UNIVERSITE D'ABOMEY CALAVI (UAC)

INSTITUT DE MATHEMATIQUE ET DE SCIENCES PHYSIQUES (IMSP)

Centre d'Excellence Africain en Science Mathématiques et Applications: (CEA-SMA)

Master 1 Mathématiques fondamentales

# Projet d'Optimisation numérique

Optimisation du profil d'une route

Présenté par:
Anne-Marie AHOUNOU
Kenneth ASSOGBA

Supervisé par :
Professeur Marie POSTEL

# Partie I

**Excursion en dimension infinie : l'optimisation du profil d'une route**

On considère une première approche simplifiée du problème du profil d?une route de longueur L. On construit la route en faisant uniquement des tranchées et des talus ; le tracé est supposé donné, seules la profondeur des tranchées et la hauteur des talus (i.e. le profil de la route) sont à définir.

- La route est tracée sur un sol dont l'altitude est définie par une fonction g(x), pour $x \in [0, L]$ ;
- L'altitude, ou le profil, de la chaussée, est définie par la fonction u(x), pour $x \in [0, L]$.
- L'objectif est définir un profil u(x) qui ne dépasse jamais une pente donnée $\alpha$,tout en minimisant le coût
  des remblais et des tranchées à effectuer,évalué par la fonction

J(u) $=\int_0^L \phi(u(x) - g(x))^2$
avec $\phi(x) = x^2$
Il s'agit donc de résoudre le problème d'optimisation

$$\begin{cases} D_a = \{u \in \mathcal{C}([0, L]), \forall x, y \in [0, L], |u(x) - u(y)| \leq \alpha|x - y|\}, \\ \forall u \in D_a, J(u\star) \leq J(u) \end{cases}$$

$$||u|| = \left(\int_0^L u(x)^2 dx\right)^{\dfrac{1}{2}}$$

$$\langle u, v\rangle = \int_0^L u(x)v(x)dx$$

1. Vérifions que $D_a$ est un convexe
   Soit $u, v \in D_a$, soit $\theta \in [0, 1]$
   Montrons que $\theta u + (1 - \theta)v \in D_a$
   $u \in D_a \iff u \in \mathcal{C}([0, L]), \forall x, y \in [0, L], |u(x) - u(y)| \leq \alpha|x - y|\}$ et

$v \in D_a \Longleftrightarrow v \in \mathcal{C}([0,L]), \forall x, y \in [0,L], |v(x)-v(y)| \leq \alpha|x-y|\}$
$u \in \mathcal{C}([0,L])$ et $v \in \mathcal{C}([0,L])$ alors $\theta u + (1-\theta)v \in \mathcal{C}([0,L])$ car $\mathcal{C}([0,L])$ est un $R_{ev}$
Soit $x, y \in [0,L]$

$$\begin{aligned}|\theta u + (1-\theta)v| &\leq \theta\alpha|x-y| + (1-\theta)\alpha|x-y| \\ &\leq \alpha|x-y|\end{aligned}$$

donc $\theta u + (1-\theta)v \in D_a$
D'oú $D_a$ est convexe.

2. Montrons que u* solution du problème est la projection au sens de la norme de $L^2([0,L])$,de la fonction g sur $D_a$
Soit f :$\mathcal{C}([0,L]) \to \mathcal{R}, u \mapsto |u(x)-u(y)| - \alpha|x-y|, \forall x, y \in [0,L]$
f est continue comme somme de fonctions continues
$D_a = \{u \in \mathcal{C}([0,L]); f(u) \leq 0\} = f^{-1}([-\infty, 0])$
Ainsi $D_a$ est fermé dans $L^2([0,L])$ comme image réciproque de fermé.
Par suite u* solution du problème est la projection au sens de la norme de $L^2([0,L])$,de la fonction g sur $D_a$

3. Montrons que J est strictement convexe
Soit $u \in D_a$
$J(u) = \parallel u - g \parallel^2$
J est deux fois différentiable sur $D_a$ qui est un convexe et
$\bigtriangledown J(u) = 2(u-g)$ et $HJ(u) = 2 > 0$ donc $HJ(u) \in S_{++}$
D'où J est strictement convexe.

4. Montrons que J est différentiable sur $D_a$
D'après la question 3,J est différentiable.
Soit $h \in D_a$ $\forall u \in D_a$

$$\begin{aligned}J(u+h) &= \parallel u+h-g \parallel^2 \\ &= \parallel u-g \parallel^2 + 2\langle u-g, h\rangle + \parallel h \parallel^2 \\ &= J(u) + 2\langle u-g, h\rangle + \circ(\parallel h \parallel^2)\end{aligned}$$

D'où dJ(u)=2(u-g)
<u>Nature dJ(u):</u>
dj(u) est une forme linéaire

5. Montrons que

$$\int_0^L (u * (x) - g(x)dx = 0$$

u* étant solution du problème alors dJ(u)=0:

$$\begin{aligned} dJ(u*) = 0 &\Longleftrightarrow 2(u * -g) = 0 \\ &\Longleftrightarrow u* = g \end{aligned}$$

Par suite

$$\int_0^L (u * (x) - g(x)dx = 0$$

# Partie II

**Retour á la dimension finie : l'approximation du problème**

- $x \in \mathcal{R}^n \Rightarrow x = (x_1, \ldots, x_n)$
- $x_i = ihi = 0, \ldots, n-1$
- $h = \dfrac{L}{n-1}$,$[0, L] = \bigcup_{i=0}^{n-1}$ avec$x_0 = 0$ et$x_n = L$
- $V_h$=ensemble des fonctions continues affines par morceaux sur [0,L]
- $u_i = (u(x_i))$,$U = (u_0, \ldots, u_n)^T$
- $g_i = (g(x_i))$,$G = (g_0, \ldots, g_n)^T$
- $C_h = \{U \in \mathcal{R}^n, \forall i, 1 \leq i \leq n-1, |u_i - u_{i-1} \leq \alpha h\}$
- $m : V_h \to \mathcal{R}^n, u \longmapsto m(u) = (u_i)_{i=0}^{n-1} = U$, est un isomorphisme d'espace vectoriel,donc$V_h \cong \mathcal{R}^n$

1. Montrons que$u \in V_h \bigcap D_a \Leftrightarrow U \in C_h$

$$
\begin{aligned}
u \in V_h \bigcap D_a &\Leftrightarrow u \in V_h et u \in D_a \\
&\Leftrightarrow u \in V_h et u \in \mathcal{C}([0,L]), \forall x, y \in [0,L][x,y], |u(x)-u(y)| \leq \alpha|x-y| \\
&\Leftrightarrow m(u) \in \mathcal{R}^n et u \in \mathcal{C}([0,L]), \forall x, y \in \bigcup_{i=0}^{n-1}[x_{i-1}, x_i], |u(x)-u(y)| \leq \alpha|x-y| \\
&\Leftrightarrow U \in \mathcal{R}^n et u \in \mathcal{C}([0,L]), \forall x, y \in \bigcup_{i=0}^{n-1}[x_{i-1}, x_i], |u(x)-u(y)| \leq \alpha|x-y| \\
&\Leftrightarrow U \in \mathcal{R}^n et \forall \leq i \leq n-1 [x_{i-1}, x_i], |u(x_i) - u(x_{i-1}| \leq \alpha|x_i - x_{i-1}| \\
&\Leftrightarrow U \in \mathcal{R}^n et \forall \leq i \leq n-1 [x_{i-1}, x_i], |u(x_i) - u(x_{i-1}| \leq \alpha h \\
&\Leftrightarrow U \in C_h
\end{aligned}
$$

Donc $u \in V_h \bigcap D_a \Leftrightarrow U \in C_h$

2. Montrons qu'il existe A telle que
   $I(U) = \langle A(U-G), U-G \rangle$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \dots & 0 & \\ 0 & 1 \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 1 & \end{pmatrix}
$$

3. Matrice C et vecteur b

$$
C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \dots & 0 & \\ 0 & 1 \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}
$$

$$
b = \begin{pmatrix} \alpha h \\ \vdots \alpha h \end{pmatrix}
$$

4. Vu que J est strictement convexe sur le convexe $D_a$ alors le problème admet une unique solution.

5. Ce ne sont pas des conditions nécéssaires mais suffisantes.

6. Explication
   L'étape i permet de calculer la solution a la kième itèration

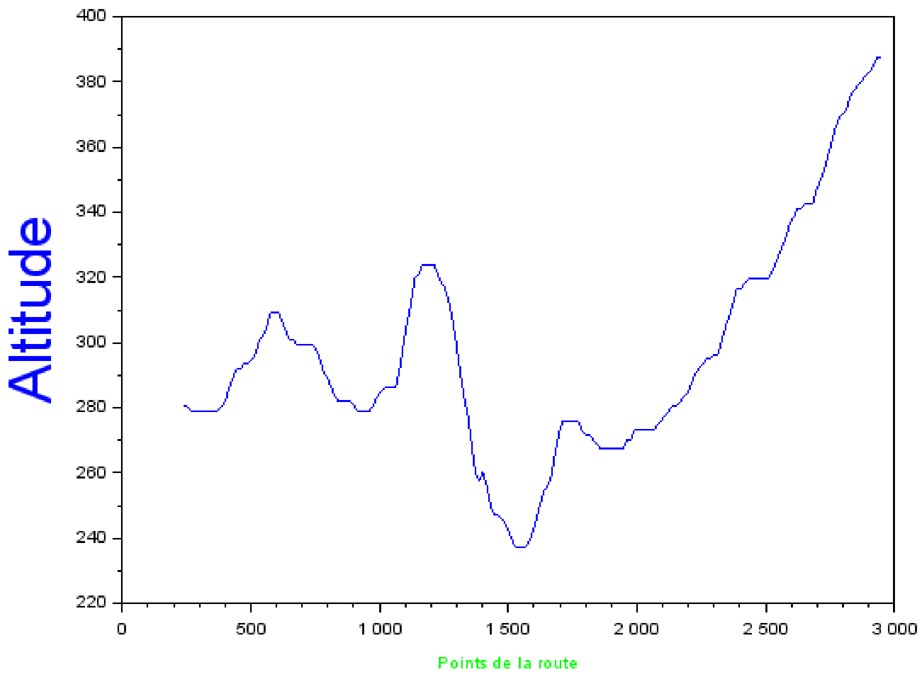
Altitude
400
380
360
340
320
300
280
260
240
220
0
500
1 000
1 500
2 000
2 500
3 000
Points de la route

Figure 1:

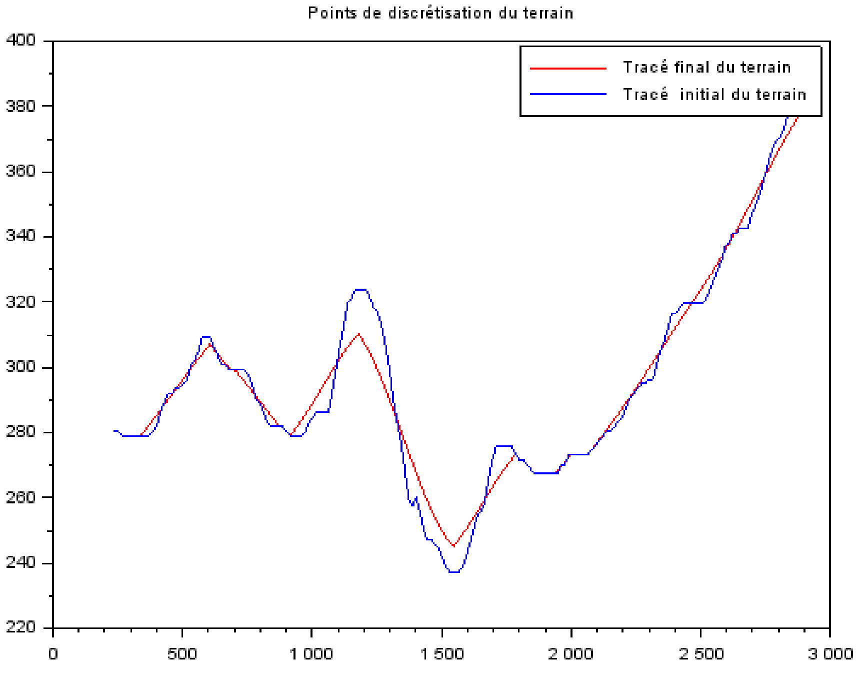
Points de discrétisation du terrain
Tracé final du terrain
Tracé initial du terrain
400
380
360
340
320
300
280
260
240
220
0
500
1 000
1 500
2 000
2 500
3 000

Figure 2:

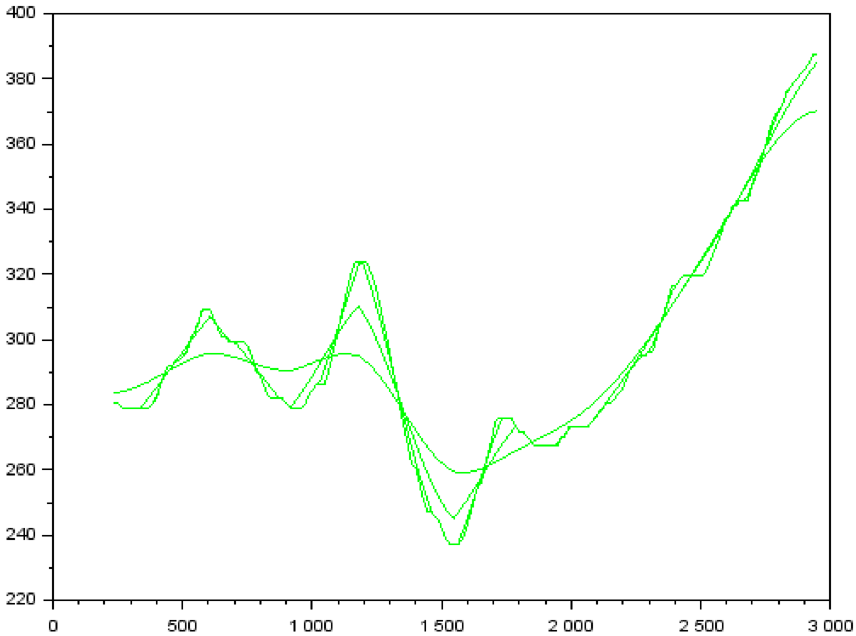
400
380
360
340
320
300
280
260
240
220
0
500
1 000
1 500
2 000
2 500
3 000

Figure 3: