

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

---

$P \vee \sim P?$

Eis a questão...

2.

# REGRAS DE EQUIVALÊNCIA

Cálculo Proposicional



## REGRAS EQUIVALÊNCIA

# Dupla Negação - DN *e*

$\sim\sim P :: P$

É falso que Raul não é careca  
Raul é careca



$$\sim\sim P::P$$

$$\sim\sim Q::Q$$

$$\sim\sim R::R$$

# DN – Dupla Negação: $\sim\sim P :: P$

← PREMISSA      CONCLUSÃO  
1.  $\sim P \rightarrow Q, \sim Q : P$

1. $\sim P \rightarrow Q$	P
2. $\sim Q$	P
3. $\sim(\sim P)$	1, 2, MT
4. $P$	3, <u>DN</u>

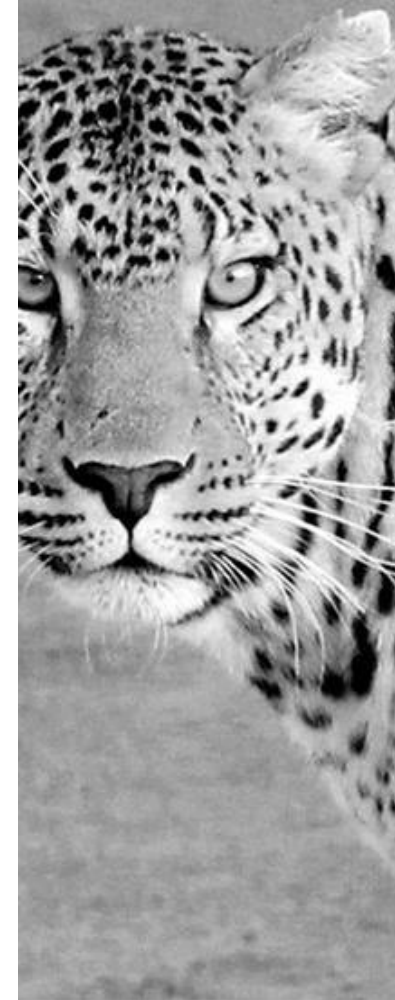
## REGRAS EQUIVALÊNCIA


# Contraposição - Contra

$$P \rightarrow Q :: \sim Q \rightarrow \sim P$$

Se o carro é amarelo então a bola é azul

Se a bola não é azul então o carro não é amarelo



$$P \rightarrow Q \quad :: \quad \sim Q \rightarrow \sim P$$


# Contra – Contraposição: $P \rightarrow Q :: \underline{\sim Q \rightarrow \sim P}$

$\leftarrow P \rightarrow Q, \sim P \rightarrow R : \underline{\sim R \rightarrow Q} \rightarrow$

- |   |           |
|---|-----------|
| 1. $P \rightarrow Q$                        | P         |
| 2. $\sim P \rightarrow R$                   | P         |
| 3. $\sim R \rightarrow \sim \sim P$         | 2, CONTRA |
| 4. $\sim R \rightarrow P$                   | 3, DN     |
| <u>5. <math>\sim R \rightarrow Q</math></u> | 4, I, SH  |

MP:  $P \rightarrow Q, \underline{P} \therefore Q$

MT:  $P \rightarrow Q, \sim Q \therefore \sim P$

$\sim P \rightarrow R$   
 $\searrow$   
 $\sim R \rightarrow \sim \sim P$

$\downarrow$   
3.  $\sim R \rightarrow P$

2, CONTRA\*

$\sim R \rightarrow P$   
 $\swarrow$   
 $P \rightarrow Q$



# REGRAS EQUIVALÊNCIA

## Implicação - Imp

$$\checkmark \quad \underline{P \rightarrow Q} \leftrightarrow \underline{\sim P \vee Q} \mid \underline{\sim P \rightarrow Q} :: \underline{P \vee Q}$$

*(Handwritten red arrows and underlines indicate logical equivalences and cancellations. A red 'X' is drawn over the first part of the equation.)*

→ Se a queda é alta, então o estrago é grande

✓ A queda não é alta ou o estrago é grande

$$\begin{aligned} & \sim P \rightarrow Q \\ & \underline{\underline{\sim(\sim P) \vee Q}} \\ & \rightarrow P \vee Q \end{aligned}$$

*(Handwritten red arrows show the transformation from the first line to the second, and then to the third.)*

$$Q \rightarrow R$$

$$\sim Q \vee R$$

$$\sim T \rightarrow V$$

$$T \vee V$$



## Imp – Implicação:

$$P \rightarrow Q, P \vee R : Q \vee R$$

- |                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| 1. $P \rightarrow Q$           | P         |
| 2. $P \vee R$                  | P         |
| 3. $\sim Q \rightarrow \sim P$ | 1, CONTRA |
| 4. $\sim P \rightarrow R$      | 2, IMP    |
| 5. $Q \vee \sim P$             | 3, IMP    |
| 6. $\sim Q \rightarrow R$      | 5, 2, SH  |
| 7. $\sim \sim Q \vee R$        | 6, IMP    |
| 8. $Q \vee R$                  | 7, DN     |

$$P \rightarrow Q :: \sim P \vee Q$$

$$\sim P \rightarrow Q :: P \vee Q$$

$$\begin{array}{l} \text{SD: } P \rightarrow Q \\ \hline \sim Q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

$$\text{SH: } \begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \quad \searrow \\ Q \rightarrow R \end{array} \therefore P \rightarrow R$$

$$\begin{array}{l} \text{IMP} \\ \sim Q \rightarrow R \\ \sim \sim Q \vee R \\ Q \vee R \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim Q \rightarrow \sim P \\ \quad \searrow \\ \sim P \rightarrow R \end{array} \therefore \sim Q \rightarrow R$$

# REGRAS EQUIVALÊNCIA

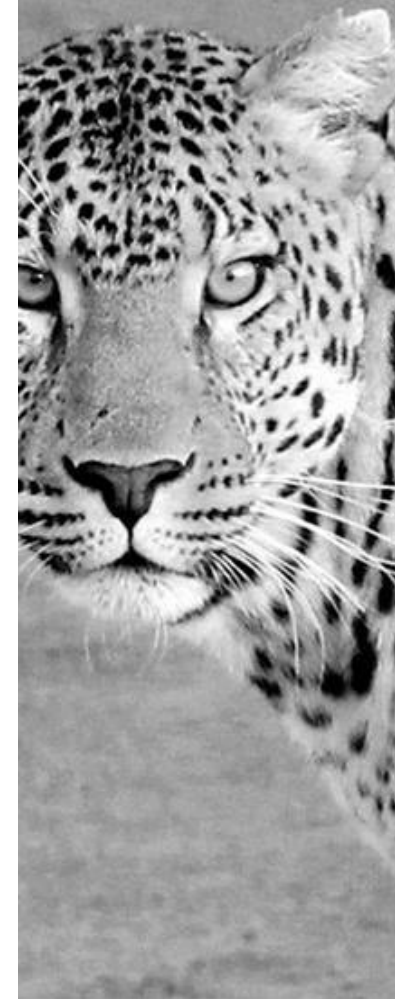
## Exportação - Exp

$$\begin{array}{c} P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ \downarrow \\ (P \wedge Q) \rightarrow R \end{array}$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) :: (P \wedge Q) \rightarrow R$$

Se eu tiver dinheiro, então se eu for ao shopping, compro roupa nova

Se (eu tiver dinheiro e for ao shopping) então compro uma calça nova



MP:  $P \rightarrow Q, P \therefore \underline{Q}$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$

~~$Q \therefore P, P \rightarrow Q$~~

IMP  $P \rightarrow Q \therefore \sim P \vee Q$

$\curvearrowright$

## Exp – Exportação:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) :: (P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vee S, P: \underline{Q \rightarrow S}$$

1.  $(P \wedge Q) \rightarrow R$

P

2.  $\sim R \vee S$

P

3. P

P

4.  $R \rightarrow S$

2, IMP

5.  $(P \wedge Q) \rightarrow S$

1, 4, SH

6.  $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$

5, EXP

7.  $Q \rightarrow S$

3, 6, MP

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$R \rightarrow S$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow S$$


# REGRAS EQUIVALÊNCIA

## Comutação - Comm

$$\underline{P \wedge Q} :: \underline{Q \wedge P} \quad | \quad P \vee Q :: Q \vee P$$

$$P \wedge Q$$

$$Q \wedge P$$

$$P \vee Q$$

$$P \vee Q$$



## Comm – Comutação:

$$P \wedge (\sim Q \rightarrow R) : \underline{(R \vee Q) \wedge P}$$

1. $P \wedge (\sim Q \rightarrow R)$	P
2. P	1, SIMP
3. $(\sim Q \rightarrow R)$	1, SIMP
4. $\sim\sim Q \vee R$	3, IMP
5. $Q \vee R$	4, DN
6. $R \vee Q$	5, COMM
7. $(R \vee Q) \wedge P$	2, 6, CONJ

$$P \vee Q :: Q \vee P$$

$$\sim Q \rightarrow R$$

$$\sim R \rightarrow Q$$

CONTRA

$$\sim\sim R \vee Q$$

$$R \vee Q$$

3. $(\sim Q \rightarrow R) \wedge P$	1, COMM
4. $(\sim\sim Q \vee R) \wedge P$	3, IMP
5. $(Q \vee R) \wedge P$	4, DN
6. $(R \vee Q) \wedge P$	5, COMM

1-F  
Tudo V

$P \wedge Q \wedge R$

REGRAS EQUIVALÊNCIA

## Associação - Assoc

$$P \wedge (Q \wedge R) :: (P \wedge Q) \wedge R \quad | \quad (P \vee Q) \vee R :: P \vee (Q \vee R)$$





## Assoc – Associação:

$$(P \vee Q) \vee R :: P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \underline{\Rightarrow} Q) \underline{\vee} R : Q \underline{\vee} (R \underline{\vee} \sim P)$$

$$1. (P \rightarrow Q) \vee R$$

P

$$2. (\sim P \vee Q) \vee R$$

1, IMP

$$3. Q \vee (\sim P \vee R)$$

2, Assoc

$$4. Q \vee (R \vee \sim P)$$

3, COMM

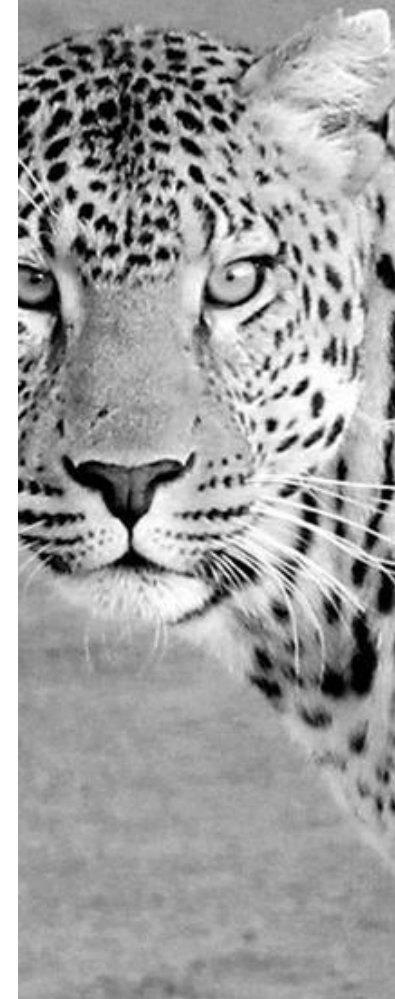
$$3. Q \vee (R \vee \sim P)$$

2, Assoc

## REGRAS EQUIVALÊNCIA

# Distribuição - Dist

$$P \wedge (Q \vee R) :: (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad | \quad P \vee (Q \wedge R) :: (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$



## Dist – Distribuição:

$\overleftarrow{Q \vee R, \sim(P \wedge Q), P : R}$

1.  $Q \vee R$   $P$

2.  $\sim(P \wedge Q)$   $P$

3.  $P$   $P$

4.  $P \wedge (Q \vee R)$  1,3, CONJ

5.  $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$  4, DIST

6.  $(P \wedge R) \vee (P \wedge Q)$  5, COMM

7.  $P \wedge R$  6,2,SD

8.  $R$  7, SIMP

$$P \wedge (Q \vee R) :: (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$\begin{array}{c} F \quad \quad \quad \wedge \\ (P \wedge Q) \quad \underline{\vee} \quad (\underline{P \wedge R}) \end{array}$$

## REGRAS EQUIVALÊNCIA

# Lei de DeMorgan - DeM

$$\sim(\underline{P \wedge Q}) :: \sim P \vee \sim Q \quad | \quad \sim(\underline{P \vee Q}) :: \underline{\sim P} \wedge \underline{\sim Q}$$

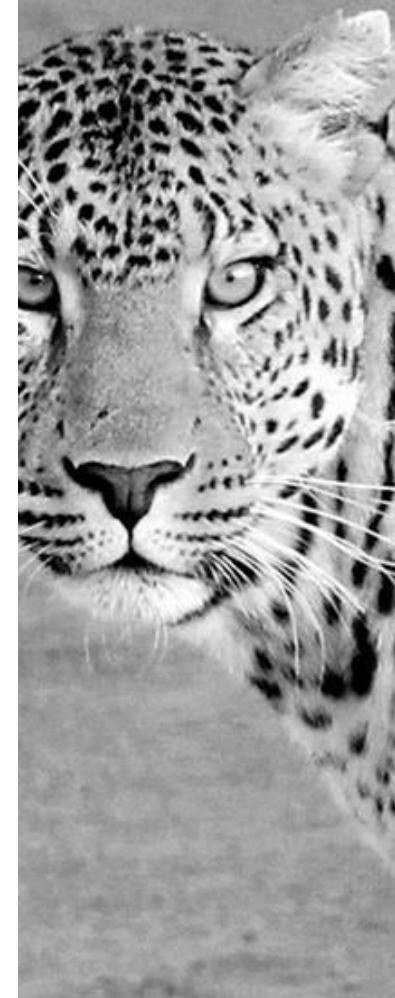
O cachorro é verde e a cadela é azul

O cachorro não é verde ou a cadela não é azul

$$\sim(P \wedge Q)$$

$$\sim P \wedge \sim Q$$

$$\sim P \vee \sim Q$$



$$\sim(P \vee Q) :: \sim P \wedge \sim Q$$

$$\sim(\underline{P \rightarrow Q})$$

$$\sim(\sim P \vee Q)$$

$$\sim \sim P \wedge \sim Q$$

$$P \wedge \sim Q$$

DeM – Lei de DeMorgan:  $\sim (P \wedge Q) :: \sim P \vee \sim Q$

$Q \vee R, \sim(P \wedge Q), P : R$

- |                         |          |
|-------------------------|----------|
| 1. $Q \vee R$           | P        |
| 2. $\sim(P \wedge Q)$   | P        |
| 3. P                    | P        |
| 4. $\sim P \vee \sim Q$ | 2, DeM   |
| 5. $\sim Q$             | 4, 3, SD |
| 6. R                    | 1, 5, SD |

REGRAS EQUIVALÊNCIA

# Tautologia - Taut

$$\underbrace{P \wedge P}_{\checkmark} :: \underbrace{P}_{\checkmark} \quad | \quad \underbrace{P \vee P}_{\checkmark} :: \underbrace{P}_{\checkmark}$$



Taut - Tautologia:  $P \vee P :: P$

$P \rightarrow \sim P : \sim P$

1.  $P \rightarrow \sim P$  1

2.  $\sim P \vee \sim P$  1, IMP

3.  $\sim P$  2, TAUT



## REGRAS EQUIVALÊNCIA

$$P \leftrightarrow Q$$

### Equivalência - Equiv

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q :: (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q :: \underline{(P \wedge Q)} \vee \underline{(\sim P \wedge \sim Q)}$$



**Equiv - Equivalência:**  $P \Leftrightarrow Q :: (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$P \Leftrightarrow (Q \wedge R), Q : P \vee \sim R$

1.  $P \Leftrightarrow (Q \wedge R)$       P

2.  $Q$       P

8.  $\sim R \vee P$       7, IMP

9.  $P \vee \sim R$       8, COMM

3.  $P \rightarrow (Q \wedge R) \wedge (Q \wedge R) \rightarrow P$       1, EQUIV

4.  $P \rightarrow (Q \wedge R)$

3, SIMP

5.  $(Q \wedge R) \rightarrow P$

3, SIMP

6.  $Q \rightarrow (R \rightarrow P)$

5, EXP

7.  $R \rightarrow P$

6, IMP

# 3. EXERCÍCIOS

Cálculo Proposicional

# EXERCÍCIOS

a)  $P \rightarrow (Q \wedge R), P : P \wedge R$

b)  $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow \sim T)), \sim P, Q, R : \sim T$

c)  $P \wedge Q, (P \vee R) \rightarrow S : P \wedge S$

d)  $(P \vee Q) \rightarrow R, (R \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (S \Leftrightarrow T)), P \wedge S : S \Leftrightarrow T$

e)  $(P \wedge Q) \rightarrow R, R \rightarrow S, T \rightarrow \sim U, T, \sim S \vee U : \sim P \vee \sim Q$

f)  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \sim R \vee P : P \Leftrightarrow Q$

# EXERCÍCIOS

a)  $P \rightarrow (Q \wedge R), P : P \wedge R$

# EXERCÍCIOS

b)  $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow \sim T)), \sim P, Q, R : \sim T$

# EXERCÍCIOS

$$c) P \wedge Q, (P \vee R) \rightarrow S : P \wedge S$$

# EXERCÍCIOS

d)  $(P \vee Q) \rightarrow R, (R \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (S \Leftrightarrow T)), P \wedge S: S \Leftrightarrow T$



# EXERCÍCIOS

e)  $(P \wedge Q) \rightarrow R, R \rightarrow S, T \rightarrow \sim U, T, \sim S \vee U : \sim P \vee \sim Q$

# EXERCÍCIOS

f)  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \sim R \vee P : P \Leftrightarrow Q$

FIM!

**Let's vamos...**

kennedy.araujo@ifc.edu.br