

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

• CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chú ý

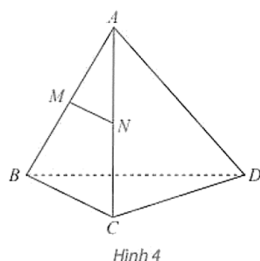
- a) Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
 b) Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu $\text{mp}(a, b)$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- a) MN và BC ;
 b) AN và CD ;
 c) MN và CD .

Giải

- a) Trong mặt phẳng (ABC) , ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra $MN \parallel BC$.
 b) Trong mặt phẳng (ACD) , ta có AN cắt CD tại điểm C .



Hình 4

- c) Giả sử MN và CD cùng nằm trong một mặt phẳng (P) , suy ra đường thẳng NC nằm trong (P) , suy ra (P) chứa điểm A . Tương tự, ta cũng có AM nằm trong (P) , suy ra (P) chứa điểm B . Suy ra (P) chứa cả bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$. Điều này vô lí.
 Vậy hai đường thẳng MN và CD không nằm trong bất kì mặt phẳng nào, suy ra MN chéo với CD .

2. Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

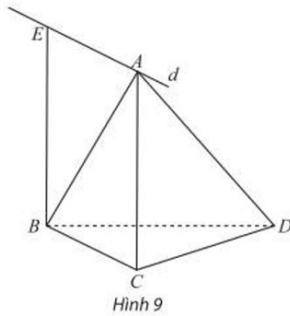
Định lí 1

Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Trong mặt phẳng (ABC) vẽ hình bình hành $ACBE$. Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua A và song song với BC . Chứng minh điểm E thuộc đường thẳng d .

Giải

Ta có $ACBE$ là hình bình hành, suy ra $AE \parallel BC$. Do trong không gian chỉ có duy nhất một đường thẳng đi qua A và song song với BC , suy ra AE phải trùng d , vậy điểm E phải thuộc d .



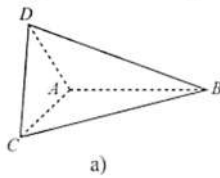
Hình 9

Định lý 2

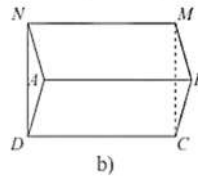
Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Ví dụ 3.

- a) Trong Hình 10a, hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến đồng quy.
- b) Trong Hình 10b, hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến song song.



a)



b)

Hình 10

Giải

- a) Trong Hình 10a, ta có:

$$(BAC) \cap (BAD) = BA; (BAC) \cap (BCD) = BC; (BCD) \cap (BAD) = BD.$$

Ba giao tuyến vừa nêu đồng quy tại B . Vậy ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến đồng quy là (BAC) và (BAD) ; (BAC) và (BCD) ; (BCD) và (BAD) .

- b) Trong Hình 10b, ta có:

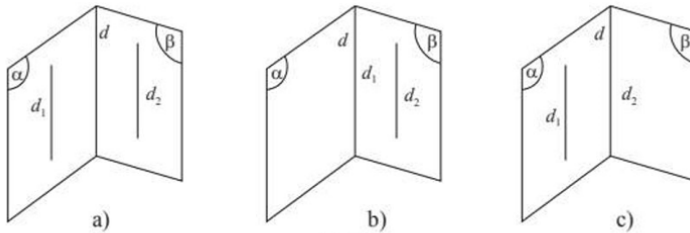
$$(ABCD) \cap (ABMN) = AB; (ABCD) \cap (CDNM) = CD; (CDNM) \cap (ABMN) = MN.$$

Ta có $AB \parallel CD \parallel MN$. Vậy ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến song song là $(ABCD)$ và $(ABMN)$; $(ABCD)$ và $(CDNM)$; $(CDNM)$ và $(ABMN)$.

Từ Định lý 2, ta có hệ quả sau:

Hệ quả

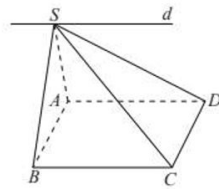
Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Hình 11

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Giải



Hình 12

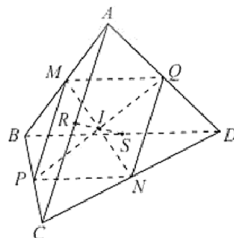
Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD , suy ra theo hệ quả của Định lý 2, giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD (Hình 12).

Định lý 3

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Chú ý: Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu là $a // b // c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

Ví dụ 5. Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ như Hình 14. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS có cùng trung điểm.



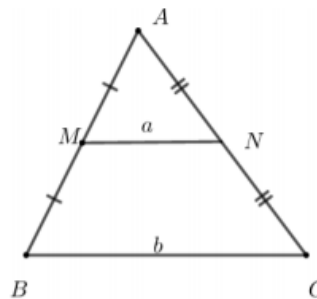
Hình 14

Giải

Ta có MP là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra $MP // AC$ và $MP = \frac{AC}{2}$.

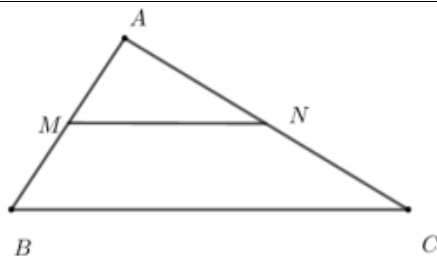
Ta cũng có QN là đường trung bình của tam giác ADC , suy ra $QN // AC$ và $QN = \frac{AC}{2}$.

MP và QN cùng song song với AC suy ra $MP // QN$. Tứ giác $MPNQ$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành, suy ra MN và QP có cùng trung điểm I . Chứng minh tương tự ta cũng có MN và RS có cùng trung điểm I . Vậy các đoạn thẳng MN, PQ, RS có cùng trung điểm.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)**DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG****1. Tính chất đường trung bình**

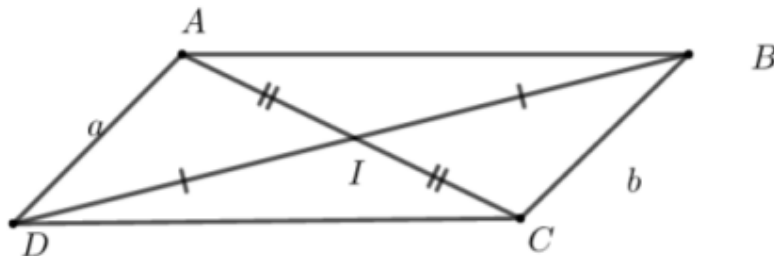
M, N là trung điểm của AB, AC . Khi đó $MN // \frac{1}{2} BC$.

2. Định lý Ta-lét



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

3. Tính chất cạnh đối của hình bình hành

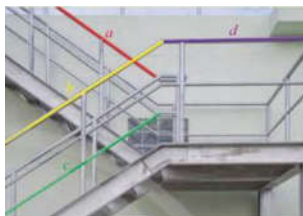


Hai phương pháp để chứng minh tứ giác là hình bình hành:

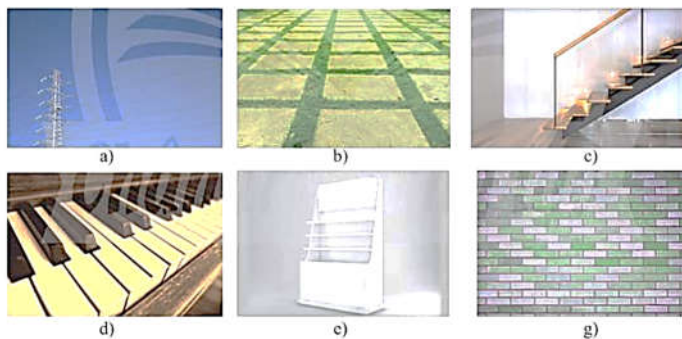
*) Chứng minh: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases}$.

*) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Câu 1. (SGK-CTST 11- Tập 1) Mô tả vị trí giữa các cặp đường thẳng a và b , b và c , c và d có trong hình bên.



Câu 2. (SGK-CTST 11- Tập 1) Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



Hình 18

Câu 3. (SGK-CTST 11- Tập 1) Hãy chỉ ra các ví dụ về hai đường thẳng song song, cắt nhau và chéo nhau trong hình cầu sắt ở Hình 6.

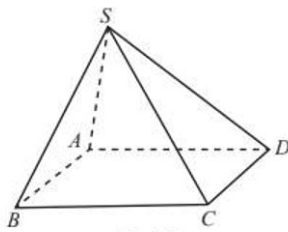


Hình 6

Câu 4. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hai đường thẳng song song a và b . Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Một đường thẳng c cắt a thì cũng cắt b .
- b) Một đường thẳng c chéo với a thì cũng chéo với b .

Câu 5. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:



Hình 5

- a) AB và CD ;
- b) SA và SC ;
- c) SA và BC .

Câu 6. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS . Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD . Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD) .

Câu 7. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

Câu 8. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

- a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .
- b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, $AC \cap BD = O$. M, N là trung điểm của $A'B', BC$. Chứng minh $MN \parallel A'O$.

Câu 10. Lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M, P, Q là trung điểm $A'B', B'C', AC$. Chứng minh $AM \parallel PQ$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $I; J$ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD . Chứng minh rằng: $IJ \parallel CD$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Trên SA, BC lấy điểm M, N sao cho: $\frac{SM}{SA} = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{4}$. Qua N kẻ NP song song với CA (P thuộc AB). Chứng minh rằng $MP \parallel SB$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$.

- a) Chứng minh: $PQ \parallel SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ . Chứng minh $SK \parallel AD \parallel BC$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Gọi M, N là trọng tâm tam giác SAB và SAD . E là trung điểm CB .

a) Chứng minh rằng $MN \parallel BD$

b) Gọi L, H là giao điểm của (MNE) với SD và SB . Chứng minh rằng $LH \parallel BD$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$, $I \in SA$ sao cho $IA = 2IS$. M, N là trung điểm SB, SC . H là điểm đối xứng với I qua M , K là điểm đối xứng với I qua N .

a) Chứng minh $HK \parallel BC$.

b) Chứng minh $BH \parallel SA$.

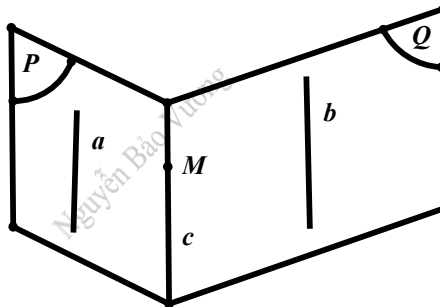
Câu 16. Tứ diện $ABCD$. M, N, P, Q, R, S là trung điểm AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh MN, PQ, RS đồng quy tại $\frac{1}{2}$ mỗi đường.

DẠNG 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG

Có 2 phương pháp tìm giao tuyến (P) và (Q) .

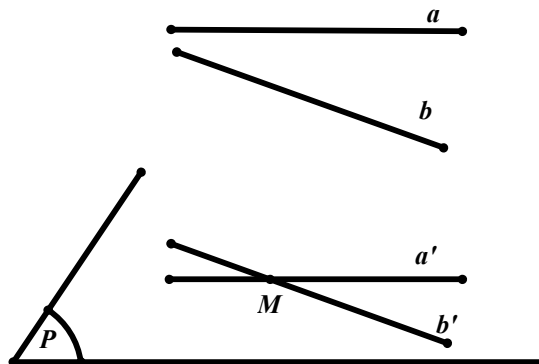
+ Tìm 2 điểm chung.

+ Tìm bằng định lý giao tuyến



$$\begin{cases} a \subset (P), b \subset (Q) \\ a \cap b = M \\ (P) \cap (Q) = c \end{cases} \Rightarrow c \cap a = M \cap a = M$$

Bài toán tổng quát: Dựng (P) qua M và $\parallel a, b$.

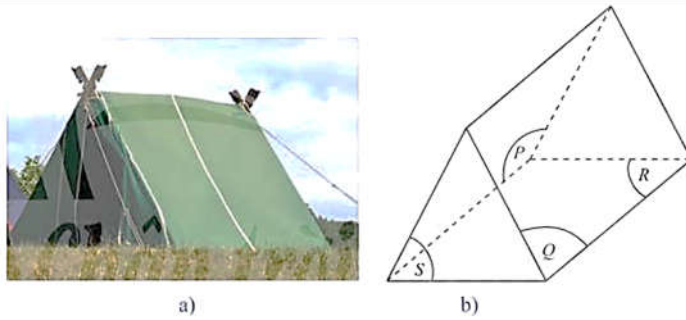


+ Qua M dựng $a' \parallel a$ <Đúng + Đủ>

+ Qua M dựng $b' \parallel b$ <Đúng + Đủ>

$$\Rightarrow (P) \equiv (a', b').$$

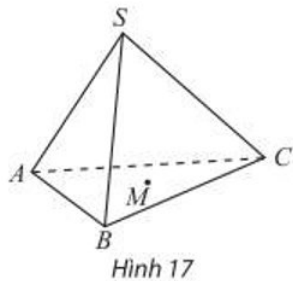
Câu 17. (SGK-CTST 11- Tập 1) Một chiếc lều (Hình 16a) được minh họa như Hình 16b.



Hình 16

- a) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.
b) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.

Câu 18. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC (Hình 17).



Hình 17

Qua M , vẽ đường thẳng d song song với SA , cắt (SBC) tại N . Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) .

Câu 19. Chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của:

- a) (SAB) và (SCD) . b) (SAD) và (SBC) .

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA , điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

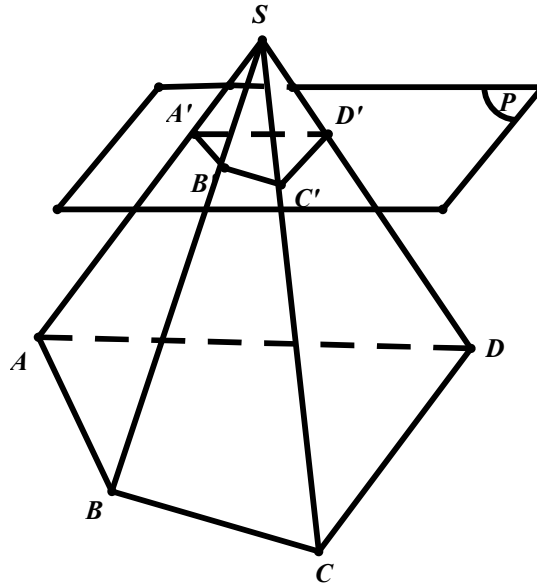
- 1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- 2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) .
- 3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại K , điểm M thuộc cạnh SD .

- 1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC) . Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .
- 2) Chứng minh rằng: AM , BN , (d) đồng quy.

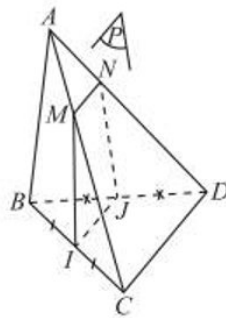
DẠNG 3. THIẾT DIỆN CHỨA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG KHÁC

Thiết diện của mặt phẳng (P) với chóp



+ Thiết diện là một đa giác phẳng khép kín
 Tìm thiết diện bằng cách tìm giao tuyến với mặt bên, mặt đáy

Câu 22. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .



Hình 15

- Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.
- Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.

Câu 23. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
- Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Mặt bên SAB là tam giác đều. Góc $\widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC .

- Tìm giao điểm $I = Dx \cap (SAB)$. CMR $AI \parallel SB$.
- Xác thiết diện của (IAC) với hình chóp. Tính diện tích thiết diện.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J , lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB, \triangle SAD$. M là trung điểm của CD . Xác định thiết diện (IJM) với hình chóp $S.ABCD$.

Câu 26. Chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = a$, $SA \perp CD$, $M \in AD$ để $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (P) qua M và $\parallel SA, CD$. Dựng (P) . Tìm thiết diện. Tính S_{TD} theo a, x .

Câu 27. Chóp $S.ABC$, $SA \perp BC$, $SA = 3a$, $\triangle ABC$ đều, $AB = a$. $M \in AB$ để $AM = x$ ($0 < x < a$). (P) qua M và song song SA, BC . Dựng (P) . Tìm thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Câu 28. Chóp $S.ABCD$, $SA \perp CD$, $SA = 2a$. $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D .

$AD = DC = \frac{AB}{2} = a$, $M \in AD$ để $AM = x$, ($0 < x < a$). (P) qua M và song song SA, CD . Dựng (P) . Tìm thiết diện. Tính diện tích thiết diện S_{TD} .

Câu 29. Chóp $S.ABCD$, $SA \perp BD$, $SA = a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . $M \in AO$ để

$AM = x$ ($0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$). (P) qua M và song song với SA, BD . Dựng (P) . Tìm thiết diện. Tính S_{TD} .

Câu 30. Chóp $S.ABCD$, $SA = a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a . $AD \perp SB$. $M \in AB$ để $AM = x$ ($0 < x < a$). (P) qua M và song song với SB, AD . Dựng (P) . Tìm thiết diện. Tính S_{TD} .

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Mặt bên SAB là tam giác đều. $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi M là trung điểm DA (HKM) $\cap BC = N$.

a) Chứng minh rằng $HKMN$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$) tính diện tích $HKMN$ theo a và x . Tìm x để diện tích này nhỏ nhất.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó

- A. song song. B. chéo nhau. C. cắt nhau. D. trùng nhau.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
B. Hai đường thẳng chéo nhau khi chúng không có điểm chung.
C. Hai đường thẳng song song khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 3. Chọn mệnh đề **đúng**.

- A. Không có mặt phẳng nào chứa hai đường thẳng a và b thì ta nói a và b chéo nhau.
B. Hai đường thẳng song song nhau nếu chúng không có điểm chung.
C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
D. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 4. Cho các mệnh đề sau:

- (I) Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.
(II) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
(III) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
(IV) Hai đường thẳng chéo nhau thì không đồng phẳng.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Câu 5. Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó

A. đồng quy.

B. tạo thành tam giác.

C. trùng nhau.

D. cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 6. Cho mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì mặt phẳng đó sẽ cắt đường thẳng còn lại.

B. Hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì cắt nhau theo một giao tuyến song song với một trong hai đường thẳng đó.

C. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì đường thẳng đó sẽ cắt đường thẳng còn lại.

D. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì cắt nhau theo một giao tuyến đi qua điểm chung đó.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đường thẳng AG cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

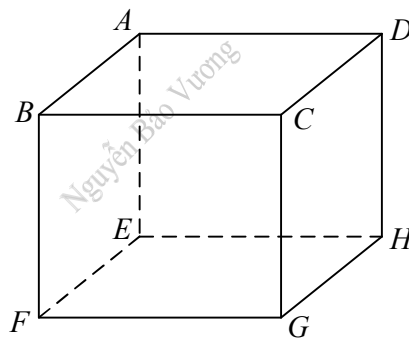
A. Đường thẳng MN .

B. Đường thẳng CM .

C. Đường thẳng DN .

D. Đường thẳng CD .

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. BG và HD chéo nhau.

B. BF và AD chéo nhau.

C. AB song song với HG .

D. CG cắt HE .

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Đường thẳng IJ song song với đường nào?

A. AB .

B. CD .

C. BC .

D. AD .

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xác định vị trí tương đối của MQ và NP .

A. MQ cắt NP .

B. $MQ \parallel NP$.

C. $MQ \equiv NP$.

D. MQ, NP chéo nhau.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC . Đường thẳng IJ song song với đường thẳng nào?

A. BC .

B. AC .

C. SO .

D. BD .

Câu 12. Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Bx, Cy, Dz song song với nhau, nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một

- mặt phẳng đi qua A , cắt Bx, Cy, Dz tương ứng tại B', C', D' sao cho $BB' = 2, DD' = 4$. Tính CC' .
- A. 6. B. 8. C. 2. D. 3.
- Câu 13.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. $GE \parallel CD$. B. GE cắt AD .
C. GE cắt CD . D. GE và CD chéo nhau.
- Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CB . Mệnh đề nào sau đây đúng
- A. Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang.
B. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
C. Bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng.
D. Tứ giác $MNPQ$ không có các cặp cạnh đối nào song song.
- Câu 15.** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây **đúng** khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?
- A. Có thể song song hoặc cắt nhau. B. Cắt nhau.
C. Song song nhau. D. Chéo nhau.
- Câu 16.** Cho tứ diện $ABCD$ với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi.
- A. $AB = BC$. B. $BC = AD$. C. $AC = BD$. D. $AB = CD$.
- Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào không song song với $A'B'$?
- A. AB . B. CD . C. $C'D'$. D. SC .
- Câu 18.** Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm BD, AD . Các điểm H, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $BCD; ACD$. Đường thẳng HG chéo với đường thẳng nào sau đây?
- A. MN . B. CD . C. CN . D. AB .
- Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB) . Khi đó, hai đường thẳng CD và MN là hai đường thẳng:
- A. Cắt nhau. B. Chéo nhau.
C. Song song. D. Có hai điểm chung.
- Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi I là giao điểm của MQ và NP . Câu nào sau đây đúng?
- A. $SI \parallel AB$. B. $SI \parallel AC$. C. $SI \parallel AD$. D. $SI \parallel BD$.
- Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn là CD . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD) . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?
- A. MN và SD cắt nhau. B. $MN \parallel CD$.
C. MN và SC cắt nhau. D. MN và CD chéo nhau.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d qua S và song song với BC . B. d qua S và song song với DC .
C. d qua S và song song với AB . D. d qua S và song song với BD .

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:

- A. qua I và song song với AB . B. qua J và song song với BD .
C. qua G và song song với CD . D. qua G và song song với BC .

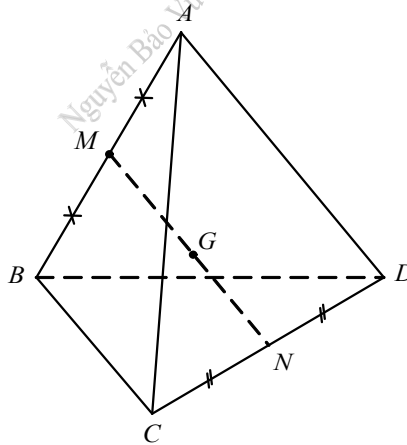
Câu 24. Cho ba mặt phẳng phân biệt (α) , (β) , (γ) có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$; $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$; $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 :

- A. Đôi một cắt nhau. B. Đôi một song song.
C. Đồng quy. D. Đôi một song song hoặc đồng quy.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

- A. Tam giác IBC .
B. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).
C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).
D. Tứ giác $IBCD$.

Câu 26. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Giao tuyến của mặt phẳng (ABG) và mặt phẳng (CDG) là



- A. Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh BC và AD .
B. Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và CD .
C. Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AC và BD .
D. Đường thẳng CG .

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Qua S kẻ $Sx; Sy$ lần lượt song song với AB, AD . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng Sx .
B. Giao tuyến của (SBD) và (SAC) là đường thẳng Sy .
C. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng Sx .
D. Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng Sx .

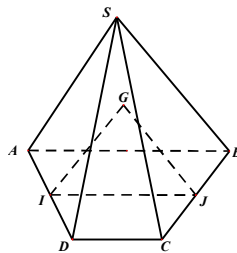
- Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua AB và cắt cạnh SC tại M ở giữa S và C . Xác định giao tuyến d giữa mặt phẳng (α) và (SCD) .
- A. Đường thẳng d qua M song song với AC .
 B. Đường thẳng d qua M song song với CD .
 C. Đường thẳng d trùng với MA .
 D. Đường thẳng d trùng với MD .

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

- Câu 29.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB , AC . E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là
- A. Tam giác MNE .
 B. Tứ giác $MNEF$ với điểm F bất kỳ trên cạnh BD .
 C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD thỏa mãn $EF \parallel BC$.
 D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD thỏa mãn $EF \parallel BC$.
- Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm $\triangle SAB; \triangle SCD$. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng $BM; CN$. Khi đó tỉ số $\frac{SI}{CD}$ bằng
- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 31.** Cho tứ diện $ABCD$. P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD . Điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và AD . Khi đó
- A. $SA = 3SD$. B. $SA = 2SD$. C. $SA = SD$. D. $2SA = 3SD$.
- Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi N là trung điểm của cạnh SC . Lấy điểm M đối xứng với B qua A . Gọi giao điểm G của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAD) . Tính tỉ số $\frac{GM}{GN}$.
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 2. D. 3.
- Câu 33.** Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của $mp(PQR)$ và cạnh AD . Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.
- A. $\frac{7}{3}$. B. 2. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 34.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy ba điểm P, Q, R lần lượt trên ba cạnh AB, CD, BC sao cho $PR \parallel AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (PQR) là S . Khẳng định nào dưới đây là đúng?
- A. $AS = 3DS$. B. $AD = 3DS$. C. $AD = 2DS$. D. $AS = DS$.
- Câu 35.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AB và BC . N là điểm thuộc đoạn CD sao cho $CN = 2ND$. Gọi P là giao điểm của AD với mặt phẳng (KLN) . Tính tỉ số $\frac{PA}{PD}$.
- A. $\frac{PA}{PD} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{PA}{PD} = \frac{2}{3}$. C. $\frac{PA}{PD} = \frac{3}{2}$. D. $\frac{PA}{PD} = 2$.

- Câu 36.** Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD . Điểm Q là giao điểm của AC với (MNP) . Tính $\frac{QC}{QA}$.
- A. $\frac{QC}{QA} = \frac{3}{2}$. B. $\frac{QC}{QA} = \frac{5}{2}$. C. $\frac{QC}{QA} = 2$. D. $\frac{QC}{QA} = \frac{1}{2}$.
- Câu 37.** Cho hình chóp $S.ABC$. Bên trong tam giác ABC ta lấy một điểm O bất kỳ. Từ O ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng $(SBC), (SCA), (SAB)$ theo thứ tự tại A', B', C' . Khi đó tổng tỉ số $T = \frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?
- A. $T = 3$. B. $T = \frac{3}{4}$. C. $T = 1$. D. $T = \frac{1}{3}$.
- Câu 38.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?
- A. IJ song song với CD . B. IJ song song với AB .
C. IJ chéo CD . D. IJ cắt AB .
- Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?
- A. MP và RT . B. MQ và RT . C. MN và RT . D. PQ và RT .
- Câu 40.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:
- A. qua I và song song với AB . B. qua J và song song với BD .
C. qua G và song song với CD . D. qua G và song song với BC .
- Câu 41.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (ADN) , I là giao điểm của AN và DP . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. SI song song với CD . B. SI chéo với CD .
C. SI cắt với CD . D. SI trùng với CD .
- Câu 42.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC . Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC . Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. MN song song với PQ . B. MN chéo với PQ .
C. MN cắt với PQ . D. MN trùng với PQ .
- Câu 43.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC . Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC . Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q . Giả sử AM cắt BD tại E ; CQ cắt DN tại F . Độ dài đoạn thẳng EF là:
- A. $EF = \frac{1}{2}(a+b)$. B. $EF = \frac{3}{5}(a+b)$. C. $EF = \frac{2}{3}(a+b)$. D. $EF = \frac{2}{5}(a+b)$.

- Câu 44.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng
- A. qua I và song song với AB . B. qua J và song song với BD .
C. qua G và song song với CD . D. qua G và song song với BC
- Câu 45.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi.
- A. $AB = BC$. B. $BC = AD$. C. $AC = BD$. D. $AB = CD$.
- Câu 46.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AB và CD . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm tam giác SAB . Tìm điều kiện của AB và CD để thiết diện (IJG) và hình chóp là một hình bình hành.
- A. $AB = \frac{2}{3}CD$. B. $AB = CD$. C. $AB = \frac{3}{2}CD$. D. $AB = 3CD$.
- Câu 47.** Hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên cạnh AC lấy điểm M và trên cạnh BF lấy điểm N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = k$. Tìm k để $MN \parallel DE$.
- A. $k = \frac{1}{3}$. B. $k = 3$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = 2$.
- Câu 48.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của OB , (α) là mặt phẳng đi qua M , song song với AC và song song với SB . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?
- A. Lục giác. B. Ngũ giác. C. Tam giác. D. Tứ giác.
- Câu 49.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là
- A. Tam giác MNE .
B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .
C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
- Câu 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với các cạnh đáy là AB, CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB . Tìm k với $AB = kCD$ để thiết diện của mặt phẳng (GIJ) với hình chóp $S.ABCD$ là hình bình hành.



- A. $k = 4$. B. $k = 2$. C. $k = 1$. D. $k = 3$.

- Câu 51.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của SA, SB, BC điểm G nằm giữa S và I sao cho $\frac{SG}{SI} = \frac{3}{5}$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNG) là
- A. hình thang. B. hình tam giác. C. hình bình hành. D. hình ngũ giác.
- Câu 52.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (AND) . Gọi I là giao điểm của AN và DP . Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?
- A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật.
C. Hình vuông. D. Hình thoi.
- Câu 53.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên cạnh $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.
- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{1}{3}$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}$.
- Câu 54.** Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC . Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T) . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. (T) là hình chữ nhật.
B. (T) là tam giác.
C. (T) là hình thoi.
D. (T) là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.
- Câu 55.** Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S , $SB = 8$. Thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng:
- A. $6\sqrt{2}$. B. $8\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{2}$. D. $9\sqrt{2}$.
- Câu 56.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB . Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (JIG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $AB = 3CD$. B. $AB = \frac{1}{3}CD$. C. $AB = \frac{3}{2}CD$. D. $AB = \frac{2}{3}CD$.
- Câu 57.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, $AC \cap BD = O$, $A'C' \cap B'D' = O'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CC' . Khi đó thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương là hình:
- A. Tam giác. B. Tứ giác. C. Ngũ giác. D. Lục giác.
- Câu 58.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trọng tâm tam giác SBD . Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H . Tính $\frac{SH}{SC}$
- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 59. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$. Tính DD' .

A. 4. B. 6. C. 2. D. 12.

Câu 60. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD . Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$.

A. 2. B. 3. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 61. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN . Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A_1 là tâm đường tròn tam giác BCD .
 B. A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .
 C. A_1 là trực tâm tam giác BCD .
 D. A_1 là trọng tâm tam giác BCD .

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD . Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC . Cho $PR \parallel AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S . Chọn khẳng định đúng?

A. $AD = 3DS$. B. $AD = 2DS$. C. $AS = 3DS$. D. $AS = DS$.

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Trên đường thẳng AB lấy điểm E , trên đường thẳng CN lấy điểm F sao cho EF song song với DM . Tính độ dài đoạn thẳng EF .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.