

1. Introducción

Una asociación tiene 100 hectáreas de terreno agrícola. La quinua rinde 2 toneladas por hectárea y la cañihua rinde 3 toneladas por hectárea. Por razones geográficas, la restricción del uso de terreno está dada por:

$$x^2 + y^2 = 100$$

donde x es la cantidad de hectáreas dedicadas a quinua e y a cañihua. Se desea maximizar la producción total $f(x, y) = 2x + 3y$ bajo esta restricción.

2. Planteamiento del Problema

- Función objetivo: $f(x, y) = 2x + 3y$
- Restricción: $x^2 + y^2 = 100$
- x : hectáreas de quinua, y : hectáreas de cañihua
- ¿Cómo maximizar la producción respetando el terreno?

3. Método de Lagrange - Paso 1 y 2

Paso 1: Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = 2x + 3y - \lambda(x^2 + y^2 - 100)$$

Paso 2: Derivadas parciales:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 - 2\lambda x = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 3 - 2\lambda y = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 100 = 0$$

4. Paso 3: Sistema de ecuaciones

- De $2 = 2\lambda x$ y $3 = 2\lambda y$, se obtiene:

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2y} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

- Sustituimos en la restricción:

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 100$$

$$\frac{13}{4}x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{400}{13} \Rightarrow x \approx 5.54, \quad y \approx 8.31$$

5. Producción total

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

$$f(5.54, 8.31) = 2(5.54) + 3(8.31) \approx 11.08 + 24.93 = \boxed{36.01 \text{ toneladas}}$$

6. Conclusión

- Se deben sembrar:
 - 5.54 hectáreas de quinua
 - 8.31 hectáreas de cañihua
- Producción total: ≈ 36.01 toneladas
- Uso eficiente de las 100 hectáreas disponibles