximal au point

$$h_{max} = \frac{\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_j^k}{2\varepsilon_1 + 1} \quad (3.46)$$

Ce qui nous donne

$$\varepsilon_j^{k+1} = \tilde{\varepsilon}_j^k + h_{max} \quad (3.47)$$

Sachant que  $\tilde{\varepsilon}_j^k$  a été déterminé à l'étape 1 de façon similaire.

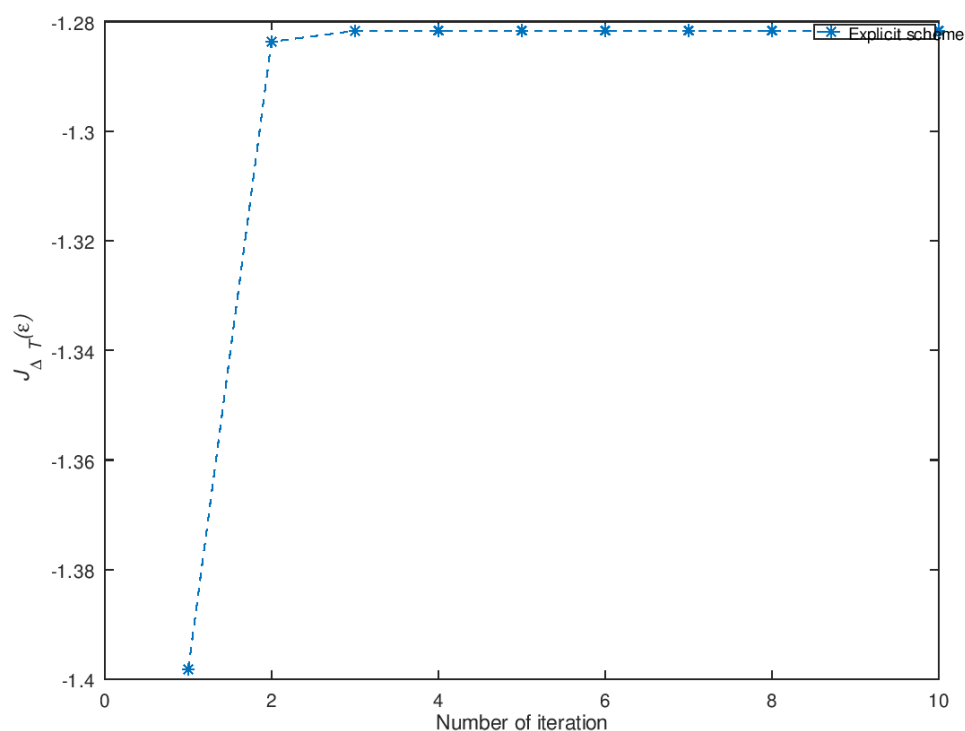
### 3.4.1 Résultats numériques

Nous considérons a nouveau :

$$i\dot{y}(t) = (A + c(t)B)y(t), \quad (3.48)$$

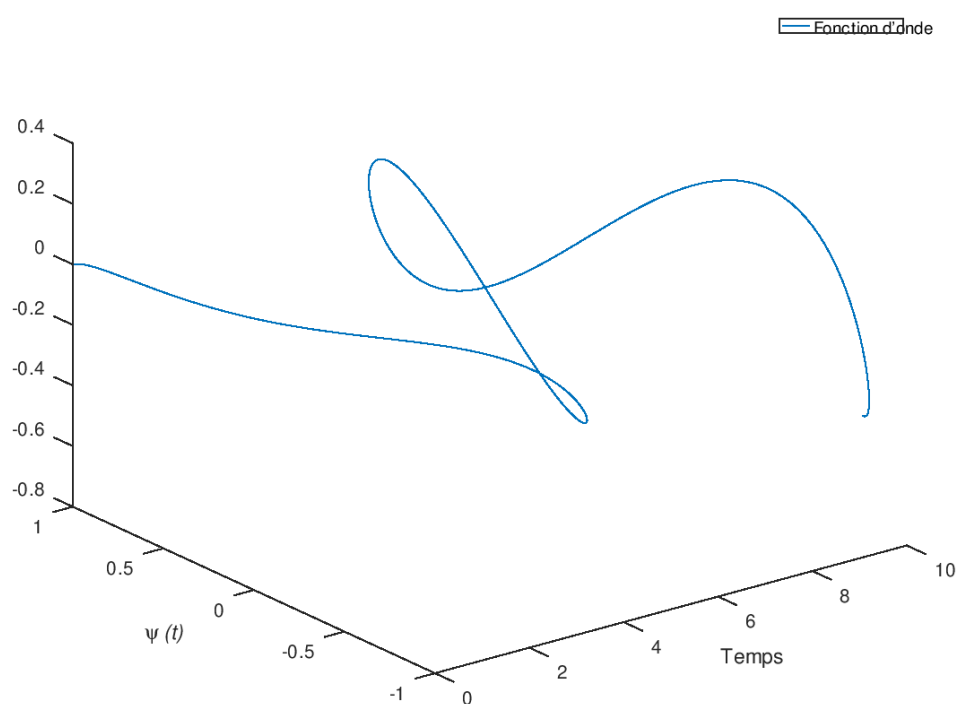
En dimension 2, l'évolution de la fonctionnelle  $J(\varepsilon)$  est

FIGURE 3.2 – Schéma explicite - évolution de la fonctionnelle



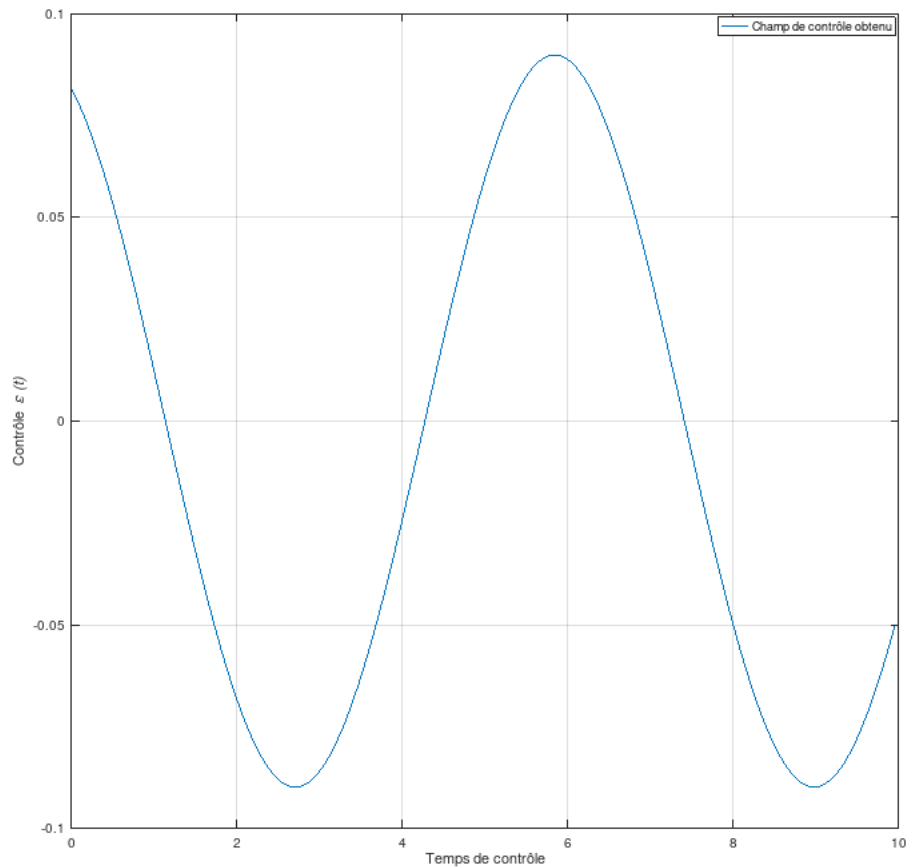
La fonction d'onde après 10 itération de l'algorithme

FIGURE 3.3 – Schéma explicite - évolution de la fonctionnelle



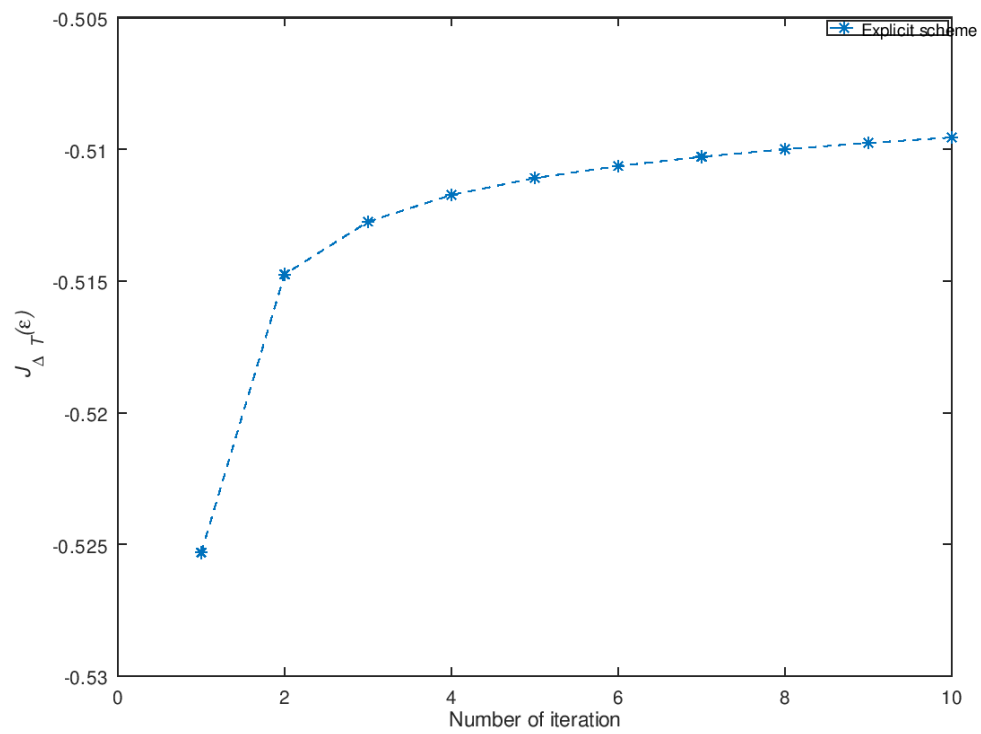
Et enfin le contrôle obtenu

FIGURE 3.4 – Schéma explicite - évolution de la fonctionnelle



Nous notons aussi que l'exécution du schéma explicite est très rapide par rapport à celle du schéma implicite en considérant les mêmes paramètres. Pour finir, nous étudions le même problème en dimension 10, l'utilité du schéma est ici plus remarquable

FIGURE 3.5 – Schéma explicite pour un problème en dimension 10 - évolution de la fonctionnelle



---

# Conclusion et perspectives

---

Le contrôle de l'équation de Schrödinger fait partie d'un domaine de recherche plus vaste appelé contrôle quantique. Le contrôle quantique a connu une activité intense ces deux dernières décennies; ce n'est pas surprenant compte tenu de l'importance de la modélisation quantique dans la science des matériaux, conception de médicaments, biologie moléculaire, etc.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une classe d'algorithme particulièrement adaptée aux problèmes de contrôle quantique : les schémas monotones. Nous avons donc étudié ces algorithmes puis construit différentes discrétisations qui préservent la propriété de monotonie.

Somme toute, les simulations numériques effectuées montrent que les algorithmes construits sont bien monotones et convergent très rapidement.

Dans un travail futur, nous pensons, dans un premier temps intégrer une discrétisation spatiale avec les méthodes de Galerkin. Ensuite, nous nous intéresserons à paralléliser sur plusieurs processeurs ces algorithmes. Enfin, nous voulons également étudier d'autres problèmes en contrôle quantique, notamment les condensats de Bose-Einstein et les problèmes relevant de l'informatique quantique.

---

# Annexe A : Espaces de Hilbert complexes et opérateurs hermitiens

---

## 3.5 Rappels sur les espaces de Hilbert

### 3.5.1 Produit scalaire hermitien

Les conventions qui suivent imposent un choix de l'argument qui est linéaire. Le choix ci-dessous (forme sesquilinéaire à gauche : première variable semi-linéaire, deuxième variable linéaire) est utilisé par les physiciens, ceci étant dû à l'origine à l'utilisation de la notation bra-ket introduite par Dirac<sup>1</sup>, mais le choix opposé est courant en mathématiques.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

**Définition 3.1.** Une forme sesquilinéaire à gauche est une application  $b : E \times E \mapsto \mathbb{C}$  telle que

- pour tout  $x \in E$ ,  $b_1 : y \mapsto b(x, y)$  est linéaire ;
- pour tout  $y \in E$ ,  $b_2 : x \mapsto b(x, y)$  est semi-linéaire :
  - \* pour tous  $x_1, x_2 \in E$ , on a  $b_2(x_1 + x_2) = b_2(x_1) + b_2(x_2)$
  - \* pour tous  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $b_2(\lambda x) = \bar{\lambda} b_2(x)$

**Définition 3.2.** Une forme sesquilinéaire est dite hermitienne (ou à symétrie hermitienne) si pour tous  $x, y \in E$ , on a  $b(y, x) = \overline{b(x, y)}$

**Remarque 3.1.** Remarquons que pour une forme hermitienne, on a  $b(x, x) = \overline{b(x, x)}$  donc  $b(x, x) \in \mathbb{R}$

**Remarque 3.2.** Une application  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  est une forme sesquilinéaire à droite, si et seulement si, l'application  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ , définie par  $b(x, y) = f(y, x)$  est sesquilinéaire à gauche.

**Proposition 3.1.** L'ensemble des formes sesquilinéaires hermitiennes sur  $E$  est un espace vectoriel complexe.

On note  $q(x) = b(x, x)$  et on dit que  $q$  est la forme quadratique associée à  $b$ . On a  $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

---

1. Paul Dirac, Les Principes de la mécanique quantique [« The Principles of Quantum Mechanics »] (1re éd. 1930)

### Identités de polarisation

Soit  $b$  une forme hermitienne. Soit  $x, y \in E$ .

$$b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + 2\Re(b(x, y)) \quad (3.49)$$

$$b(x + iy, x + iy) = b(x, x) + b(y, y) - 2\Im(b(x, y)) \quad (3.50)$$

$$b(x, y) = \frac{1}{4}[b(x + y, x + y) - b(x - y, x - y) + ib(x + iy, x + iy) - ib(x - iy, x - iy)] \quad (3.51)$$

$$\Re(b(x, y)) = \frac{1}{4}[b(x + y, x + y) - b(x - y, x - y)] \quad (3.52)$$

$$\Im(b(x, y)) = -\frac{1}{4}[b(x + iy, x + iy) - b(x - iy, x - iy)] \quad (3.53)$$

**Définition 3.3.** Un produit scalaire hermitien est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, c'est-à-dire toute application  $b$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{C}$  telle que :

1.  $b$  est une forme sesquilinéaire hermitienne
2.  $\forall x \in E, b(x, x) \geq 0$
3.  $\forall x \in E, b(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

**Définition 3.4.** Un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien complexe.

Si, de plus, il est de dimension finie, on dira que c'est un espace hermitien. On note le produit scalaire  $b(x, y) = \langle x, y \rangle$

**Exemple 3.1.** L'espace  $\mathbb{C}^n$  avec

$$b(u, v) = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$$

**Exemple 3.2.** L'espace  $L^2(I)$  avec  $I \subset \mathbb{R}$

$$b(g, h) = \int_I \overline{g(t)} h(t) dt$$

### 3.5.2 Norme hermitienne

**Définition 3.5.** Soit  $E$  un espace préhilbertien complexe. On pose  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . On définit ainsi une norme sur  $E$  dite norme hermitienne

#### Relations entre norme et produit scalaire : identités de polarisation

Soit  $E$  un espace préhilbertien complexe.  $x, y \in E$ .

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) \quad (3.54)$$

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\Im(\langle x, y \rangle) \quad (3.55)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2] \quad (3.56)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (3.57)$$

**Définition 3.6.** Un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire est appelé espace de Hilbert.

### 3.6 Opérateur hermitien

Dans toute cette section,  $H_1$  et  $H_2$  désignent deux espaces de Hilbert. On dira que  $T : H_1 \rightarrow H_2$  est un opérateur borné de  $H_1$  dans  $H_2$  si  $T$  est une application linéaire continue de  $H_1$  dans  $H_2$ . La définition ci-dessous généralise aux espaces de Hilbert la notion d'endomorphisme adjoint vue en L2 dans le cadre des espaces euclidiens.

**Théorème 3.5.** *Soit  $T$  un opérateur borné de  $H_1$  dans  $H_2$ . Il existe un et un seul opérateur borné  $T^*$  de  $H_2$  dans  $H_1$  vérifiant*

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2, \langle Tf, g \rangle_{H_2} = \langle f, T^*g \rangle_{H_1}$$

L'opérateur  $T^*$  est appelé opérateur adjoint de  $T$ , et l'on a  $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)}$

**Définition 3.7.** *On dit que  $T \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur auto-adjoint ou hermitien si  $T = T^*$ , c'est-à-dire : pour tous  $x, y \in H$ ,*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

*Antihermitien si  $A = -A^*$ .*

*Unitaire si  $AA^* = Id$ .*

Si  $T$  est auto-adjoint alors pour tout  $x \in H$ ,  $\langle Tx, x \rangle$  est réel (même si  $H$  est un espace de Hilbert complexe).

Comme en dimension finie avec les endomorphismes symétriques, on peut définir les notions de positivité et de négativité pour les opérateurs auto-adjoints.

**Définition 3.8.** *On dit qu'un opérateur auto-adjoint  $T$  est positif si*

$$\forall x \in H, \langle Tx, x \rangle \geq 0$$

On dit qu'il est défini positif si l'inégalité ci-dessus est stricte pour  $x \neq 0$ .

On dit que  $T$  est négatif (resp. défini négatif) si  $-T$  est positif (resp. défini positif).

**Proposition 3.2.** *Si  $T$  est opérateur auto-adjoint alors toutes ses valeurs propres sont réelles. Si de plus il est positif (resp. défini positif) alors toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).*



---

## Annexe B : Semi-groupes

---

**Définition 3.9.** Soit  $X$  un espace de Banach. Une famille  $(T(t))_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires bornés de  $X$  dans  $X$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés si

- (i)  $T(0) = id_X$ ;
- (ii)  $T(t+s) = T(t)T(s)$ ,  $\forall t, s \geq 0$ ;
- (iii)  $\forall x \in X$ ,  $\mathbb{R} \ni t \mapsto T(t)x \in X$  est continue en 0.

**Remarque 3.3.** Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés  $(T(t))_{t \geq 0}$ , est uniformément continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$$

Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur  $X$  sera appelé semi-groupe de classe  $C_0$  ou simplement  $C_0$  semi-groupe.

Si seulement (i) et (ii) sont satisfaits, on dit que la famille  $(T(t))_{t \geq 0}$  est un semi-groupe.

**Définition 3.10.** L'opérateur linéaire  $A$  défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \quad (3.58)$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{pour } x \in D(A) \quad (3.59)$$

est le générateur infinitésimal du semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ ;  $D(A)$  est le domaine de  $A$

---

# Bibliographie

---

- [1] Krotov, V.F., Feldman, I.N. *Iterative methods for solving extreme problems*. In the book : Modeling of technical and economic processes, Moscow, Moscow Economic and Statistical Institute (MESI) Publ. (1978), 54–65. (en russe)
- [2] Krotov, V.F., Feldman, I.N. *An iterative method for solving problems of optimal control*. Engineering Cybernetics, 21 :2 (1983), 123–130.
- [3] Tannor, D., Kazakov, V., Orlov, V. *Control of photochemical branching : Novel procedures for finding optimal pulses and global upper bounds*. Time Dependent Quantum Molecular Dynamics, edited by Broeckhove J. and Lathouwers L. Plenum, 347–360 (1992)
- [4] Zhu, W., Rabitz, H. *A rapid monotonically convergent iteration algorithm for quantum optimal control over the expectation value of a positive definite operator*. J. Chem. Phys. 109, 385–391 (1998)
- [5] Maday, Y., Turinici, G. *New formulations of monotonically convergent quantum control algorithms*. J. Chem. Phys. 118, 8191–8196 (2003)
- [6] Maday, Y., Salomon, J. and Turinici, G.. *Monotonic time-discretized schemes in quantum control*. Num. Math., 2005.
- [7] Salomon, J. *Contrôle en chimie quantique : conception et analyse de schémas d'optimisation*. 2005.
- [8] Strang, G. *Accurate partial difference methods I : Linear Cauchy problems..* Arch. Rat. Mech. and An. 12, 392–402 (1963)
- [9] Trélat, E. *Contrôle optimal : théorie et applications*. avril 2016.
- [10] Fattorini, H.O., Kerber, A. *The Cauchy problem* Encyclopedia of mathematics and its applications 18. Section, Analysis. -Cambridge Press. 2009.
- [11] Dossa, A. *Cours de Physique Quantique*. 2015-2016.

- [12] Glorieux, Q. *Cours 4 – Les principes de la mécanique quantique 3P001 – Université Pierre et Marie Curie*. 2015-2016.
- [13] Dong, D., Petersen, I.R. *Quantum control theory and applications : A survey*. 2011.
- [14] Bidégaray-Fesquet, B. *Méthodes numériques avancées pour la finance. — Méthodes de splitting*. 2009-2010.
- [15] Cancès, E., Le Bris, C., Pilot., M. *Optimal bilinear control for a Schrödinger equation*. C. R. Acad. Sci. Paris, 330 (Série 1) : 567–571, 2000.
- [16] Baudouin, L., Puel., J-P. *Bilinear optimal control problem on a Schrödinger equation with singular potentials*. 2005.
- [17] Eaton, J.W., et al. *GNU Octave version 3.8.1 manual : a high-level interactive language for numerical computations*. CreateSpace Independent Publishing Platform. 2014.