BÀI 1. DÃY SỐ

- CHƯƠNG 2. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

Bài toán 1: Cho dãy số (u_n): $u_n = f(n)$ (trong đó $f(n)$ là một biểu thức của n). Hãy tìm số hạng u_k.

\+ **Phương pháp:** Thay trực tiếp $n = k$ vào u_n.

Bài toán 2: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ (với $f(u_n)$ là một biểu thức của u_n). Hãy tìm số hạng u_k.

+**Phương pháp:** Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

Bài toán 3: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

+**Phương pháp:** Tính lần lượt $u_3; u_4; \ldots; u_k$ bằng cách thế u_1, u_2 vào u_3; thế u_2, u_3 vào u_4; …; thế u_{k-2}, u_{k-1} vào u_k.

Bài toán 4: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(\{n, u_n\}) \end{cases}$. Trong đó $f(\{n, u_n\})$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

+**Phương pháp:** Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào u_2; thế $\{2, u_2\}$ vào u_3; …; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào u_k.

Câu 1. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Cho hàm số:

$v: \{1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto v(n) = 2n.$

Tính $v(1), v(2), v(3), v(4), v(5)$.

Lời giải

$v(1) = 2.1 = 2$

$v(2) = 2.2 = 4$

$v(3) = 2.3 = 6$

$v(4) = 2.4 = 8$

$v(5) = 2.5 = 10$

Câu 2. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Cho dãy số:

$u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u_n = n^3.$

a) Hãy cho biết dãy số trên là hữu hạn hay vô hạn.

b) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Lời giải

a) Dãy số trên là dãy số vô hạn

b)

$u_1 = 1^3 = 1$

$u_2 = 2^3 = 8$

$u_3 = 3^3 = 27$

$u_4 = 4^3 = 64$

$u_5 = 5^3 = 125$

Câu 3. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính $1;2;3;4;5$.

a) Viết dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này.

b) Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

Lời giải

a) $s:1;2;3;4;5 \to \mathbb{R}$

$n \mapsto s(n) = \pi.n^2$

b) $s(1) = \pi.1^2 = \pi$

$s(5) = \pi.5^2 = 25\pi$

Câu 4. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Tìm số hạng u_6.

Lời giải

Thế trực tiếp: $u_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] = 8$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

Lời giải

Giả sử $u_n = \frac{167}{84} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

Câu 6. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10}.

Lời giải

$u_2 = \frac{u_1+2}{u_1+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$; $u_3 = \frac{u_2+2}{u_2+1} = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}$; $u_4 = \frac{u_3+2}{u_3+1} = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}$;

$u_5 = \frac{u_4+2}{u_4+1} = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29}$; $u_6 = \frac{u_5+2}{u_5+1} = \frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1} = \frac{99}{70}$; $u_7 = \frac{u_6+2}{u_6+1} = \frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1} = \frac{239}{169}$

$$u_8=\frac{u_7+2}{u_7+1}=\frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1}=\frac{577}{408};\ u_9=\frac{u_8+2}{u_8+1}=\frac{\frac{577}{408}+2}{\frac{577}{408}+1}=\frac{1393}{985};\ u_{10}=\frac{u_9+2}{u_9+1}=\frac{\frac{1393}{985}+2}{\frac{1393}{985}+1}=\frac{3363}{2378}$$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+2\end{cases}$. Tìm số hạng u_{50}.

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$u_1=1$

$u_2=u_1+2$

$u_3=u_2+2$

...

$u_{50}=u_{49}+2$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$u_{50}=1+2.49=99$

Câu 8. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases}u_1=1;u_2=2\\u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n+5\end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

Lời giải

$u_3=2u_2+3u_1+5=12\quad u_4=2u_3+3u_2+5=35\quad u_5=2u_4+3u_3+5=111$

$u_6=2u_5+3u_4+5=332\quad u_7=2u_6+3u_5+5=1002\quad u_8=2u_7+3u_6+5=3005$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases}u_1=0\\u_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}(u_n+1)\end{cases}$. Tìm số hạng u_{11}.

Lời giải

$u_2=\frac{1}{2}(u_1+1)=\frac{1}{2}\quad u_3=\frac{2}{3}(u_2+1)=1\quad u_4=\frac{3}{4}(u_3+1)=\frac{3}{2}\quad u_5=\frac{4}{5}(u_4+1)=2$

$u_6=\frac{5}{6}(u_5+1)=\frac{5}{2}\quad u_7=\frac{6}{7}(u_6+1)=3\quad u_8=\frac{7}{8}(u_7+1)=\frac{7}{2}\quad u_9=\frac{8}{9}(u_8+1)=4$

$u_{10}=\frac{9}{10}(u_9+1)=\frac{9}{2}\quad u_{11}=\frac{10}{11}(u_{10}+1)=5$

Câu 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_{n+1}=u_n+2n\end{cases}$. Tìm số hạng u_{50}.

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$u_1=\frac{1}{2}$

$u_2=u_1+2.2$

$u_3=u_2+2.3$

...

$u_{50}=u_{49}+2.50$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$u_{50}=\frac{1}{2}+2.(2+3+...+50)=\frac{1}{2}+2.\sum_{x=2}^{50}x=2548,5$$

Dạng 2. Xác định công thức của dãy số (un)

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1. Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn và đơn giản biểu thức của u_n

Cách 2. Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức cho u_n

Bước 2. Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp

Câu 11. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}(n\geq 1)$.

a) Chứng minh $u_2=2.3;u_3=2^2\cdot 3;u_4=2^3.3$.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

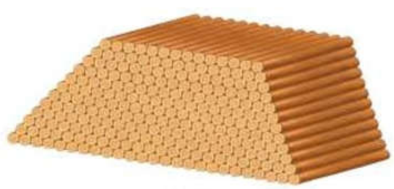
a) $u_2=2\cdot u_1=2.3$

$u_3=2.u_2=2.2.3=2^2.3$

$u_4=2.u_3=2.2^2.3=2^3.3$

b) $u_n=2^{n-1}\cdot 3$

Câu 12. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 1). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:



Hình 1

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n.

b) Viết hệ thức truy hồi.

Lời giải

a) $u_n=13+n$

b) $\begin{cases}u_1=14\\u_n=u_{n-1}+1\end{cases}$

Câu 13. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Tìm u_2,u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số:

$\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}\end{cases}\quad(n\geq 1)$.

Lời giải

$u_2=\frac{1}{2};u_3=\frac{1}{3}$

$u_n=\frac{1}{n}$

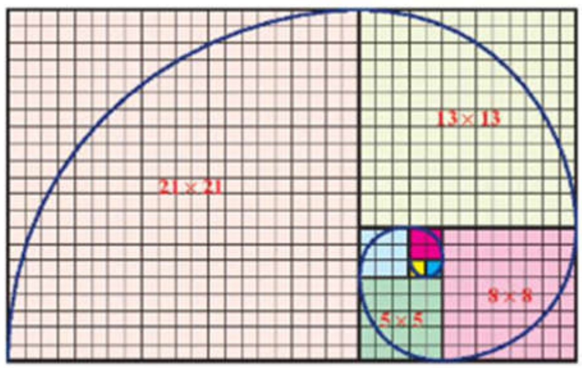
Câu 14. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

Lời giải

$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{4}$

$u_n = \frac{n}{n+1}$

Câu 15. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Hình 3

Lời giải

$u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = 2; u_4 = 3; u_5 = 5; u_6 = 8; u_7 = 13; u_8 = 21$

Ta có dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$

Câu 16. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$

$u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$

$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$

$u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n = 2n+1 \quad \forall n \ge 1(*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh công thức $(*)$ đúng.

Với $n=1; u_1 = 2.1+1=3$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n=1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$. Có nghĩa ta có: $u_k = 2k+1 \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2(k+1)+1 = 2k+3.$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k+1+2 = 2k+3.$

Vậy $(*)$ đúng khi $n=k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 = 2^2$

$u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 = 2^3$

$u_4 = 2u_3 = 2.8 = 16 = 2^4$

$u_5 = 2u_4 = 2.16 = 32 = 2^5$

Từ các số hạng đầu tiên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 2^n \forall n \ge 1(*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh cộng thức $(*)$ đúng.

Với $n=1$, có: $u_1 = 2^1 = 2$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n=1$

Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, có nghĩa ta có: $u_k = 2^k \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2^{k+1}.$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = 2.u_k = 2.2^k = 2^{k+1}.$

Vậy $(*)$ đúng với $n=k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 17. Dãy số (u_n) được xác định bằng cộng thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

Lời giải

a). Ta có: $u_{n+1} = u_n + n^3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n^3.$

Từ đó suy ra:

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

$u_4 - u_3 = 3^3$

....

$u_{n-1}-u_{n-2}=(n-2)^3$

$u_n-u_{n-1}=(n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$u_1+u_2-u_1+u_3-u_2+...+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1}=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3$

$\Leftrightarrow u_n=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3=\dfrac{(n-1)^2.n^2}{4}$

Vậy $u_n=1+\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$

b). $u_{100}=1+\dfrac{100^2.99^2}{4}=24502501$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=2$ và $u_{n+1}=5u_n$ với mọi $n\ge 1$.

a). Hãy tính u_2,u_4 và u_6.

b). Chứng minh rằng $u_n=2.5^{n-1}$ với mọi $n\ge 1$.

Lời giải

a). Ta có:

$u_2=5u_1=5.2=10$.

$u_3=5.u_2=5.10=50$.

$u_4=5.u_3=5.50=250$.

$u_5=5.u_4=5.250=1250$.

$u_6=5.u_5=5.1250=6250$.

b). Ta sẽ chứng minh: $u_n=2.5^{n-1}$ (1) với mọi $n\ge 1$, bằng phương pháp quy nạp

Với $n=1$, ta có: $u_1=2.5^0=2$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k\left(k\in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k=2.5^{k-1}$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$.

Có nghĩa ta phải chứng minh: $u_{k+1}=2.5^k$.

Từ hệ thức xác định dãy số: (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1}=5.u_k=2.5^{k-1}.5=2.5^k$ (đpcm).

Câu 19. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=1$ và $u_{n+1}=u_n+7$ với mọi $n\ge 1$

a) Hãy tính u_2,u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng: $u_n=7n-6$ (1) với mọi $n\ge 1$

Lời giải

a). Ta có:

$u_2=u_1+7=1+7=8$.

$u_3=u_2+7=8+7=15$.

$u_4=u_3+7=15+7=22$.

$u_5=u_4+7=22+7=29$.

$u_6 = u_5 + 7 = 29 + 7 = 36$.

b). Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 7.1 - 6 = 1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k\left(k \in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 7k - 6$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 7(k+1) - 6$.

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = u_k + 7 = (7k - 6) + 7 = 7(k+1) - 6$ (đúng).

Câu 20. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 10$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $u_n = 2.3^n - 5 \quad \forall n \geq 1$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $u_n = 2.3^n - 5 \quad (1)$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 2.3^1 - 1 = 1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k\left(k \in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 2.3^k - 5 \quad (2)$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{n+1} = 2.3^{k+1} - 5$.

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và từ (2) ta có:

$u_{k+1} = 3u_k + 10 = 3.\left(2.3^k - 5\right) + 10 = 2.3^k.3 - 15 + 10 = 2.3^{k+1} - 5$ (đpcm).

Câu 21. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 3, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

a). Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b). Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải

a). Ta có:

$u_2 = \sqrt{1 + u_1^2} = \sqrt{10}$

$u_3 = \sqrt{1 + u_2^2} = \sqrt{11}$

$u_4 = \sqrt{1 + u_3^2} = \sqrt{12}$

$u_5 = \sqrt{1 + u_4^2} = \sqrt{13}$

b). Ta có: $u_1 = \sqrt{1+8}, u_2 = \sqrt{2+8}, u_3 = \sqrt{3+8}, u_4 = \sqrt{4+8}, u_5 = \sqrt{5+8}$.

Ta dự đoán $u_n = \sqrt{n+8} \quad (1)$

Với $n = 1$, có: $u_1 = \sqrt{1+8} = 3$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$, có nghĩa ta có: $u_k = \sqrt{k+8} \quad (2)$

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = \sqrt{k+9}$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{k+8})^2} = \sqrt{k+9}$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 22. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ b). $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

Lời giải

a). Ta có:

$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.\ u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$u_4 = \frac{u_3}{1+u_3} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.\ u_5 = \frac{u_4}{1+u_4} = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}.$$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1. (*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k$. Nghĩa là ta có: $u_k = \frac{1}{k}$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n = k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{k+1}.$$

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n = k+1$, suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). Ta có :

$u_2 = u_1 + 3 = 2 = 3.2 - 4$

$u_3 = u_2 + 3 = 5 = 3.3 - 4$

$u_4 = u_3 + 3 = 8 = 3.4 - 4$

$u_5 = u_4 + 3 = 11 = 3.5 - 4$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 3n - 4, \forall n \geq 1. (*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k$. Nghĩa là ta có: $u_k = 3k - 4$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n = k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1} = 3(k+1) - 4$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3 = 3(k+1) - 4$

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n = k+1$, suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;

2. Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$;

Lời giải.

1. Ta có 5 số hạng đầu của dãy là:

$u_1 = 1$; $u_2 = 2u_1 + 3 = 5$; $u_3 = 2u_2 + 3 = 13$; $u_4 = 2u_3 + 3 = 29$

$u_5 = 2u_4 + 3 = 61$.

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

* Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1 \Rightarrow$ bài toán đúng với $N = 1$

* Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$

Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có:

$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$ đpcm.

Câu 24. Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định như sau $u_1 = 3, v_1 = 2$ và $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n.v_n \end{cases}$ với $n \geq 2$.

1. Chứng minh: $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ và $u_n - \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$ với $\forall n \geq 1$;

2. Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

Lời giải.

1. Ta chứng minh bài toán theo quy nạp

a) Chứng minh: $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ (1)

- Ta có $u_1^2 - 2v_1^2 = 3^2 - 2.2^2 = 1$ nên (1) đúng với $n = 1$
- Giả sử $u_k^2 - 2v_k^2 = 1$, khi đó ta có:

$u_{k+1}^2 - 2v_{k+1}^2 = \left(u_k^2 + 2v_k^2\right)^2 - 2\left(2u_k v_k\right) = \left(u_k^2 - 2v_k^2\right)^2 = 1$

Từ đó suy ra (1) đúng với $\forall n \geq 1$.

b) Chứng minh $u_n - \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$ (2)

Ta có: $u_n - \sqrt{2}v_n = u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1} = \left(u_{n-1} - \sqrt{2}v_{n-1}\right)^2$

- Ta có: $u_1 - \sqrt{2}v_1 = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$ nên (2) đúng với $n = 1$
- Giả sử $u_k - \sqrt{2}v_k = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^k}$, ta có:

$$u_{k+1} - \sqrt{2}v_{k+1} = \left(u_k - \sqrt{2}v_k\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^{k+1}}$$

Vậy (2) đúng với $\forall n \geq 1$.

2. Theo kết quả bài trên và đề bài ta có: $u_n + \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n}$

Do đó ta suy ra $\begin{cases} 2u_n = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n} \\ 2\sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n} \end{cases}$

Hay $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$.

Dạng 3: Xét tính tăng, giảm của dãy số

Cách 1: Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$)

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số**

Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ tăng khi $a > 0$ và giảm khi $a < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$

- Không tăng, không giảm khi $q < 0$
- Giảm khi $0 < q < 1$
- Tăng khi $q > 1$

Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn + d > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Tăng khi $ad - bc > 0$
- Giảm khi $ad - bc < 0$

Dãy số đan dấu cũng là dãy số không tăng, không giảm

Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $\left(q^n.u_n\right)$ (với $q < 0$) không tăng, không giảm

Dãy số (u_n) có $u_{n+1} = au_n + b$ tăng nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$; giảm nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$ và không tăng không giảm nếu $a < 0$

Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ tăng nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$ và giảm nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$

Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ không tăng không giảm nếu $ad - bc < 0$

Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow\\(v_n)\uparrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\uparrow$	Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow\\(v_n)\downarrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\downarrow$
Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow; u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\(v_n)\uparrow; v_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\uparrow$	Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow; u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\(v_n)\downarrow; v_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\downarrow$
Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\uparrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\uparrow\ \forall m\in\mathbb{N}^*$	Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\downarrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\downarrow\ \forall m\in\mathbb{N}^*$
Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\downarrow$	Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\uparrow$

Câu 25. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) (u_n) với $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$;

b) (x_n) với $x_n=\dfrac{n+2}{4^n}$;

c) (t_n) với $t_n=(-1)^n\cdot n^2$.

Lời giải

a) Ta có: $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}=2-\dfrac{3}{n+1}<u_{n+1}=2-\dfrac{3}{n+2}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng

b) Ta nhận thấy các số hạng của dã (x_n) đều là số dương. Ta lập tỉ số hai số hạng liên tiếp của dãy: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\dfrac{n+1+1}{4^{n+1}}}{\dfrac{n+1}{4^n}}=\dfrac{n+2}{4.(n+1)}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$

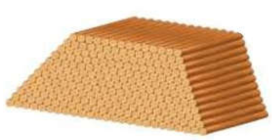
Suy ra $x_{n+1}<x_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy (x_n) là dãy số giảm

c) Ta có: $t_1=-1; t_2=4; t_3=-9$. Suy ra $t_1<t_2, t_2>t_3$.

Vậy (t_n) không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm

Câu 26. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 2).



Hình 2

a) Gọi $u_1=25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

b) Gọi $v_1=14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

Lời giải

a) Ta có: $u_n=26-n>u_{n+1}=26-n-1=25-n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm

b) Ta có: $v_n=13+n<v_{n+1}=13+n+1=14+n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng

Câu 27. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Xét tính tăng, giảm của dãy số (y_n) với $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Lời giải

Ta có:

$$y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_{n+1} < y_n$

Vậy dãy số (y_n) là dãy số giảm

Câu 28. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để:

a) (u_n) là dãy số tăng;

b) (u_n) là dãy số giảm.

Lời giải

a) (u_n) là dãy số tăng khi $\forall x \in \mathbb{N}^*$ thì: $u_{n+1} > u_n$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)a+2}{n+1+1} > \frac{na+2}{n+1}; \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{2-a}{n+2} > a + \frac{2-a}{n+1}; \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-a}{n+2} > \frac{2-a}{n+1}; \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow 2 - a < 0$$

$$\Leftrightarrow a > 2$$

b) (u_n) là dãy số giảm khi $\forall x \in \mathbb{N}^*$ thì: $u_{n+1} < u_n$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)a+2}{n+1+1} < \frac{na+2}{n+1}; \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{2-a}{n+2} < a + \frac{2-a}{n+1}; \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-a}{n+2} < \frac{2-a}{n+1}; \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow 2 - a > 0$$

$$\Leftrightarrow a < 2$$

Câu 29. Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

1). Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$

2). Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

3). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

4). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

5). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$

6). Dãy số (u_n): Với $u_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$

7). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$

8). Dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

9). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$

Lời giải

1). Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1\right] - \left(2n^3 - 5n + 1\right)$

$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 - 1 - 2n^3 + 5n - 1$

$= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + (3n - 3) > 0$ (đúng) do $n \geq 1$.

Vì thế dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

2). Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[3^{n+1} - (n+1)\right] - \left(3^n - n\right)$.

$= 3.3^n - n - 1 - 3^n + n$

$= 2.3^n + 3^n - 3^n - 1 = 2.3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \geq 1$.)

Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

3). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n\left[(n+1)^2 + 1\right]}{\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2 + 1)}$$

$$= \frac{n^3 + n + n^2 + 1 - (n^3 + 2n^2 + 2n)}{\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2 + 1)} = \frac{-n^2 - n + 1}{\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2 + 1)} < 0.$$

Vì $-n^2 - n + 1 < 0 \quad \forall n \geq 1$, và $\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2 + 1) > 0 \quad \forall n \geq 1$.

Kết luận: dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

4). Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

Dễ thấy $u_n > 0 \quad \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

Ta có: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n} . \dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \geq 1)$

Thật vậy: $\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{4n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow 4n > n + 1 \Leftrightarrow 3n > 1$ (đúng $\forall n \geq 1$)

Kết luận: (u_n) là một dãy số giảm.

5). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3^n}{n^2}$

Dễ thấy $u_n>0\quad \forall n\in N^*$. Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{3^n}{n^2}.\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Nếu $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2>1\Leftrightarrow\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2>3$

$$\Leftrightarrow\frac{n+1}{n}>\sqrt{3}\Leftrightarrow n+1>\sqrt{3}.n\Leftrightarrow\sqrt{3}.n-n<1$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)n<1\Leftrightarrow n<\frac{1}{\sqrt{3}-1}\Rightarrow n=1$$

Nếu $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2<1\Leftrightarrow\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2<3\Leftrightarrow\dfrac{n+1}{n}<\sqrt{3}\Leftrightarrow n+1<\sqrt{3}.n\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)n>1$

$$\Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow n>2.$$

6). Dãy số (u_n): Với $u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$

Ta có: $u_n=3n-5+\dfrac{6}{n+1}$

Với mọi $n\in N^*$ ta có:

$$u_{n+1}-u_n=\left[3(n+1)-5+\frac{6}{n+2}\right]-\left(3n-5+\frac{6}{n+1}\right)=3+\frac{6}{n+2}-\frac{6}{n+1}$$

$$=3\left[\frac{(n+1)(n+2)+2(n+1)-2(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right]=\frac{3\left(n^2+3n\right)}{(n+2)(n+1)}>0.\quad\forall n\ge 1.$$

Kết luận (u_n) là dãy số tăng.

7). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$

Với mọi $n\in N^*$, xét hiệu số:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}+\frac{n+1+\frac{3}{2}}{2(n+1)^2+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}\right)=\frac{n+\frac{5}{2}}{2n^2+2n+3}-\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$$

$$=\frac{\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(2n^2+1\right)-\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(2n^2+2n+3\right)}{\left(2n^2+2n+3\right)\left(2n^2+1\right)}=\frac{-5n-2}{\left(2n^2+2n+3\right)\left(2n^2+1\right)}<0\quad\forall n\ge 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

8). Dãy số (u_n) với $u_n=n-\sqrt{n^2-1}$

Ta có: $u_n=n-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{n^2-\left(n^2-1\right)}{n+\sqrt{n^2-1}}=\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$

Dễ dàng ta có: $(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}>n+\sqrt{n^2-1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}}<\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} \Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$

Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số giảm.

9). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

Ta có: $u_n=\dfrac{(n+1)-1}{n\left(\sqrt{n+1}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Dễ dàng ta có: $\sqrt{(n+1)+1}+1>\sqrt{n+1}+1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)+1}+1}<\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1} \Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 30. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

a). $\begin{cases} u_2=2 \\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}, \forall n\in N^* \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{3+u_n} \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_2=2 \\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}, \forall n\in N^* \end{cases}$

Vì $u_2=\sqrt{2u_1+3}=\sqrt{7}>u_1$, ta dự đoán $u_{n+1}>u_n\ (*)$ với mọi $n\ge 1$.

Ta có $(*)$ đúng với $n=1$.

Giả sử ta có: $u_k>u_{k-1}$. Khi đó ta có:

$u_{k+1}=\sqrt{2u_k+3}>\sqrt{2u_{k-1}+3}=u_k$ (do $u_k>u_{k-1}$)

Suy ra $(*)$ đúng với mọi $n\in N^*$, suy ra (u_n) là dãy số tăng.

b). $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{3+u_n} \end{cases}$

Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n>0$ với mọi $n\in N^*$

Ta có: $u_2=\dfrac{2u_1}{3+u_1}=\dfrac{6}{6}=1<u_1$.

Ta dự đoán $u_{n+1}<u_n\ (**)$ với mọi $n\in N^*$.

Ta có $(**)$ đúng khi $n=1$. Giả sử có $u_k<u_{k-1}$

Khi đó $u_{k+1}=\dfrac{2u_k}{3+u_k}=\dfrac{2u_k+6-6}{3+u_k}=2-\dfrac{6}{u_k+3}$.

Vì $u_k<u_{k-1}$ nên $\dfrac{6}{u_k+3}>\dfrac{6}{u_{k-1}+3} \Rightarrow u_{k+1}<2-\dfrac{6}{u_{k-1}+3}=u_k$.

Suy ra $(**)$ đúng với mọi $n\in N^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Chứng minh dãy số tăng.

Lời giải

a)Ta có: $u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3n - 2$. Từ đó suy ra:

$u_1 = 5.$

$u_2 - u_1 = 3.1 - 2.$

$u_3 - u_2 = 3.2 - 2.$

$u_4 - u_3 = 3.3 - 2.$

....

$u_{n-1} - u_{n-2} = 3(n-2) - 2.$

$u_n - u_{n-1} = 3(n-1) - 2.$

Cộng từng vế của n đẳng thức trên và rút gọn, ta được:

$u_n = 5 + 3[1 + 2 + 3 + ... + (n-1)] - 2(n-1).$

$\Leftrightarrow u_n = 5 + \frac{3(n-1).n}{2} - 2(n-1) = 5 + \frac{3(n-1).n - 4(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow u_n = 5 + \frac{(n-1)(3n-4)}{2}$

Vậy: $u_n = 5 + \frac{(n-1)(3n-4)}{2}$.

b) Ta có: $u_{n+1} - u_n = 3n - 2 > 0 \quad \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq 1$. Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

Câu 32. Cho dãy số (a_n) định bởi: $\begin{cases} 0 < a_n < 1; \forall n \in N^* \\ a_{n+1}(1 - a_n) \geq \frac{1}{4}; \forall n \in N^* \end{cases}$

a). Chứng minh: $a_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n \in N^* (1)$

b). Xét tính đơn điệu của dãy số (a_n).

Lời giải

a). Ta có: $0 < a_n < 1 \Rightarrow a_1 > 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.1} : (1)$ đúng khi n=1

Giả sử (1) đúng khi n=k$\in N^*$, nghĩa là: $a_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}; k \in N^*$

Ta cần chứng minh (1) đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là chứng minh: $a_{k+1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}; k \in N^*$

Ta có: $a_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

$\Rightarrow -a_k < -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2k} \Rightarrow 1 - a_k < 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2k} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2k} = \dfrac{k+1}{2k} \Rightarrow \dfrac{1}{1-a_k} > \dfrac{2k}{k+1}$

Theo giả thiết: $a_{k+1}(1-a_k) \geq \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow a_{k+1} \geq \dfrac{1}{4(1-a_k)} > \dfrac{2k}{4(k+1)} = \dfrac{(2k+2)-2}{4(k+1)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(k+1)} : (1)$ đúng khi $n = k+1$

Vậy: $a_n > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}, \forall n \in N^*$.

b). Ta có: $a_n^2 - a_n + \dfrac{1}{4} = \left(a_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a_n(a_n - 1) + \dfrac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \geq a_n(1-a_n)$

Từ giả thiết suy ra: $a_{n+1}(1-a_n) \geq \dfrac{1}{4} \geq a_n(1-a_n) \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n; \forall n \in N^*$

Vậy: (a_n) tăng.

Câu 33. Cho $a > 2$. Xét dãy (U_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a^2 \\ u_{n+1} = (u_n - a)^2 \ \forall n \in N^* \end{cases}$. Xét tính đơn điệu của dãy (U_n)

Lời giải

Ta có $u_1 = a^2 > 2a$ (do $a > 2$)

Giả sử $u_k > 2a$ khi đó $u_k - a > a \Rightarrow u_{k+1} = (u_k - a)^2 > a^2 > 2a$. Vậy $u_n > 2a; \forall n \in N^*$

$u_{n+1} - u_n = (u_n - a)^2 - u_n = u_n^2 - (2a+1)u_n + a^2$

$= (u_n - 2a)(u_n - 1) + (a^2 - 2a) > 0; \forall n \in N^* \Rightarrow (u_n)$ đơn điệu tăng.

Câu 34. Cho dãy số (u_n) định bởi: $u_n = \dfrac{a.n^4 + 2}{2n^4 + 5}; n \in N^*$. Định a để dãy số (u_n) tăng.

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{a.n^4 + 2}{2n^4 + 5} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{4-5a}{2(2n^4+3)}; n \in N^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2\left[2(n+1)^4 + 5\right]} - \frac{4-5a}{2\left[2n^4+5\right]} = \frac{4-5a}{2}\left[\frac{1}{2(n+1)^4+5} - \frac{1}{2n^4+5}\right]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2} \frac{2n^4 + 5 - 2(n+1)^4 - 5}{\left[2(n+1)^4+5\right]\left[2(n+1)^4+5\right]}$$

$$= (4-5a)\frac{n^4 - (n+1)^4}{\left[2(n+1)^4+5\right]\left[2(n+1)^4+5\right]}$$

Mà: $\dfrac{n^4-(n+1)^4}{\left[2(n+1)^4+5\right]\left[2(n+1)^4+5\right]}<0;\forall n\in N*$

Nên: (u_n) tăng $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0;\forall n\in N*\Leftrightarrow 4-5a<0\Leftrightarrow a>\dfrac{4}{5}$

Dạng 4: Xét tính bị chặn của dãy số

Phương pháp 1: Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: Dãy số (u_n) có $u_n=f(n)$ là hàm số đơn giản.

Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $u_n=f(n)\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$ hoặc $u_n=f(n)\ge m,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Cách 2: Dãy số (u_n) có $u_n=v_1+v_2+...+v_k+...+v_n$ (tổng hữu hạn)

Ta làm trội $v_k\le a_k-a_{k+1}$

Lúc đó $u_n\le(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+...(a_n-a_{n+1})$

Suy ra $u_n\le a_1-a_{n+1}\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Cách 3: Dãy số (u_n) có $u_n=v_1.v_2v_3...v_n$ với $v_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ (tích hữu hạn)

Ta làm trội $v_k\le\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

Lúc đó $u_n\le\dfrac{a_2}{a_1}.\dfrac{a_3}{a_2}...\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Suy ra $u_n\le\dfrac{a_{n+1}}{a_1}\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Phương pháp 2: Dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh

Chú ý: ***Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên, dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới***

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số bị chặn**

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n$ $\left(|q|\le 1\right)$ bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n$ $(q<-1)$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n$ với $q>1$ bị chặn dưới

Dãy số (u_n) có $u_n=an+b$ bị chặn dưới nếu $a>0$ và bị chặn trên nếu $a<0$

Dãy số (u_n) có $u_n=an^2+bn+c$ bị chặn dưới nếu $a>0$ và bị chặn trên nếu $a<0$

Dãy số (u_n) có $u_n=a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1n+a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m>0$ và bị chặn trên nếu $a_m<0$

Dãy số (u_n) có $u_n=q^n\left(a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1n+a_0\right)$ với $a_m\ne 0$ và $q<-1$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n=\sqrt{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1n+a_0}$ bị chặn dưới với $a_m>0$

Dãy số (u_n) có $u_n=\sqrt[3]{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1n+a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m>0$ và bị chặn trên nếu $a_m<0$

Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$

Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$

Câu 35. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải

a) Ta có:

$a_n = \cos\dfrac{\pi}{n} \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) bị chặn trên. $a_n = \cos\dfrac{\pi}{n} \ge -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) bị chặn dưới.

Suy ra, dãy số (a_n) bị chặn.

b) Ta có:

$b_n = \dfrac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) bị chặn trên. $b_n = \dfrac{n}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) bị chặn dưới.

Suy ra, dãy số (b_n) bị chặn.

Câu 36. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \sin^2\dfrac{n\pi}{3} + \cos\dfrac{n\pi}{4}$

b) (u_n) với $u_n = \dfrac{6n-4}{n+2}$.

Lời giải

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, Ta có:

$0 \le \sin^2\dfrac{n\pi}{3} \le 1$

$-1 \le \cos\dfrac{n\pi}{4} \le 1$

Suy ra $-1 \le a_n \le 2$

Vậy dãy số (a_n) bị chặn

b) $u_n = \dfrac{6n-4}{n+2} = 6 - \dfrac{16}{n+2}$

$u_n < 6, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) bị chặn trên

$u_n > -2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới

Suy ra, dãy số (u_n) bị chặn

Câu 37. **(SGK_CTST 11-Tập 1)** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Lời giải

$u_n = \dfrac{2n-1}{n+1} = 2 - \dfrac{3}{n+1}$

Ta có $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=2-\dfrac{3}{n+2}>u_n=2-\dfrac{3}{n+1}$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng

$u_n=2-\dfrac{3}{n+1}>-1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới $u_n=2-\dfrac{3}{n+1}<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn trên

Suy ra dãy số (u_n) bị chặn

Câu 38. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) $u_n=\dfrac{1}{2n^2-1}$. **b)** $u_n=3.\cos\dfrac{nx}{3}$. **c)** $u_n=2n^3+1$.

d) $u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$. **e)** $u_n=n+\dfrac{1}{n}$.

Lời giải

a) $u_n=\dfrac{1}{2n^2-1}$ Có $2n^2-1\ge 1\Rightarrow u_n=\dfrac{1}{2n^2-1}\le 1,\ \forall n\ge 1$. Vậy dãy số bị chặn trên bởi 1.

b) $u_n=3.\cos\dfrac{nx}{3}$ có $-1\le\cos\dfrac{nx}{3}\le 1\Rightarrow -3\le 3.\cos\dfrac{nx}{3}\le 3$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi -3; chặn trên bởi 3.

c) $u_n=2n^3+1$ có $2n^3+1\ge 3,\ \forall n\ge 1$. Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 3.

d) $u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ có $u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}=1+\dfrac{n-1}{n^2+n+1}\ge 1,\ \forall n\ge 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 1.

e) $u_n=n+\dfrac{1}{n}$ có $u_n=n+\dfrac{1}{n}\ge 2\sqrt{n.\dfrac{1}{n}}=2,\ \forall n>0$. Vậy dãy số bị chặn bởi 2.

Câu 39. Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số: $u_n=\dfrac{2n-1}{n+3};n\in N*$

Lời giải

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2n+1}{n+4}-\dfrac{2n-1}{n+3}=\dfrac{2n^2+7n+3-2n^2-7n+4}{(n+4)(n+3)}=\dfrac{7}{(n+4)(n+3)}>0;\forall n\in N*$

Vậy: (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n=\dfrac{2n-1}{n+3}=\dfrac{2(n+3)-7}{n+3}=2-\dfrac{7}{n+3}$, suy ra:

$\forall n\in\mathbb{N}*, u_n<2$ nên (u_n) bị chặn trên. Vì (u_n) là dãy số tăng $\forall n\in\mathbb{N}*, u_1=\dfrac{1}{4}\le u_n$ Nên (u_n) bị chặn dưới. Vậy (u_n) bị chặn.

Câu 40. Cho dãy số (u_n) với $u_n=1+(n-1).2^n$

a). Viết 5 số hạng đầu của dãy số.

b). Tìm công thức truy hồi.

c). Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

Lời giải

a).Ta có:

$u_1 = 1 + (1-1).2^1 = 1$

$u_2 = 1 + (2-1).2^2 = 5$

$u_3 = 1 + (3-1).2^3 = 17$

$u_4 = 1 + (4-1).2^4 = 49$

$u_5 = 1 + (5-1).2^5 = 129$

b). Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = 1 + n.2^{n+1} - \left(1 + (n+1).2^n\right)$

$= 2n.2^n - (n-1).2^n = (2n - n + 1).2^n = (n+1).2^n \Rightarrow u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n$.

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

c). Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n > 0 \quad \forall n \geq 1$. Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $u_n = 1 + (n-1).2^n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$. Kết luận (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}, \ n \geq 1, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

2) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

1) Ta có $u_1 = 2; \ u_2 = \dfrac{4}{3} > 1$.

Giả sử $u_k > 1, \ k \geq 2$ (giả thiết quy nạp)

Ta sẽ chứng minh $u_{k+1} > 1 \quad (*)$

Theo công thức truy hồi $(*) \Leftrightarrow \dfrac{u_k^2}{2u_k - 1} > 1 \Leftrightarrow u_k^2 > 2u_k - 1$ vì ($2u_k - 1 > 0$)

$\Leftrightarrow u_k^2 - 2u_k + 1 > 0 \Leftrightarrow (u_k - 1)^2 > 0$ đúng (vì $u_k > 1$)

Vậy $u_n > 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn dưới.

+) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \dfrac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} < 0$ (vì $u_k > 1$) $\Rightarrow (u_n)$ giảm

$\Rightarrow 2 = u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > \ldots \Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

2) Từ $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1} \Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{u_n^2} = -\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{2}{u_n} + 1\right) = -\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)^2$.

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ và $v_{n+1} = -v_n^2$.

Từ đó suy ra $v_1 = -2^{-1}$; $v_2 = -2^{-2}$; $v_3 = -2^{-4}$; $v_4 = -2^{-8}$.

Giả sử $v_n = -2^{-2^{n-1}}$, $n \geq 4$ (giả thiết quy nạp).

$\Rightarrow v_{n+1} = -\left(2^{-2^{n-1}}\right)^2 = -2^{-2^n}$. Do đó $v_n = -2^{-2^n}$, $\forall n$

Mà $v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1+v_n} = \frac{1}{1-2^{-2^{n-1}}} = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1}$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1}$.

Câu 42. Chứng minh rằng dãy số (u_n), với $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải

Công thức u_n được viết lại: $u_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)}$ (1)

Dễ thấy $\forall n \geq 1$ ta có: $-1 \leq \frac{1}{2n^2-3} \leq \frac{1}{5}$. Do đó từ (1) suy ra $-2 \leq u_n \leq 1$ $(\forall n \geq 1)$

Từ đó suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Câu 43. Chứng minh dãy số (u_n), với $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Lời giải

Công thức u_n được viết lại: $u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)}$

Xét hiệu số: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{7}{5} - \frac{24}{5[5(n+1)+7]}\right) - \left(\frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)}\right)$

$= \frac{24}{5}\left(\frac{1}{5n+7} - \frac{1}{5(n+1)+7}\right) > 0$ $\forall n \geq 1$. $\Rightarrow u_{n+1} > u_n$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $0 < \frac{1}{5n+7} \leq \frac{1}{12}$ $\forall n \geq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{24}{5(5n+7)} \geq -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{7}{5} > \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \geq \frac{7}{5} - \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 1 \leq u_n < \frac{7}{5}$. Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Kết luận (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

a). Viết công thức truy hồi của dãy số.
b). Chứng minh dãy số bị chặn dưới.
c). Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Lời giải

a).Ta có: $u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 = 0$.

Xét hiệu: $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-4(n+1)+3\right]-\left(n^2-4n+3\right)=2n-3 \Rightarrow u_{n+1}=u_n+2n-3$.

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1=0 \\ u_{n+1}=u_n+2n-3 \end{cases} \quad \forall n\ge 1$.

b). Ta có: $u_n=n^2-4n+4-1=(n-2)^2-1\ge -1 \quad \forall n\ge 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên.

c). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} u_1=1^2-4.1+3 \\ u_2=2^2-4.2+3 \\ u_3=3^2-4.2+3 \\ \ldots \\ u_n=n^2-4.n+3 \end{array}\right\}+$$

$$S_n=\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)-4\left(1+2+3+\ldots+n\right)+3n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+3n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)-12n(n+1)+18n}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n-11)+18n}{6}$$

Câu 45. Xét tính bị chặn của dãy số: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; n\in N^*$

Lời giải

Ta có: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>0; \forall n\in N^*$ nên (u_n) bị chặn dưới (1).

Lại có: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}\right]$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}.\frac{(n-k+1)}{n}.\frac{(n-k+2)}{n}\ldots\frac{(n-k+k)}{n}\right]\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}; n\in N^*$$

Mà: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\le 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1).n}$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3; \forall n\in N^*$$

Suy ra: $u_n<3, \forall n\in N^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 46. Cho $U_n=1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{n^5} \forall n\in N^*$. Chứng minh (U_n) bị chặn trên.

Lời giải

Với $k=2,3,...,n$ ta có $k^5>k(k-1)>0$ (do $k^5-k(k-1)=k^2(k^3-1)+k>0$)

$\Rightarrow \frac{1}{k^5}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

Do đó:

$1=1$

$\frac{1}{2^5}<1-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^5}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

………………

$\frac{1}{n^5}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\Rightarrow U_n\le 2-\frac{1}{n}<2\forall n\in N^*\Rightarrow(U_n)$ bị chặn trên

Câu 47. Cho dãy số (u_n) định bởi $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+5\end{cases}\ \forall n\in N^*$

a). Chứng minh $u_n<15,\forall n\in N^*$.

b). Chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn dưới

Lời giải

a). Ta có $u_1=1<15$, giả sử $u_k<15$, khi đó $u_{k+1}=\frac{2}{3}u_k+5<\frac{2}{3}.(15)+5=15$

Vậy $u_n<15\forall,n\in N^*(1)$

b). Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+5-u_n=\frac{15-u_n}{3}>0,\forall n\in N^*(do(1))$

$\Rightarrow$ dãy số (u_n) tăng $\Rightarrow u_n\ge u_1=1\Rightarrow(u_n)$ bị chặn dưới.

Câu 48. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a). $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ b). $u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$

c). $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ d). $u_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}$

Lời giải

a). Rõ ràng $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Suy ra

$u_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

b). Rõ ràng $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \ge 2, k \in \mathbb{N}$. Do đó:

$u_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

c). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$. Suy ra

$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{1}{2}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

d). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$. Suy ra $u_n = \frac{1}{3}[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$

$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)]$

$u_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) < \frac{11}{18}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.