BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

- CHƯƠNG 3. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Câu 1. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x)=1-x^2$ tại điểm $x_0=3$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x>1 \\ -x & \text{khi } x\le 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải:

a) Ta có $f(3)=-8$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(1-x^2\right)=1-3^2=-8$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=3$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+1\right)=1^2+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x)=-1$

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=1$

Câu 2. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 1-x & \text{khi } x<0 \end{cases}$ tại điểm $x=0$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{khi } x\ge 1 \\ x & \text{khi } x<1 \end{cases}$ tại điểm $x=1$.

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1-0=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)=0^2+1=1$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+2\right)=1^2+2=3$

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại $x=1$

Câu 3. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x\ne -2 \\ a & \text{khi } x=-2. \end{cases}$

Tìm a để hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta có:

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$, $f\left(-2\right)=a$

Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục tại $x_0=-2$

Hay $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$

Suy ra: $a=-4$

Câu 4. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x_0.

a. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & khi\ x\neq 5\\ 9 & khi\ x=5\end{cases}$ Tại $x_0=5$

b. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & khi\ x\neq 2\\ 1 & khi\ x=2\end{cases}$ Tại $x_0=2$

c. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ \dfrac{3}{4} & khi\ x=2\end{cases}$ Tại $x_0=2$

d. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^4+x^2-1 & khi\ x\le -1\\ 3x+2 & khi\ x>-1\end{cases}$ Tại $x_0=-1$

Lời giải

a. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\left(x+5\right)=10\neq 9=f\left(5\right)$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=5$.

b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(1-\sqrt{2x-3}\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}{\left(2-x\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-2x}{\left(2-x\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=1=f\left(2\right)$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=2$.

c. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(3x+2\right)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right)}{\left(x-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(3x+2\right)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{\left(x-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(3x+2\right)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{\left(3x+2\right)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right)}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}\neq\dfrac{3}{4}=f\left(2\right)$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=2$.

d. $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^4+x^2-1\right)=1$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(3x+1\right)=-2$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=-1$

Câu 5. Tìm a đề hàm số liên tục tại điểm x_0.

a. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} & khi\ x\neq 2\\ a & khi\ x=2\end{cases}$ Tại $x_0=2$

b. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x-1} & khi\ \ x<1\\ a+\dfrac{4-x}{x+2} & khi\ \ x\ge 1\end{cases}$ Tại $x_0=1$

c. $f\left(x\right)=\begin{cases}ax^2+\dfrac{2}{3} & khi\ \ x\le 2\\ \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x^2-3x+2} & khi\ \ x>2\end{cases}$ Tại $x_0=2$

d. $f\left(x\right)=\begin{cases}ax+\dfrac{1}{4} & khi\ \ x\le 2\\ \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & khi\ \ x>2\end{cases}$ Tại $x_0=2$

Lời giải

a. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x+2\right)}=\dfrac{1}{16}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f\left(2\right)=a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{16}$

b. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x-1}=-\infty$

Như vậy không tồn tại giá trị nào của a để hàm số liên tục tại $x_0=1$

c. Có $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax^2+\dfrac{2}{3}\right)=4a+\dfrac{2}{3}$.

$$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left(\sqrt[3]{4x}-2\right)\left(\sqrt[3]{(4x)^2}+2.\sqrt[3]{4x}+4\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x)^2}+2.\sqrt[3]{4x}+4\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x-8}{\left(\sqrt[3]{(4x)^2}+2.\sqrt[3]{4x}+4\right)(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4}{\left(\sqrt[3]{(4x)^2}+2.\sqrt[3]{4x}+4\right)(x-1)}=\dfrac{1}{3}$$

Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow 4a+\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{12}$.

d. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax+\dfrac{1}{4}\right)=2a+\dfrac{1}{4}$

$$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-6}{\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}=\dfrac{1}{4}$$

Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow 2a+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=0$.

Câu 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x-5 & \text{khi} & x\le -2\\ ax-1 & \text{khi} & x>-2\end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-2$?

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $x=-2\in D$.

Ta có: $f\left(-2\right)=-11$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(3x-5\right)=-11$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(ax-1\right)=-2a-1$.

Để hàm số liên tục tại $x=-2$ thì $f\left(-2\right)=\lim\limits_{x\to -2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^+} f\left(x\right)\Leftrightarrow -2a-1=-11\Leftrightarrow a=5$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=-2$ khi $a=5$.

Câu 7. Tìm các giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và $x=0\in D$.

$f\left(0\right)=m+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{1-x}{1+x}\right)=m+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-1$.

Để hàm liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow m+1=-1\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy $m=-2$ thỏa mãn đề bài.

Câu 8. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} & khi\ \ x\ne 1\\ 2019m & khi\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$?

Lời giải

Hàm số xác định tại $x=1$.

Ta có $f(1)=2019m$. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$.

Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $x\to 1$ thì $t\to 0$

$\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\dfrac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\dfrac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2}+\dfrac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2}$.

$=\dfrac{6t+1-(8t^3+12t^2+6t+1)}{t^2\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\dfrac{(4t^2+4t+1)-(4t+1)}{t^2(2t+1+\sqrt{4t+1})}$.

$=\dfrac{-8t-12}{\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\dfrac{4}{(2t+1+\sqrt{4t+1})}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{-8t-12}{\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\dfrac{4}{(2t+1+\sqrt{4t+1})}\right)=-2$.

Để hàm số liên tục tại $x=1$ khi $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}\Leftrightarrow 2019m=-2\Leftrightarrow m=\dfrac{-2}{2019}$.

Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, nửa khoảng, đoạn

Câu 9. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Xét tính liên tục của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ trên $[1;2]$.

Lời giải:

Với mọi $x_0\in(1;2)$, ta có:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x})=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x-1}+\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{2-x}$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} x-1}+\sqrt{2-\lim\limits_{x\to x_0} x}=\sqrt{x_0-1}+\sqrt{2-x_0}=f\left(x_0\right)$

Do đó $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0\in(1;2)$

Ta lại có:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x})$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^+} x-1}+\sqrt{2-\lim\limits_{x\to 1^+} x}=0+\sqrt{2-1}=1=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x})$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2^-} x-1}+\sqrt{2-\lim\limits_{x\to 2^-} x}=\sqrt{2-1}+0=1=f(2)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$

Câu 10. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hàm số $f(x)=2x-\sin x, g(x)=\sqrt{x-1}$.

Xét tính liên tục hàm số $y=f(x)\cdot g(x)$ và $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Lời giải:

Hàm số $f(x)=2x-\sin x$ liên tục với mọi $x\in\mathbb{R}$

Hàm số $g(x)=\sqrt{x-1}$ liên tục trên khoảng $[1;+\infty)$

Suy ra: hàm số $y=f(x).g(x)$ liên tục trên khoảng $[1;+\infty)$

$g(x)\neq 0$ khi $x\neq 1$

Suy ra hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 11. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

b) $g(x)=\sqrt{9-x^2}$

c) $h(x)=\cos x+\tan x$.

Lời giải:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ là hàm số phân thức có tập xác định là $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

Nên hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

b) $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ là hàm số căn thức có tập xác định là $[-3;3]$ nên hàm só $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$

c) $h(x)=\cos x+\tan x$ là hàm số lượng giác có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

Nên hàm số $h(x)$ liên tục trên các khoảng $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

Câu 12. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau: $P(x)=\begin{cases}4,5x & \text{khi } 0<x\leq 400\\ 4x+k & \text{khi } x>400\end{cases}$ (k là một hằng số)

a) Với $k=0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0;+\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$?

Lời giải:

a) Với $k=0$. Xét:

$\lim\limits_{x\to 400^-} P(x)=\lim\limits_{x\to 400^-} 4,5x=4,5.400=1800$

$\lim\limits_{x\to 400^+} P(x)=\lim\limits_{x\to 400^-} 4x=4.400=1600$

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 400} P(x)$ và hàm số $P(x)$ không liên tục tại $x_0=400$

Vậy hàm số $P(x)$ không liên tục trên $(0;+\infty)$

b) Để hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0=400$ hay $\lim\limits_{x\to 400} P(x)=P(400)$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 400^-} P(x)=\lim\limits_{x\to 400^-} 4,5x=4,5.400=1800$

$\lim\limits_{x\to 400^+} P(x)=\lim\limits_{x\to 400^-} (4x+k)=4.400+k=1600+k$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 400} P(x)$ thì $1800=1600+k$. Suy ra $k=200$

Câu 13. (SGK-CTST 11-Tập 1) Xét tính liên tục của hàm số $y=\sqrt{x^2-4}$.

Lời giải:

$y=\sqrt{x^2-4}$ là hàm căn thức, có tập xác định $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$

Câu 14. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ a & \text{khi } x=0.\end{cases}$

Tìm a để hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x}; x\neq 0\\ a; x=0\end{cases}$ là hàm phân thức có tập xác định $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục trên $x_0=0$

Ta có: $f(0)=a$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=0-2=-2$

Vậy $a=-2$

Câu 15. (SGK-CTST 11-Tập 1) Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường $x(km)$ cho loại xe 4 chỗ như sau:

Hình 5

$$T(x)=\begin{cases}10000 & \text{khi } 0<x\le 0,7\\ 10000+(x-0,7).14000 & \text{khi } 0,7<x\le 20\\ 280200+(x-20).12000 & \text{khi } x>20.\end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Lời giải:

$T(x)=10000$ với $0<x\le 0,7$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên $(0;0,7)$

$T(x)=10000+(x-0,7)\cdot 14000$ với $0,7<x\le 20$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(0,7;20)$

$T(x)=280200+(x-20).12000$ với $x>20$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(20;+\infty)$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 0,7^-} T(x)=\lim\limits_{x\to 0,7^-} 10000=10000$

$\lim\limits_{x\to 0,7^+} T(x)=\lim\limits_{x\to 0,7^+} [10000+(x-0,7)\cdot 14000]=10000$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 0,7} T(x)=T(0,7)$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại $0,7$

$\lim\limits_{x\to 20^-} T(x)=\lim\limits_{x\to 20^-} [10000+(x-0,7)\cdot 14000]=280200$

$\lim\limits_{x\to 20^+} T(x)=\lim\limits_{x\to 20^+} [280200+(x-20)\cdot 12000]=280200$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 20} T(x)=T(20)$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại 20

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$

Câu 16. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Xét tính liên tục của cảc hàm số:

a) $y=\sqrt{x^2+1}+3-x$,

b) $y=\dfrac{x^2-1}{x}\cdot\cos x$.

Lời giải:

a)Hàm số $y=\sqrt{x^2}$ và $y=3-x$ liên tục với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y=\sqrt{x^2}+3-x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

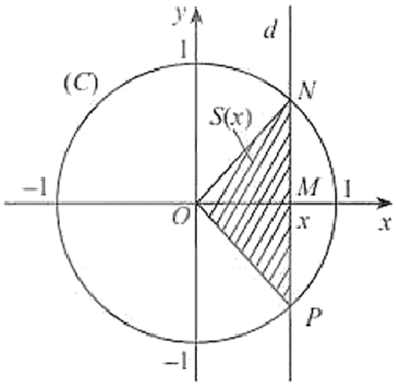
b) Tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

Hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ liên tục tại mọi điểm $x_0\ne 0$

Hàm số $y=\text{cosx}$ liên tục tại mọi điểm $x_0\in\mathbb{R}$

Do đó hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}.\ \cos x$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$

Câu 17. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kinh bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ $x(-1<x<1)$ và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem Hình 6).



Hình 6

a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP.

b) Hàm số $y=S(x)$ có liên tục trên $(-1;1)$ không? Giải thich.

c) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} S(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1^+} S(x)$.

Lời giải:

a) $S(x)=\left|x_m\right|\cdot\left|y_m\right|=|x|\cdot\sqrt{1-x^2}$

b) Hàm số $y=|x|$ liên tục tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$

Hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$

Vậy hàm số $S(x)=|x|\cdot\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} S(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\right)=0$

Câu 18. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r)=\begin{cases}\dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0<r<R\\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r\geq R,\end{cases}$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0;+\infty)$ không?

Lời giải:

$\lim\limits_{r\to R^-} F(r)=\lim\limits_{r\to R^-}\dfrac{GMr}{R^3}=\dfrac{GMR}{R^3}=\dfrac{GM}{R^2}$

$\lim\limits_{r\to R^+} F(r)=\lim\limits_{r\to R^+}\dfrac{GM}{r^2}=\dfrac{GM}{R^2}$

Suy ra: $\lim\limits_{r\to R} F(r)=F(R)$. Hay hàm số $F(r)$ liên tục tại $r_0=R$

$F(r)=\dfrac{GMr}{R^3}$ khi $0<r<R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(0;R)$

$F(r)=\dfrac{GM}{r^3}$ khi $r>R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(R;+\infty)$

Vậy hàm số $F(r)$ lên tục trên $(0;+\infty)$

Câu 19. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x)=\begin{cases} 60000 \text{ khi } 0<x\le 2 \\ 100000 \text{ khi } 2<x\le 4 \\ 200000 \text{ khi } 4<x\le 24 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải:

$C(x)=60000$ khi $x\in(0;2)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(0;2)$

$C(x)=100000$ khi $x\in(2;4)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(2;4)$

$C(x)=200000$ khi $x\in(4;24)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(4;24)$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^-} C(x)=60000$

$\lim\limits_{x\to 2^+} C(x)=100000$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 2

$\lim\limits_{x\to 4^-} C(x)=100000$

$\lim\limits_{x\to 4^+} C(x)=200000$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 4}$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 4

Câu 20. Chứng minh rằng hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

a. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x+2}{x^3+1} & khi\ x\ne -1 \\ \dfrac{4}{3} & khi\ x=-1 \end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2} & khi\ x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} & khi\ x>0 \end{cases}$

Lời giải

a, Hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$ xác định với mọi $x\ne -1 \Rightarrow$ hàm $f(x)$ liên tục với mọi $x\ne -1$.

Có $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(1+\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(1+\dfrac{1}{(x^2-x+1)}\right)=\dfrac{4}{3}=f(-1)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=-1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b, Hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ xác định với mọi $x\ge -1; x\ne 0 \Rightarrow$ hàm $f(x)$ liên tục với mọi $x\ge -1; x\ne 0$.

Có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)x}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 21. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{khi } x\ge 1 \\ 2x+4 & \text{khi } x<1 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

+ Trên khoảng $(-\infty;1)$: $f(x)=2x+4$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$.

+ Trên khoảng $(1;+\infty)$: $f(x)=x^2+x+1$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$.

+ Tại điểm $x_0=1$, ta có: $f(1)=1^3+1+1=3$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+4)=6$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3+x+1)=3$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Vậy hàm số không liên tục tại điểm $x_0=1$. Tóm lại $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và gián đoạn tại điểm $x_0=1$.

Câu 22. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & khi\ \ x\ne 3 \\ 4 & khi\ \ x=3 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

+ Nếu $x\ne 3$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$. Vì $f(x)$ là thương của 2 đa thức, đồng thời mẫu số $x-3\ne 0$ nên $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$. (1)

+ Nếu $x=3$ ta có $f(3)=4$ và

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)=4$$

Vì $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=4$ nên $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=3$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

Tập xác định: $D=[-1;1]$.

$\forall x_0\in(-1;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}=f(x_0)$.

Suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-1;1)$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$.

Vậy hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Câu 24. Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x \le 1 \\ \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Lời giải

+ Khi $x < 1$ thì $f(x) = 2x + a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

+ Khi $x > 1$ thì $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

+ Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 1$, ta có:

* $f(1) = 2 + a$.

* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x + a) = 2 + a$.

* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 + 2) = 3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - \sqrt{9-x}}{x} &, \ 0 < x < 9 \\ m &, \ x = 0 \\ \dfrac{3}{x} &, \ x \ge 9 \end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

Lời giải

+ TXĐ: $D = [0;+\infty)$.

+ Với $x \ge 9$ thì $f(x) = \dfrac{3}{x}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên nửa khoảng $[9;+\infty)$ nên liên tục trên nửa khoảng $[9;+\infty)$.

+ Với $0 < x < 9$ thì $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{9-x}}{x}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(0;9)$ nên liên tục trên khoảng $(0;9)$.

+ Tại điểm $x = 0$:

Ta có $f(0) = m$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3 - \sqrt{9-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3 + \sqrt{9-x}} = \dfrac{1}{6}$.

Vậy để hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$ thì khi hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{6}$.

Dạng 3: Chứng minh phương trình có nghiệm

Câu 26. Chứng minh rằng các phương trình luôn có nghiệm:

a. $x^4 - 3x + 1 = 0$ b. $x^5 - 10x^3 + 100 = 0$

Lời giải

a. Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 1$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$f(0) = 1; f(1) = -1$

$\Rightarrow f\left(0\right).f\left(1\right)<0\Rightarrow \exists x_0\in\left(0;1\right)\left|f\left(x_0\right)=0\right.$

Như vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $\left(-2;5\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm.

b. Hàm số $f\left(x\right)=x^5-10x^3+100$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$f\left(0\right)=100; f\left(-10\right)=-89900$

$\Rightarrow f\left(0\right).f\left(10\right)<0\Rightarrow \exists x_0\in\left(-10;0\right)\left|f\left(x_0\right)=0\right.$

Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $\left(-10;0\right)\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm.

Câu 27. Chứng minh rằng phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất 2 nghiệm trong khoảng $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=4x^4+2x^2-x-3$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=4x^4+2x^2-x-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\left[-1;0\right]$, $\left[0;1\right]$.

+ Ta có $f\left(-1\right)=4$, $f\left(0\right)=-3$, $f\left(1\right)=2$

Vì $f\left(-1\right).f\left(0\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;0\right)$.

Vì $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;1\right)$.

Mà $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$ là hai khoảng phân biệt.

Vậy phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-1;1\right)$.

Câu 28. Chứng minh rằng phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có đúng 5 nghiệm.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=x^5-5x^3+4x-1$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=x^5-5x^3+4x-1=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f\left(-2\right)=-1<0$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{105}{32}-1=\frac{73}{32}>0$, $f\left(-1\right)=-1<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{45}{32}-1=\frac{13}{32}>0$, $f\left(1\right)=-1<0$, $f\left(3\right)=119>0$.

Vì $f\left(-2\right).f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

Vì $f\left(-\frac{3}{2}\right).f\left(-1\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$.

Vì $f\left(-1\right).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right).f\left(1\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Vì $f\left(1\right).f\left(3\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(1;3\right)$

Do các khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$; $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};1\right)$; $\left(1;3\right)$ không giao nhau nên phương trình có ít nhất 5 nghiệm.

Mà phương trình đã cho là phương trình bậc 5 có không quá 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

Câu 29. Chứng minh rằng phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x)=(1-m^2)x^5-3x-1$.

+ Hàm số $f(x)=(1-m^2)x^5-3x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $[-1;0]$.

+Ta có: $f(0)=-1$

$f(-1)=m^2+1>0,\forall m$ nên $f(0).f(-1)<0$

Vậy phương trình $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1;0)$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Câu 30. Chứng minh rằng phương trình: $(m^2+m+1)x^4+2x-2=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x)=(m^2+m+1)x^4+2x-2$.

+ Hàm số $f(x)=(m^2+m+1)x^4+2x-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $[0;1]$.

+ Ta có

$f(0)=-2$

$$f(1)=m^2+m+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall m$$

Nên $f(0).f(1)<0$

Vậy phương trình $(m^2+m+1)x^4+2x-2=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;1)$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Câu 31. Chứng minh rằng phương trình $(m^2+1)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ luôn có 3 nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x)=(m^2+1)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1$.

+ Hàm số $f(x)=(m^2+1)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có: $f(x)=m^2(x^3-2x^2+1)+x^3-4x+1$

$f(-3)=-44m^2-14<0;\ \forall m$

$f(0)=m^2+1>0,\forall m$

$f(1)=-2$

$f(2)=m^2+1>0;\ \forall m$

Vì $f(-3).f(0)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-3;0)$.

Vì $f(0).f(1)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Vì $f(1).f(2)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

Vậy phương trình $(m^2+1)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ có ít nhất 3 nghiệm trong khoảng $(-3;2)$, mà phương trình đã cho là bậc 3 nên phương trình có đúng 3 nghiệm.

Câu 32. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $12a+15b+20c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm thuộc $\left[0;\frac{4}{5}\right]$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$.

+ Hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{25}a+\frac{4}{5}b+c$ nên $\frac{75}{4}f\left(\frac{4}{5}\right)=12a+15b+\frac{75}{4}c$.

$f(0)=c$ nên $\frac{5}{4}f(0)=\frac{5}{4}c$.

Do đó $\frac{75}{4}f\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{4}f(0)=12a+15b+20c=0$.

Suy ra $f\left(\frac{4}{5}\right)$, $f(0)$ trái dấu hoặc cả hai đều bằng 0.

Vậy phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm thuộc $\left[0;\frac{4}{5}\right]$.

Câu 33. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $5a+4b+6c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$.

+ Hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f(0)=c$, $f(2)=4a+2b+c$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c$

Do đó $f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=5a+4b+6c=0$

Suy ra tồn tại hai giá trị p, q sao cho $f(p).f(q)\le 0$.

Vậy phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Câu 34. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi m.

a. $m(x^2-9)+x(x-5)=0$

b. $x^4+mx^2-2mx-2=0$

Lời giải

a. Hàm số $f(x)=m(x^2-9)+x(x-5)$ liên tục với mọi x,m thuộc $\mathbb{R}$.

$f(3)=-6; f(-3)=24$

$\Rightarrow f(-3).f(3)<0\Rightarrow \exists x_0\in(-3;3)\,|\,f(x_0)=0$

Như vậy phương trinh $f(x)=0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $(-3;3)$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b. Hàm số $f(x)=x^4+mx^2-2mx-2$ liên tục với mọi x,m thuộc $\mathbb{R}$.

$f(0)=-2; f(2)=14$

$\Rightarrow f(0).f(2)<0\Rightarrow \exists x_0\in(0;2)\,|\,f(x_0)=0$

Như vậy phương trinh $f(x)=0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $(0;2)$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Câu 35. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm.

a. $ax^2+bx+c=0$ với $a+2b+5c=0$.

b. $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$ (với a,b,c là các số dương)

Lời giải

a. Hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$f(0)=c; f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c$

$\Rightarrow f(0).4f\left(\frac{1}{2}\right)=c+a+2b+4c=a+2b+5c=0$

Nếu $f(0)=0$ hoặc $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ thì PT đã cho có nghiệm.

Nếu $f(0)\neq 0$ hoặc $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$ thì từ $f(0).4f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

$\Rightarrow$ PT đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ PT luôn có nghiệm.

b. Không giảm tổng quát ta xét $0<a<b<c$.

Hàm số $f(x)=a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)$

Khi đó ta có:

$f(a)=a(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=b(b-a)(b-c)\leq 0$

$\Rightarrow f(a)f(b)\leq 0\Rightarrow \exists x_0\in[a;b]:f(x_0)=0$

$\Rightarrow$ PT đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

$\Rightarrow$ PT luôn có nghiệm.