DMA 2018

–Ugeopgave 5 –

- Hele ugeopgaven skal besvares.
- Ugeopgaven skal afleveres mandag den 8. oktober klokken 21:59 på Absalon.
- Ugeopgaven skal laves i **grupper** af 3-4 personer.
- Besvarelsen skal udarbejdes i LaTeX.

Del 1 Når vi benytter Euklids algoritme på to tal a, b for at bestemme $\mathrm{GCD}(a, b)$ foretager vi et antal divisioner med rest indtil vi opnår resten 0 og dermed har bestemt den største fælles divisor som den næstsidst beregnede rest. Vi vil sige at antallet af **trin** der skal benyttes er antallet af divisioner. Således er antallet af trin der skal benyttes for at bestemme $\mathrm{GCD}(273, 98)$ netop 5, jf. gennemregningen i KBR Example 1.4.5 (side 23). Antallet af trin for alle valg af a, b med $15 \geq a \geq b > 0$ – på nær to sådanne valg – er illustreret i figur 1.

(1) Beregn $\mathrm{GCD}(3, 2), \mathrm{GCD}(5, 3), \mathrm{GCD}(8, 5)$, samt $\mathrm{GCD}(13, 8)$ og bestem de fire manglende tal i figur 1.

(2) Lad t_n være det højeste (worst-case) antal trin der skal benyttes til at bestemme $\mathrm{GCD}(a, b)$ når $n \geq a \geq b > 0$. Benyt figur 1 til at bestemme $t_1, t_2, \ldots, t_{15}$.

(3) For $k = 2, 3, 4, 5, 6$, find par (a_k, b_k) således hver $\mathrm{GCD}(a_k, b_k)$ har netop k divisioner, og $\max\{a_k, b_k\}$ bliver mindst muligt. *Hint: Du kan med fordel benytte tabel i Figur 1.* Du kan antage at $(a_6, b_6) = (21, 13)$.

(4) *(Frivillig – man behøves ikke at lave denne opgave)* Kan du indse mønstret og forudsige (a_7, b_7) og (a_8, b_8)? Derefter, overvej følgen defineret som $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, og $F_k = \max\{a_k, b_k\}$ for $k > 1$. Kan du genkende følgen (F_k) fra forelæsningen? Hvad hedder den?

(5) Vis at t_n er $O(n)$. *Note: grafen for t_n for n mellem 1 og 200 er illustreret på figur 2. Bemærk, ud fra grafen så ser t_n ud ikke som $\Theta(n)$.*

(6) Giv en begrundelse for at t_n ikke er $O(1)$.

Del 2 Benyt følgende opskrift til at give et induktionsbevis for at $4^n + 15n - 1$ er deleligt med 9 for ethvert helt tal $n > 0$.

(1) Bestem det relevante udsagn $P(n)$.

(2) Kontrollér at $P(n)$ er et sandt udsagn for alle n mellem 1 og 5.

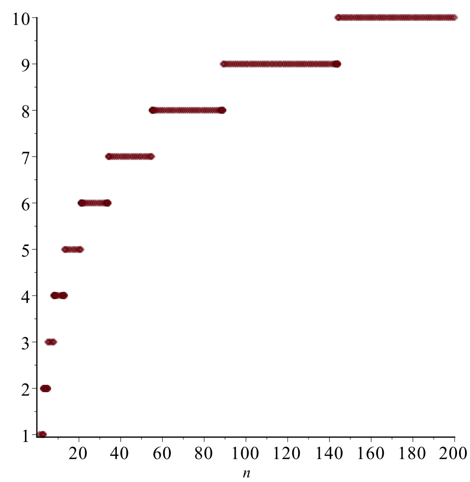
(3) Indfør en følge $b_n = 4^n + 15n - 1$, og lav en formel der sammenknytter b_{n+1} og b_n

(4) Antag nu at $P(n)$ er sand for en eller anden bestemt værdi af $n > 0$. Gør rede for at så er $P(n+1)$ også sand.

(5) Opstil en konklusion ved hjælp af induktionsprincippet.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3			1	2		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4				1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3
5					1	2	3		3	1	2	3	4	3	1
6						1	2	2	2	3	3	1	2	2	2
7							1	2	3	3	4	4	3	1	2
8								1	2	2	4	2		3	3
9									1	2	3	2	3	4	3
10										1	2	2	3	3	2
11											1	2	3	4	4
12												1	2	2	2
13													1	2	3
14														1	2
15															1

Figur 1: Antal trin i beregningen af GCD(a, b)



Figur 2: Grafen for t_n