Diskret Matematik og Algoritmer
Ugeopgave 5

Mads Pontoppidan Haderup (xjr983), Ken Kjøller Andersen (zcj256)
og Christian Handest (lzp959)

22. oktober 2018

1 DEL 1

Når vi benytter Euklids algoritme på to tal a; b for at bestemme GCD(a; b) foretager vi et antal divisioner med rest indtil vi opnår resten 0 og dermed har bestemt den største fælles divisor som den næstsidst beregnede rest. Vi vil sige at antallet af trin der skal benyttes er antallet af divisioner. Således er antallet af trin der skal benyttes for at bestemme GCD(273; 98) netop 5, jf. gennemregningen i KBR Example 1.4.5 (side 23). Antallet af trin for alle valg af a; b med $15 \geq a \geq b > 0-$ på nær to sådanne valg er illustreret figur 1.

1.1 DEL 1.1

Beregn GCD(3; 2); GCD(5; 3); GCD(8; 5), samt GCD(13; 8) og bestem de fire manglende tal i figur 1.

$$GCD(3,2) = 1, GCD(5,3) = 1, GCD(8,5) = 1, GCD(13,8) = 1$$

$$Trin1: \ GCD(3;2) => GCD(2;3 \ mod \ 2) => 3 = 1 * 3^1 + 1$$
$$Trin2: \ GCD(2;1) => GCD(1;2 \ mod \ 1) => 2 = 1 * 2^1 + 0$$

$$Trin1: \ GCD(5;3) => GCD(3;5 \ mod \ 3) => 5 = 1 * 3^1 + 2$$
$$Trin2: \ GCD(3;2) => GCD(2;3 \ mod \ 2) => 3 = 1 * 3^1 + 1$$
$$Trin3: \ GCD(2;1) => GCD(1;2 \ mod \ 1) => 2 = 1 * 2^1 + 0$$

$$Trin1: \ GCD(8;5) => GCD(5;8 \ mod \ 5) => 8 = 1 * 5^1 + 3$$
$$Trin2: \ GCD(5;3) => GCD(3;5 \ mod \ 3) => 5 = 1 * 3^1 + 2$$
$$Trin3: \ GCD(3;2) => GCD(2;3 \ mod \ 2) => 3 = 1 * 3^1 + 1$$
$$Trin4: \ GCD(2;1) => GCD(1;2 \ mod \ 1) => 2 = 1 * 2^1 + 0$$

$$Trin1: \ GCD(13;8) => GCD(8;13 \ mod \ 8) => 13 = 1 * 8^1 + 5$$
$$Trin2: \ GCD(8;5) => GCD(5;8 \ mod \ 5) => 8 = 1 * 5^1 + 3$$
$$Trin3: \ GCD(5;3) => GCD(3;5 \ mod \ 3) => 5 = 1 * 3^1 + 2$$
$$Trin4: \ GCD(3;2) => GCD(2;3 \ mod \ 2) => 3 = 1 * 3^1 + 1$$
$$Trin5: \ GCD(2;1) => GCD(1;2 \ mod \ 1) => 2 = 1 * 2^1 + 0$$

De fire manglende tal i figur 1 bestemmes til GCD(3,2): 2 antal trin, GCD(5,3): 3 antal trin, GCD(8,5): 4 antal trin og GCD(13,8): 5 antal trin. Tallene er skrevet ind i nedenstående tabel.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3			1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4				1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3
5					1	2	3	4	3	1	2	3	4	3	1
6						1	2	2	2	3	3	1	2	2	2
7							1	2	3	3	4	4	3	1	2
8								1	2	2	4	2	5	3	3
9									1	2	3	2	3	4	3
10										1	2	2	3	3	2
11											1	2	3	4	4
12												1	2	2	2
13													1	2	3
14														1	2
15															1

1.2 DEL 1.2

Udfyldes tabellen i figur 1, kan vi aflæse følgende værdier for $t_1, t_2, t_3 ... t_{15}$.

$t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = 2, t_5 = 3, t_6 = 3, t_7 = 3, t_8 = 4t_9 = 4, t_{10} = 4, t_{11} = 4, t_{12} = 4t_{13} = 5, t_{14} = 5, t_{15} = 5$

RETTET (talfølgen er ændret)

1.3 DEL 1.3

For $k = 1$, $(a_1, b_1) = (1, 1)$
For $k = 2$, $(a_2, b_2) = (2, 1)$
For $k = 3$, $(a_3, b_3) = (3, 2)$
For $k = 4$, $(a_4, b_4) = (5, 3)$
For $k = 5$, $(a_5, b_5) = (8, 5)$
For $k = 6$, $(a_6, b_6) = (21, 13)$

1.4 DEL 1.4

Fibbonacis talfølge.

1.5 DEL 1.5

```
let rec GCD(a, b) =
  if b = 0 then
    a
  else
    GCD(b, a % b)

```

a mod b svarer til vores rest, r. r bliver mindre for hver gang, hvorfor GCD går mod 0.

RETTET (funktion er indsat for at vise sammenhængen)

1.6 DEL 1.6

Det kan ud fra grafen på figur 2 tydeligt ses, at t_n ikke er $O(1)$, da vi ikke har en horisontal linje, men derimod ændrer sig i størrelse for hvert n.

RETTET (har tilføjet et argument ud fra grafen)

2 DEL 2

Benyt følgende opskrift til at give et induktionsbevis for at $4^n + 15n - 1$ er deleligt med 9 for ethvert helt tal $n > 0$.

2.1 DEL 2.1

Bestem det relevante udsagn P(n)

$$P(n) : \frac{4^n + 15n - 1}{9} = \forall\ n \in Z^+$$

2.2 DEL 2.2

Kontrollér at P(n) er et sandt udsagn for alle n mellem 1 og 5.

$$P(1) : \frac{4^n + 15n - 1}{9} = \frac{4^1 + 15 * 1 - 1}{9} = \frac{4 + 15 - 1}{9} = 2$$

$$P(2) : \frac{4^n + 15n - 1}{9} = \frac{4^2 + 15 * 2 - 1}{9} = \frac{16 + 30 - 1}{9} = 5$$

$$P(3) : \frac{4^n + 15n - 1}{9} = \frac{4^3 + 15 * 3 - 1}{9} = \frac{64 + 45 - 1}{9} = 12$$

$$P(4) : \frac{4^n + 15n - 1}{9} = \frac{4^4 + 15 * 4 - 1}{9} = \frac{256 + 60 - 1}{9} = 35$$

$$P(5) : \frac{4^n + 15n - 1}{9} = \frac{4^5 + 15 * 5 - 1}{9} = \frac{1024 + 75 - 1}{9} = 122$$

2.3 DEL 2.3

Indfør en følge $b_n = 4^n + 15n - 1$, og lav en formel der sammenknytter b_{n+1} og b_n.

$$b_n = b_{n+1} - b_n$$

$$(4^{n+1} + 15(n + 1)) - (1 - 4^n + 15(n) - 1)$$
$$= 3(4^n + 5)$$

2.4 DEL 2.4

Antag nu at P(n) er sand for en eller anden bestemt værdi af n > 0. Gør rede for at så er P(n + 1) også sandt.

Vi har i del 2.2 vist hvordan bl.a. P(1) er sand.
Vi benytter nu induktionsprincippet til at vise hvordan P(n+1) også er sandt. Vi antager, at

$$4^n + 15n - 1 \equiv 0$$

Og derfor er

$$4^n \equiv 1 - 15n$$

Herefter induceres P(n+1) for at vise at P(n) også er sandt for P(n+1)

$$4^{n+1} + 15(n + 1) - 1 = 4 * 4^n + 15n + 14$$

Vi husker at $4^n \equiv 1 - 15n$, hvorfor

$$\equiv 4(1 - 15n) + 15n + 14 = 18 - 45n \equiv 0$$

$$18\ mod\ 9 \equiv 0$$

og

$$45n\ mod\ 9 \equiv 0$$

Både 18 og 45n modular 9 er lig 0 og vi har derfor bevist gennem induktionsprincippet, at udsagnet for P(n) også gælder P(n+1)

2.5 DEL 2.5

Opstil en konklusion ved hjælp af induktionsprincippet

Efter del 2.2, 2.3 og 2.4 kan vi konkludere, at udsagnet

$$P(n): \frac{4^n + 15n - 1}{9} = \forall\ n\ = Z^+$$

er sandt. I opgave 2.4 viste vi gennem induktionsprincippet hvordan udsagnet ligeledes var sandt for P(n+1).

Del 2.1 til og med del 2.5 er netop fremgangsmetoden man benytter, når man vil bevise at et udsagn er sandt ved hjælp af induktionsprincippet.