Laboratorio No. 2
Gradient Descent

Considere el problema de optimización no restringida:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; f(x), \tag{1}$$

en donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua y diferenciable. Una de las variantes del algoritmo *Line Search* es el llamado *Gradient Descent* (GD). La idea central de este método es intentar resolver el problema (1) mediante la evaluación del valor de la función en la dirección en donde se encuentra el mínimo. Una pregunta natural en este momento es: ¿cuál es esta dirección? Sabemos que el vector gradiente (i.e. $\nabla f(x)$) nos provee la dirección de máximo crecimiento de la función f. Por tanto, $-\nabla f(x)$ nos devuelve la dirección de menor crecimiento de la función. Esta observación da origen al método GD:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k),}$$

en donde α_k es el llamado "step size" o mejor conocido como "learning rate" en el ámbito de machine learning. En este laboratorio nos enfocaremos en dos puntos importantes:

1. Implementar el algoritmo de GD, el cual se presenta a continuación.
2. Investigar la convergencia del algoritmo para distintas formas de elegir α_k.

Algoritmo:
Data: initial value for x_0
Data: accepted tolerance ϵ
while ($|| \nabla f(x_k) || \leq \epsilon$) **do**
  Choose $\alpha_k > 0$
  Calculate $\nabla f(x_k)$
  Set $x_k \leftarrow x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$
end

Instrucciones: implemente el algoritmo GD utilizando *Python* y utilícelo para resolver cada uno de los problemas presentados a continuación:

Problema 1: aplique el método GD para minimizar la función cuadrática:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x.$$

Detenga la ejecución del algoritmo cuando $\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$ o bien cuando el número de iteraciones exceda el N dado. Utilice los valores de Q, c, ϵ, N y el punto inicial x_0 listados a continuación. Para la elección de α_k aplique:

- *Step size exacto:* esto es: $\alpha_k \triangleq \arg\min_{\alpha \geq 0} \; f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$ (ver notas de clase).
- *Step size constante:* esto es: $\alpha_k = \alpha$ para todo $k \geq 0$. Pruebe con $\alpha = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1$. ¿Qué sucede con el algoritmo para las distintas elecciones de α_k?

- *Step size variable:* utilice la sucesión $\alpha_k = \dfrac{1}{k}$ para todo $k \geq 0$.

Para cada caso, su output debe ser mostrado en una *tabla* con las cuatro columnas siguientes:
(a) el número k de la iteración,
(b) x_k,
(c) la dirección p_k, y
(d) $\|\nabla f(x_k)\|$.

Finalmente, realice una *gráfica* de $\|\nabla f(x_k)\|$ versus k, en donde se observe el comportamiento del algoritmo para cada una de las formas de elegir el step size. ¿Qué observa? ¿Con cuál elección se obtiene el mejor comportamiento?

Pruebe su programa con los datos siguientes:

1. $Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-6}, \quad N = 30.$

2. $Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-6}, \quad N = 30.$

Problema 2: considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ni}$

$$f(x_1, x_2) = 100\,(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Esta función es conocida como *Rosenbrock's Function* y es utilizada como benchmark en la evaluación de algoritmos. Algunos autores le llaman *banana function* debido a la forma de sus curvas de nivel.

1. Demuestre que el vector $x^* = (1, 1)^T$ es el mínimo global de la función f sobre $\mathbb{R}^2$.

2. Aplique el método GD para resolver el problema de optimización: $\min\limits_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$. Utilice $x^0 = (0, 0)^T$ y un step-size fijo de $\alpha_k = 0.05$ para todo k. Detenga la ejecución del algoritmo cuando $\|\nabla f(x_k)\| < 10^{-8}$ o bien cuando el número de iteraciones exceda 1000. Su output debe ser mostrado en una tabla con las cuatro columnas siguientes:

   (a) el número k de la iteración,
   (b) x_k,
   (c) la dirección p_k, y
   (d) $\|\nabla f(x_k)\|$.

   Finalmente, varíe el punto inicial x_0, ¿qué observa?