BÀI 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

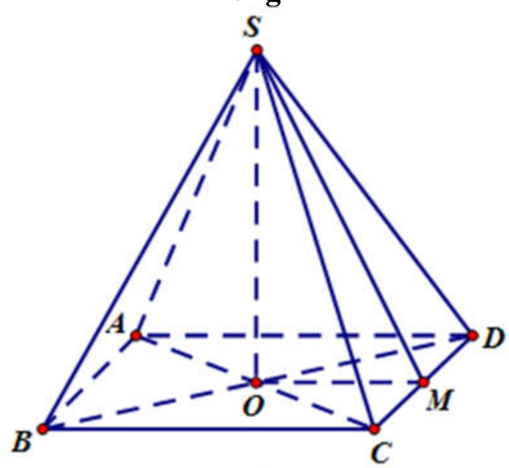
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Câu 1. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và đáy là hình vuông. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (ABCD)$;

b) $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



Vì $S.ABCD$ có cạnh bên bằng nhau và là hình vuông nên $S.ABCD$ là hình chóp đều. Gọi O là tâm của đáy. Ta có: $SO \perp ABCD)$

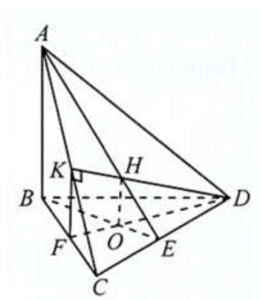
a) Ta có $SO \perp (ABCD); SO \in (SAC)$ nên $SAC) \perp (ABCD)$

b) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp AC$

Mà $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$.

Suy ra $AC \perp (SBD)$ và $SAC) \perp (SBD)$

Câu 2. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.



Hình 17

Chứng minh rằng:

a) $(ADC) \perp (ABE)$ và $(ADC) \perp (DFK)$;

b) $OH \perp (ADC)$.

Lời giải

a) Vì $AB \perp (BCD)$ nên $AB \perp DC$

Mà $BE \perp CD$. Do đó, $CD \perp (ABE)$

Suy ra: $(ACD) \perp (ABE)$

Ta có: $AB \perp (BCD)$ nên $AB \perp DF$. Mà $DF \perp BC$ nên $DF \perp (ABC)$. Suy ra $DF \perp AC$

Ta lại có: $AC \perp DK$ nên $AC \perp (DFK)$

Suy ra: $(ADC) \perp (DFK)$

b) Ta có: $(ABE) \perp (ADC); (DFK) \perp (ADC)$

Mà (ABE) và (ADC) cắt nhau tại OH

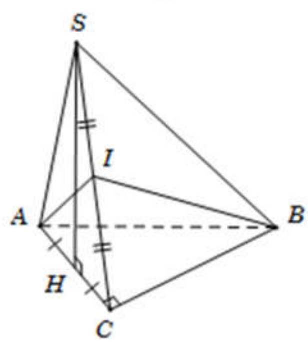
Suy ra: $OH \perp (ADC)$

Câu 3. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Gọi $SH \perp AC$ mà $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp BC$. Mà $CB \perp AC$

Nên $CB \perp (SAC)$

Suy ra: $(SBC) \perp (SAC)$

b) Vì $BC \perp (SAC)$ nên $BC \perp AI$

Mà tam giác SAC đều, I là trung điểm SC nên $AI \perp SC$

Suy ra: $AI \perp (SBC)$

Nên $(ABI) \perp (SBC)$

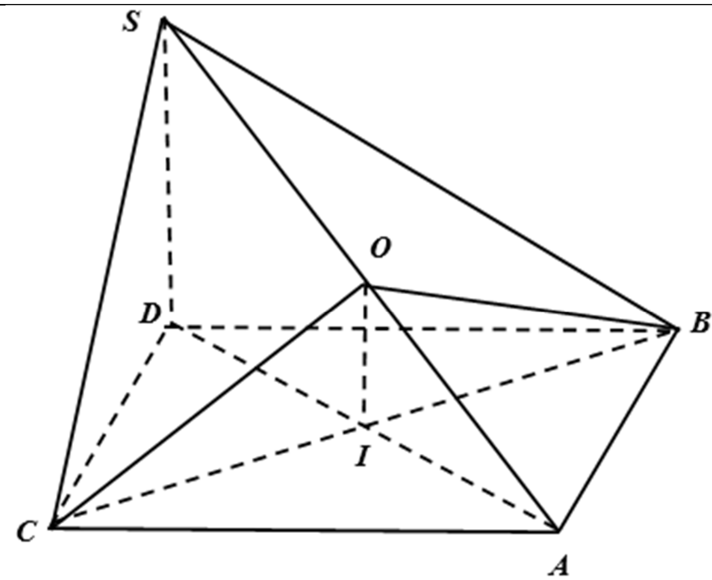
Câu 4. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua I. Vẽ đoạn thẳng SD có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABC).

Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAD)$;

b) $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



a) Tam giác ABC đều có I là trung điểm nên $AI \perp CB$ hay $AD \perp BC$. Vì $SD \perp (ABC)$ nên $SD \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAD)$

Nên $(SAD) \perp (SBC)$

b) Tam giác ABC đều nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AD = a\sqrt{3}$

Tam giác SAD vuông tại D nên $SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Kẻ $IO \perp SA$ Suy ra $\Delta AOI \sim \Delta ADS$

Suy ra: $OI = \frac{AI \cdot DS}{AS} = \frac{a}{2}$

Tam giác BOC có OI là trung tuyến, $OI = \frac{a}{2}$. Nên BOC vuông tại O

Ta có: $BC \perp (SAD)$ nên $SA \perp BC$. Mà $SA \perp OI$ nên $SA \perp (OBC)$

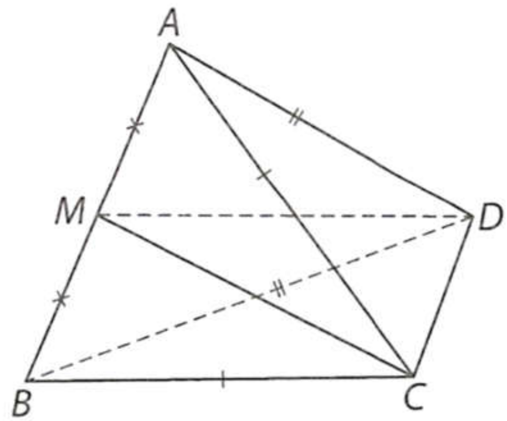
Suy ra: $SA \perp IB; SA \perp IC$

Góc giữa (SAB) và (SAC) là góc giữa IB và IC và bằng 90°

Vậy $SAB) \perp (SAC)$

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC, AD = BD$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $(CDM) \perp (ABC)$ và $(CDM) \perp (ABD)$.

Lời giải



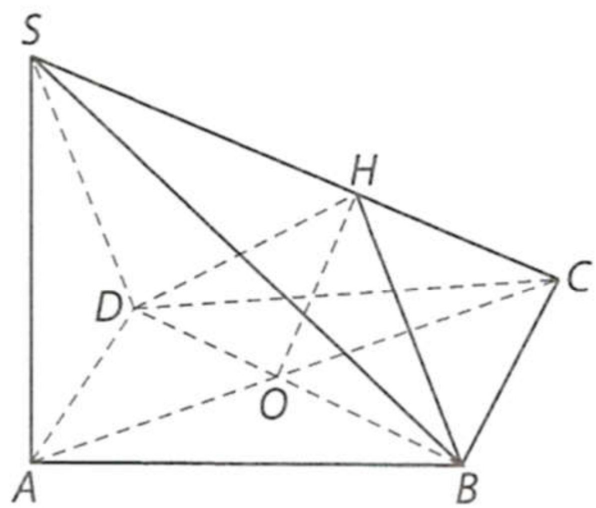
Hình 7.39

Vì M là trung điểm của AB nên $AB \perp CM$, $AB \perp DM$, suy ra $AB \perp (CDM)$.
Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) đều chứa đường thẳng AB nên
$(ABC) \perp (CDM), (ABD) \perp (CDM)$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, góc BAD bằng 60°. Kẻ OH vuông góc với SC tại H. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $(SBD) \perp (SAC)$;
b) $(SBC) \perp (BDH)$;
c) $(SBC) \perp (SCD)$.

Lời giải



Hình 7.40

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$ mà $BD \perp AC$, do đó $BD \perp (SAC)$.
Vì mặt phẳng (SBD) chứa BD nên $(SBD) \perp (SAC)$.
b) Ta có $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$ mà $SC \perp OH$, do đó $SC \perp (BDH)$.
Vì mặt phẳng (SBC) chứa SC nên $(SBC) \perp (BDH)$.

c) Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Vì ΔCHO cs ΔCAS nên $\frac{HO}{AS} = \frac{CO}{CS}$, suy ra $HO = \frac{CO \cdot AS}{CS} = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$.

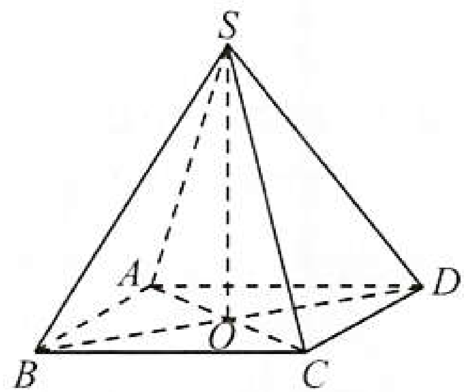
Do đó, tam giác BDH vuông tại H, suy ra $\widehat{BHD}=90^{\circ}$.
Ta lại có $BH\perp SC, DH\perp SC$ nên $(SBC)\perp(SCD)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Các tam giác SAC và SBD cân tại S. Chứng minh rằng:

a) $SO\perp(ABCD)$;

b) $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải



Hình 10

a) Ta có các tam giác SAC và SBD cân tại S nên $SO\perp AC, SO\perp BD \Rightarrow SO\perp(ABCD)$.

b) Ta có $AC\perp SO$ (vì $SO\perp(ABCD)$) và $AC\perp BD$ (vì $ABCD$ là hình thoi)

$\Rightarrow AC\perp(SBD)$.

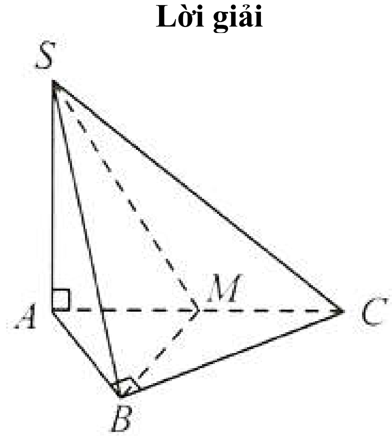
Vậy $(SAC)\perp(SBD)$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $SA\perp(ABC)$.

a) Chứng minh rằng $(SBC)\perp(SAB)$.

b) Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(SBM)\perp(SAC)$.

Lời giải



Hình 3

a) Ta có: $BC\perp AB$ (giả thiết),
$BC\perp SA$(vì $SA\perp(ABC)$)

$\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(SBC)\perp(SAB)$.

b) Vì tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên $BM\perp AC$.

Mà $BM\perp SA$ (vì $SA\perp(ABC)$) suy ra $BM\perp(SAC)$.

Vậy $(SBM)\perp(SAC)$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Chứng minh rằng:

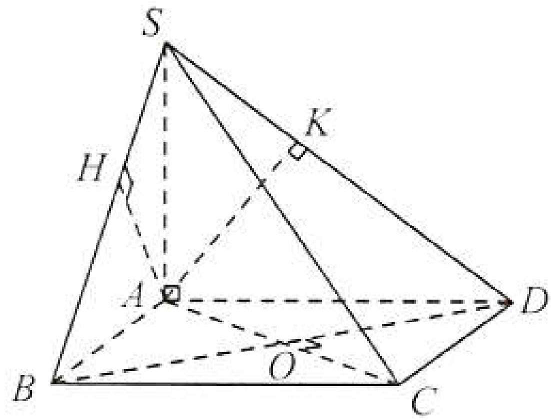
a) $(SBC) \perp (SAB)$;

b) $(SCD) \perp (SAD)$;

c) $(SBD) \perp (SAC)$;

d) $(SAC) \perp (AHK)$.

Lời giải



Hình 4

a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$;

$(SAD) \perp (ABCD)$;

$(SAB) \cap (SAD) = SA$

$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Khi đó: $BC \perp AB$ (giả thiết);

$BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta được $(SCD) \perp (SAD)$

c) Ta có $BD \perp AC$ (giả thiết)

$BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

d) Ta có $(SAB) \perp (SBC)$ (chứng minh trên)

$(SAB) \cap (SBC) = SB$;

$AH \perp SB$ (giả thiết)

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Ta có: $(SCD) \perp (SAD)$ (chứng minh trên);

$(SCD) \cap (SAD) = SD$

$AK \perp SD$ (giả thiết)

$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (AHK)$.

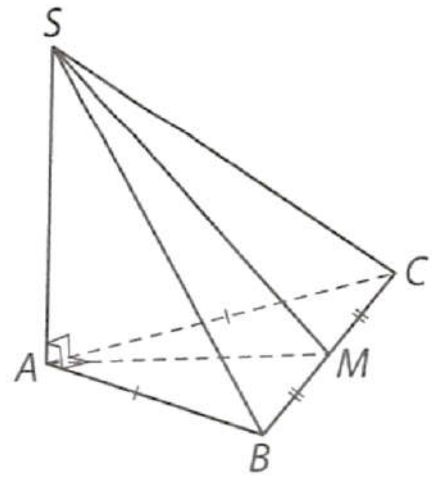
Vậy $(SAC) \perp (AHK)$.

Dạng 2. Góc giữa hai mặt phẳng

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = a$, biết $SA \perp (ABC), SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải

(H.7.10)



Hình 7.10

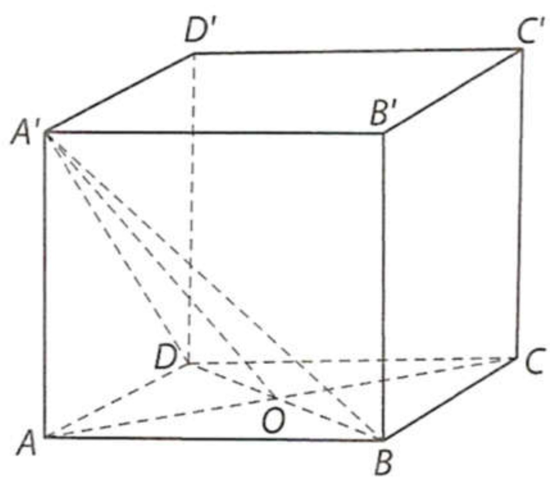
Gọi M là trung điểm của cạnh BC, ta có: $AM \perp BC; SM \perp BC$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và SM. Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AM$. Xét tam giác SAM vuông tại A, có: $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan \widehat{AMS} = \frac{SA}{AM} = \sqrt{3}$, hay $\widehat{SMA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60°.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính tang của góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $\left(A'BD\right)$.

Lời giải

(H.7.11)



Hình 7.11

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $AO \perp BD, A'O \perp BD$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(A'BD\right)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AO và $A'O$.

Ta có: $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}; AA' = a$ và tam giác $AA'O$ vuông tại A nên

$\tan\left(AO, A'O\right) = \tan \widehat{AOA'} = \frac{AA'}{AO} = \sqrt{2}$

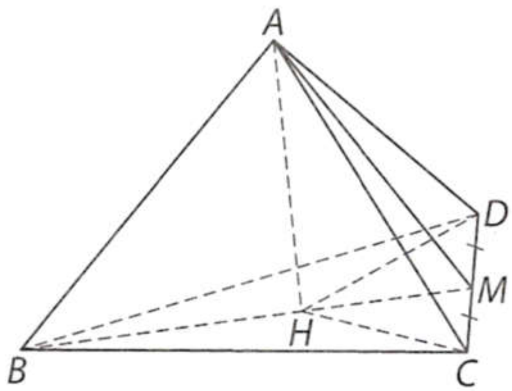
Vậy tang của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(A'BD\right)$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD, kẻ AH vuông góc với BM tại H.

a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

b) Tính côsin của góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD).

Lời giải



Hình 7.38

a) Vì M là trung điểm của CD nên $CD \perp BM$, $CD \perp AM$, do đó $CD \perp (ABM)$, suy ra $CD \perp AH$, ta lại có $AH \perp BM$ nên $AH \perp (BCD)$.

b) Vì $AM \perp CD, BM \perp CD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và BM, mà $(AM, BM) = \widehat{AMB}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng $\widehat{AMB}$.

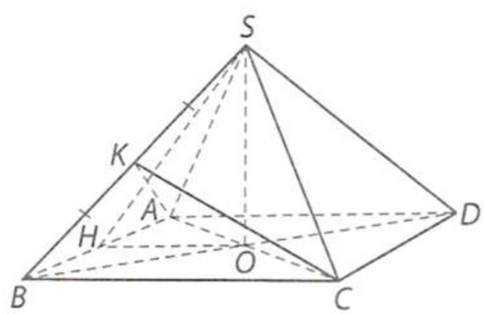
Ta có: $HM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác AHM vuông tại H nên $\cos\widehat{AMB} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$.

Câu 13. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Hình 7.41

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp AB$, kẻ $OH \perp AB$ tại H thì $AB \perp (SOH)$, suy ra $AB \perp SH$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SH và HO, mà $(SH, HO) = \widehat{SHO}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SHO}$.

Ta tính được $OH = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\cos\widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Gọi K là trung điểm của SB. Khi đó $AK \perp SB, CK \perp SB$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AK và CK.

Ta có: $AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ACK, ta có:

$\cos\widehat{AKC} = \frac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2 \cdot AK \cdot CK} = \frac{-1}{3}$, suy ra $\cos(AK, CK) = -\cos\widehat{AKC} = \frac{1}{3}$.

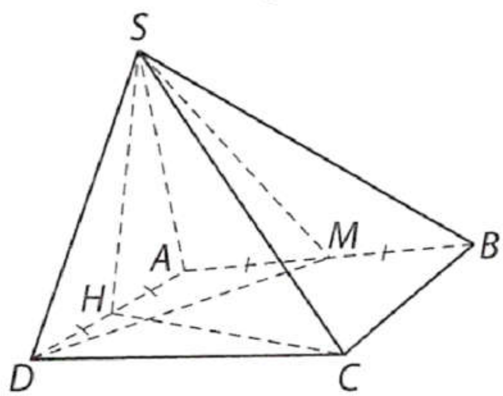
Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB.

a) Tính côsin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SHC)$.

Lời giải



Hình 7.44

a) Ta có $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SH \perp AD$ nên $SH \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CH, mà $(SC, CH) = \widehat{SCH}$, ta tính được

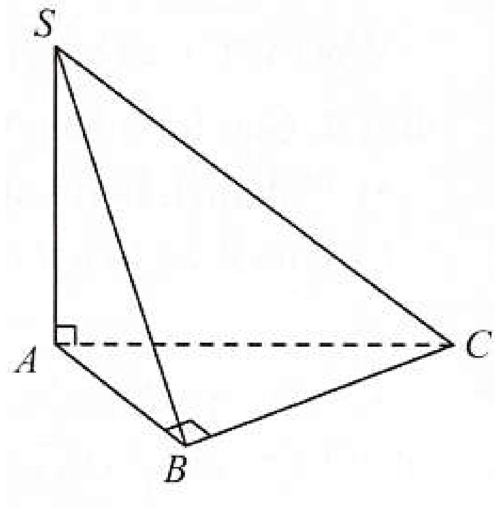
$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $SC = a\sqrt{2}$.

Do đó $\cos\widehat{SHC} = \frac{HC}{SC} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

b) Ta có $DM \perp CH, DM \perp SH$ nên $DM \perp (SCH)$. Hơn nữa, mặt phẳng (SDM) chứa đường thẳng DM nên $(SDM) \perp (SCH)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Lời giải



Hình 8

Ta có: $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BC \perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Ta lại có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$ (1)

$AB \subset (ABC), AB \perp BC$ (2)

$SB \subset (SBC), SB \perp BC$ (chứng minh trên) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $((SBC),(ABC)) = (AB, SB)$.

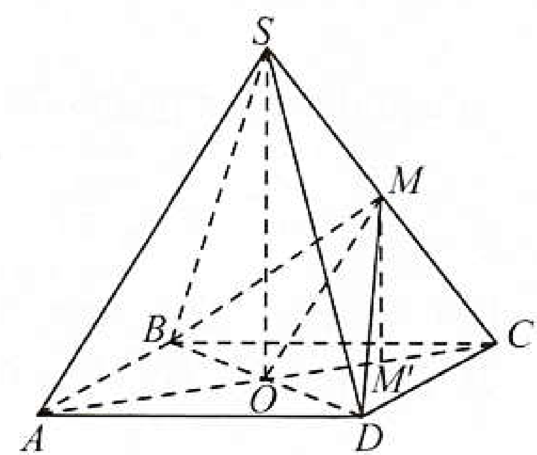
Trong tam giác SAB vuông tại A ta có:

$\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 16. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các canh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Hình 9

Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' // SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Ta có $MB = MD$ nên $MO \perp BD$ và $M'O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ là $(MO, M'O)$.

Ta có: $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

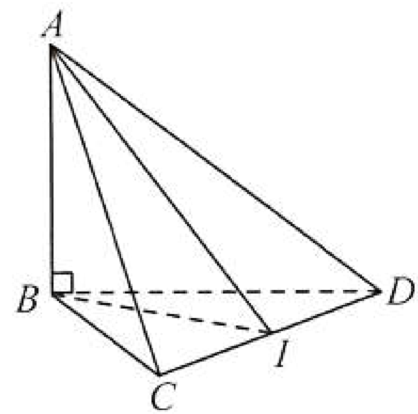
Trong tam giác vuông MOM',

ta có $\tan\widehat{MOM'}=\frac{MM'}{OM'}=\frac{SO}{OC}=1\Rightarrow\widehat{MOM'}=45^\circ$.

Vậy $((MBD),(ABCD))=\left(MO,M'O\right)=\widehat{MOM'}=45^\circ$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B và $AB\perp(BCD)$. Cho biết $BC=a\sqrt{2}, AB=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Lời giải



Hình 1

Gọi I là trung điểm của CD.
Ta có: $CD\perp BI$ và $CD\perp AB\Rightarrow CD\perp AI$.
Khi đó: $(ACD)\cap(BCD)=CD$;

$\begin{matrix}AI\perp CD, AI\subset(ACD);\\ BI\perp CD, BI\subset(BCD)\end{matrix}$ suy ra $((ACD),(BCD))=(AI,BI)$.

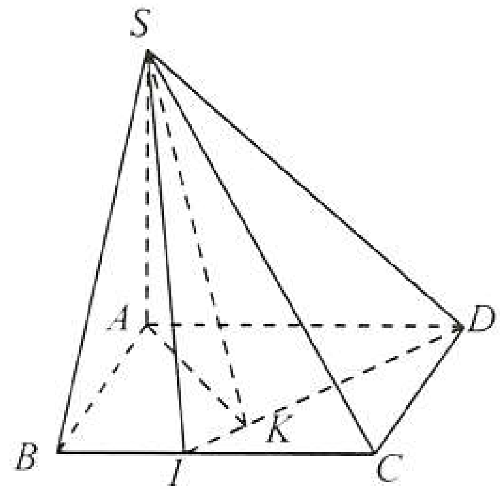
Do tam giác BCD vuông cân tại B nên $BI=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\cdot BC\sqrt{2}=a$.

Xét tam giác ABI vuông tại B, ta có: $\tan\widehat{AIB}=\frac{AB}{BI}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{AIB}=30^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{AIB}=30^\circ$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Cho biết $SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và $(ABCD)$ là 60°. Tính độ dài SI.

Lời giải

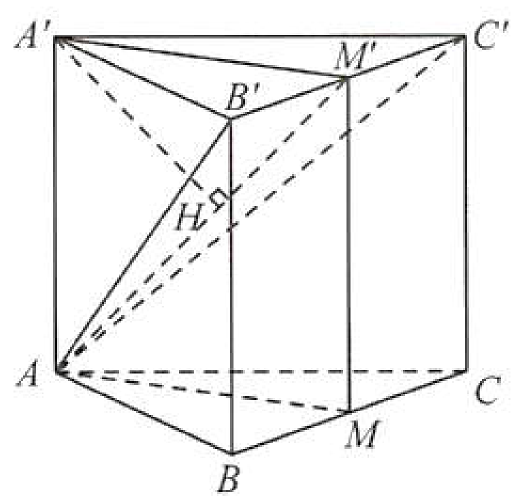


Hình 2

Vẽ $AK \perp ID(K \in ID)$.
Ta có $ID \perp SA$ và $ID \perp AK$
$\Rightarrow ID \perp (SAK) \Rightarrow ID \perp SK$.
Suy ra $((SDI),(ABCD)) = \widehat{AKS} = 60^\circ$.
Xét tam giác SAK vuông tại A, ta có:
$\sin \widehat{AKS} = \dfrac{SA}{SK} \Rightarrow SK = \dfrac{SA}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.
Tam giác SAD vuông tại A, ta có: $SD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.
Xét tam giác SID vuông tại S, ta có:
$\dfrac{1}{SK^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{SD^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{SI^2} = \dfrac{1}{SK^2} - \dfrac{1}{SD^2} \Rightarrow SI = \dfrac{2a\sqrt{55}}{11}$.

Câu 19. Cho hình lăng trụ đều $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và (ABC), tính $\cos \alpha$.

Lời giải



Hình 4

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Vẽ đường cao $A'H$ của tam giác vuông $AA'M'$.
Ta có:

$\begin{cases} B'C' \perp A'M' \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp \left(AA'M'\right)$

Mà $A'H \subset \left(AA'M'\right)$ nên $B'C' \perp A'H$.(1)

Ta lại có: $A'H \perp AM'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'H \perp \left(AB'C'\right)$. (*)

Hơn nữa, $AA' \perp (ABC)$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $\left((ABC),\left(AB'C'\right)\right) = \left(A'A, A'H\right) = \alpha$.

Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $A'M' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

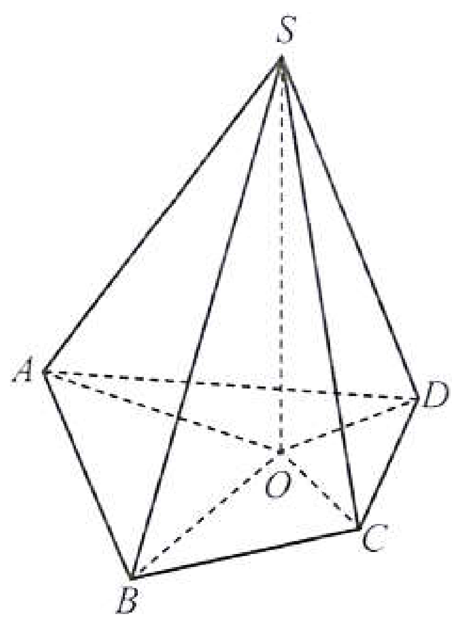
Trong tam giác vuông $AA'M'$, ta có $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{A'M'^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Trong tam giác vuông $AA'H$, ta có $\cos\widehat{AA'H} = \dfrac{A'H}{AA'} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\cos\alpha = \cos\widehat{AA'H} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ lần lượt là góc giữa các đường thẳng SA, SB, SC, SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:
$SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Lời giải



Hình 70

Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Khi đó, ta có: $\alpha_1 = \widehat{SAO}, \alpha_2 = \widehat{SBO}, \alpha_3 = \widehat{SCO}, \alpha_4 = \widehat{SDO}$. Các tam giác SAO, SBO, SCO, SDO vuông có các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ đều nhỏ hơn 90° nêN
$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Như vậy:

$SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{SB} = \frac{SO}{SC} = \frac{SO}{SD}$

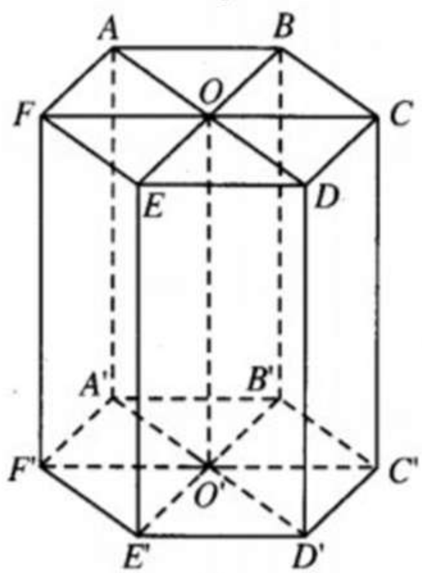
$\Leftrightarrow \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$

Dạng 3. Một số bài toán liên quan hình lăng trụ đặc biệt

Câu 21. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF \cdot A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng h và cạnh đáy bằng a. Tính $A'C$ và $A'D$ theo a và h.

Lời giải



$AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$

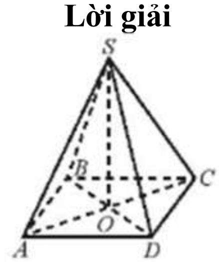
$A'C = \sqrt{3a^2 + h^2}$

$AD = 2a$

$A'D = \sqrt{4a^2 + h^2}$

Câu 22. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp tứ giác đều $S \cdot ABCD$ có O là tâm của đáy và $AB = a, SA = 2a$. Tính SO theo a.

Lời giải



Ta có: $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

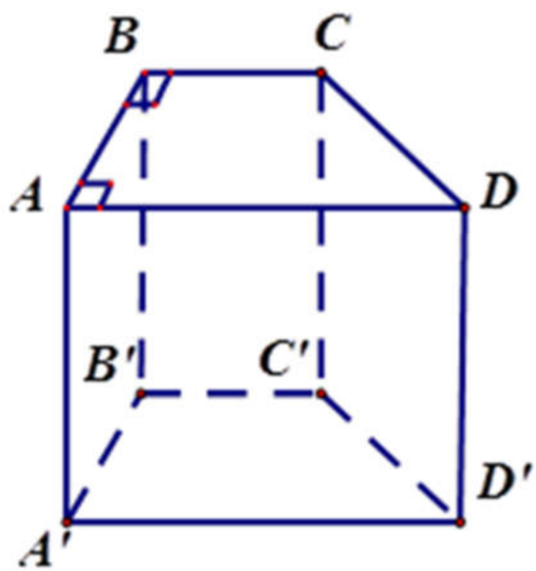
$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Câu 23. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AA' = 2a, AD = 2a, AB = BC = a$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ.

Lời giải



a) Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$; $AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=a\sqrt{6}$

b) $S_{ABCD}=S_{A'B'C'D'}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot(a+2a)=3a^2$

$S_{ABB'A'}=2a.a=2a^2$

$S_{ADD'A}=2a.2a=4a^2$

$S_{CBB'C'}=2a.\sqrt{a^2+a^2}=2a^2\sqrt{2}$

Tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ là:

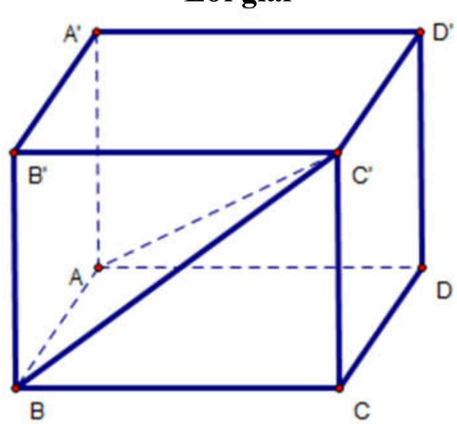
$2.3a^2+2a^2+4a^2+2a^2+2a^2\sqrt{2}=(14+2\sqrt{2})a^2$

Câu 24. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình hộp đứng $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Cho biết $AB=BD=a, A'C=2a$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AA'.

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Lời giải



a) Hình thoi $ABCD$ có $AB=BD=$ a. Suy ra $AC=a\sqrt{3}$

$AA'=CC'=\sqrt{AC^2-AC^2}=a$

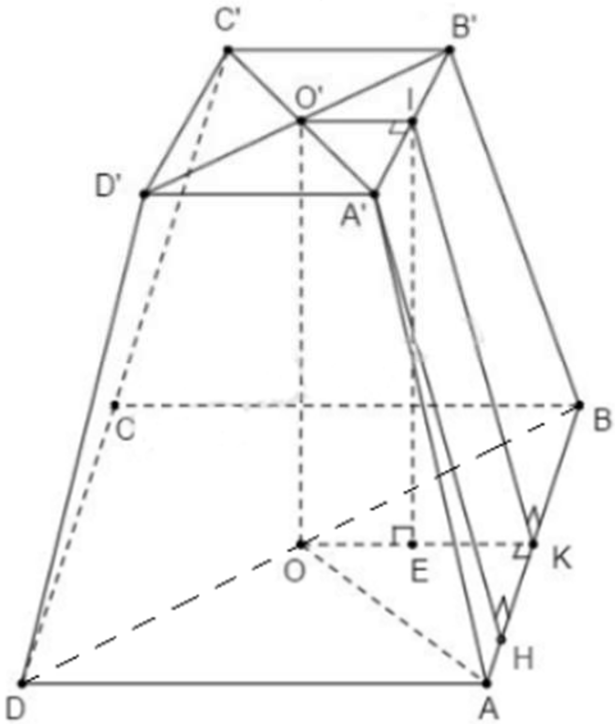
b) Diện tích một mặt đáy là: $\frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{3}=\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$

Diện tích một mặt bên là: $a\cdot a=a^2$

Tổng diện tích các mặt của hình hộp là: $2\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\sqrt{3}+4a^2=(4+\sqrt{3})a^2$

Câu 25. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a. Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.

Lời giải



Gọi OO' là đường nối tâm của hai đáy, $OO'=a$

Kẻ $O'I\perp A'B'; OK\perp(AB); IE\perp(ABCD); E\in OK$

Ta có: $OI=OE=\frac{a}{2}; OK=\frac{2a}{2}=a; EK=2a-a=2; IE=a$

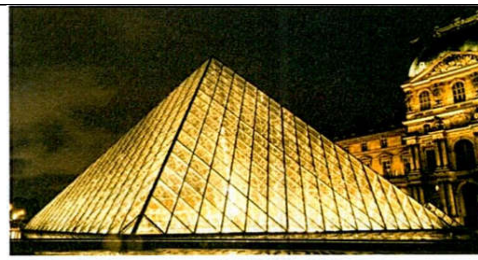
$IK=\sqrt{IE^2+EK^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Kẻ $A'H\perp AB; AH=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

$HK=A'I=\frac{a}{2}; AK=\frac{AB}{2}=a; AH=AK-HK=\frac{a}{2}$

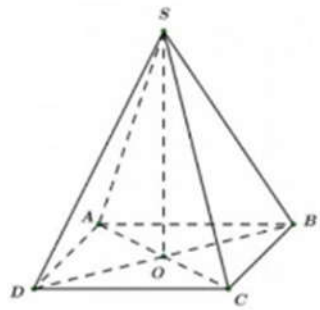
$AA'=\sqrt{AH^2+A'H^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 26. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là $21,6m$ và cạnh đáy dài $34m$. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.



Hình 29
(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid)

Lời giải



Ta có : $SO = 21,6; AB = CB = 34$

$OA = 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$

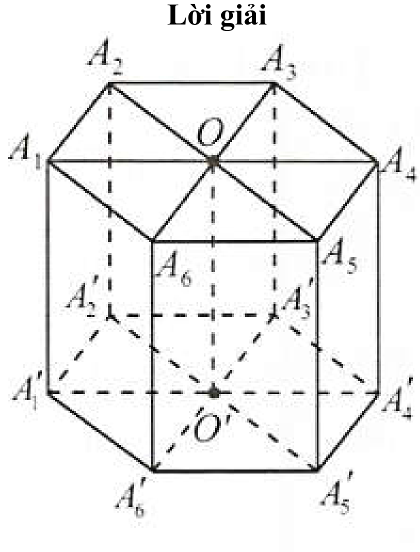
$SA = \sqrt{(17\sqrt{2})^2 + 21,6^2} = 32,32(m)$

Câu 27. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $2a$.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Lời giải



Hình 11

a) Lăng trụ đứng lục giác đều có sáu mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau với kích thước lần lượt là $a, 2a$ (Hình 11). Vậy diện tích xung quanh của lăng trụ là:

$S_{xq} = 6 \cdot a \cdot 2a = 12a^2$. b) Vì tam giác A_1A_2O đều nên $S_{\Delta A_1A_2O} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích đáy $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ của lăng trụ là:

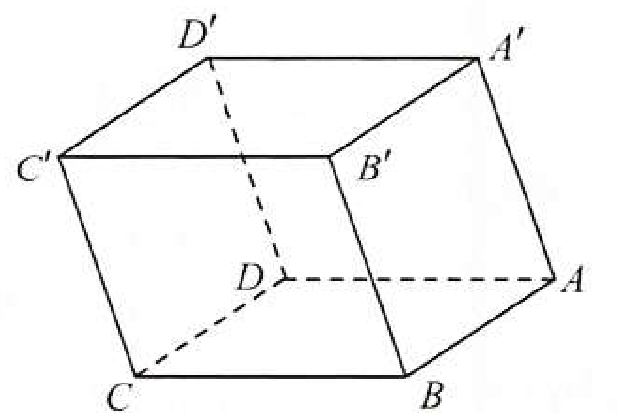
$S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}=6\cdot S_{\Delta A_1A_2O}=6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích toàn phần của lăng trụ là:

$S_{tp}=S_{xq}+2S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}=12a^2+2\cdot\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}=(12+3\sqrt{3})a^2$.

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD}=\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Lời giải



Hình 12

Tam giác ABD có $AD=AB=a$ và $\widehat{DAB}=60^\circ$.

Suy ra tam giác ABD là tam giác đều, nên $S_{ABCD}=S_{A'B'C'D'}=2S_{\Delta ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

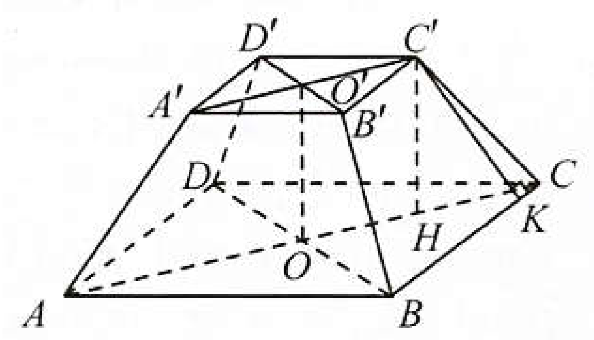
Tương tự, ta có tam giác $A'AB$ và tam giác $A'AD$ là tam giác đều, nên

$S_{A'B'BA}=S_{D'C'CD}=S_{D'A'AD}=S_{C'B'BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy tổng diện tích các mặt của hình hộp là $S=6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=3a^2\sqrt{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên $2a$. Tính đường cao của hình chóp cụt và đường cao của mặt bên.

Lời giải



Hình 13

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ $(H\in OC)$ (Hình 13).

Ta có: $OC = a\sqrt{2}, O'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $CH = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. Nên $OO' = C'H = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Trong hình thang $BB'C'C$, vẽ đường cao $C'K(K \in BC)$.

Ta có $CK = \frac{BC - B'C'}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CK$, ta có:

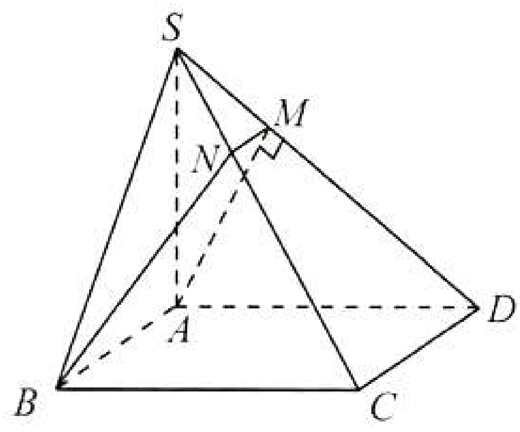
$C'K = \sqrt{CC'^2 - CK^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a) Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

b) Các giao tuyến ở câu a tạo thành hình gì? Tính diện tích của hình đó.

Lời giải



Hình 5

a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$;

$(SAD) \perp (ABCD)$;

$(SAB) \cap (SAD) = SA$

$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Dễ dàng chứng minh được $(SAD) \perp (SCD)$.

Vẽ $AM \perp SD(M \in SD) \Rightarrow AM \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABM) \perp (SCD)$ hay (ABM) là mặt phẳng

(α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $MN // CD(N \in SC)$.

Suy ra: $MN // AB \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp là AB, BN, NM, MA.

b) Ta có: $MN // AB$ và $AB \perp AM$ (vì $AB \perp (SAD)$) nên $ABNM$ là hình thang vuông tại A và M.

Tam giác SAD vuông tại A có AM là đường cao nên

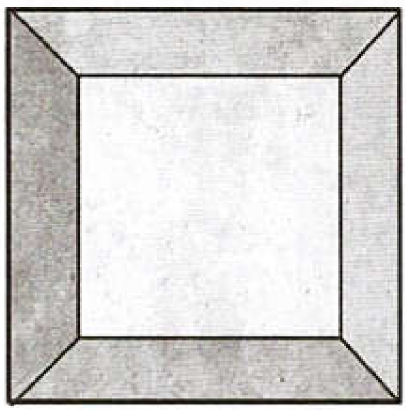
$\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$MN//CD\Rightarrow\frac{MN}{CD}=\frac{SM}{SD}\Rightarrow\frac{MN}{CD}=\frac{\frac{SA^2}{SD}}{SD}=\frac{SA^2}{SD^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AD^2}=\frac{3a^2}{4a^2}$

$\Rightarrow MN=\frac{3}{4}CD=\frac{3}{4}a$.

Vậy $S_{ABNM}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot(MN+AB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}a+a\right)=\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 31. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $2m$, đáy nhỏ có cạnh bằng $1m$ và cạnh bên bằng $2m$ (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.

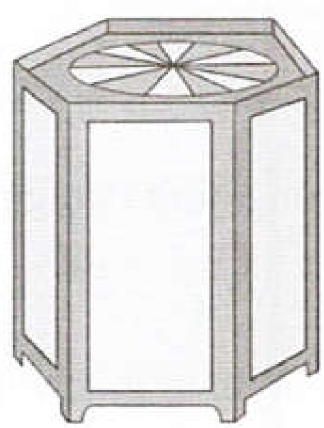


Hình 14

Lời giải

$S_{tp}=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{(2+1)}{2}+4+1=5+3\sqrt{5}\approx 16,62\left(m^2\right)$.

Câu 32. Một hộp đèn treo trên trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (hình 15), cạnh đáy bằng 10cm và cạnh bên bằng 50cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

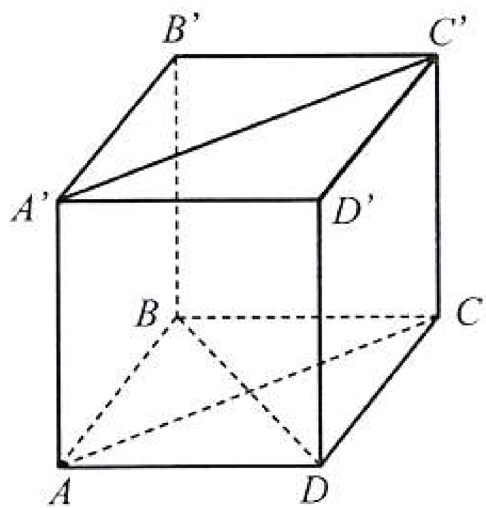
Lời giải

$\frac{S_{xq}}{S_{\text{day}}}=\frac{6\cdot 50\cdot 10}{6\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}\approx 11,55$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD\cdot A'B'C'D'$ '. Chứng minh rằng $AC\perp\left(BDD'B'\right)$.

Lời giải

(Hình 44)



Hình 44

Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên $BB'\perp(ABCD)$. Mà $AC\subset(ABCD)$ nên $BB'\perp AC$.

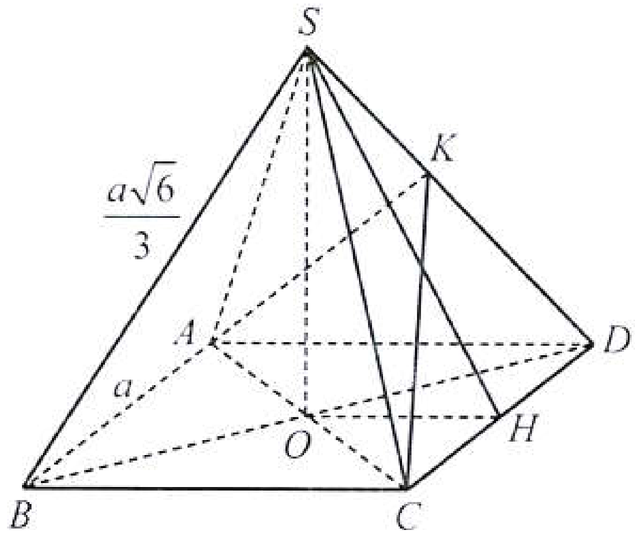
Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp BD$. Mà BB' và BD cắt nhau trong mặt phẳng $\left(BDD'B'\right)$ nên $AC\perp\left(BDD'B'\right)$.

Câu 34. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a, SA=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Tính chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.
b) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
c) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
d) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[S,CD,B]$.
e) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[A,SD,C]$.

Lời giải

(Hình 45)



Hình 45

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ nên O là chân đường cao của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó, chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng SO.

Trong hình vuông $ABCD$, ta có:

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Xét tam giác SAO vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

c) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SAO}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có: $\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{SAO} = 30^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

d) Gọi H là hình chiếu của O trên CD. Vì OCD là tam giác vuông cân tại O nên H là trung điểm CD. Mà tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Suy ra $\widehat{SHO}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, CD, B]$.

Xét tam giác DBC có OH là đường trung bình nên $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SOH vuông tại O có:

$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$. Suy ra $\cos\widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy côsin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

e) Gọi K là hình chiếu của A trên SD. Vì $AC \perp BD, AC \perp SO$ và BD, SO cắt nhau trong mặt phẳng (SBD) nên $AC \perp (SBD)$. Mà $SD \subset (SBD)$ nên $AC \perp SD$.

Ngoài ra, $SD \perp AK$ và AK, AC cắt nhau trong mặt phẳng (ACK) nên $SD \perp (ACK)$.

Mà $CK \subset (ACK)$ nên $SD \perp CK$.

Từ đó ta có $\widehat{AKC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, SD, C]$.

Xét tam giác SCD có: $KC = \dfrac{SH \cdot CD}{SD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{15}}{6} \cdot a}{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Tương tự ta có: $KA = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$. Xét tam giác AKC, ta có:

$$\cos \widehat{AKC} = \frac{KA^2 + KC^2 - AC^2}{2KA \cdot KC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{-3}{5}$$

Vậy côsin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$ bằng $\dfrac{-3}{5}$.

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$;

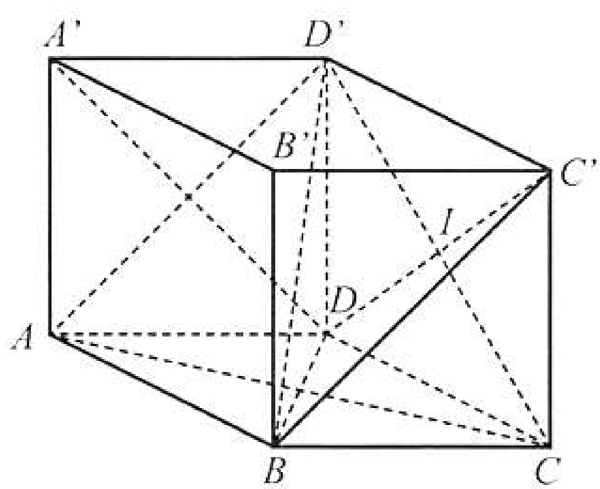
b) Số đo của góc nhị diện $\left[A, CD, B'\right]$;

c) Tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$;

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và BC;

e*) Góc giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Lời giải



Hình 85

a) $d\left((ABCD), \left(A'B'C'D'\right)\right) = a$.

b) Vì $A'B' // DC$ nên A', B', C, D đồng phẳng. Khi đó, góc nhị diện $\left[A, CD, B'\right]$ là $\left[A, CD, A'\right]$. Ta có $AD \perp DC, A'D \perp DC$. Số đo của góc nhị diện $\left[A, CD, B'\right]$ bằng $\widehat{ADA'} = 45^\circ$.

c) Vì $DD' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{D'BD}$.

Khi đó, tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

$\tan \widehat{D'BD} = \frac{D'D}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

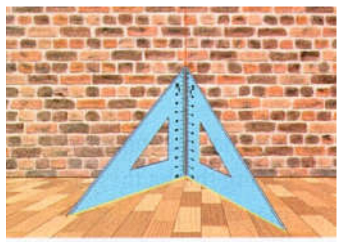
d) Gọi I là giao điểm của CD' và $C'D$. Khi đó $IC \perp BC, IC \perp C'D$.

Suy ra $d\left(C'D, BC\right) = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e*) Vì $BC' // AD'$ nên góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng góc giữa hai đường thẳng AD' và CD'. Vì tam giác $AD'C$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $\widehat{AD'C} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng 60°.

Dạng 4. Ứng dụng

Câu 36. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Mô tả cách kiểm tra một bức tường vuông góc với mặt sàn bằng hai cái êke trong Hình 10.



Hình 10

Lời giải

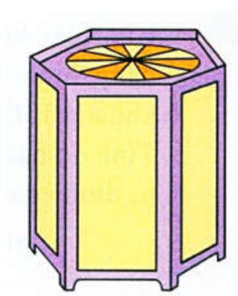
Đặt 1 cạnh của 2 êke sát với mặt sàn sao cho cạnh còn lại của 2 êke chạm nhau tạo thành 1 đường thẳng. Nếu đường thẳng đó nằm sát với bức tường thì bức tường vuông góc với mặt sàn

Câu 37. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Nêu cách đặt một quyển sách lên mặt bàn sao cho tất cả các trang sách đều vuông góc với mặt bàn.

Lời giải

Mở quyển sách ra và đặt chân sách lên mặt bàn

Câu 38. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một chiếc lồng đèn kéo quân có dạng hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy bằng $10cm$ và cạnh bên bằng $30cm$ (Hình 20). Tính tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn đó.

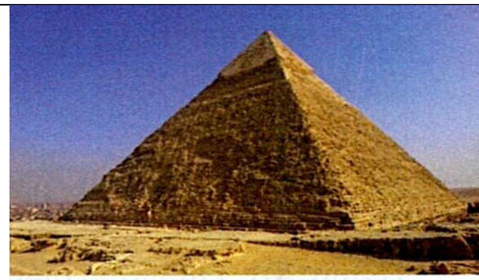


Hình 20

Lời giải

Tổng diện tích các mặt bên của lồng đèn đó: $6.10.30 = 1800\left(cm^2\right)$

Câu 39. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho biết kim tự tháp Khafre tại Ai Cập có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao khoảng $136m$ và cạnh đáy dài khoảng $152m$. Tính độ dài đường cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của kim tự tháp.



Hình 24

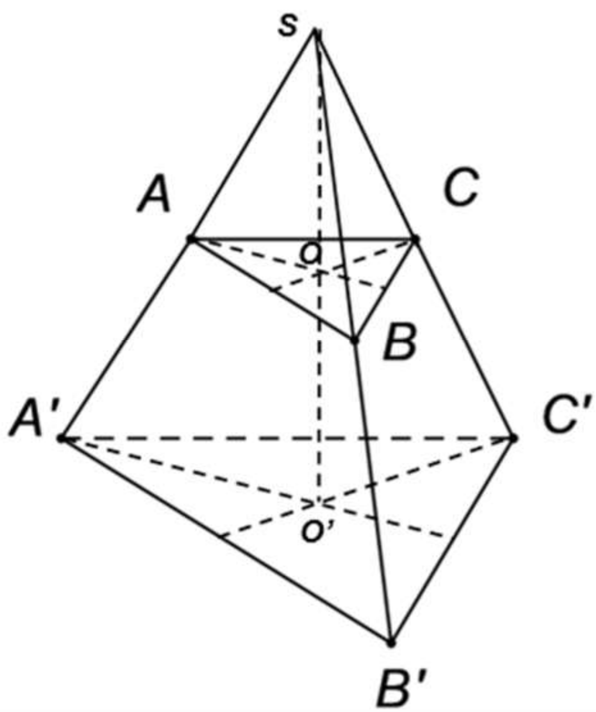
(nguồn:https://vi.wikipedia.org/wiki/ Kim_tự_tháp_Khafre)

Lời giải

Độ dài đường cao của mặt bên là $\sqrt{126^2+\left(\frac{152}{2}\right)^2}=147,15(m)$

Câu 40. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn a, cạnh đáy nhỏ $\frac{a}{2}$ và cạnh bên $2a$. Tính độ dài đường cao của hình chóp cụt đó.

Lời giải



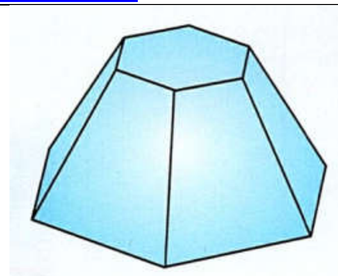
Ta có: $AB=\frac{a}{2};A'B'=a$ nên $SO=OO'=\frac{1}{2}SO';SA'=2AA'=4a$

Tam giác $A'B'C'$ đều cạnh a có O' là trọng tâm nên $A'O'=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Ta có:

$SO'=\sqrt{SA'^2-A'O'^2}=\frac{\sqrt{141}}{3}a$

Suy ra: $OO'=\frac{\sqrt{141}}{6}a$

Câu 41. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một người cần sơn tất cả các mặt của một cái bục để đặt tượng có dạng hình chóp cụt lục giác đều có cạnh đáy lớn $1m$, cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,7m$. Tính tổng diện tích cần sơn.



Hình 28

Lời giải

Diện tích đáy lớn là: $\frac{3\sqrt{3}\cdot 1^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Diện tích đáy nhỏ là: $\frac{3\sqrt{3}\cdot 0,7^2}{2}=\frac{147\sqrt{3}}{20}$

Một mặt bên của hình chóp cụt là hình thang cân có đáy lớn là $1m$, đáy nhỏ là $0,7m$ và cạnh bên là $0,7m$

Chiều cao của mặt bên là: $\sqrt{0,7^2-\left(\frac{1-0,7}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{187}}{20}$

Diện tích một mặt bên là: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{187}}{20}\cdot(0,7+1)=0,58\left(m^2\right)$

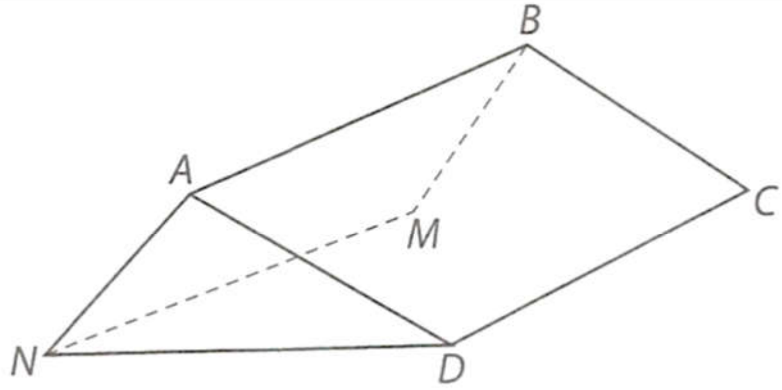
Tổng diện tích cần sơn là: $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{147\sqrt{3}}{20}+6.0,58=18,8\left(m^2\right)$

Câu 42. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD, ABMN$, $AD=4m, AN=3m, DN=5m$. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

(H.7.13)

Xét tam giác ADN có: $AN^2+AD^2=3^2+4^2=5^2=DN^2$ nên tam giác AND vuông tại A. Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$ bằng góc DAN. Vậy góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà bằng 90°.

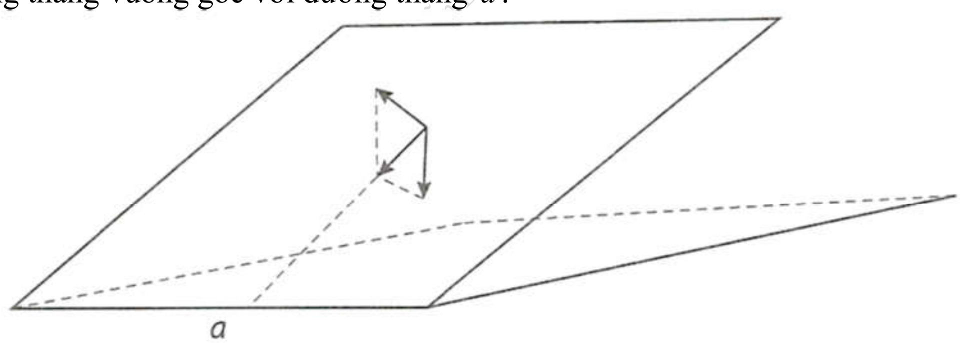


Hình 7.13

Câu 43. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

Lời giải

Gọi a là giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng nằm nghiêng. Phương của lực hút trái đất vuông góc với mặt phẳng nằm ngang, phương của phản lực vuông góc với mặt phẳng nghiêng nên phương của hai lực nói trên đều vuông góc với đường thẳng a, do đó đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) chứa hai phương của hai lực đó. Vì tổng hợp lực của trọng lực và phản lực là một lực có phương nằm trên mặt phẳng (P) nên phương đó vuông góc với a. Do đó, viên bi lăn dọc theo đường thẳng vuông góc với đường thẳng a.

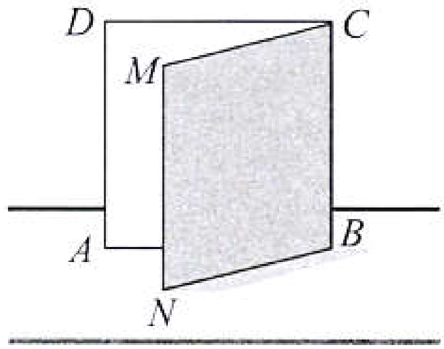


Hình 7.45

Câu 44. Hình 19 minh hoạ một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2\,m$. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

Lời giải

(hình 19)



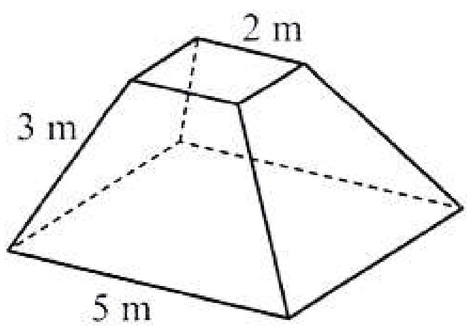
Hình 19

Vì $AB \perp BC$ và $NB \perp BC$ nên góc ABN là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, N]$.

Vì góc mở cửa bằng 60° nên số đo góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng 60°, suy ra $\widehat{ABN} = 60^{\circ}$.

Xét tam giác ABN cân tại B có $BA = BN = 1,2\,m$ và $\widehat{ABN} = 60^{\circ}$. Khi đó tam giác ABN đều, suy ra $AN = 1,2\,m$, hay khoảng cách giữa A và N bằng $1,2\,m$.

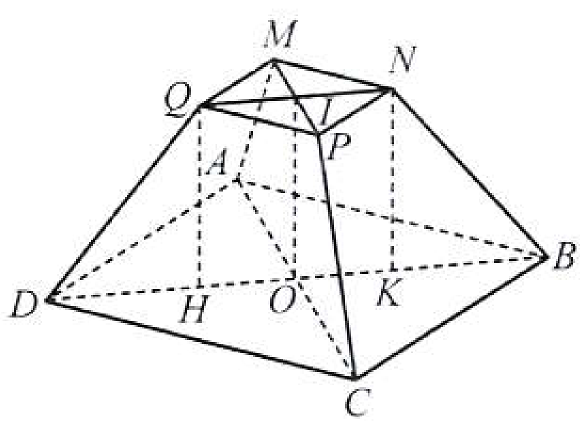
Câu 45. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

Lời giải

(Hình 47)



Hình 47

Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $5\,m, MNPQ$ là hình vuông cạnh $2\,m, AM = BN = CP = DQ = 3\,m$.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD)//(MNPQ)$ nên $NQ//BD$.
Gọi I là giao điểm của MP và NQ, O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $IO \perp (MNPQ), IO \perp (ABCD)$.
Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD, K là hình chiếu của N trên BD. Vì $IO \perp BD$, $QH \perp BD, NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO//QH//NK$.
Suy ra $QH \perp (MNPQ), QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.
Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\Delta QHD = \Delta NKB$ nên ta có $HD = BK$.
Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$HD = \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(m).$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có:

$$QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(m).$$

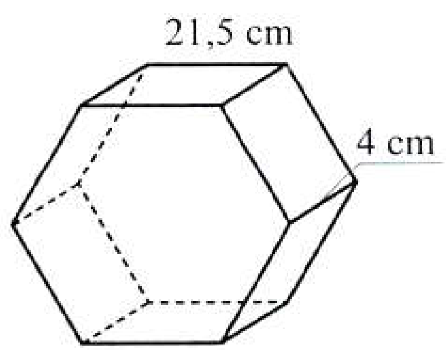
Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25\left(m^2\right)$,
$S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4\left(m^2\right)$.
Suy ra thể tích của khối chóp cụt đều là:

$$V = \frac{1}{3}QH\left(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}} + S_{MNPQ}\right)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}(25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2}\left(m^3\right).$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$$1470000 \cdot \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 40538000 \quad \text{(đồng)}.$$

Câu 46. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là $4cm$ và cạnh lục giác dài $21,5cm$. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimét khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

Lời giải

Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh $21,5cm$. Khi đó diện tích đáy của viên gạch bằng: $6\cdot\frac{(21,5)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{5547\sqrt{3}}{8}\left(cm^2\right)$. Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích viên gạch, tức là: $4.\frac{5547\sqrt{3}}{8}\approx 4803,8\left(cm^3\right)$.