Cours Optimisation numérique
Année universitaire 2017-2018

Institut de Mathématiques et Sciences Physiques
M. Postel

Projet, Novembre 2017

Partie 1. Excursion en dimension infinie : l'optimisation du profil d'une route.
On considère une première approche simplifiée du problème du profil d'une route de longueur L. On construit la route en faisant uniquement des tranchées et des talus ; le tracé est supposé donné, seules la profondeur des tranchées et la hauteur des talus (i.e. le profil de la route) sont à définir.

— La route est tracée sur un sol dont l'altitude est définie par une fonction $g(x)$, pour $x \in [0, L]$.

— L'altitude, ou le profil, de la chaussée, est définie par la fonction $u(x)$, pour $x \in [0, L]$.

— L'objectif est de définir un profil $u(x)$ qui ne dépasse jamais une pente donnée α, tout en minimisant le coût des remblais et des tranchées à effectuer, que l'on suppose évalué par la fonction

$$J(u) = \int_0^L \phi(u(x) - g(x))dx$$

avec $\phi(x) = x^2$.

Il s'agit donc de résoudre le problème d'optimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} D_a = \{u \in \mathcal{C}([0, L]), \forall x, y \in [0, L], |u(x) - u(y)| \leq \alpha |x - y|\}, \\ \forall u \in D_a, J(u^\star) \leq J(u). \end{array} \right. \tag{1}$$

On rappelle que

$$||u|| = \left(\int_0^L u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

définit la norme euclidienne sur l'espace vectoriel $L^2([0, L])$, associé au produit vectoriel

$$\langle u, v \rangle = \int_0^L u(x)v(x)dx$$

1. Vérifier que D_a est un convexe.
2. Montrer que la solution u de (**??**) est la projection, au sens de la norme de $L^2([0, L])$, de la fonction g sur le convexe D_a.

3. Montrer que la fonction J est strictement convexe.
4. Montrer que J est différentiable sur D_a. Calculer sa différentielle $dJ(u)$ en $u \in D_a$. On précisera la nature de $dJ(u)$.
5. On admet l'existence d'une solution $u^\star \in D_a$ de (**??**). Montrer que

$$\int_0^L (u^\star(x) - g(x))\, dx = 0.$$

Partie II. Retour à la dimension finie : l'approximation du problème.

Dans cette partie, contrairement à l'habitude, les composantes d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sont numérotées de 0 à $n-1$. Du coup, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, la notation $x \preceq y$ veut dire $x_i \leq y_i$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$.

On va maintenant s'intéresser à l'approximation discrétisée du problème précédent. Pour cela nous allons approcher le profil recherché $u(x)$ par une fonction continue affine par morceaux. Soit :

- $h = \frac{L}{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ donné
- V_h l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux sur $[0, L]$ pour un partage en intervalles de longueur h.
- On pose :

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = 0, \ldots, n-1, \\ u_i &= u(x_i), \quad U = (u_0, \ldots, u_{n-1})^T, \\ g_i &= g(x_i), \quad G = (g_0, \ldots, g_{n-1})^T. \end{aligned}$$

Une fonction $u(x)$ de V_h est obtenue par interpolation linéaire entre des valeurs $u_i = u(x_i)$ aux points x_i, $i = 0, \ldots, n-1$. Elle est parfaitement définie par ces valeurs. $i.e.$ l'application qui à $u \in V_h$ associe $U \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espace vectoriel : on peut donc identifier V_h à $\mathbb{R}^n$.

Soit C_h le polyèdre de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$C_h = \{U \in \mathbb{R}^n, \forall i, 1 \leq i \leq n-1, |u_i - u_{i-1}| \leq \alpha h\}$$

1) Montrer que

$$u \in V_h \cap D_a \Leftrightarrow U \in C_h.$$

On approche l'intégrale $J(u)$ en remplaçant les intégrales exactes par leur approximation par la formule des trapèzes

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(x) - g(x))^2 dx \approx \frac{h}{2}((u(x_i) - g(x_i))^2 + (u(x_{i+1}) - g(x_{i+1}))^2),$$

ce qui donne

$$J(u) \approx I(U) = h\left(\frac{1}{2}(u_0 - g_0)^2 + (u_1 - g_1)^2 + \ldots + (u_{n-2} - g_{n-2})^2 + \frac{1}{2}(u_{n-1} - g_{n-1})^2\right).$$

2) Montrer qu'il existe une matrice A qu'on explicitera, telle que

$$I(U) = \langle A(U - G), U - G\rangle.$$

Pour approcher (**??**) on pose le problème d'optimisation

$$\text{Trouver } U^\star = (U_0^\star, \ldots, U_{n-1}^\star)^T \in C_h, \text{ tel que } \forall U \in C_h \quad I(U^\star) \leq I(U). \tag{2}$$

3) Mettre le problème (**??**) sous la forme canonique d'un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalité

$$\inf_{CU - b \preceq 0} I(U)$$

avec $C \in \mathcal{M}_{2(n-1)\times n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$. On explicitera la matrice C et le vecteur b.

4) Le problème (**??**) a-t-il une solution unique ?

5) Ecrire les conditions KKT du premier ordre pour le problème (**??**).

6) Sont-elles des conditions nécessaires ? suffisantes ?
On rappelle l'algorithme d'Uzawa pour résoudre le problème général

$$(P) \qquad \begin{cases} \min & f(x) \\ c^I(x) \preceq 0 & \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{cases}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \\ c^I & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Données : Le lagrangien $\ell(x, z)$, le pas dual $\rho > 0$, la tolérance ε, le nom max d'itérations k_{max}
Résultat : Solution $x^\star, z^\star$ du problème (P)
Initialisation : Pour $k = 0$, choisir une estimation z^0 de $z^\star$, x_0 de $x^\star$ et $\rho > 0$.
Pour $k = 1$, calculer x^1 (étape (i)) et z^1 (étape (ii)).
répéter
(i) Chercher x^{k+1} solution du problème primal

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \ell(x^{k+1}, z^k) \leq \ell(x, z^k)$$

(ii) Calculer $z^{k+1} = \max(0, z^k + \rho c^I(x^{k+1}))$
$k \leftarrow k + 1$
jusqu'à $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$ *ou* $k > k_{max}$;
$x^\star = x_k$
$z^\star = z_k$

7) Expliciter la solution de l'étape (i) de cet algorithme pour le problème (**??**).

Partie III. Mise en oeuvre numérique avec Scilab.

1. Lire le profil du terrain enregistré par les géomètres dans le fichier "profil.txt". On pourra utiliser la commande Scilab `fscanfMat`. La première colonne contient les abscisses des points de mesures, le long du tracé rectiligne de la route, en mètres, la deuxième les altitudes de ces points, en mètres également. Afficher graphiquement la courbe $(x_i, g_i)_i$. Mettre des légendes aux axes.
   Pour mettre au point la suite du programme, on conseille de travailler sur une petite portion de la route seulement (les 10 premiers points), et de ne traiter l'ensemble du profil qu'une fois que le programme tourne.
2. Calculer p, la pente locale maximale sur ce profil, afficher avec une commande `printf`. Dans un premier temps on choisira comme pente maximale pour la route $\alpha = 10\%$.
3. Définir la matrice `A`, le vecteur `b`, la matrice `C`.
4. Exceptionnellement, la matrice A est si simple, qu'il est avantageux de calculer explicitement son inverse pour résoudre le problème primal à chaque itération d'Uzawa (question 7) Partie II). Définir la matrice `Am1`, contenant l'inverse de `A`.
5. Programmer l'algorithme d'Uzawa. On affectera `eps=0.1, Kmax=10` pendant la phase de debuggage, puis quand le programme tourne correctement, `eps=0.01, Kmax=20000`. Afficher graphiquement la solution à chaque itération, superposée au profil du terrain.
6. Afficher sur une autre figure le tracé final superposé au profil du terrain. Mettre une légende permettant de distinguer les deux courbes. Afficher avec `printf` le nombre d'itérations `k` nécessaires pour obtenir le profil de contrainte `alpha` avec la tolérance `eps` imposée.
7. Faire varier α, comment varie le nombre d'itérations ?
8. Vérifier que si on choisit $\alpha > p$ le programme s'arrête au bout d'une itération. Vérifier que les contraintes sont toutes inactives sur le profil de route final.
9. Tracer la courbe $J(u^\star, \alpha)$ en fonction de α. Si l'entrepreneur avait cette courbe à sa disposition, comment pourrait-il l'utiliser ?
10. Sur la solution obtenue a t-on retiré plus de terrain qu'on en a remis ou l'inverse ?
11. On remarque que le tracé optimisé par cette méthode comporte des angles saillants et rentrants, quand des contraintes de signe opposés sont activées dans des zones consécutives. Imaginer une contrainte supplémentaire permettant de limiter ces angles, de manière à ce que la route ait un aspect plus "lisse".
12. Discuter le choix de la fonction$\phi(x) = x^2$ y a t-il des choix plus judicieux du pont de vue pratique ? Qu'entrainent-ils du point de vue de l'analyse mathématique ?