

BÀI 1. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

• CHƯƠNG 9. XÁC SUẤT

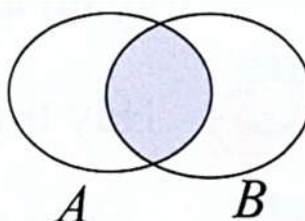
• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Biến cố giao

Kiến thức trọng tâm

Cho hai biến cố A và B . Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu AB hoặc $A \cap B$ được gọi là biến cố giao của A và B .



Hình 1

Chú ý: Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B . Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

Ví dụ 1. Xét phép thử gieo hai con xúc xắc ở **Hoạt động khám phá 1**. Gọi C là biến cố "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm". Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao AC và BC .

Giải

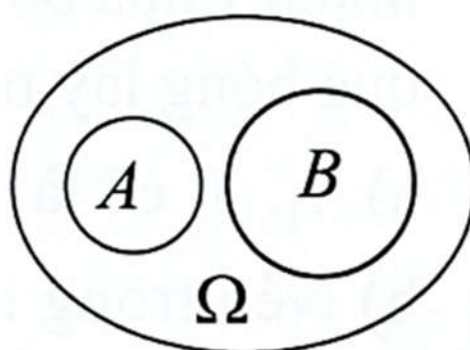
Biến cố $C = \{(1;6); (6;1); (1;5); (5;1); (1;4); (4;1); (1;3); (3;1); (1;2); (2;1); (1;1)\}$.

Kết hợp tập hợp mô tả biến cố A, B ở , ta có biến cố $AC = \{(1;4); (4;1)\}$; biến cố $BC = \{(1;6); (6;1)\}$.

2. Hai biến cố xung khắc

Kiến thức trọng tâm

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra.



Hình 2

Chú ý: Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

Ví dụ 2. Một hộp có 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Hãy xác định các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố sau:

A : "Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh";

B : "Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ";

C : "Hai viên bi lấy ra cùng màu";

D : "Hai viên bi lấy ra khác màu".

Giải

Ta có hai biến cố A và B xung khắc.

Biến cố C xảy ra khi lấy ra 2 viên bi xanh hoặc 2 viên bi đỏ hoặc 2 viên bi vàng. Khi lấy được 2 viên bi màu xanh thì biến cố A và biến cố C cùng xảy ra. Khi lấy được 2 viên bi màu đỏ thì biến cố B và biến cố C cùng xảy ra. Do đó biến cố C không xung khắc với biến cố A và biến cố B . Biến cố D xảy ra khi lấy ra 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ; hoặc 1 viên bi xanh, 1 viên bi vàng; hoặc 1 viên bi đỏ, 1 viên bi vàng. Do đó biến cố D xung khắc với biến cố A , xung khắc với biến cố B và xung khắc với biến cố C .

Vậy có 4 cặp biến cố xung khắc là: A và B ; A và D ; B và D ; C và D .

3. Biến cố độc lập

Kiến thức trọng tâm

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu hai biến cố A và B độc lập thì \bar{A} và B ; A và \bar{B} ; \bar{A} và \bar{B} cũng độc lập.

Ví dụ 3. Trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng, xem màu rồi trả lại hộp. Lặp lại phép thử trên 2 lần và gọi A_k là biến cố quả bóng lấy ra lần thứ k là bóng xanh ($k=1,2$).

a) A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?

b) Nếu trong mỗi phép thử trên ta không trả bóng lại hộp thì A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?

Giải

a) Nếu A_1 xảy ra thì sau khi trả lại quả bóng thứ nhất vào hộp, trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ và 1 quả bóng vàng, do đó xác suất xảy ra A_2 là $\frac{1}{3}$.

Ngược lại, nếu A_1 không xảy ra thì sau khi trả lại quả bóng thứ nhất vào hộp, trong hộp vẫn có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ và 1 quả bóng vàng, do đó xác suất xảy ra A_2 là $\frac{1}{3}$. Ta thấy khi A_1

xảy ra hay không xảy ra thì xác suất của biến cố A_2 luôn bằng $\frac{1}{3}$. Do quả bóng lấy ra lần thứ nhất được trả lại hộp nên biến cố A_2 xảy ra hay không xảy ra không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của A_1 . Vậy A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập.

b) Giả sử quả bóng lấy ra lần đầu tiên không được trả lại hộp.

Nếu A_1 xảy ra thì trước khi bốc quả bóng thứ hai, trong hộp có 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Do đó xác suất xảy ra A_2 là 0.

Ngược lại, nếu A_1 không xảy ra thì trước khi bốc quả bóng thứ hai, trong hộp có 2 quả bóng, trong đó có đúng 1 quả bóng xanh. Do đó xác suất xảy ra A_2 là $\frac{1}{2}$.

Ta thấy xác suất xảy ra của biến cố A_2 phụ thuộc vào sự xảy ra của A_1 . Vậy A_1 và A_2 không là hai biến cố độc lập.

4. Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Để tính xác suất của giao các biến cố độc lập, ta sử dụng quy tắc nhân xác suất sau:

Kiến thức trọng tâm

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.

Chú ý: Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

Ví dụ 4. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,6$ và $P(B) = 0,8$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

Giải

Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB) = P(A)P(B) = 0,48$.

Vì \bar{A} là biến cố đối của A nên $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,4$.

Do \bar{A} và B độc lập nên $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0,32$.

Vì \bar{B} là biến cố đối của B nên $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,2$.

Do \bar{A} và \bar{B} độc lập nên $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,08$.

Ví dụ 5. Hai bệnh nhân X và Y bị nhiễm vi rút SARS-CoV-2. Biết rằng xác suất bị biến chứng nặng của bệnh nhân X là $0,1$ và của bệnh nhân Y là $0,2$. Khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập.

Hãy tính xác suất của các biến cố:

- "Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng";
- "Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng nặng";
- "Bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng".

Giải

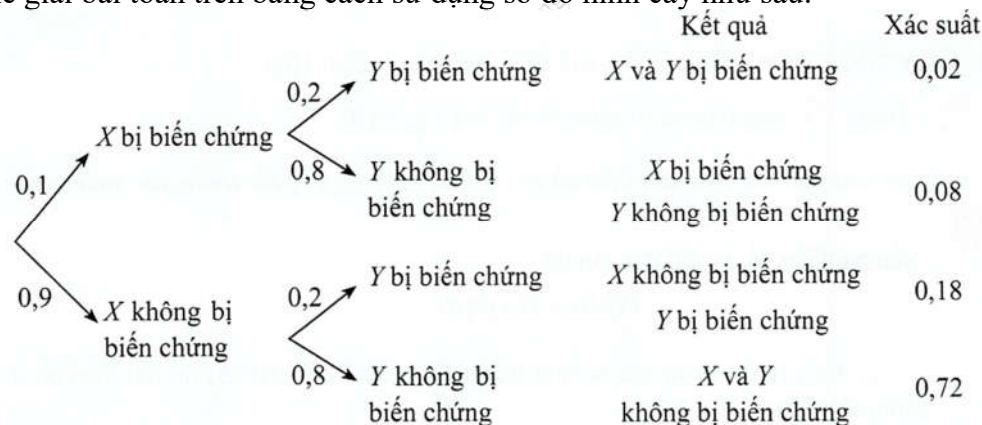
Gọi A là biến cố "Bệnh nhân X bị biến chứng nặng". Ta có $P(A) = 0,1$ và $P(\bar{A}) = 0,9$. Gọi B là biến cố "Bệnh nhân Y bị biến chứng nặng". Ta có $P(B) = 0,2$ và $P(\bar{B}) = 0,8$.

a) Ta thấy A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng là $P(AB) = P(A)P(B) = 0,02$.

b) Do \bar{A} và \bar{B} độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân không bị biến chứng nặng là $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,72$.

c) Do A và \bar{B} độc lập nên xác suất bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng là $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0,08$.

Ta cũng có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây như sau:



Theo sơ đồ trên thì:

- Xác suất cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng là $0,02$;
- Xác suất cả hai bệnh nhân không bị biến chứng nặng là $0,72$;
- Xác suất bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng là $0,08$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính xác suất

Câu 1. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6", B là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ".

- Hãy viết tập hợp mô tả biến cố AB và tính $P(AB)$.
- Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B .

Câu 2. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2", B là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3".

- a) Hãy mô tả bằng lời biến cố AB .
- b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Câu 3. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- a) Biết $P(A) = 0,7$ và $P(B) = 0,2$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB , \overline{AB} và \overline{AB} .
- b) Biết $P(A) = 0,5$ và $P(AB) = 0,3$. Hãy tính xác suất của các biến cố B , \overline{AB} và \overline{AB} .

Câu 4. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,6. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây:

- a) "Cả 2 lần bắn đều trúng đích";
- b) "Cả 2 lần bắn đều không trúng đích";
- c) "Lần bắn thứ nhất trúng đích, lần bắn thứ hai không trúng đích".

Câu 5. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một bệnh truyền nhiễm có xác suất truyền bệnh là 0,8 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0,1 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Anh Lâm tiếp xúc với 1 người bệnh hai lần, trong đó có một lần đeo khẩu trang và một lần không đeo khẩu trang. Tính xác suất anh Lâm bị lây bệnh từ người bệnh mà anh tiếp xúc đó.

Câu 6. Một vận động viên thi bắn súng. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là 0,2; bắn trúng vòng 9 là 0,25 và bắn trúng vòng 8 là 0,3. Nếu bắn trúng vòng k thì được k điểm. Vận động viên thực hiện bắn hai lần. Giả sử hai lần bắn của vận động viên là độc lập. Vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Tính xác suất để vận động viên đạt được huy chương đồng.

Câu 7. Gieo ba xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét các biến cố sau:

A : "Số chấm xuất hiện trên mặt của ba xúc xắc khác nhau".

B : "Có ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm".

Chứng minh rằng hai biến cố A và B không độc lập.

Câu 8. Cho $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,6$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

Câu 9. Cho $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

Câu 10. Gieo hai đồng xu cân đối. Xét các biến cố A : "Cả hai đồng xu đều ra mặt sấp",

B : "Có ít nhất một đồng xu ra mặt sấp". Hỏi A và B có độc lập hay không?

Câu 11. Gieo hai con xúc xắc cân đối. Xét các biến cố A : "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm", B : "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7". Chứng tỏ rằng A và B không độc lập.

Câu 12. Có 3 hộp I, II, III. Mỗi hộp chứa ba tấm thẻ đánh số 1, 2, 3. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Xét các biến cố sau:

A : "Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ là 6"; B : "Ba tấm thẻ có ghi số bằng nhau".

- a) Tính $P(A)$, $P(B)$.
- b) Hỏi A , B có độc lập không?

Câu 13. Hai bạn An và Bình không quen biết nhau và đều học xa nhà. Xác suất để bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật là 0,2 và của bạn Bình là 0,25. Dùng sơ đồ hình cây để tính xác suất vào ngày Chủ nhật:

- a) Cả hai bạn đều về thăm nhà.
- b) Có ít nhất một bạn về thăm nhà.
- c) Cả hai bạn đều không về thăm nhà.
- d) Chỉ có bạn An về thăm nhà.
- e) Có đúng một bạn về thăm nhà.

Câu 14. Cho A, B là hai biến cố độc lập và $P(AB) = 0,1; P(\bar{A}\bar{B}) = 0,4$. Tìm $P(A \cup B)$.

Câu 15. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Hộp thứ hai chứa 6 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 6. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 viên bi. Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 viên bi bằng 8", B là biến cố "Tích các số ghi trên 2 viên bi là số chẵn".

- a) Xác định không gian mẫu của phép thử.
- b) Hãy tính xác suất của biến cố AB .
- c) Tính xác suất của biến cố A và biến cố B .
- d) A và B có là hai biến cố độc lập không?
- e) Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B .

Câu 16. Một hộp chứa 99 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 99. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2", B là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5".

- a) Bình nói AB là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 10". Bình nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?
- b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Câu 17. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- a) Biết $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,7$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB, \bar{A}\bar{B}$ và $\bar{A}B$.
- b) Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,4$. Hãy tính xác suất của các biến cố $B, \bar{A}\bar{B}$ và $\bar{A}B$.

Câu 18. Minh gieo 1 hạt đậu và 1 hạt ngô. Xác suất nảy mầm của hạt đậu và hạt ngô lần lượt là 0,7 và 0,6. Biết rằng sự nảy mầm của hai hạt này là độc lập. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

- a) "Cả 2 hạt đều nảy mầm";
- b) "Cả 2 hạt đều không nảy mầm";
- c) "Hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm".

Câu 19. Một hộp chứa 4 bút xanh, 1 bút đen và 1 bút đỏ. Các cây bút có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 3 cây bút từ hộp. Gọi A là biến cố "Có 1 cây bút đỏ trong 3 cây bút được lấy ra". Gọi B là biến cố "Có 1 cây bút đen trong 3 cây bút được lấy ra".

- a) Hãy tìm một biến cố xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B .
- b) Tính xác suất của các biến cố A, B và AB .

Câu 20. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 1 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 2 viên bi. Gọi A là biến cố "Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có cùng màu"; B là biến cố "Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có cùng màu".

- a) Minh nói AB là biến cố "Trong 4 viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ". Minh nói đúng hay sai? Tại sao?

b) So sánh $P(AB)$ với $P(A)P(B)$.

c) Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với cả biến cố A và biến cố B .

Câu 21. Một hộp chứa 50 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 4", B là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 6".

a) Giang nói AB là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 24". Giang nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?

b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Câu 22. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(\bar{A}) = 0,4$ và $P(B) = 0,1$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB , $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

b) Biết $P(A) + P(B) = 0,8$ và $P(AB) = 0,16$. Hãy tính xác suất của các biến cố B , $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

Câu 23. Minh mua 2 bóng đèn. Theo một kết quả thống kê, tỉ lệ bị hỏng trong năm đầu sử dụng của loại bóng đèn Minh mua là 23%. Tính xác suất của các biến cố:

A : "Cả hai bóng đèn đều bị hỏng trong năm đầu sử dụng";

B : "Cả hai bóng đèn đều không bị hỏng trong năm đầu sử dụng".

Nguyễn Bảo Vương