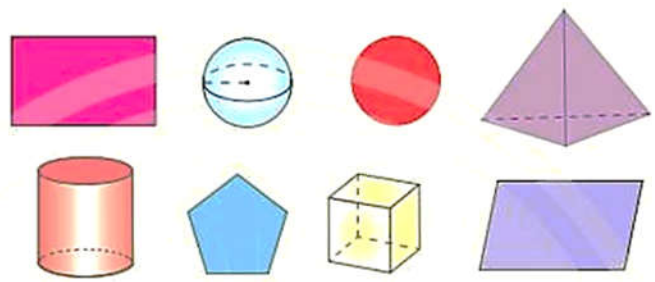
BÀI 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

- **CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG**
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1: SỬ DỤNG KIẾN THỨC ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Môn học Hình học phẳng tìm hiểu tính chất của các hình cùng thuộc một mặt phẳng. Môn học Hinh học không gian tìm hiểu tính chất của các hình trong không gian, những hình này có thể chứa những điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

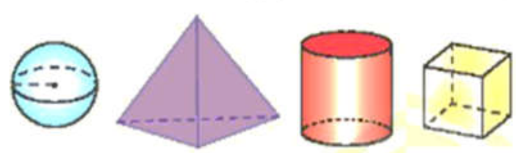


Hãy phân loại các hình sau thành hai nhóm hình khác nhau.

Lời giải

Nhóm Hình học phẳng:

Nhóm Hình học không gian:

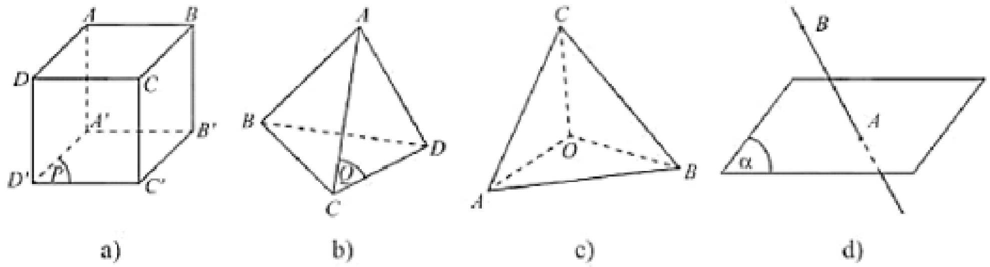


Câu 2. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Mặt bàn, mặt bảng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Hãy chỉ thêm các ví dụ khác về hình ảnh một phần của mặt phẳng.

Lời giải

Mặt đất, Trang giấy, Gương,...
Điểm, đường thẳng và mặt phẳng là ba đối tượng cơ bản của hình học không gian. Ta đã làm quen với điểm và đường thẳng trong hình học phẳng. Trong phần này, chúng ta sẽ làm quen với mặt phẳng.
Mặt bảng, mặt bàn, mặt sàn nhà, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của một mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Câu 3. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** a) Vẽ hình biểu diễn của một hình hộp chữ nhật.



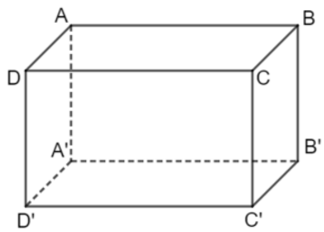
Hình 4

b) Quan sát Hình $4a$ và cho biết điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc mặt phẳng (P).

c) Quan sát Hình $4b$ và cho biết điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc mặt phẳng (Q).

Lời giải

a)



b) Điểm thuộc mặt phẳng (P) là: $A';B';C';D'$

Điểm không thuộc mặt phẳng (P) là: $A;B;C;D$

c) Điểm thuộc mặt phẳng (Q) là: $A;C;D$

Điểm không thuộc mặt phẳng (Q) là: B

Câu 4. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Quan sát Hình 5 và cho biết muốn gác một cây sào tập nhảy cao, người ta cần dựa nó vào mấy điểm trên hai cọc đỡ.

Hình 5

Lời giải

2 điểm

Câu 5. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho bốn điểm A,B,C,D phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong bốn điểm đã cho?

Lời giải

Với 4 điểm phân biệt ta xác định được 6 đường thẳng đi qua 2 trong 4 điểm.

Câu 6. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Quan sát Hình 7 và cho biết giá đỡ máy ảnh tiếp đất tại mấy điểm. Tại sao giá đỡ máy ảnh thường có ba chân?

Hình 7

Lời giải

Giá đỡ máy ảnh tiếp đất tại 3 điểm.
Giá đỡ máy ảnh có 3 chân để giữ được cân bằng và đỡ được máy ảnh bên trên.

Câu 7. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba đỉnh của tam giác MNP ?

Lời giải

Có duy nhất 1 mặt phẳng đi qua 3 đỉnh của tam giác MNP

Câu 8. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Quan sát Hình 10 và cho biết người thợ mộc kiểm tra mặt bàn có phẳng hay không bằng một cây thước thẳng như thế nào.

Hình 10

Lời giải

Người thợ mộc rê thước trên mặt bàn. Khi đó, nếu rê thước mà có 1 điểm thuộc cạnh thước nhưng không thuộc mặt bàn thì bàn đó chưa phẳng và ngược lại

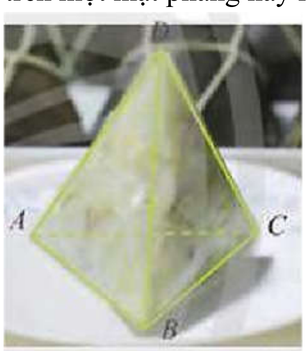
Câu 9. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho mặt phẳng (Q) đi qua bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$. Các điểm nằm trên các đường chéo của tứ giác $ABCD$ có thuộc mặt phẳng (Q) không? Giải thích.

Lời giải

Áp dụng tính chất 2, ta có mặt phẳng $\left(Q\right)$ là mặt phẳng duy nhất đi qua bốn điểm A, B, C, D.

Áp dụng tính chất 3, ta có mọi điểm nằm trên đường chéo AC và BD đều thuộc mặt phẳng $\left(Q\right)$

Câu 10. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Quan sát Hình 13 và cho biết bốn đỉnh A, B, C, D của cái bánh giò có cùng nằm trên một mặt phẳng hay không.



Hình 13

Lời giải

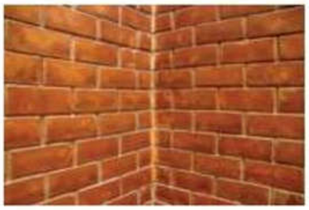
Bốn đỉnh A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng

Câu 11. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho tam giác MNP và cho điểm O không thuộc mặt phẳng chứa ba điểm M, N, P. Tìm các mặt phẳng phân biệt được xác định từ bốn điểm M, N, P, O.

Lời giải

Ta xác định được 4 mặt phẳng phân biệt là: $(MNP);(MNO);(NPO);(MPO)$

Câu 12. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Quan sát Hình 14 và mô tả phần giao nhau của hai bức tường.

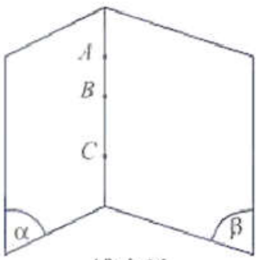


Hình 14

Lời giải

Phần giao nhau của hai bức tường là một đường thẳng

Câu 13. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) (Hình 16). Chứng minh A, B, C thẳng hàng.



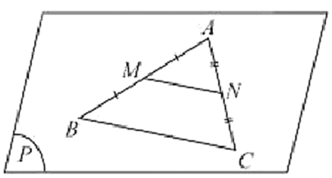
Hình 16

Lời giải

Ta có, A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β). Suy ra A, B, C cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

Hay A, B, C thẳng hàng

Câu 14. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong mặt phẳng (P), cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC (Hình 17). Tính tỉ số $\frac{MN}{BC}$.

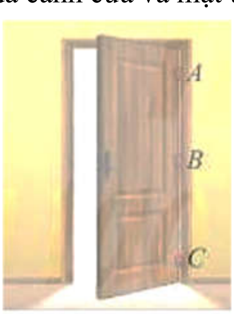


Hình 17

Lời giải

Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$, hay $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

Câu 15. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tại sao muốn cánh cửa đóng mở được êm thì các điểm gắn bản lề A, B, C của cánh cửa và mặt tường (Hình 19) phải cùng nằm trên một đường thẳng?

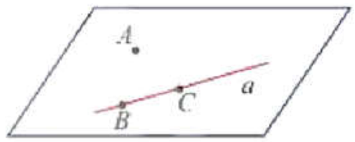


Hình 19

Lời giải

Các điểm trên bản lề phải nằm trên một đường thẳng để mặt phẳng cánh cửa tiếp xúc với mặt phẳng tường qua 1 đường thẳng. Khi đó, cánh cửa đóng mở được êm hơn

Câu 16. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho đường thẳng a và điểm A không nằm trên a. Trên a lấy hai điểm B,C. Đường thẳng a có nằm trong mặt phẳng (ABC) không? Giải thích.

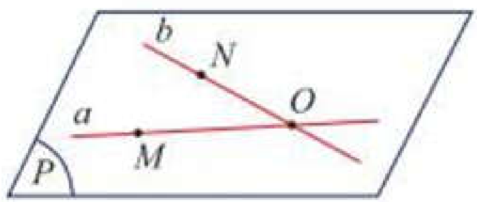


Hình 22

Lời giải

Ta có mặt phẳng (ABC) duy nhất đi qua 3 điểm A,B,C và đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng đó. Suy ra đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (ABC)

Câu 17. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Hai đường thẳng phân biệt a và b cắt nhau tại điểm O. Trên a,b lấy lần lượt hai điểm M,N khác O. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm M,N,O (Hình 25).



Hình 25

Mặt phẳng (P) có chứa cả hai đường thẳng a và b không? Giải thích.

Lời giải

Với đường thẳng a và điểm N không thuộc a, ta xác định được duy nhất mặt phẳng (P) chứa a và N. Với đường thẳng b và điểm M không thuộc b, ta xác định được duy nhất mặt phẳng (P) chứa b và M. Suy ra mặt phẳng đi qua 3 điểm M,N,O là (P) chứa cả 2 đường thẳng a và b

Câu 18. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

Hình 28

Lời giải

Nếu 4 điểm tại chân ghế không thuộc một mặt phẳng ta có thể xác định được 4 mặt phẳng nên ghế 4 chân có thể bị khập khiễng nếu các chân ghế không cân bằng.
Còn với ghế 3 chân, ta chỉ xác định được duy nhất một mặt phẳng đi qua 3 điểm chân ghế nên ghế ba chân không thể khập khiễng

Câu 19. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong xây dựng, người ta thường dùng máy quét tia laser để kẻ các đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà. Tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi các tia laser OA và OB với các mặt tường trong Hình 29.

Hình 29

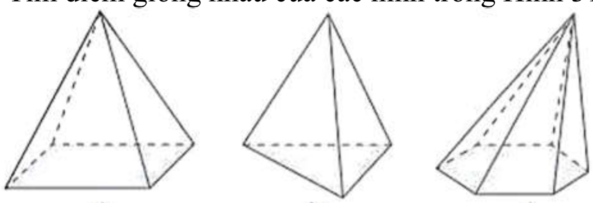
Giao tuyến của mặt phẳng được tạo bởi các tia laser OA và OB với các mặt tường là AC và BC

Câu 20. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** a) Các công trình kiến trúc, đồ vật trong Hình 30 có mặt bên là hình gì?

a) b) c)

Hình 30

b) Tìm điểm giống nhau của các hình trong Hình 31.



a) b) c)

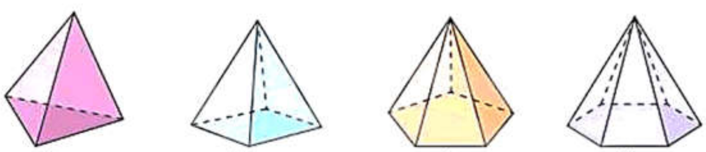
Hình 31

Lời giải

a) Hình tam giác

b) Các hình trong Hình 31 có điểm giống nhau là các mặt bên là hình tam giác

Câu 21. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong Hình 34, hình chóp nào có số mặt ít nhất?



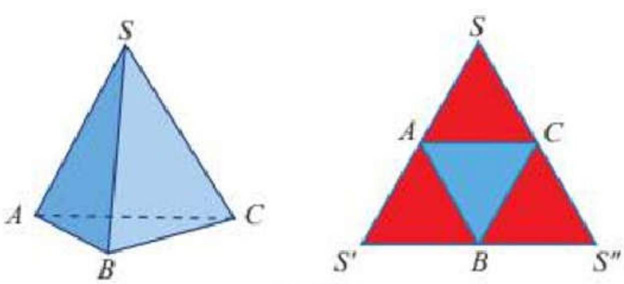
a) b) c) d)

Hình 34

Lời giải

Hình chóp có số mặt ít nhất là Hình a

Câu 22. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Nêu cách tạo lập tứ diện đều $SABC$ từ tam giác đều $SS'S''$ theo gợi ý ở Hình 40.



Hình 40

Lời giải

Gọi A,B,C là 3 trung điểm của 3 cạnh trong tam giác đều $SS'S''$

Gấp các đường AB,BC,CA sao cho các đỉnh S,S',S'' trùng nhau

Ta được tứ diện đều $SABC$

Câu 23. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng (Hình 41).

Hình 41

Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.

Lời giải

Do tia laser tạo ra một mặt phẳng, mặt phẳng này giao với mặt phẳng tường hoặc sàn nhà tại một đường thẳng.

Do đó có thể giúp người thợ kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà

DẠNG 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG.

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng? Ta tìm hai điểm chung thuộc cả hai mặt phẳng. Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

Về dạng này điểm chung thứ nhất thường dễ tìm. Điểm chung còn lại các bạn phải tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng, đồng thời chúng lại thuộc mặt phẳng thứ ba và chúng không song song. Giao điểm của hai đường thẳng đó là điểm chung thứ hai.

Các bạn phải nhớ kỹ: Giao tuyến là đường thẳng chung của hai mặt phẳng, có nghĩa là giao tuyến là đường thẳng vừa thuộc mặt phẳng này vừa thuộc mặt phẳng kia.

Dạng toán tìm giao tuyến, thường giao tuyến của những câu hỏi đầu hay được sử dụng để tìm giao điểm để làm bài tập ở những câu sau. Ta xét cụ thể những bài toán sau:

Câu 24. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O và điểm M không thuộc $mp(a,b)$.

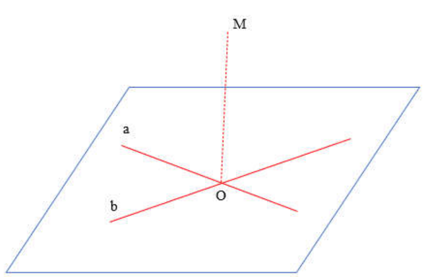
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M,a) và (M,b).

b) Lấy A,B lần lượt là hai điểm trên a,b và khác với điểm O. Tìm giao tuyến của (MAB) và $\text{mp}(a,b)$.

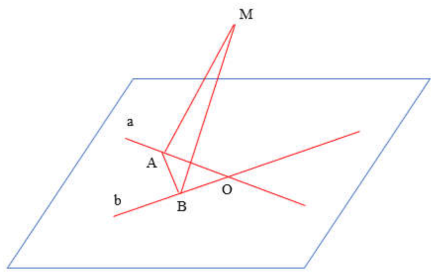
c) Lấy điểm A' trên đoạn MA và điểm B' trên đoạn MB sao cho đường thẳng $A'B'$ cắt $mp(a,b)$ tại C. Chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Lời giải

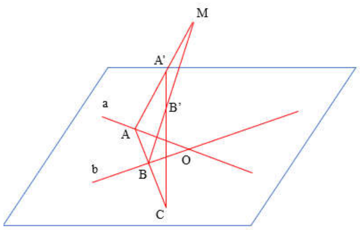
a) Giao tuyến của (M,a) và (M,b) là OM



b) Giao tuyến của (MAB) và $mp(a,b)$ là AB



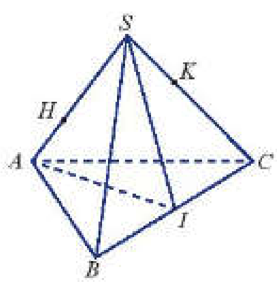
c) Giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và $mp(a,b)$ là AB



Mà đường thẳng $A'B'$ thuộc mặt phẳng (MAB) cắt $mp(a,b)$ tại C.

Suy ra C thuộc đường thẳng AB hay A,B,C thẳng hàng

Câu 25. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho tứ diện $SABC$. Gọi H,K lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SA và $SC(H \neq S,A;K \neq S,C)$ sao cho HK không song song với AC. Gọi I là trung điểm của BC (Hình 38).



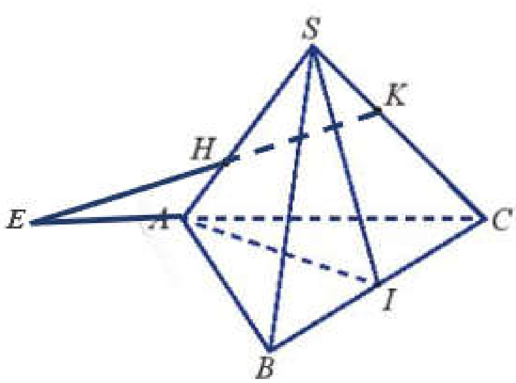
Hình 38

a) Tìm giao điểm của đường thẳng HK và mặt phẳng (ABC).

b) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAI) và (ABK); (SAI) và (BCH).

Lời giải

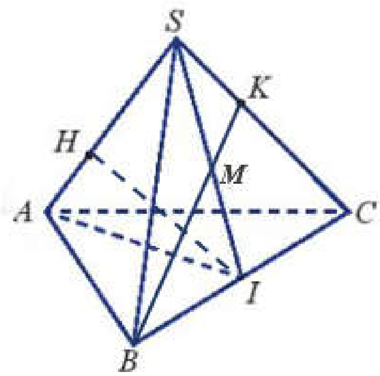
a) Trong mặt phẳng (SAC), kéo dài HK cắt AC tại E.



Ta có $E \in AC$ suy ra $E \in (SAC)$.

Vậy giao điểm của đường thẳng HK và mặt phẳng (SAC) là E

b) Ta có BK cắt SI tại M. A và M là điểm chung của hai mặt phẳng (SAI) và (ABK) nên giao tuyến của (SAI) và (ABK) là AM



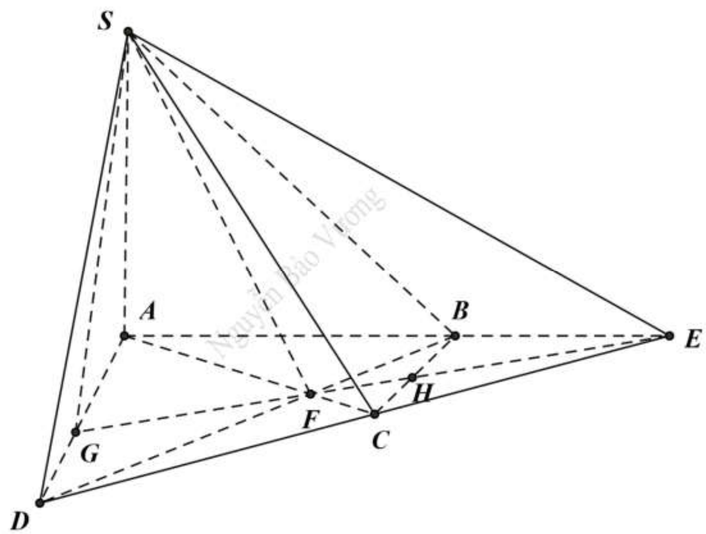
Ta có H và I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAI) và (BCH) nên giao tuyến của (SAI) và (BCH) là HI

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAB) và $SCD)$, (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao tuyến của (SEF) với các mặt phẳng $(SAD),(SBC)$.

Lời giải



a) $\begin{cases} E \in AB \Rightarrow SE \subset (SAB) \\ E \in AC \Rightarrow SE \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SE$.

$\begin{cases} F \in AC \Rightarrow SF \subset (SAC) \\ F \in BD \Rightarrow SF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SF$.

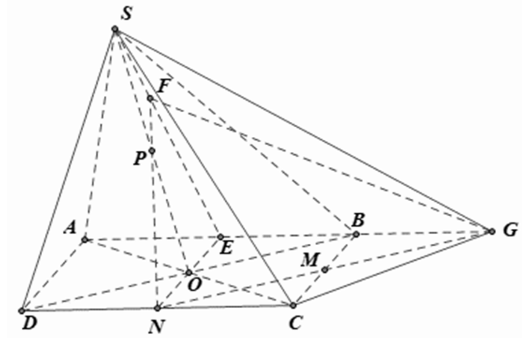
a) Gọi $\begin{cases} EF \cap AD = G \\ EF \cap BC = H \end{cases}$.

$\begin{cases} G \in EF \Rightarrow SG \subset (SEF) \\ G \in AD \Rightarrow SG \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SEF) \cap (SAD) = SG$

$\begin{cases} H \in EF \Rightarrow SH \subset (SEF) \\ H \in AD \Rightarrow SH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = SH$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CD,SO. Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(SAB),(SAD)$, (SBC) và (SCD).

Lời giải



Gọi $E = NO \cap AB; F = NP \cap SE, MN \cap AB = G$.

$\begin{cases} G \in AB \Rightarrow G \in (SAB) \\ F \in SE \subset (SAB) \Rightarrow F \in (SAB) \end{cases} \Rightarrow GF \subset (SAB).$

$\begin{cases} G \in MN \Rightarrow G \in (MNP) \\ F \in NP \Rightarrow F \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow GF \subset (MNP).$ Vậy $GF = (SAB) \cap (MNP)$.

Gọi $H = GF \cap SB \Rightarrow MH = (MNP) \cap (SBC)$.

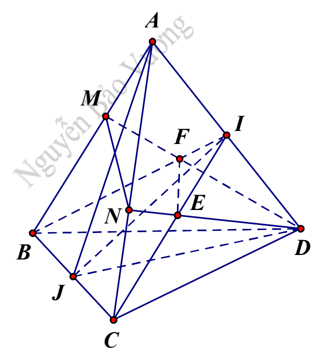
Làm tương tự với các mặt còn lại.

Câu 28. Cho tứ diện $ABC\text{D}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $A\text{D}, BC$.

a) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(IBC), (\text{JAD})$.

b) M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC.Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (DMN)$.

Lời giải



a) Ta có: $I \in A\text{D} \Rightarrow I \in (\text{JAD}) \Rightarrow \text{IJ} \subset (\text{JAD})$.

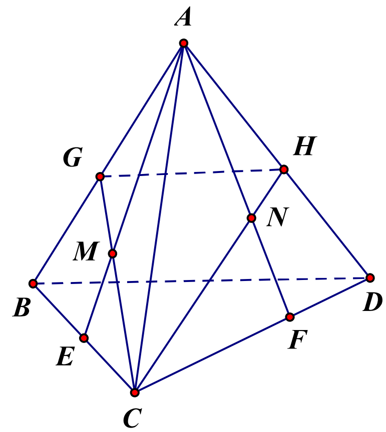
$I \in BC \Rightarrow I \in (JBC) \Rightarrow \text{IJ} \subset (JBC)$. Vậy $(IBC) \cap (\text{JAD}) = \text{IJ}$.

b) Ta có: $\begin{cases} E = DN \cap IC \\ F = DM \cap IB \end{cases} \Rightarrow \text{EF=(IBC)} \cap \text{(DMN)}.$

Câu 29. Cho tứ diện $ABC\text{D}$. M là một điểm bên trong $\triangle AB\text{D}$, N là điểm bên trong của $\triangle AC\text{D}$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng

a) (AMN) và (BCD). b) (DMN) và (ABC).

Lời giải



a) Gọi $E = AM \cap BD$; $F = AN \cap CD$.

Có $\begin{cases} E \in AM \Rightarrow E \in (AMN) \\ F \in AN \Rightarrow F \in (AMN) \end{cases} \Rightarrow EF \subset (AMN)$ (1).

Có $\begin{cases} E \in BD \Rightarrow E \in (BCD) \\ F \in CD \Rightarrow F \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow EF \subset (BCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $EF = (BCD) \cap (AMN)$.

b) Tương tự câu a) có $(DMN) \cap (ABC) = GH$ với $G = DM \cap AB$; $H = DN \cap AC$.

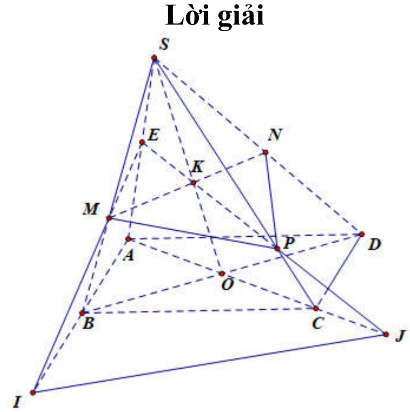
Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD .Lấy điểm P trên cạnh SC sao cho $PC < PS$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng

a) (SAD) và (SBD) b) (MNP) và (SBD).

c) (MNP) và (SAC) d) (MNP) và (SAB).

e) (SAD) và (MNP) f) $MNP)$ và $(ABCD)$.

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC, BD.

Do S, O đều thuộc 2 mặt phẳng $(SAC), (SBD)$ $\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$

b) $MN = (SBD) \cap (MNP)$.

c) Trong (SBD) gọi $K = MN \cap SO$.

Đường thẳng PK cắt SA tại E ta có:

$PE = (SAC) \cap (MNP)$.

d) E, M là 2 điểm chung của mặt phẳng $(SAB), (MNP)$.

$\Rightarrow ME = (SAB) \cap (MNP)$.

e) Tương tự $NE = (SAD) \cap (MNP)$.

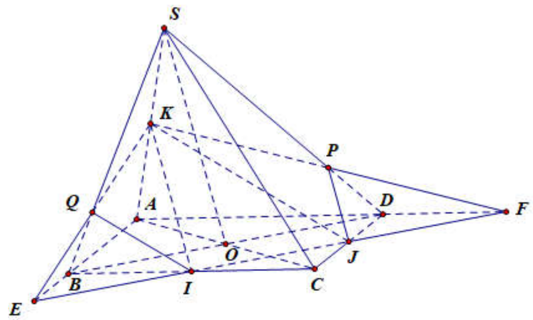
f) Trong mặt phẳng (SAC) gọi $J = EP \cap AC$, trong mặt phẳng (SAB) gọi $I = EM \cap AB$. Do I, J là 2 điểm chung của 2 mặ phẳng $(MNP), (ABCD)$ $\Rightarrow IJ = (MNP) \cap (ABCD)$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA .Tìm giao tuyến của

a) (IJK) và (SAB). b) (IJK) và (SAD).

c) (IJK) và (SCB). d) (IJK) và (SDB).

Lời giải



a) Trong mp $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap IJ, F = AD \cap IJ$. Khi đó 2 điểm K, E là 2 điểm chung của mp $(IJK), (SAB)$ nên $KE = (SAB) \cap (IJK)$.

b) Tương tự $KF = (SAD) \cap (IJK)$.

c)) Trong mp (SAB) gọi $Q = KE \cap SB$. Khi đó 2 điểm Q, I là 2 điểm chung của mp $(IJK), (SCB)$ nên $QI = (SCB) \cap (IJK)$.

d)) Trong mp (SAD) gọi $P = SD \cap KF$. Khi đó 2 điểm P, Q là 2 điểm chung của mp $(IJK), (SBD)$ nên $PQ = (SBD) \cap (IJK)$.

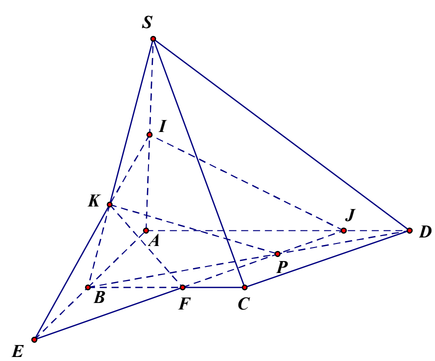
Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ laf hình thang có đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SA, J là điểm nằm trên AD sao cho $JD = \frac{1}{4}AD$, $K \in SB : SK = 2BK$ .Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

a) (IJK) và $(ABCD)$.

b) (IJK) và (SBD).

c) (IJK) và (SCB).

Lời giải



a) Trong mp (SAB) gọi $E = KI \cap AB$. Khi đó 2 điểm J, E là 2 điểm chung của mp $(IJK), (ABCD)$ nên $JE = (ABCD) \cap (IJK)$.

b) Trong mp $(ABCD)$ gọi $E = BD \cap IE$. Khi đó 2 điểm K, P là 2 điểm chung của mp $(IJK), (SBD)$ nên $KP = (SBD) \cap (IJK)$.

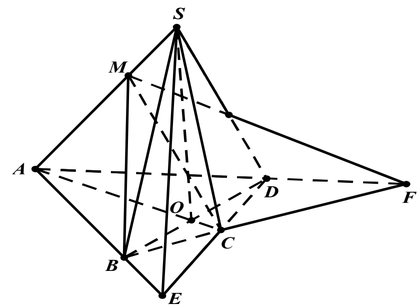
c) Gọi $F = BC \cap JE$. Khi đó 2 điểm K, F là 2 điểm chung của mp $(IJK), (SBD)$ nên $KF = (SBC) \cap (IJK)$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD)

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD)

Lời giải



a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

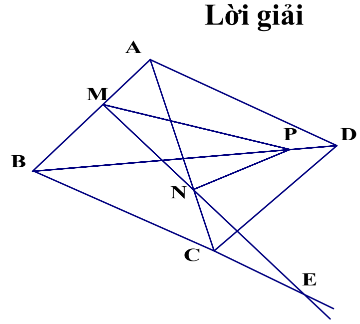
c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Câu 34. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Lời giải



- $P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$
- $P \in (BCD)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

Trong mp (ABC), gọi $E = MN \cap BC$

- $E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$
- $E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

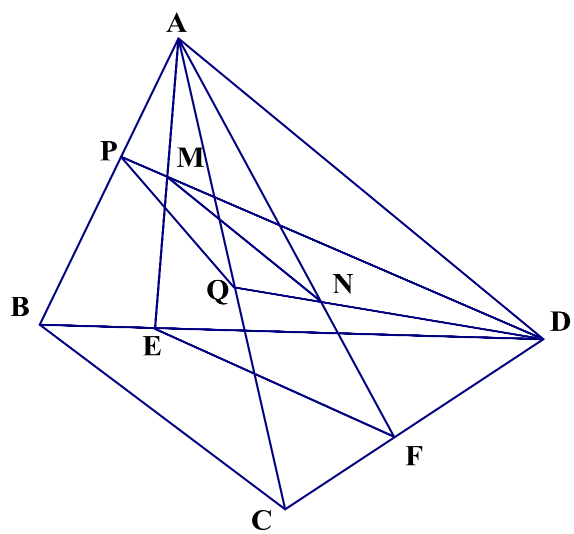
Vậy PE là giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau

a) (AMN) và (BCD)

b) (DMN) và (ABC)

Lời giải



a) Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD), gọi $E = AM \cap BD$

- $E \in AM$ mà $AM \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$
- $E \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Trong (ACD), gọi $F = AN \cap CD$

- $F \in AN$ mà $AN \subset (AMN) \Rightarrow F \in (AMN)$
- $F \in CD$ mà $CD \subset (BCD) \Rightarrow F \in (BCD)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Vậy EF là giao tuyến của (AMN) và (BCD)

b) Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong (ABD), gọi $P = DM \cap AB$

- $P \in DM$ mà $DM \subset (DMN) \Rightarrow P \in (DMN)$
- $P \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow P \in (ABC)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

Trong (ACD), gọi $Q = DN \cap AC$

- $Q \in DN$ mà $DN \subset (DMN) \Rightarrow Q \in (DMN)$
- $Q \in AC$ mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow Q \in (ABC)$

$\Rightarrow Q$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

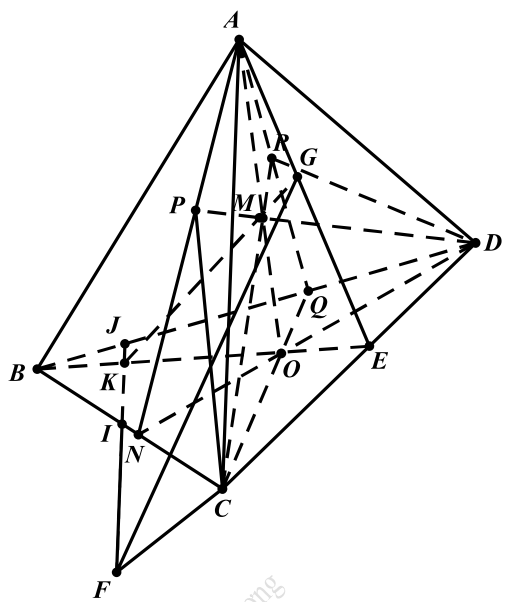
Vậy PQ là giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABC),(ABD).

b) Gọi I, J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

Lời giải



a) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi

$$P = DM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$$

Lại có $C \in (CDM) \cap (ABC) \Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$.

Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ) gọi $R = CM \cap AQ$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$$

$\Rightarrow D$ là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.

b) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$;

trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Ta có:

$$\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD),$$

$$\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow G \in (IJM) \cap (ACD).$$

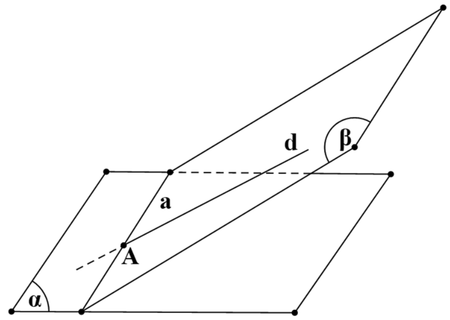
Vậy $FG = (IJM) \cap (ACD)$.

DẠNG 3: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG

Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α), có hai cách làm như sau:

Cách 1: Những bài đơn giản, có sẵn một mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (α).

Giao điểm của hai đường thẳng không song song d và a chính là giao điểm của d và mặt phẳng (α).



Cách 2: Tìm một mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d, sao cho dễ dàng tìm giao tuyến với mặt phẳng (α). Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) chính là giao điểm của đường thẳng d và giao tuyến a vừa tìm.

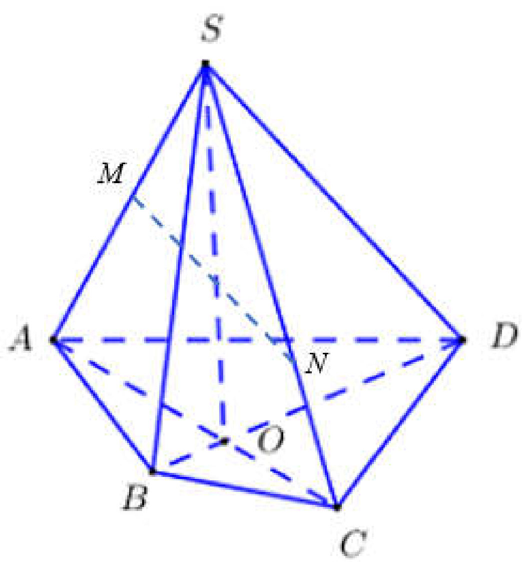
Câu 37. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC.

a) Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC).

b) Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Lời giải

a)



$M \in SA$ và $SA \subset (SAC)$ nên $M \in (SAC)$

$N \in SC$ và $SC \subset (SAC)$ nên $N \in (SAC)$

Vậy $MN \subset (SAC)$

b) Ta có: $O \in AC, AC \subset (SAC)$ nên $O \in (SAC)$

$O \in BD, BD \subset (SBD)$ nên $O \in (SBD)$

Nên O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)

Câu 38. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

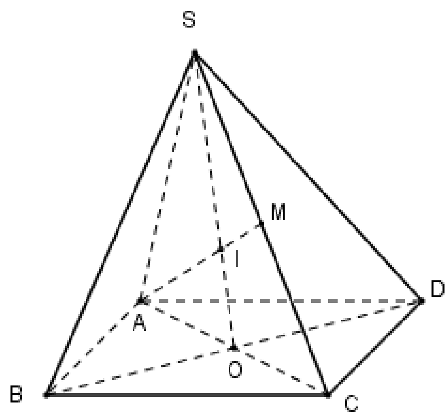
a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Chứng minh $IA = 2IM$.

b) Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM).

c) Gọi N là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

Lời giải

a)



Gọi I là giao điểm của SO và AM. Ta có: $I \in AM$

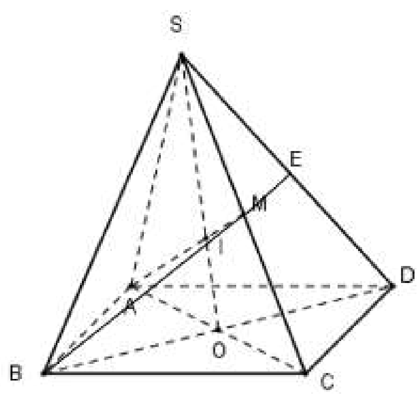
Do $I \in SO; SO \subset (SBD)$ nên $I \in (SBD)$

Vậy I giao điểm của AM và (SBD)

Trong tam giác SAC, ta có: M là trung điểm của SC, O là trung điểm của AC nên SO cắt AM tại I là trọng tâm của tam giác SAC

Suy ra $AI = \frac{2}{3} AM$ hay $AI = 2IM$

b)

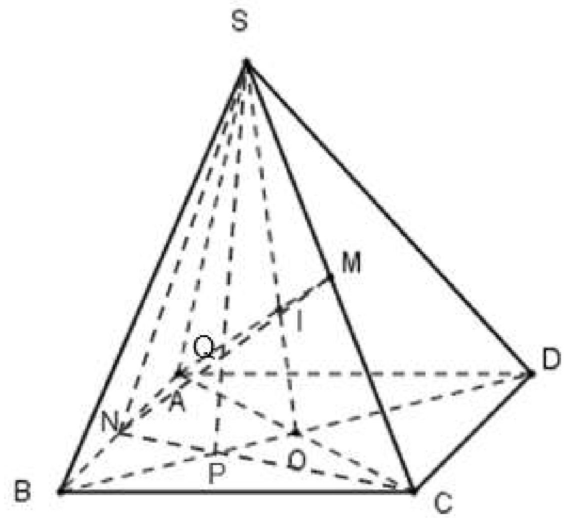


Trên mặt phẳng (SCD) kẻ một đường thẳng song song với AB cắt SD tại E.

Do $ME // AB$ nên A, B, M, E cùng thuộc một mặt phẳng, hay $E \in (ABM)$

Vậy E là giao của (ABM) và SD

c)



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi NC cắt BD tại P.

Ta có S và P là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SNC) và (SBD) nên SP là giao tuyến của (SNC) và (SBD)

Trong mặt phẳng (SNC), gọi MN cắt SP tại Q.

Do $SP \subset (SBD)$ nên $Q \in (SBQ)$

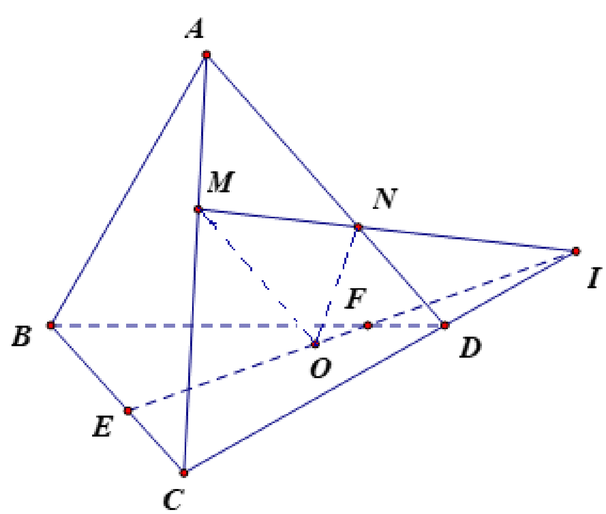
Vậy giao điểm của MN và (SBD) là Q

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN khiing song song với CD. Gọi O là một điểm bên trong ΔBCD.

a) Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD).

b) Tìm giao điểm của BC và BD với mặt phẳng (OMN).

Lời giải



a) Theo hình vẽ ta có

- Trong mp(ACD): kẻ MN giao với CD tại I

- Trong mp(BCD): kẻ IO giao BC và BD lần lượt tại E và F

- Từ đó thì giao tuyến của (OMN) và (BCD) là đường EF.

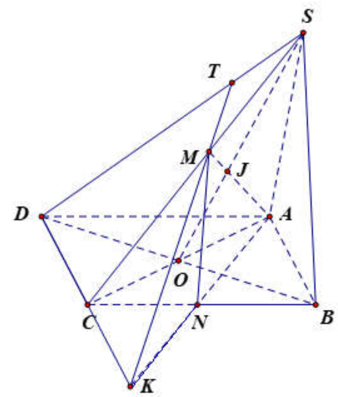
b) Theo a) thì giao của BC và BD với (OMN) lần lượt là E và F.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$. M là một điểm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm của AM và (SBD)

b) Gọi N là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao điểm của SD và (AMN).

Lời giải



a) Theo hình vẽ ta có:
+) Trong mp$(ABCD)$: AC giao BD tại O

+) Trong mp(SAC): SO giao MA tại J

Từ đó J chính là giao điểm của AM và (SBD).

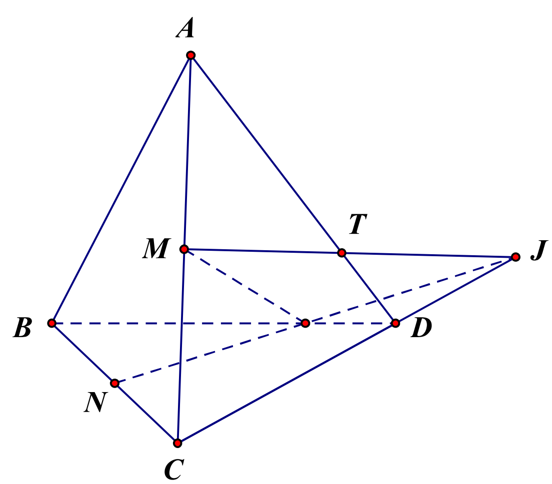
b) Giả sử AN giao CD tại K
Trong mp(SCD): KM giao SD tại T

Từ đó T chính là giao điểm của SD và (AMN).

Nếu AN và CD song song với nhau, ta chỉ việc kẻ MT song song với CD ($T \in SD$) từ đó cũng suy ra được T là điểm cần tìm.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là một điểm trên cạnh BD và không trùng với trung điểm của BD. Tìm giao điểm của CD và AD với mặt phẳng (MNK).

Lời giải



Trong mp(BCD): NK giao CD tại J $\Rightarrow J$ là giao điểm của CD và (MNK).

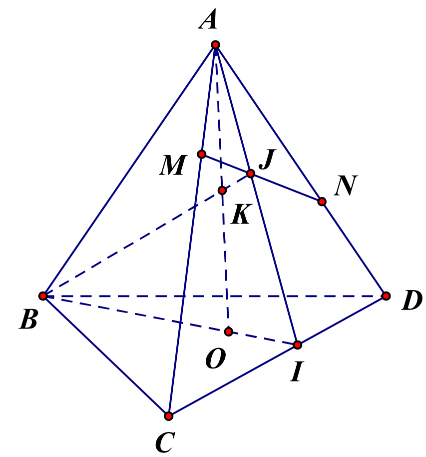
Trong mp(ACD): MJ giao AD tại T $\Rightarrow T$ là giao điểm của AD và (MNK).

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và AD. O là một điểm bên trong ΔBCD. Tìm giao điểm của:

a) MN và (ABO).

b) AO và (BMN).

Lời giải



a) Trong (BCD) kẻ BO giao CD tại I.

Trong (ACD) kẻ MN giao AI tại J $\Rightarrow J$ là giao điểm của MN và (ABO).

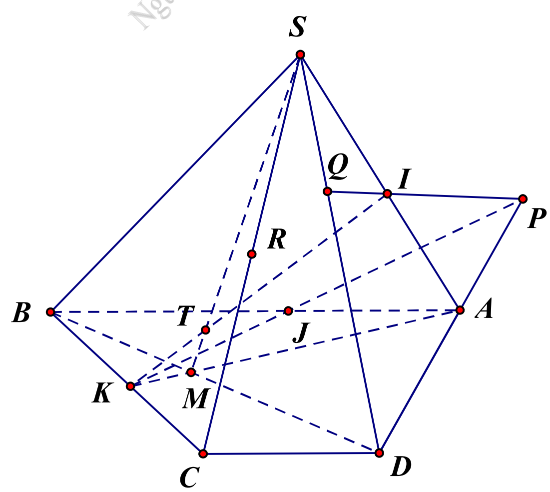
b) Trong (ABI): AO giao BJ tại K $\Rightarrow K$ là giao điểm của AO và (BMN).

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang, cạnh đáy lớn AB. Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt trên SA, AB, BC.

a) Tìm giao điểm của IK và (SBD).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với SD và SC.

Lời giải



a) Trong $(ABCD)$: BD giao AK tại M.

Trong (SAK): SM giao IK tại T $\Rightarrow T$ là giao điểm của IK và (SBD).

b) Lấy R là trung điểm của SC.

Dễ dàng chứng minh được RK và IJ song song với nhau (song song và bằng $\frac{BD}{2}$) nên

$R \in (IKJ)$ $\Rightarrow R$ là giao điểm của SC với mp(IJK).

Trong $(ABCD)$: KJ cắt AD tại P.

Trong (SAD): IP cắt SD tại Q $\Rightarrow Q$ là giao điểm của SD với mp(IJK).

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có AD và BC không song song với nhau. Lấy I thuộc SA sao cho $SA=3IA$, J thuộc SC và M là trung điểm của SB.

a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC)

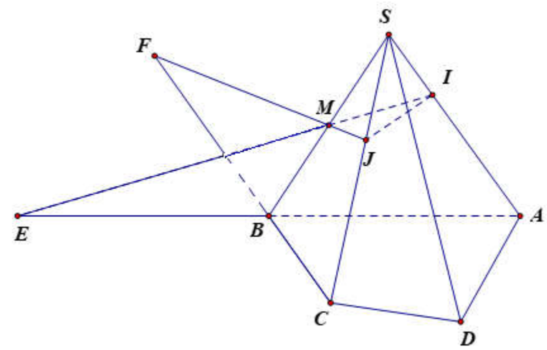
b) Tìm giao điểm E của AB và (IJM)

c) Tìm giao điểm F của BC và (IJM)

d) Tìm giao điểm N của SD và (IJM)

e) Gọi H là giao điểm của MN và BD. Chứng minh rằng H,E,F thẳng hàng.

Lời giải



a) O là giao điểm của và BC nên SO là giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Trong (SAB) kẻ IM giao với AB tại E nên E là giao điểm của AB và (IJM).

c) Trong (SBC): MJ giao với BC tại F nên F là giao điểm của BC và (IJM).

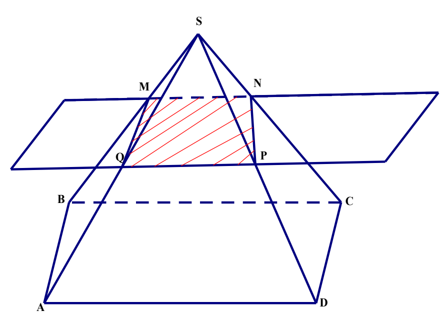
d) Trong $(ABCD)$: EF giao với AD tại P.

Trong (SAD): IP giao với SD tại N nên N là giao điểm của SD và (IJM).

e) H là giao điểm của MN và BD. Dễ thấy 3 điểm H,E,F đồng thời nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (IJM) nên 3 điểm này thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trên hay 3 điểm đó thẳng hàng.

DẠNG 4. TÌM THIẾT DIỆN

I. Phương pháp tìm thiết diện



Thiết diện của hình (H) và hình (Q) là phần chung nhau giữa2 hình đó.

Thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp (H) là phần chung giữa mặt phẳng (α) và hình chóp (H).

Đặc điểm

- Thiết diện là đa giác kín.
- Các cạnh của thiết diện nằm trên các mặt của hình chóp.
- Cạnh của thiết diện được hình thành từ những đoạn giao tuyến của mặt phẳng cắt với các mặt của hình chóp.
- Trong giới hạn hình chóp thì Thiết diện có thể cắt hoặc không cắt tất cả các mặt của hình chóp.

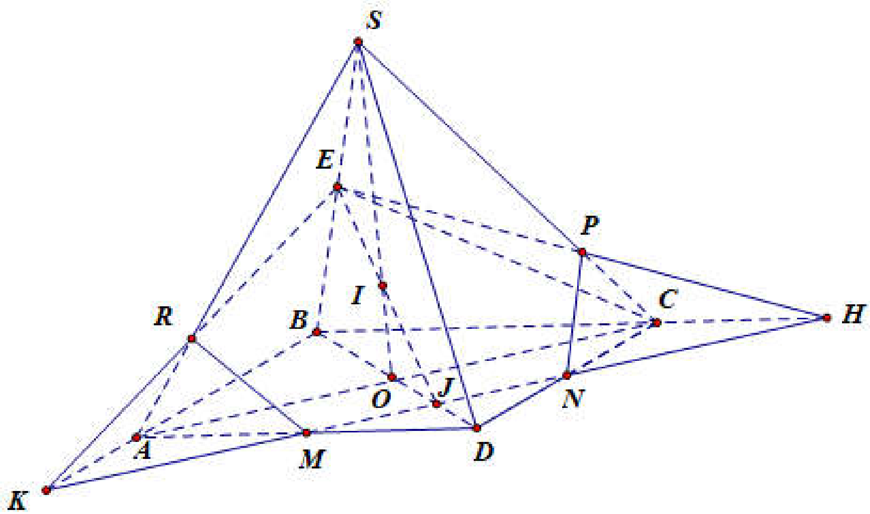
Phương pháp tìm thiết diện

- Xác định điểm chung có sẵn.

- Từ các điểm chung có sẵn ta xác định giao tuyến của mặt phẳng với các mặt chứa điểm chung đó.
- Từ giao tuyến đó ta xác định đoạn giao tuyến bằng cách tìm giao điểm của giao tuyến với các cạnh của mặt phẳng đó.
- Từ giao tuyến tìm được ta tiến hành tìm giao tuyến và các đoạn giao tuyến còn lại cho đến khi được 1 hình kín.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I là ba điểm trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI).

Lời giải



Trong $(ABCD)$ gọi $J = BD \cap MN$;

$K = MN \cap AB; H = MN \cap BC$.

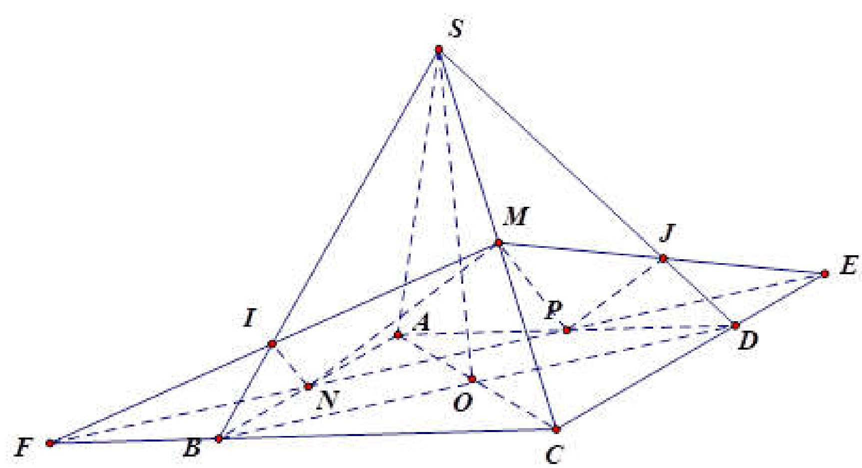
Trong (SBD) gọi $Q = IJ \cap SB$

Trong (SAB) gọi $R = KQ \cap SA$

Và trong (SBC) gọi $P = QH \cap SC$. Như vậy thiết diện cần tìm là $MNPQR$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng.

Lời giải



Gọi $E = MN \cap CD, F = MN \cap BC \quad I = MF \cap SB, J = ME \cap SB$. Khi đó thiết diện là ngũ giác $MINPJ$.

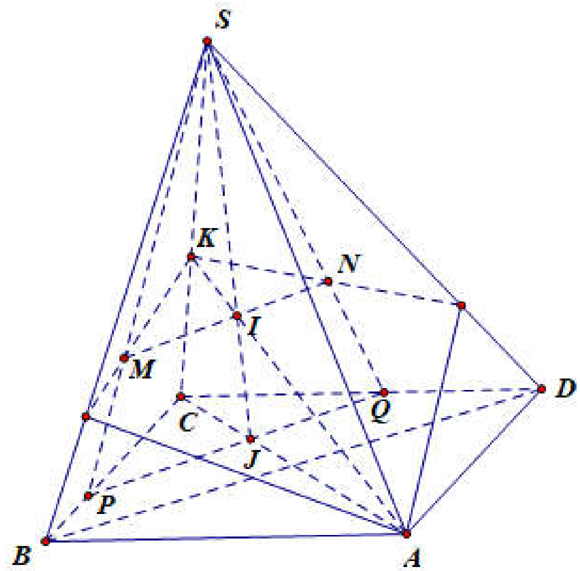
Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ .Trong tam giác SBC, lấy một điểm M. Trong tam giác SCD, lấy một điểm N.

a) Tìm giao điểm của MN và (SAC).

b) Tìm giao điểm của SC với (AMN).

c) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng

Lời giải



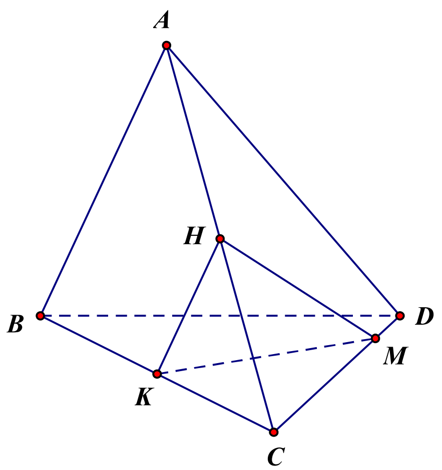
a) Gọi $SM \cap BC = P$, $SN \cap CD = Q$. Khi đó $PQ \cap AC = J$. Gọi $I = SJ \cap MN$. Vậy $I = MN \cap (SAC)$

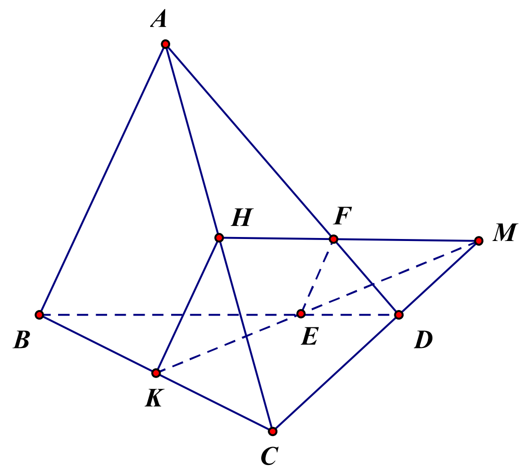
b) $AI \cap SC = K$, khi đó $K = SC \cap (AMN)$.

c) Gọi $KM \cap SB = F$, và $KN \cap SD = E$. Vậy thiết diện là tứ giác $AFKE$.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC. Trong mặt phẳng (CDB) lấy điểm M sao cho hai đường thẳng KM và CD cắt nhau. Hãy tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (HKM).

Lời giải





+) Nếu M nằm giữa C và D thiết diện chính là tam giác KHM.

+) Nên M nằm ngoài đoạn thẳng CD Gọi $F = HM \cap AD$ và $E = KM \cap BD$ khi đó thiết diện là tứ giác $HFEK$.

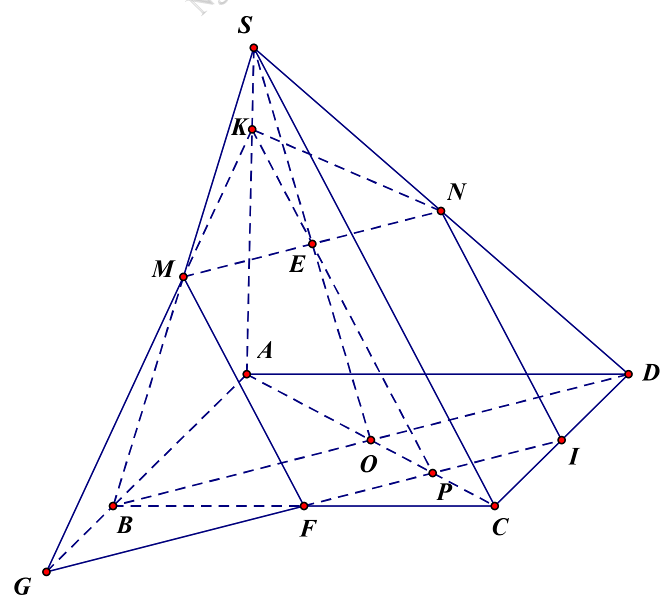
Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB, SD, OC.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC)

b) Tìm giao điểm của SA với (MNP)

c) Tìm thiết diện của (MNP) với hình chóp.

Lời giải



a) Gọi $E = SO \cap MN$. Dựng PE cắt SA tại K. Khi đó giao tuyến của (MNP) với (SAC) là đường thẳng PE.

b) K là giao điểm của SA và (SAC).

c) Do $MN // BD$ nên giao tuyến của (MNP) với đáy $(ABCD)$ là đường thẳng qua P song song với BD cắt các cạnh BC và CD lần lượt tại F và I. Vậy $MKNIF$ là thiết diện của khối chóp.

Câu 50. Cho chóp $S.ABCD$, M thuộc $SC;N,P$ trung điểm AB,AD.

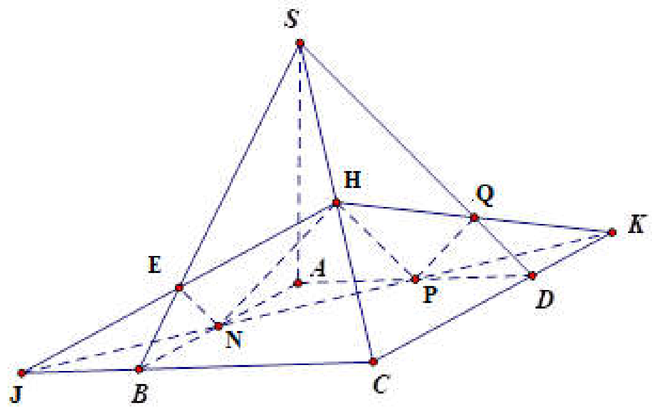
a) Tìm giao điểm của CD và (MNP)

b) Tìm giao điểm của SD và (MNP)

c) Tìm giao tuyến của (SBC) và (MNP)

d) Tìm thiết diện của chóp và (MNP).

Lời giải



a) Gọi $NP\cap CD=K$ khi đó $CD\cap(MNP)=K$.

b) Gọi $MK\cap SD=Q$ khi đó $Q=SD\cap(MNP)$.

c) Gọi $PN\cap BC=I$ và $E=SB\cap MJ$, khi đó giao tuyến của (SBC)) và (MNP) là MJ.

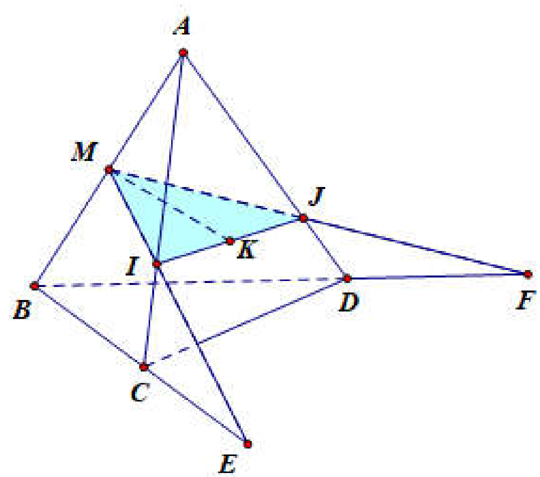
d) Thiết diện là ngũ giác $MENPQ$.

Câu 51. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh bằng a. Kéo dài BC một đoạn $CE=a$. Kéo dài BD một đoạn $DF=a$. Gọi M là trung điểm AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).

b) Tính diện tích của thiết diện.

Lời giải



a) Theo hình vẽ ta có:

Trong $mp(ABC)$: ME giao AC tại I.

Trong $mp(ABD)$: MF giao AD tại J.

Từ đó thiết diện của tứ diện với $mp(MEF)$ là tam giác MIJ.

b) Theo cách dựng thì I và J lần lượt là trọng tâm tam giác ABE và ABF $\Rightarrow \begin{cases} AI = \frac{2}{3}AC = \frac{2a}{3} \\ AJ = \frac{2}{3}AD = \frac{2a}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tam giác AIJ đều $\Rightarrow IJ = \frac{2a}{3}$.

Do $AI = AJ$ nên $\Delta AMI = \Delta AMJ \Rightarrow MI = MJ$

Trong $\Delta AMI : MI = \sqrt{MA^2 + IA^2 - 2MA.\text{IAcosA}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}$

$$S_{\Delta MIJ} = \frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a^2}{6}$$

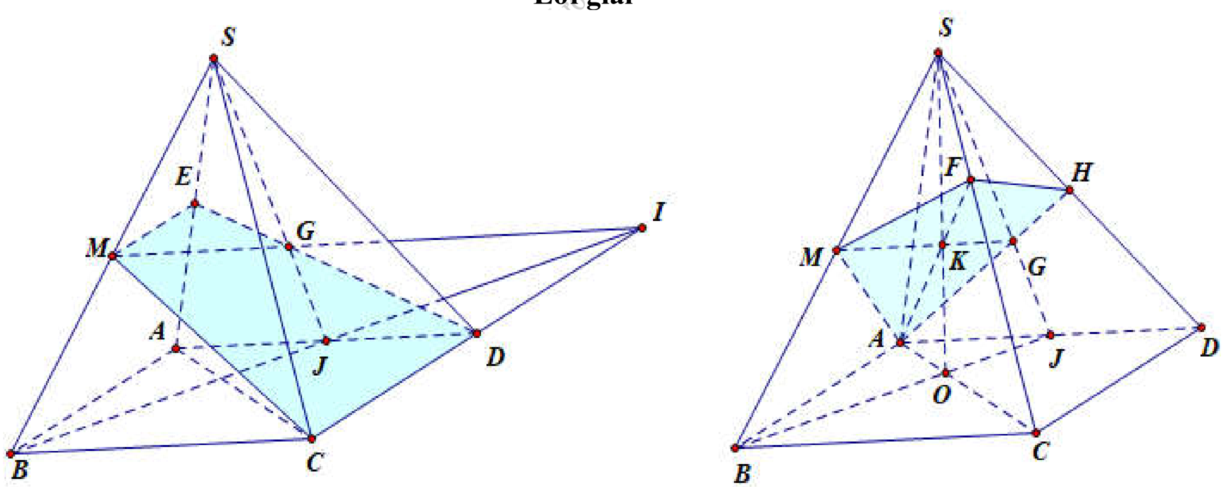
Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành $ABCD$. M là trung điểm SB và G là trọng tâm tam giác SAD.

a) Tìm giao điểm I của MG với $(ABCD)$, chứng tỏ I thuộc mặt phẳng (CMG).

b) Chứng tỏ (CMG) đi qua trung điểm của SA, tìm thiết diện của hình chóp với (CMG).

c) Tìm thiết diện của hình chóp với (AMG).

Lời giải



a) Gọi J là trung điểm AD. Khi đó $I = MG \cap BJ$ suy ra G là trọng tâm tam giác SBI nên J là trung điểm của BI. Khi đó MG, BJ, CD đồng quy tại điểm I. Do vậy I thuộc mặt phẳng (CMG).

b) Ta có $(CMG) \equiv (CIM)$. Dựng DG cắt SA tại E. Mặt khác do G là trọng tâm $\Delta SAD \Rightarrow$ E là trung điểm của S**A.**

Như vậy tứ giác CMED là thiết diện của (CMG) với khối chóp.

c) Gọi $O = BJ \cap AC, K = SO \cap MI, H = AG \cap SD$.

Dựng AK cắt SC tại F như vậy tứ giác $AMFH$ là thiết diện của khối chóp với mặt phẳng (AMG).

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang $ABCD$, AB là đáy lớn. I, J lần lượt là trung điểm $SA, SB; M$ thuộc SD.

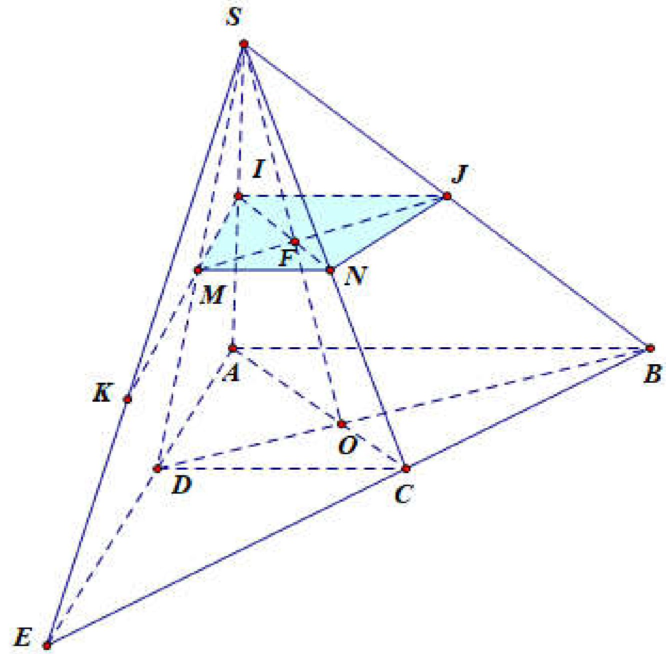
a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm K của IM *và* (SBC).

c) Tìm giao điểm N của SC *và* (IJM).

d) Tìm thiết diện của hình chóp với (IJM).

Lời giải



a) Gọi $E = AD \cap BC$ khi đó SE là giao tuyến của (SAD) *và* (SBC).

b) Trong (SAE) dựng IM cắt SE tại K. Khi đó $K = IM \cap (SBC)$

c) Gọi $O = AC \cap BD$. Trong (SBD) gọi $F = SO \cap MJ$ và trong (SAC) dựng IF cắt SC tại N. Khi đó $N = SC \cap (IJM)$.

d) Do vậy thiết diện của (IJM) và khối chóp là tứ giác $IMNJ$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang $ABCD$, AB là đáy lớn.

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AD, BC, SB.

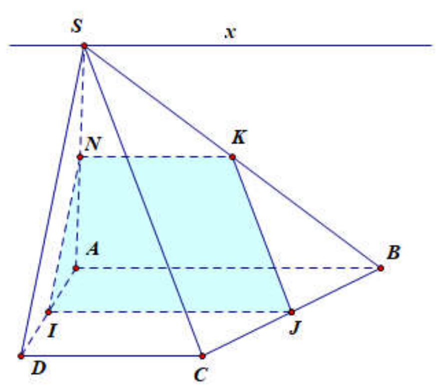
a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD); (IJK) và (SCD).

b) Tìm giao điểm M của SD và (IJK).

c) Tìm giao điểm N của SA và (IJK).

d) Tìm thiết diện của hình chóp với (IJK). Thiết diện là hình gì?

Lời giải



a) Ta có: $AB//CD$, $S \in (SAB) \cap (SCD)$ do vậy giao tuyến (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB.

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} KJ//SC \\ IJ//CD//AB \end{array}\right\} \Rightarrow (SCD)//(IJK)$ do vậy (SCD) không giao với (IJK).

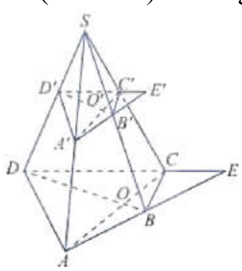
c) Dựng $KN//AB$ suy ra N là trung điểm SA. Khi đó ta có: $NK//IJ$ và $N = SA \cap (IJK)$.

d) Thiết diện của hình chóp với (IJK) là tứ giác $IJKN$.

DẠNG 5: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.

Câu 55. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên các cạnh bên của hình chóp lấy lần lượt các điểm A',B',C',D'. Cho biết AC cắt BD tại $O, A'C'$ cắt $B'D'$ tại O', AB cắt DC tại E và $A'B'$ cắt $D'C'$ tại E' (Hình 39). Chứng minh rằng:



Hình 39

a) S,O',O thẳng hàng;

b) S,E',E thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có: S và O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên giao tuyến của (SAC) và (SBD) là SO

Ta có: S và O' là điểm chung của hai mặt phẳng $(SA'C')$ và $(SB'D')$ nên giao tuyến của (SAC') và $(SB'D')$ là SO'

Mà $(SAC) \equiv (SA'C'), (SBD) \equiv (SB'D')$ nên $SO \equiv SO'$

Hay S,O,O' thẳng hàng

b) Ta có: S và E là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là SE

Ta có: S và E' là điểm chung của hai mặt phẳng $(SA'B')$ và $(SC'D')$ nên giao tuyến của $(SA'B')$ và $(SC'D')$ là SE'

Mà $(SAB) \equiv (SA'B'), (SCD) \equiv (SC'D')$ nên $SE \equiv SE'$

Hay S,E,E' thẳng hàng

Câu 56. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và $BD; M, N$ lần lượt là trung điểm của $SB, SD; P$ thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC.

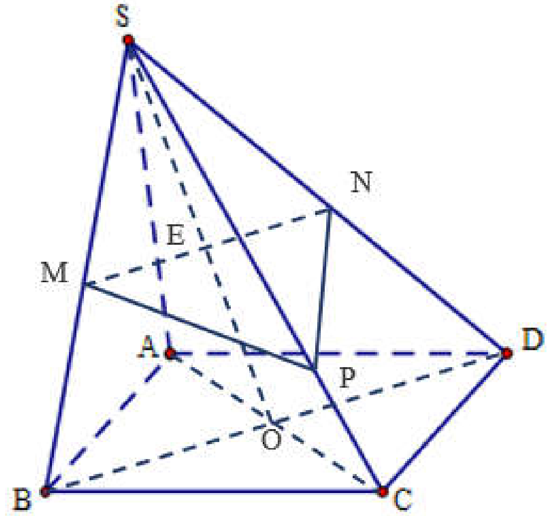
a) Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP).

c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải

a)

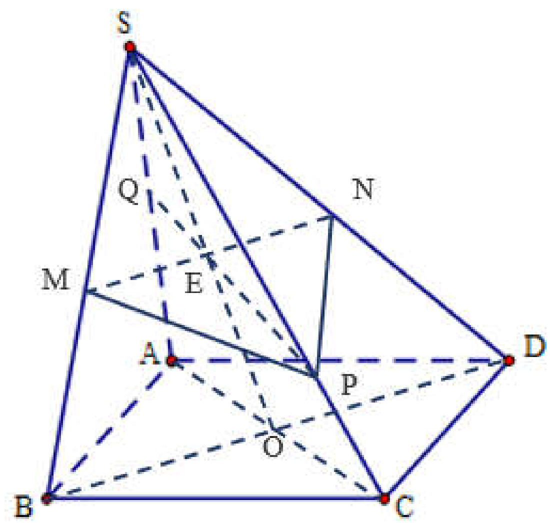


Trong mặt phẳng SBD, Gọi E là giao điểm của SO và MN

Do $MN \subset (MNP)$ nên $E \in (MNP)$

Vậy E là giao điểm của SO và (MNP)

b)

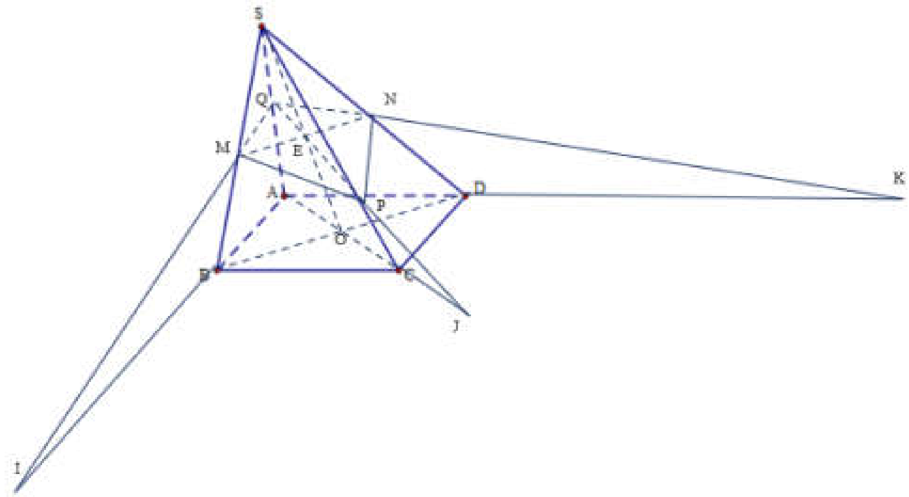


Trong mặt phẳng (SAC), gọi Q là giao điểm của EP và SA.

Do $EP \subset (MNP)$ nên $Q \in (MNP)$

Vậy Q là giao điểm của SA và (MNP)

c)



Ta có: I và K là điểm chung của hai mặt phẳng (QMN) và $(ABCD)$. Nên IK là giao tuyến của $(MNPQ)$ và $(ABCD)$

Ta có $J \in QP, QO \subset (MNPQ)$ nên $J \in (MNPQ)$

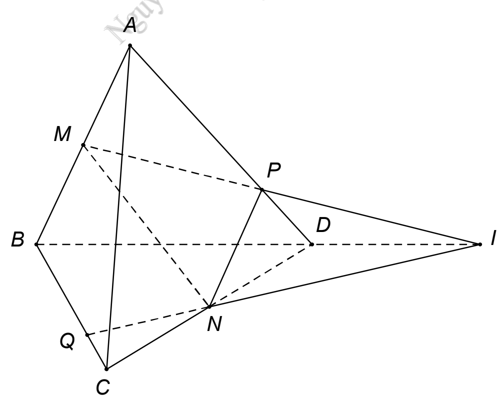
$J \in AC, AC \subset (ABCD)$ nên $J \in (ABCD)$

Do đó J là giao điểm của $(ABCD)$ và $(MNPQ)$ hay J nằm trên giao tuyến của $(ABCD)$ và $(MNPQ)$

Vậy I, J, K thẳng hàng.

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Chứng minh ba điểm I, B, D thẳng hàng.

Lời giải.



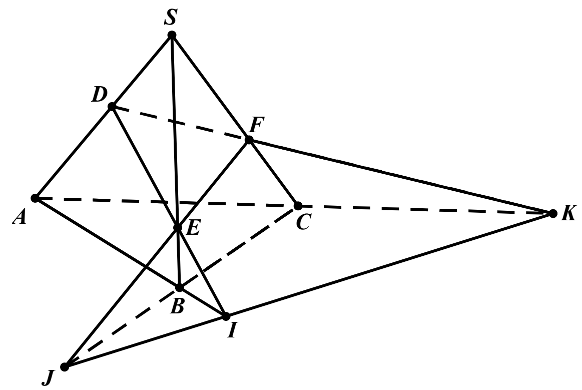
Ta có $(ABD) \cap (BCD) = BD$.

Lại có $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

$\Rightarrow I \in BD \Rightarrow I$, B, D thẳng hàng.

Câu 58. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).

Tương tự:

$$J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases} \quad (2)$$

$$K = DF \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases} \quad (3)$$

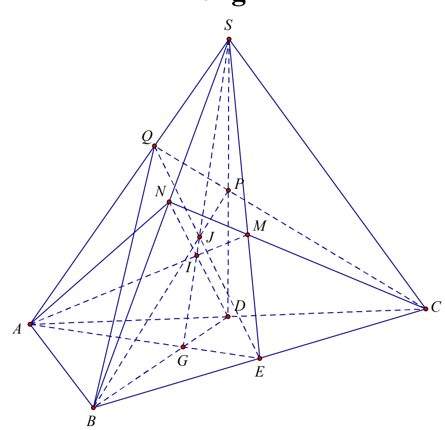
Từ (1),(2) và (3) ta có I, J, K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.

Câu 59. Cho tứ diện $S.ABC$ có D, E lần lượt là trung điểm của AC, BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Một mặt phẳng (β) đi qua BC cắt SD, SA tương ứng tại P và Q.

a) Gọi $I = AM \cap DN, J = BP \cap EQ$. Chứng minh S, I, J, G thẳng hàng.

b) Giả sử $K = AN \cap DM, L = BQ \cap EP$. Chứng minh S, K, L thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có:

$S \in (SAE) \cap (SBD)$, (1)

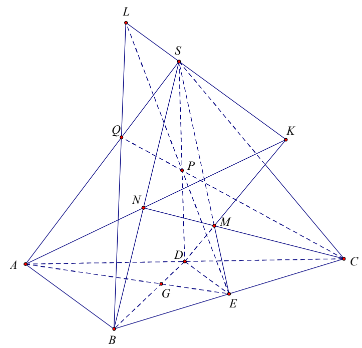
$$G = AE \cap BD \Rightarrow \begin{cases} G \in AE \subset (SAE) \\ G \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \in (SAE) \\ G \in (SBD) \end{cases} \quad (2)$$

$$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in DN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I} \in (\mathrm{SBD}) \\ \mathrm{I} \in (\mathrm{SAE}) \end{cases} \quad (3)$$

$J = BP \cap EQ \Rightarrow \begin{cases} J \in BP \subset (SBD) \\ J \in EQ \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SBD) \\ J \in (SAE) \end{cases} \quad (4)$

Từ (1),(2),(3) và (4) ta có S, I, J, G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAE) nên chúng thẳng hàng.

b)



Ta có:

$S \in (SAB) \cap (SDE)$

$K = AN \cap DM \Rightarrow \begin{cases} K \in AN \subset (SAB) \\ K \in DM \subset (SDE) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAB) \cap (SDE)$

$L = BQ \cap EP \Rightarrow \begin{cases} L \in BQ \subset (SAB) \\ L \in EP \subset (SDE) \end{cases} \Rightarrow L \in (SAB) \cap (SDE)$

Vậy S, K, L là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SDE) nên chúng thẳng hàng.

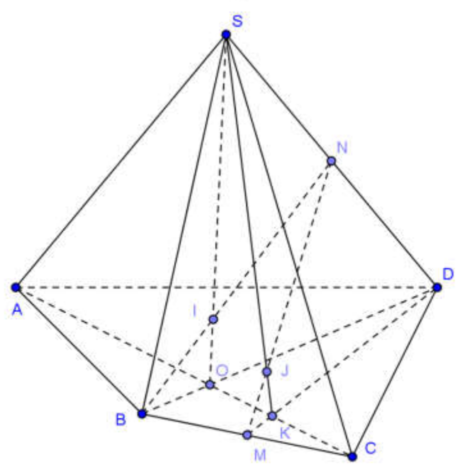
Câu 60. Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm trên BC và SD.

a. Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$.

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$.

c. Chứng minh C, I, J thẳng hàng.

Lời giải:



a. Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$.

Chọn $(SBD) \supset BN$.

Tìm $(SBD) \cap (SAC)$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

$\Rightarrow (SBD) \cap (SAC) = SO$.

Gọi $I = BN \cap SO$.

$\Rightarrow I = BN \cap (SAC)$

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$.

Chọn $(SMD) \supset MN$.

Tìm $(SMD) \cap (SAC)$.

Gọi $K = AC \cap DM$.

$\Rightarrow (SMD) \cap (SAC) = SK$.

Gọi $J = MN \cap SK$.

$\Rightarrow J = MN \cap (SAC)$

c. Chứng minh C, I, J thẳng hàng.

Ta có C, I, J là điểm chung của hai mặt phẳng (BNC) và (SAC).

Vậy C, I, J thẳng hàng.

Câu 61. Cho mặt phẳng (P) và điểm A, B, C không thẳng hàng và ở ngoài (P). Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt (P) tại các điểm D, E, F. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

Lời giải:

Do A, B, C không thẳng hàng nên tạo thành một mặt phẳng (ABC).

$D = BC \cap (P) \Rightarrow D \in (ABC) \cap (P)$.

$E = CA \cap (P) \Rightarrow E \in (ABC) \cap (P)$

$F = AB \cap (P) \Rightarrow F \in (ABC) \cap (P)$

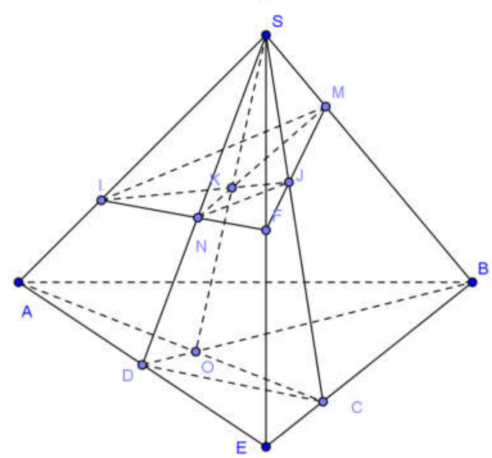
Suy ra minh D, E, F thẳng hàng vì chúng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (P).

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA, SC với $SI > IA$ và $SJ < JC$. Một mặt phẳng (P) quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N.

a. Chứng minh rằng IJ, MN, SO đồng quy ($O = AC \cap BD$). Suy ra cách dựng điểm N khi biết M.

b. AD cắt BC tại E, IN cắt JM tại F. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

Lời giải:



a. Tìm $(SO) \cap (P) = ?$

Phương án 1:

$SO \subset (SAC)$

$(SAC) \cap (P) = IJ$

$SO \cap IJ = K \Rightarrow K = SO \cap (P)$.

Phương án 2:

$SO \subset (SBD)$

$(SBD) \cap (P) = MN$.

$SO \cap MN = K' \Rightarrow K' = SO \cap (P)$.

Do K, K' đều là giao điểm của SO và (P) nên $K \equiv K'$.

Cách dựng N.

Gọi $K = IJ \cap SO$.

Lấy M bất kỳ trên SB. Nối MK cắt SD tại 1 điểm thì đó là điểm N cần dựng.

b. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

$E = AD \cap BC \Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$

$F = IN \cap MJ \Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$

$S \in (SAD) \cap (SBC)$

Suy ra S, E, F thẳng hàng.

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên SA, SB, SC lấy các điểm M, N, P. Gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của MN với AB, NP với BC, MP với AC. Chứng minh E, F, K thẳng hàng.

Lời giải:

$E = MN \cap AB \Rightarrow E \in (MNP) \cap (ABC)$

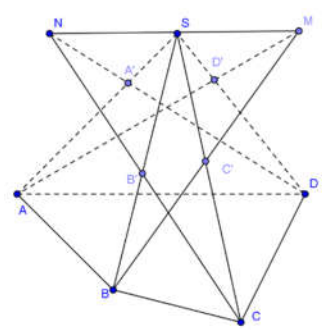
$F = NP \cap BC \Rightarrow F \in (MNP) \cap (ABC)$

$K = MP \cap AC \Rightarrow K \in (MNP) \cap (ABC)$

E, F, K thẳng hàng do chúng cùng thuộc $(MNP) \cap (ABC)$.

Câu 64. Trong mặt phẳng (P) cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Giả sử C', D' là các điểm trên SC, SD sao cho đường thẳng AD' và BC' cắt nhau tại M. Giả sử A', B' là hai điểm trên SA, SB sao cho DA' và CB' cắt nhau tại N. Chứng minh M, N, S thẳng hàng.

Lời giải:



$SN = (SBC) \cap (SAD)$

$SM = (SBC) \cap (SAD)$

Suy ra $MN = (SBC) \cap (SAD)$

Vậy S, M, N thẳng hàng.

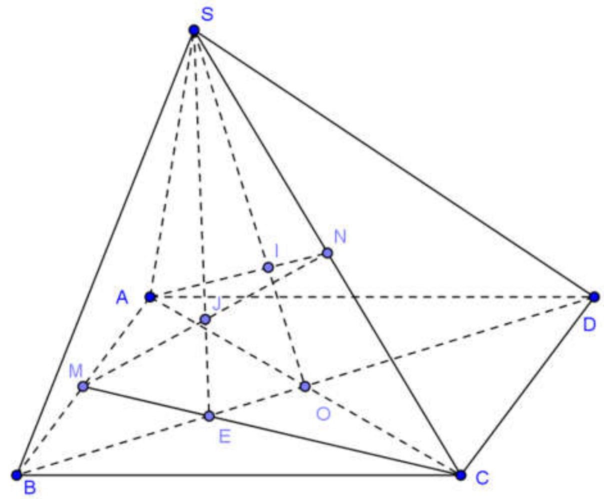
Câu 65. Cho hình bình hành $ABCD$, S là điểm không thuộc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC.

a. Tìm giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.

c. Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

Lời giải:



a. Tìm giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.

Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset AN$.

Tìm giao tuyến $(SAC) \cap (SBD)$.

$(SAC) \cap (SBD) = SO$

Trong mặt phẳng (SAC), gọi $I = AN \cap SO$.

Vậy $I \in AN$, $I \in SO, SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$

Do đó $I = AN \cap (SBD)$

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.

Chọn mặt phẳng phụ $(SMC) \supset MN$.

Tìm $(SMC) \cap (SBD)$.

Ta có S là một điểm chung của (SMC) và (SBD).

Trong $(ABCD)$, gọi $E = MC \cap BD$.

$\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SE$.

Trong (SMC), gọi $J = MN \cap SE$

$J \in MN$

$J \in SE$, mà $SE \subset (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$

Vậy $J = MN \cap (SBD)$.

c. Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

Ta có: $B \in (ABN) \cap (SBD)$.

$I \in SO$, mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$

$I \in AN$, mà $AN \subset (ANB) \Rightarrow I \in (ANB)$

$\Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$

$J \in SE$, mà $SE \subset (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$

$J \in MN$, mà $MN \subset (ANB) \Rightarrow J \in (ANB)$

$\Rightarrow J \in (ABN) \cap (SBD)$

Vậy I, J, B thẳng hàng.

Câu 66. Cho hình chóp $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (LMN) và (ABC).

b. Tìm giao điểm $I = BC \cap (LMN)$ và $J = SC \cap (LMN)$.

c. Chứng minh M, I, J thẳng hàng.

Lời giải:

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (LMN) và (ABC).

Ta có: N là điểm chung của (LMN) và (ABC).

Trong (SAB), LM không song song với AB

Gọi $K = AB \cap LM$

$K \in LM$, mà $LM \subset (LMN) \Rightarrow K \in (LMN)$

$K \in AB$, mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC)$

Vậy $KN = (LMN) \cap (ABC)$

b. Tìm giao điểm $I = BC \cap (LMN)$ và $J = SC \cap (LMN)$.

<u>Tìm giao điểm</u> $I = BC \cap (LMN)$

Chọn mặt phẳng phụ $(ABC) \supset BC$

Tìm giao tuyến $(ABC) \cap (LMN)$.

$(ABC) \cap (LMN) = NK$

Trong (ABC), gọi $I = NK \cap BC$

$I \in BC$

$I \in NK$, mà $NK \subset (LMN) \Rightarrow I \in (LMN)$

Vậy $I = BC \cap (LMN)$

<u>Tìm giao điểm</u> $J = SC \cap (LMN)$

Trong (SAC), LN không song song với SC

Gọi $J = LN \cap SC$

$J \in SC$

$J \in LN$, mà $LN \subset (LMN) \Rightarrow J \in (LMN)$

Vậy $J = SC \cap (LMN)$

c. Chứng minh M, I, J thẳng hàng.

Ta có M, I, J là các điểm chung của hai mặt phẳng (LMN) và (ABC).

Vậy M, I, J thẳng hàng.

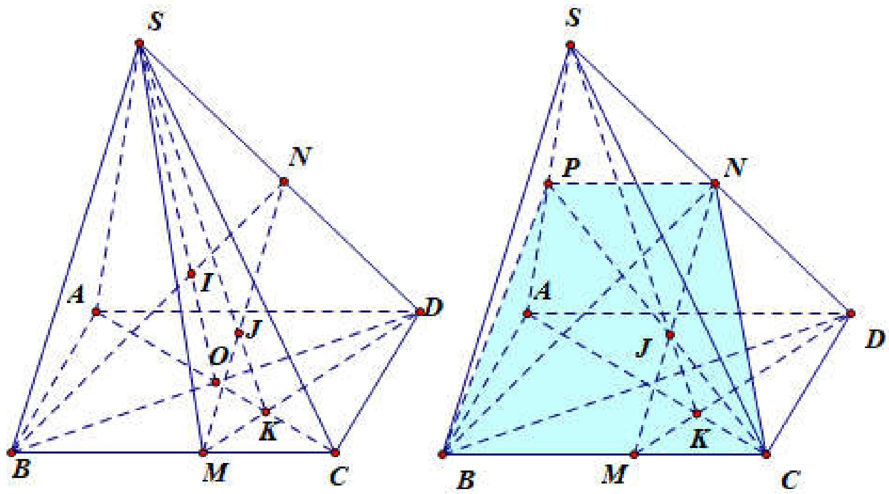
Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a) Tìm giao điểm I của BN và (SAC) và giao điểm J của MN và (SAC).

b) DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (BCN).

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Trong mp(SBD): BN giao SO tại đâu đó chính là điểm I .
Trong mp(ABCD): DM giao AC tại K.
Trong mp(SDM): SK giao MN tại đâu đó chính là điểm J.
b) Dễ thấy 3 điểm S, K, J đều thuộc hai mặt phẳng là $\left(SAC\right)$ *và* $\left(SDM\right)$ nên 3 điểm này thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trên hay chúng thẳng hàng.
c) Trong (SAC): Kẻ CI giao SA tại P. Từ đó thiết diện tạo bởi mp(BNC) với hình chóp là tứ giác BCNP.

DẠNG 6: CHỨNG MINH 3 ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

Muốn chúng minh 3 đường thẳng đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba

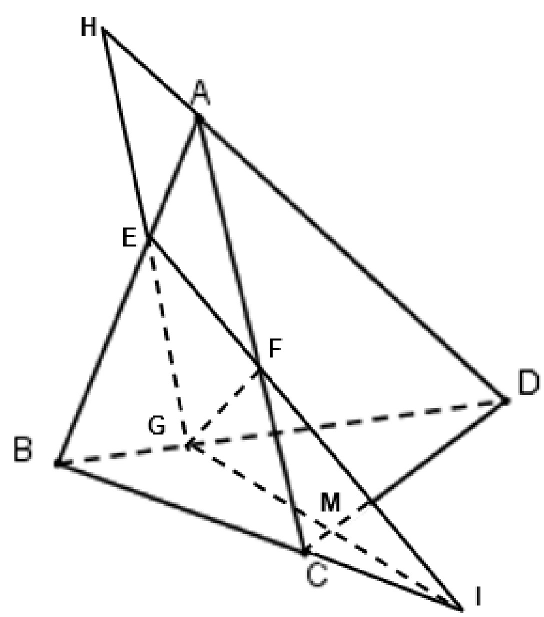
Câu 68. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F,G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB,AC,BD sao cho EF cắt BC tại $I(I \neq C), EG$ cắt AD tại $H(H \neq D)$.

a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và $(BCD);(EFG)$ và (ACD).

b) Chứng minh ba đường thẳng CD,IG,HF cùng đi qua một điểm.

Lời giải

a)



Ta có I và G là hai điểm chung của mặt phẳng (EFG) và (BCD) nên giao tuyến của (EFG) và (BCD) là GI

Gọi M là giao điểm của GI và CD vì $CD \subset (ACD)$ nên $M \in (ACD)$

Ta có M và F là điểm chung của mặt phẳng (EFG) và (ACD) nên giao tuyến của (EFG) và (ACD) là MF

b) Ta có $H \in AD, AD \subset (ACD)$ nên $H \in (ACD)$

$H \in EG; EG \subset (EFG)$ nên $H \in (EFG)$

Suy ra H là giao điểm của (EFG) và (ACD) nên H nằm trên giao tuyến của (EFG) và (ACD):

$H \in FM$

Hay HF đi qua M.

Do đó, CD, IG, HF cùng đi qua điểm M.

Câu 69. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tưng ứng tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh rằng các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

Lời giải

Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.

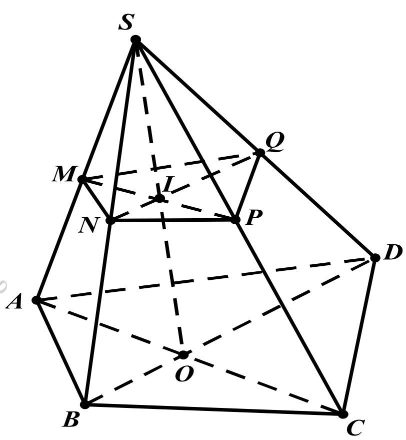
Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$$

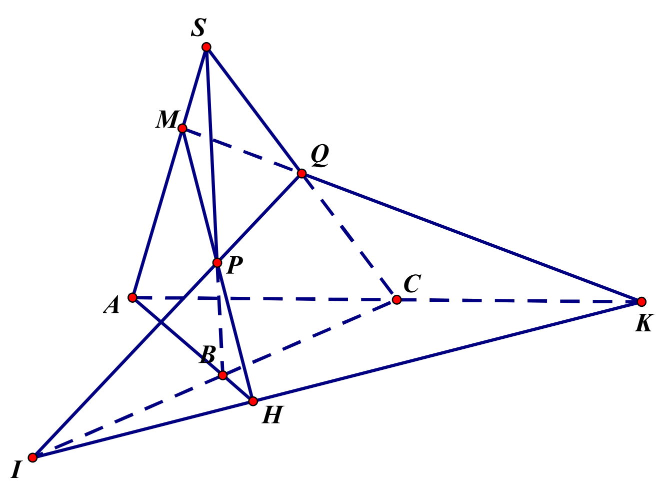
$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$$

Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I.



Câu 70. Chóp $S.ABC$. $M \in SA$ sao cho $MA = 2MS$. $P \in SB$ để $PS = 2PB$. Q là trung điểm SC. Nối $MP \cap AB = H$, $MQ \cap AC = K$. Chứng minh PQ, BC, HK đồng quy.

Lời giải



+) Nối $PQ \cap BC = I$. Ta chứng minh I, H, K thẳng hàng.

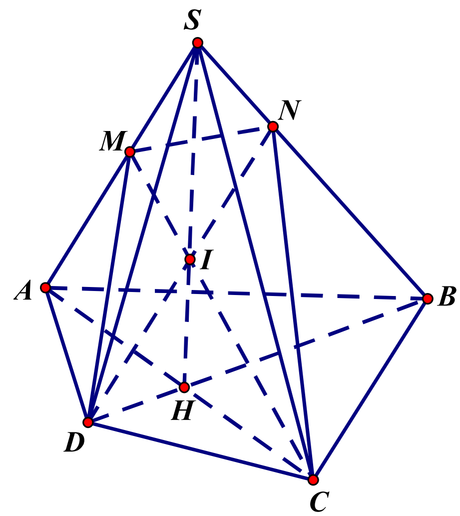
+) $I, H, K \in (MPQ)$ (1)

+) $I, H, K \in (ABC)$ (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow I, H, K$ thẳng hàng $\Rightarrow PQ, BC, HK$ đồng quy tại I.

Câu 71. Chóp $S.ABCD$. $AC \cap BD = H$. Mặt phẳng (P) chứa CD cắt SA, SB tại M, N. Chứng minh CM, DN, SH đồng quy.

Lời giải



Nhận xét: $(P) \equiv (CDMN)$

+) Nối $CM \cap DN = I$. Ta chứng minh S, H, I thẳng hàng.

+) $S, H, I \in (SAC)$ (1)

+) $S, H, I \in (SBD)$ (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow S, H, I$ thẳng hàng $\Rightarrow CM$, DN, SH đồng quy.