BÀI 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

- CHƯƠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. Với hàm số $f(x)$ cho bởi biểu thức đại số thì ta có:

1. $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, điều kiện: * $f_1(x)$ có nghĩa

* $f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x)\neq 0$.

2. $f(x)=\sqrt[2m]{f_1(x)},(m\in\mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x)$ có nghĩa và $f_1(x)\geq 0$.

3. $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt[2m]{f_2(x)}},(m\in\mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x),f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x)>0$.

B. Hàm số $y=\sin x; y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, như vậy

$y=\sin[u(x)]; y=\cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

* $y=\tan[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

* $y=\cot[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq +k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Chú ý

Ở phần này chúng ta chỉ cần nhớ kĩ điều kiện xác định của các hàm số cơ bản như sau:

1. Hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm số $y=\tan x$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Hàm số $y=\cot x$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$.

C. Dạng chứa tham số trong bài toán liên quan đến tập xác định của hàm sô lượng giác.

Với $S\subset D_f$ (là tập xác định của hàm số $f(x)$) thì

$*f(x)\leq m,\forall x\in S\Leftrightarrow \max\limits_S f(x)\leq m$. $*f(x)\geq m,\forall x\in S\Leftrightarrow \min\limits_S f(x)\geq m$.

* $\exists x_0\in S, f(x_0)\leq m\Leftrightarrow \min\limits_S f(x)\leq m$ * $\exists x_0\in S, f(x_0)\geq m\Leftrightarrow \max\limits_S f(x)\geq m$.

Câu 1. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{\cos x}$;

b) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y=\frac{1}{2-\sin^2 x}$.

Lời giải

a) Hàm số y xác định khi $\cos x\neq 0$

Suy ra $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

b) Hàm số y xác định khi $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$

Suy ra $x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$

c) Hàm số y xác định khi $2-\sin^2 x\neq 0$

Mà với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có: $0\leq\sin^2\alpha\leq 1$ nên $1\leq 2-\sin^2\alpha\leq 2$

Vậy hàm số y xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ b) $y=\cot\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $y=\frac{2}{\sin 2x}$ d) $y=2\cos\sqrt{x^2-3x+2}$

Bài giải:

a) Xét $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Xét $\sin\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow -2x-\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Xét $\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) y xác định khi $x^2-3x+2\geq 0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

Tập xác định $D=(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

Câu 3. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y=\frac{1-2x^2}{1-\cos 2x}$ b) $y=\cos\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ c) $y=\sqrt{2-2\sin x}$ d) $y=\sqrt{\sin x-1}$

e) $y=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. f) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ g) $y=\cot\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-\frac{2}{1-\cos x}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi: $1-\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq k2\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi$

Vậy TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số xác định khi: $x^2-1>0 \Leftrightarrow x>1 \vee x<-1$

Vậy TXĐ: $\mathrm{D}=(-\infty ;-1) \cup(1 ;+\infty)$.

c) Hàm số xác định khi: $2-2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 1$: luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{D}=\mathbb{R}$.

d) Hàm số xác định khi: $\sin x \geq 1\ (1)$. Mặt khác: $\sin x \leq 1\quad \forall x \in \mathbb{R}\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$. Vậy TXĐ: $\mathrm{D}=\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $y=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$: TXĐ: $\begin{cases}\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geq 0 \\ 1+\cos x \neq 0\end{cases}\ (*)$

Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases}1-\cos x \geq 0 \\ 1+\cos x \geq 0\end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $(*) \Leftrightarrow 1+\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi+k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Do đó tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R} \setminus\{\pi+k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

f) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

TXĐ: $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Do đó tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R} \setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

g) $y=\cot\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-\frac{2}{1-\cos x}$

TXĐ: $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) \neq 0 \\ 1-\cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{4}-2x \neq k\pi \\ \cos x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{8}-k\frac{\pi}{2} \\ x \neq k2\pi\end{cases}$.

Do đó tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R} \setminus\left\{\frac{\pi}{8}-k\frac{\pi}{2}, k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\frac{1}{1-\sin 4x}$ b) $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y=\frac{\sin x}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}$ d) $y=\frac{\tan x+\cot x}{\cot^2 x-1}$.

Lời giải

a) Hàm số $y=\frac{1}{1-\sin 4x}$ xác định $\Leftrightarrow 1-\sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 4x \neq 1 \Leftrightarrow 4x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Hàm số $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ xác định $\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

c) Hàm số $y=\frac{\sin x}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}$ xác định

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{6}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

d) Hàm số $y=\frac{\text{tanx}+\text{cotx}}{\cot^2 x-1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{sinx}\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \cot^2 x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{4}$, $(k\in\mathbb{Z})$

Câu 5. Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$.

a) $y=\sqrt{2m-3\cos x}$. b) $y=\frac{2}{\sqrt{\sin^2 x-2\sin x+m-1}}$

Lời giải

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi:

$2m-3\cos x\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 3\cos x\leq 2m,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x\leq\frac{2m}{3}\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \frac{2m}{3}\geq 1 \Leftrightarrow m\geq\frac{3}{2}$.

b) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi:

$\sin^2 x-2\sin x+m-1>0$,$\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m>-\sin^2 x+2\sin x+1=2-(\sin x-1)^2$,$\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m>\max\limits_{(-\infty;+\infty)}\left(-\sin^2 x+2\sin x+1\right)=2\Leftrightarrow m>2$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\sqrt{5-m\sin x-(m+1)\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi: $5-m\sin x-(m+1)\cos x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\sin x+(m+1)\cos x\leq 5,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\sin x+\frac{m+1}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\cos x\leq\frac{5}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}},\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha)\leq\frac{5}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{2m^2+2m+1}}\geq 1\Leftrightarrow\sqrt{2m^2+2m+1}\leq 5$.

$\Leftrightarrow 2m^2+2m-24\leq 0\Leftrightarrow -4\leq m\leq 3$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

DẠNG 2. TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa: Hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in D$ ta có

$x\pm T\in D$ và $f(x+T)=f(x)$.

Nếu có số T ***dương nhỏ nhất*** thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là ***hàm số tuần hoàn với chu kì*** T.

*y = sin(ax + b) có chu kỳ $T_0=\frac{2\pi}{|a|}$

*y = cos(ax + b) có chu kỳ $T_0=\frac{2\pi}{|a|}$

*y = tan($ax+b$) có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$

*y = cot($ax+b$) có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$

- y = $f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ; y = $f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y=f_1(x)\pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Câu 7. (SGK-CTST 11-Tập 1) Xét tính tuần hoàn của hàm số $y=\cos x$ và hàm số $y=\cot x$.

Lời giải

Ta có:

$\cos x=\cos(x+2\pi),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\cot x=\cot(x+\pi),\ \forall x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Do đó, hàm số $y=\cos x$ và $y=\cot x$ là các hàm số tuần hoàn

Câu 8. Tìm chu kì tuần hoàn các hàm số sau

a) $y=1-\sin 5x$ b) $y=2\cos^2 2x$

c) $y=\tan\left(-3x+1\right)$ d) $y=2-3\cot(2x-1)$

Bài giải

a) $T=\dfrac{2\pi}{5}$.

b) $y=2\dfrac{1+\cos 4x}{2}=1+\cos 4x\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{2}$.

c) $T=\dfrac{\pi}{|-3|}=\dfrac{\pi}{3}$.

d) $T=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 9. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=1-\sin 5x$. b) $y=\cos^2 x-1$.

c) $y=\sin\left(\dfrac{2}{5}x\right).\cos\left(\dfrac{2}{5}x\right)$. d) $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}.x\right)$

Bài giải

Ta có hàm số $y=k\sin\left(ax+b\right)+c$; $y=k\cos\left(ax+b\right)+c$ là hàm số tuần hoàn và có chu kỳ $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$

a) Hàm số $y=1-\sin 5x$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_1=\dfrac{2\pi}{5}$.

b) Hàm số $y=\cos^2 x-1=\dfrac{\cos 2x-1}{2}$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_2=\pi$.

c) Hàm số $y=\sin\left(\dfrac{2}{5}x\right).\cos\left(\dfrac{2}{5}x\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{4}{5}x\right)$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_2=\dfrac{5\pi}{2}$.

d) Hàm số $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}.x\right)$ không tuần hoàn

Vì ta có hàm số $y=\cos x$ có chu kỳ $T_1=2\pi$ và hàm số $y=\cos\left(\sqrt{3}.x\right)$ có chu kỳ $T_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của $T_1=2\pi$ và $T_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Câu 10. Tìm chu kỳ của hàm số $y=\sin 3x+3\cos 2x$.

Lời giải

Ta có hàm số $y=\sin 3x$ có chu kỳ $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$ và hàm số $y=\cos 2x$ có chu kỳ $T_2=\pi$

$\Rightarrow$ chu kỳ T của hàm số $y=\sin 3x+3\cos 2x$ là bội chung nhỏ nhất của $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$ và $T_2=\pi$

$\Rightarrow T=2\pi$.

Câu 11. Chứng minh rằng hàm số T thỏa mãn $\sin(x+T)=\sin x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ phải có dạng $T=k2\pi$, k là một số nguyên nào đó. Từ đó suy ra, số T nhỏ nhất thỏa mãn $\sin(x+T)=\sin x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ là 2π.

Bài giải

Nếu $\sin(x+T)=\sin x$ với mọi x, thì khi $x=\dfrac{\pi}{2}$, ta được $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=\sin 1$. Số U mà $\sin U=1$ thì U phải có dạng $U=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ nên $\dfrac{\pi}{2}+T=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Rightarrow T=k2\pi$.

Câu 12. Chứng minh các hàm số sau đây là hàm số tuàn hoàn, tìm chu kì và xét tính chẵn lẻ của mỗi hàm số.

a) $y=\sin^2 2x+1$

b) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$

c) $y=\cos^2 x+\sin^2 x$

Bài giải

a) $y=\sin^2 2x+1=\dfrac{1-\cos 4x}{2}+1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 4x$

Hàm số y tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{2}$. Đây là hàm số chẵn.

b) $y=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ là một hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì $T=\pi$.

c) $y=\cos^2 x+\sin^2 x=1$ với mọi x nên y là một hàm hằng, là một hàm số chẵn. Vì với mọi T, ta luôn có $\cos^2(x+T)+\sin^2(x+T)=\cos^2 x+\sin^2 x=1$ nên hàm số y tuần hoàn nhưng không có chu kì tuần hoàn.

Câu 13. Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó: $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Lời giải

+ Tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

+ Hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ là hàm số tuần hoàn vì $\exists T=2\pi$ thỏa mãn:

$y_{(x+2\pi)}=\dfrac{1}{\sin(x+2\pi)}=\dfrac{1}{\sin x}=y_{(x)}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

$+T=2\pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $y_{(x+2\pi)}=\dfrac{1}{\sin(x+2\pi)}=\dfrac{1}{\sin x}=y_{(x)}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

Thật vậy: Giả sử nếu $\exists T\in(0;2\pi):\dfrac{1}{\sin(x+T)}=\dfrac{1}{\sin x}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\cos T=1\Leftrightarrow T=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $T\in(0;2\pi)$ $\Rightarrow$ Không tồn tại số nguyên k thỏa mãn $T=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai.

Vậy hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ là hàm số tuần hoàn và có chu kì $T=2\pi$

DẠNG 3. TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó

∗ Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x\in D \Rightarrow -x\in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

∗ Nếu D không phải tập đối xứng(tức là $\exists x\in D$ mà $-x\notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

∗ Nếu $f(-x)=f(x),\forall x\in D$ thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.

∗ Nếu $f(-x)=-f(x),\forall x\in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

∗ Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

1, Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ trên $D=\mathbb{R}$.

2, Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn trên $D=\mathbb{R}$.

3, Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ trên $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4, Hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ trên $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 14. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Chứng minh rằng hàm số $y=\sin x$ và hàm số $y=\cot x$ là các hàm số lẻ.

Lời giải

Hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $\sin(-x)=-\sin x$.

Do đó hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ

Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$,

Với mọi $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$ ta có $-x\neq -k\pi(k\in\mathbb{Z})$ cũng có nghĩa là $-x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$ hay $-x\in\mathbb{R}\backslash\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

Mặt khác $\cot(-x)=-\cot(x)$. Do đó hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ

Câu 15. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?

a) $y=5\sin^2 x+1$

b) $y=\cos x+\sin x$;

c) $y=\tan 2x$.

Lời giải

a) Xét: $y=5\sin^2(-\alpha)+1=5(-\sin\alpha)^2+1=5\sin^2\alpha+1$

Vậy hàm số trên là hàm số chẵn

b) Hàm số $y=\cos x+\sin x$ không phải hàm số chẵn hay hàm số lẻ

c) Xét $y=\tan 2(-x)=-\tan 2x$

Vậy hàm số trên là hàm số lé

Câu 16. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y=2\cos 3x$ b) $y=x+\text{sinx}$

c) $y=x.\cot x+\cos x$ d) $y=x^2+\tan|x|$

Bài giải

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y(-x)=2\cos(-3x)=2\cos 3x=y(x)$. Suy ra y là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-y(x)$. Suy ra y là hàm số lẻ.

c) Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

$y(-x)=-x.\cot(-x)+\cos(-x)=x.\cot x+\cos x=y(x)$. Suy ra y là hàm số chẵn.

d) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y(-x)=(-x)^2+\tan|-x|=x^2+\tan|x|=y(x)$. Suy ra y là hàm số chẵn.

Câu 17. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y=2x\sin x$. b) $y=\cos x+\sin 2x$.

c) $y=\dfrac{\cos 2x}{x}$. d) $y=\tan^7 2x.\sin 5x$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ (1).

Đặt $y=f(x)=2x\sin x$.

NX: $\forall x\in D$, $f(-x)=2(-x)\sin(-x)=2x\sin x=f(x)$ (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\cos x+\sin 2x$.

Xét $x=\dfrac{\pi}{3}\in D\Rightarrow -x=-\dfrac{\pi}{3}\in D$.

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta thấy $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\neq f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm số chẵn

Và $-f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\neq f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.

c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x}$.

Ta có $\forall x\in D$: $f(-x)=\dfrac{\cos(-2x)}{-x}=-\dfrac{\cos(2x)}{x}=-f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\tan^7 2x.\sin 5x$.

Ta có $\forall x\in D$: $f(-x)=\tan^7(-2x)\sin(-5x)=\tan^7(2x)\sin(5x)=f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chú ý: *Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:*

Với câu a) Chứng minh đồ thị hàm số $y=2x\sin x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Với câu c) Chứng minh đồ thị hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{x}$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng

Câu 18. Các hàm số sau chẵn hay lẻ, vì sao?

a) $y=|x|\sin x$ b) $y=\dfrac{\tan x-\sin x}{2+\cos x+\cot^2 x}$

c) $y=\dfrac{\cos x+x^2-1}{\sin^4 x}$ d) $y=\dfrac{\sin^4 x+1}{2+\cos^6 x}$

Lời giải

a) $y=f(x)=|x|\sin x$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

Ta có:

+ $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

+ $f(-x)=|-x|\sin(-x)=-|x|\sin x=-f(x),\forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) $y=f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{2+\cos x+\cot^2 x}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

+ $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

+ $f(-x)=\dfrac{\tan(-x)-\sin(-x)}{2+\cos(-x)+\cot^2(-x)}=\dfrac{-\tan x+\sin x}{2+\cos x+\cot^2 x}=-f(x),\forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) $y=f(x)=\dfrac{\cos x+x^2-1}{\sin^4 x}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

+ $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

+ $f(-x)=\dfrac{\cos(-x)+(-x)^2-1}{\sin^4(-x)}=\dfrac{\cos x+x^2-1}{\sin^4 x}=f(x),\forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) $y=f(x)=\dfrac{\sin^4 x+1}{2+\cos^6 x}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

+ $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

+ $f(-x)=\dfrac{\sin^4(-x)+1}{2+\cos^6(-x)}=\dfrac{\sin^4 x+1}{2+\cos^6 x}=f(x),\forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 19. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y=f(x)=\tan x+\cot x$ b) $y=f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{9\pi}{2}\right)$

c) $f(x)=\dfrac{\sin^{2020n} x+2020}{\cos x},n\in\mathbb{Z}$

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có $\forall x\in D$: $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

NX: $f(x)=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(2x)$.

Ta có $\forall x\in D:\ f(-x)=\cos(-2x)=\cos(2x)=f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

+ NX: $\sin^{2020n}(-x)=(-\sin x)^{2020n}=\sin^{2020n}(x),\ \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Do đó $\forall x\in D:\ f(-x)=\frac{\sin^{2020n}(-x)+2020}{\cos(-x)}=\frac{\sin^{2020n}(x)+2020}{\cos(x)}=f(x)$.

Suy ra hàm số là hàm số chẵn $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

+ Với $n=0$ thì $\sin^{2020n}(x)=1$. Do đó $\forall x\in D:\ f(-x)=\frac{2021}{\cos(-x)}=\frac{2021}{\cos(x)}=f(x)$.

Suy ra hàm số là hàm số chẵn với $n=0$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Câu 20. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=3m\sin 4x+\cos 2x$ là hàm chẵn.

Lời giải

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.
- Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì $f(-x)=f(x),\ \forall x\in D$.

$\Leftrightarrow 3m\sin(-4x)+\cos(-2x)=3m\sin 4x+\cos 2x,\ \forall x\in D$

$\Leftrightarrow -3m\sin(4x)+\cos(2x)=3m\sin 4x+\cos 2x,\ \forall x\in D$

$\Leftrightarrow 6m\sin(4x)=0,\ \forall x\in D$

$\Leftrightarrow m=0$.

DẠNG 4. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1.Hàm số $y=\sin x$:

* Đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

* Nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

2.Hàm số $y=\cos x$:

* Đồng biến trên các khoảng $(-\pi+k2\pi;\ k2\pi),k\in\mathbb{Z}$.

* Nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi;\ \pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}$.

3.Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

4.Hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(k\pi;\,\pi+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

Câu 21. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau

a) $y=\sin x$ trên $\left(-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{3}\right)$ b) $y=\cos x$ trên $\left(\frac{\pi}{3};\,\frac{3\pi}{2}\right)$

c) $y=\cot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ trên $\left(-\frac{3\pi}{4};\,-\frac{\pi}{2}\right)$ d) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left(-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{2}\right)$

Bài giải

a) y đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$.

b) y nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$, đồng biến trên $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

c) $x\in\left(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{11\pi}{12};-\frac{2\pi}{3}\right)$. Suy ra y nghịch biến trên $\left(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right)$.

d) $x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{6}\right)$.

y đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right)$, nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ và không xác định tại $x=\frac{\pi}{6}$.

DẠNG 5. TẬP GIÁ TRỊ, MIN_MAX CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

*Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền $D\subset R$.

1.Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $\begin{cases}f(x)\le M,\forall x\in D\\ \exists x_0\in D,f(x_0)=M\end{cases}$

2.Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$trên D nếu $\begin{cases}f(x)>m,\forall x\in D\\ \exists x_0\in D,f(x_0)=m\end{cases}$

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1.Tính bị chặn của hàm số lượng giác.
2.Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa $\sin$ và $\cos$.

Lưu ý

1.Bất đẳng thức AM – GM.

a. Với hai số:

Cho hai số thực a,b là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

b. Với n số:

Cho hai số thực $x_1;x_2;x_3;...;x_n$ là các số dương $n\in N^*$, ta có $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n}$ dấu bằng xảy ra khi $x_1=x_2=x_3=...=x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thuwcsBunyakovsky dạng thông thường.

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq\left(ac+bd\right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ hai số

Với hai bộ số $\left(a_1;a_2;...;a_n\right)$ và $\left(b_1;b_2;...;b_n\right)$ ta có

$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakopvsky ta có $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq 4abcd$

Câu 22. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm tập giá trị của hàm số $y=2\cos x+1$.

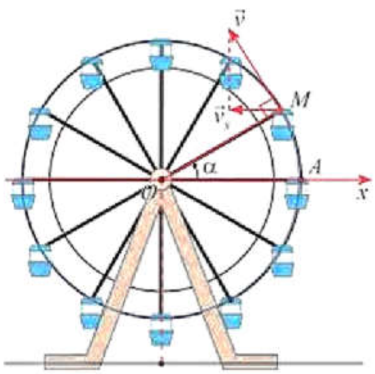
Lời giải

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $-1\leq\cos x\leq 1$

Suy ra: $-1\leq 2\cos x+1\leq 3$

Vậy tập giá trị của hàm số y là $[-3;1]$

Câu 23. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha=(Ox,OM)$ theo hàm số $v_x=0,3\sin\alpha(m/s)$ (Hình 11).



Hình 11

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên $(0\leq\alpha\leq 2\pi)$, góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

Lời giải

a) Do $-1\leq\sin\alpha\leq 1$ nên $-0,3\leq 0,3\sin\alpha\leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3(m)$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3\ (m)$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số sin, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0\leq\alpha\leq 2\alpha$), v_x tăng khi $\pi\leq\alpha\leq 2\pi$

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

a) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-3$ b) $y=-5+2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $y=2\sqrt{\cos 3x}-1$ d) $y=\frac{\sin^2(3x)}{2}-3\cos^2(3x)$

Bài giải

a) Ta có $-1\leq\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)\leq 1$

$\Rightarrow -2\leq 2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)\leq 2$

$\Rightarrow -5\leq 2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-3\leq 1$

Suy ra $y_{\max}=-1$ khi $\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

$y_{\min} = -5$ khi $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $0 \le \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \le 1$.

$\Rightarrow 0 \le 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \le 2$

$\Rightarrow -5 \le 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 5 \le -3$

Suy ra $y_{\min} = -5$ khi $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$y_{\max} = -3$ khi $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có $0 \le \sqrt{\cos 3x} \le 1$

$\Rightarrow -1 \le 2\sqrt{\cos 3x} - 1 \le 1$

Suy ra $y_{\min} = -1$ khi $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$y_{\max} = 1$ khi $\cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có $y = \frac{\sin^2 3x - 6\left(1 - \sin^2 3x\right)}{2} = \frac{7\sin^2 3x - 6}{2}$.

$0 \le \sin^2 3x \le 1 \Rightarrow -3 \le \frac{7\sin^2 3x - 6}{2} \le \frac{1}{2}$

Suy ra $y_{\min} = -3$ khi $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$y_{\max} = \frac{1}{2}$ khi $\sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 4 - 2\cos 2x$.

b) $y = \sqrt{3 + \sin^{2018} x}$.

c) $y = \sin x - \cos x + 3$.

d) $y = \sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x + 5$

e) $y = 4\cos^2 x - 4\cos x + 3$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

f) $y = \cos 2x + 5\sin x + 2$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

Lời giải

a) $y = 4 - 2\cos 2x$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-1 \le \cos 2x \le 1 \Leftrightarrow 2 \ge -2\cos 2x \ge -2 \Leftrightarrow 6 \ge 4 - 2\cos 2x \ge 2$.

Ta có $y = 6$ khi $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và

$y=2$ khi $\cos 2x=1 \Leftrightarrow 2x=k2\pi, (k\in Z) \Leftrightarrow x=k\pi$.

Vậy $\max y=6$ khi $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $\min y=2$ khi $x=k\pi$.

b) $y=\sqrt{3+\sin^{2018}x}$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow 0\le \sin^{2018}x\le 1 \Leftrightarrow 3\le 3+\sin^{2018}x\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}\le\sqrt{3+\sin^{208}x}\le 2$.

Ta có $y=\sqrt{3}$ khi $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, (k\in\mathbb{Z})$ và $y=2$ khi $\sin x=\pm1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $\max y=2$ khi $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $\min y=\sqrt{3}$ khi $x=k\pi$.

c) $y=\sin x-\cos x+3$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $-\sqrt{(1^2+1^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}\le \sin x-\cos x\le\sqrt{(1^2+1^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}+3\le \sin x-\cos x+3\le\sqrt{2}+3$.

Ta có $y=-\sqrt{2}+3$ khi $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$ và $y=\sqrt{2}+3$ khi $x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $\min y=-\sqrt{2}+3$ khi $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$, $\max y=\sqrt{2}+3$ khi $x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

d) TXĐ: $\mathbb{R}$.

□Ta có $y=\sin 2x-\cos 2x+5$ hay $y=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+5$

$\forall x\in\mathbb{R}, -1\le\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, 5-\sqrt{2}\le\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+5\le 5+\sqrt{2}$

□Ta có $\begin{cases} y\ge 5-\sqrt{2},\forall x\in\mathbb{R} \\ y\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=5-\sqrt{2}\end{cases}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là $5-\sqrt{2}$.

□Ta có $\begin{cases} y\le 5+\sqrt{2},\forall x\in\mathbb{R} \\ y\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=5+\sqrt{2}\end{cases}$ nên giá trị lớn nhất của hàm số là $5+\sqrt{2}$.

e) Đặt $t=\cos x$. Với $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$ ta có $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}$

Khi đó ta có $y=f(t)=4t^2-4t+3$, $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}$

Ta có bảng biến thiên:

t		$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\dfrac{1}{2}$	
$f(t)$		$6+2\sqrt{3}$ $\searrow$ 2	

Từ bảng biến thiên ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ là $6+2\sqrt{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ là 2.

f) Ta có $y=-2\sin^2 x+5\sin x+3$.

Đặt $t=\sin x$. Với $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{6}$ ta có $\frac{1}{2}\le t\le 1$.

Khi đó ta có $y=f(t)=-2t^2+5t+3$, $\frac{1}{2}\le t\le 1$.

Ta có bảng biến thiên:

t		$\frac{1}{2}$ $\quad\quad$ 1	
$f(t)$		$5 \nearrow 6$	

Từ bảng biến thiên ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ là 6.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ là 5.

Câu 26. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{1+\sin x}+2$ b) $y=3\sin x+4\cos x$

c) $y=(\sin x-2\cos x)(2\sin x+\cos x)-1$ d) $y=\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+3}$.

Lời giải

a) $y=\sqrt{1+\sin x}+2$. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, ta có:

$-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow 0\le 1+\sin x\le 2\Leftrightarrow 0\le\sqrt{1+\sin x}\le\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\le\sqrt{1+\sin x}+2\le\sqrt{2}+2\Leftrightarrow 2\le y\le\sqrt{2}+2$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=2\Leftrightarrow\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ và $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\sqrt{2}+2\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

b) $y=3\sin x+4\cos x$. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $|y|=|3\sin x+4\cos x|\le\sqrt{(3^2+4^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}=5\Leftrightarrow -5\le y\le 5$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=-5$ và $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$.

c) $y=(\sin x-2\cos x)(2\sin x+\cos x)-1$. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=2\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\cos^2 x-1$

$\Leftrightarrow y=-2\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x-1\Leftrightarrow\frac{3}{2}\sin 2x+2\cos 2x=-y-1\ (*)$.

Để tồn tại giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm

$\Leftrightarrow\frac{9}{4}+4\ge(-y-1)^2\Leftrightarrow(y+1)^2\le\frac{25}{4}\Leftrightarrow-\frac{7}{2}\le y\le\frac{3}{2}$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=-\frac{7}{2}$ và $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\frac{3}{2}$.

d) $y=\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+3}$.

Dễ thấy $\sin x-\cos x+3\ne 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y(\sin x-\cos x+3)=\sin x+\cos x-1\Leftrightarrow(y-1)\sin x-(y+1)\cos x=-3y-1\ (*)$.

Để tồn tại giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm

$\Leftrightarrow (y-1)^2+(y+1)^2 \ge (-3y-1)^2 \Leftrightarrow 7y^2+6y-1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le y \le \frac{1}{7}$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y=-1$ và $\max_{\mathbb{R}} y=\frac{1}{7}$.

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

a) $y=3\sin x-4\cos x$

b) $y=2(\sin x-\cos x)^2+2\cos 2x+5\sin x.\cos x-3$

c) $y=\dfrac{2\sin x+\cos x+2}{\sin x+\cos x-2}$

d) $y=\dfrac{2\cos x+1}{\sin x-\cos x+3}$

Lời giải

a) $y=3\sin x-4\cos x$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0=3\sin x-4\cos x$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow {y_0}^2 \le 3^2+(-4)^2=25 \Leftrightarrow -5 \le y_0 \le 5$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -5.

b) $y=2(\sin x-\cos x)^2+2\cos 2x+5\sin x.\cos x-3$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0=2(\sin x-\cos x)^2+2\cos 2x+5\sin x.\cos x-3$ có nghiệm

$\Leftrightarrow y_0=2\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x-1$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 2y_0+2=4\cos 2x+\sin 2x$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (2y_0+2)^2 \le 17$

$\Leftrightarrow 4{y_0}^2+8y_0-13 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2-\sqrt{17}}{2} \le y_0 \le \dfrac{-2+\sqrt{17}}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{-2+\sqrt{17}}{2}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\dfrac{-2-\sqrt{17}}{2}$.

c) $y=\dfrac{2\sin x+\cos x+2}{\sin x+\cos x-2}$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0=\dfrac{2\sin x+\cos x+2}{\sin x+\cos x-2}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (y_0-2)\sin x+(y_0-1)\cos x=2+2y_0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (2y_0+2)^2 \le (y_0-2)^2+(y_0-1)^2$

$\Leftrightarrow 2{y_0}^2+14y_0-1\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-7-\sqrt{51}}{2}\le y_0\le \dfrac{-7+\sqrt{51}}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{-7+\sqrt{51}}{2}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\dfrac{-7-\sqrt{51}}{2}$.

d) $y=\dfrac{2\cos x+1}{\sin x-\cos x+3}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0=\dfrac{2\cos x+1}{\sin x-\cos x+3}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow y_0\sin x-(y_0+2)\cos x=1-3y_0$ có nghiệm $\Leftrightarrow (1-3y_0)^2\le {y_0}^2+(y_0+2)^2 \Leftrightarrow 7{y_0}^2-10y_0-3\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5-\sqrt{46}}{7}\le y_0\le \dfrac{5+\sqrt{46}}{7}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{5+\sqrt{46}}{7}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\dfrac{5-\sqrt{46}}{7}$.

Câu 28. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\sin 3x+2\cos 3x+1}{\sin 3x+\cos 3x+2}$. **b)** $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}+\cos\dfrac{4x}{1+x^2}+1$.

c) $y=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1$. **d)** $y=3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

a) $y=\dfrac{\sin 3x+2\cos 3x+1}{\sin 3x+\cos 3x+2}$ (1)

Ta có $\sin 3x+\cos 3x+2\ne 0\quad \forall x$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Giả sử y_0 là một giá trị hàm số, khi đó tồn tại $x\in\mathbb{R}$ sao cho:

$y_0(\sin 3x+\cos 3x+2)=\sin 3x+2\cos 3x+1$.

$\Leftrightarrow (y_0-1)\sin 3x+(y_0-2)\cos 3x=1-2y_0$.

Phương trình có nghiệm khi:

$(y_0-1)^2+(y_0-2)^2\ge(1-2y_0)^2$.

$\Leftrightarrow 2y_0^2+2y_0-4\le 0$.

$\Leftrightarrow -2\le y_0\le 1$.

b) $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}+\cos\dfrac{4x}{1+x^2}+1$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

• Đặt $t=\dfrac{2x}{1+x^2}$, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}|t|=\dfrac{2|x|}{1+x^2}\le 1,\forall x\ne 0\\ x=0\Rightarrow t=0\end{array}\right\}\Rightarrow t\in[-1;1].$$

• Hàm số trở thành $y=\sin t+\cos 2t+1,\quad \forall t\in[-1;1]$.

$\Rightarrow y=-2\sin^2 t+\sin t+2$.

Đặt $a=\sin t$ suy ra $a\in\left[\sin(-1);\sin(1)\right]$.

Hàm số trở thành $y=-2a^2+a+2$.

Ta có bảng biến thiên:

a	$\sin(-1)$		$\frac{1}{4}$		$\sin(1)$
y			$\frac{17}{8}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	$-2(\sin(1))^2+\sin(1)+2$
	$-2(\sin(-1))^2+\sin(-1)+2$				

Vậy:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y=-2(\sin(-1))^2+\sin(-1)+2$.

Giá trị lớn nhất của hàm số là $y=\dfrac{17}{8}$.

c) $y=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow -2\le y\le 2$.

d) $y=3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y=3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)=5\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

(với $\cos\alpha=\dfrac{3}{5};\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$).

$\Rightarrow -5\le y\le 5$.

Câu 29. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta đều có $\sin^6 x\cdot\cos^4 x\le\dfrac{108}{3125}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 5 số không âm $\sin^2 x$, $\sin^2 x$, $\sin^2 x$, $\dfrac{3}{2}\cos^2 x$ và $\dfrac{3}{2}\cos^2 x$, ta có

$$\sin^2 x+\sin^2 x+\sin^2 x+\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\cos^2 x\ge 5\sqrt[5]{\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\frac{3}{2}\cos^2 x\cdot\frac{3}{2}\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 3\ge 5\sqrt[5]{\frac{9}{4}\sin^6 x\cdot\cos^4 x}$$

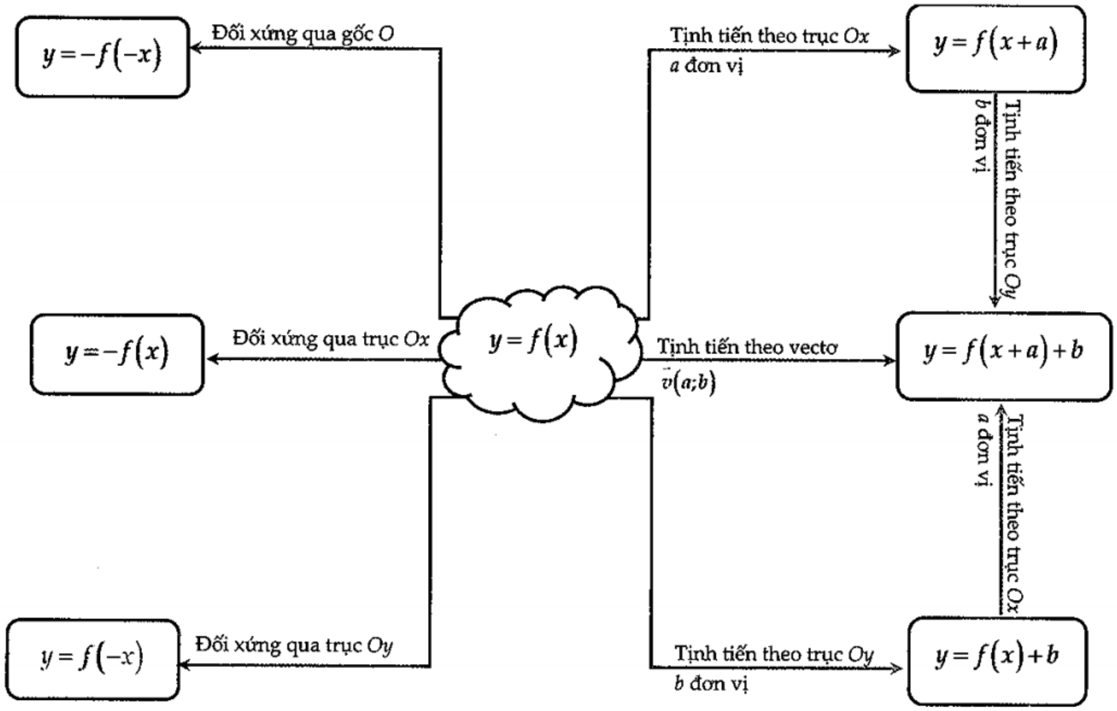
$$\Leftrightarrow \sin^6 x\cdot\cos^4 x\le\frac{108}{3125}\text{ (đpcm).}$$

DẠNG 6. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Các kiến thức cơ bản về dạng của hàm số lượng giác được đưa ra ở phần I:

Lý thuyết cơ bản: Sau đây ta bổ sung một số kiến thức lý thuyết để giải quyết bài toán nhận dạng đồ thị hàm số lượng giác một cách hiệu quả.

Sơ đồ biến đổi đồ thị hàm số cơ bản:



Các kiến thức liên quan đến suy diễn đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy diễn:

- Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm:

*Đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.

*Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=f\left(x\right)$.

- Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ gồm:

*Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.

*Phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm bên phải trục Oy

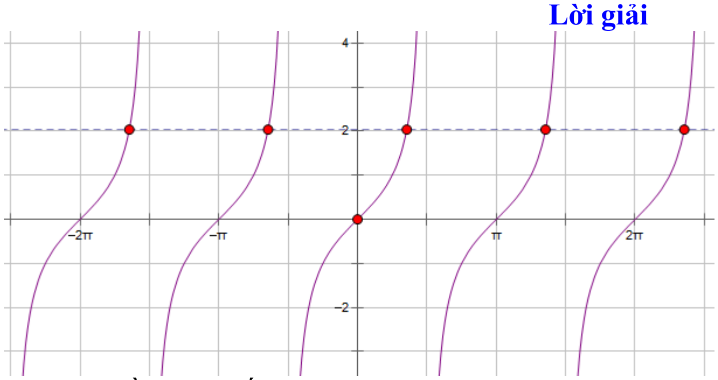
- Đồ thị hàm số $y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$ với $f\left(x\right)=u\left(x\right).v\left(x\right)$ gồm:

*Đối xứng phần đồ thị $y=f\left(x\right)$ trên trên miền $u\left(x\right)<0$ qua trục hoành.

*Phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên miền thỏa mãn $u\left(x\right)\ge 0$

Câu 30. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Có bao nhiêu giá trị x trên đoạn $[-2\pi;2\pi]$ thoả mãn điều kiện $\tan x=2$?

Lời giải



Dựa vào đồ thị ta thấy có 5 giá trị x thỏa mãn

Câu 31. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Dựa vào đồ thị của hàm số $y=\sin x$, xác định các giá trị $x\in[-\pi;\pi]$ thoả mãn $\sin x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hình $\sin$, ta thấy $\sin x = \frac{1}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{-\pi}{6}$

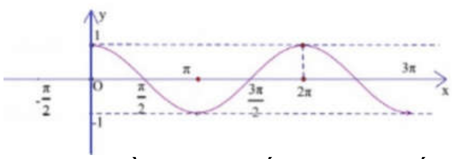
Câu 32. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Li độ $s(cm)$ của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2\cos \pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1;1](cm)$.

Hình 6

(Theo https://www.britannica.com/sciencel simple-harmonic-motion)

Lời giải

Trong 3 giây đầu, $0 \le t \le 3$ nên $0 \le \pi t \le 3\pi$



Dựa vào đồ thị hàm số côsin, ta thấy $\cos \pi t = 1$ khi $\pi t = 0$ và $\pi t = 2\pi$

Vậy con lắc có li độ lớn nhất tại các thời điểm $t = 0$ và $t = 2$

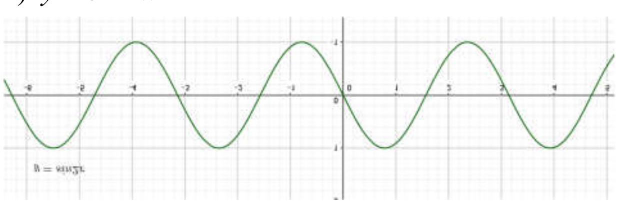
Câu 33. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \sin 2x$ b) $y = |\sin x|$

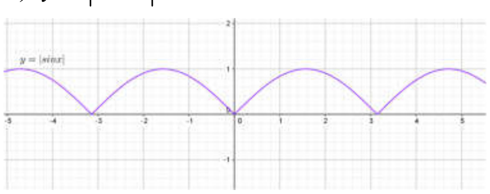
c) $y = \tan \frac{x}{2}$ d) $y = -\cot x$

Bài giải

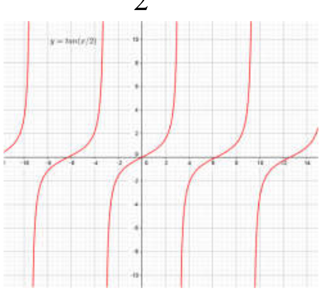
a) $y = \sin 2x$



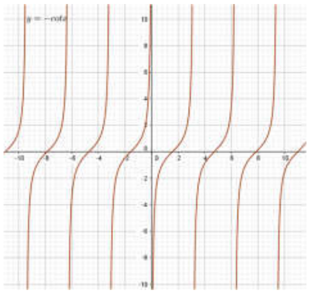
b) $y = |\sin x|$



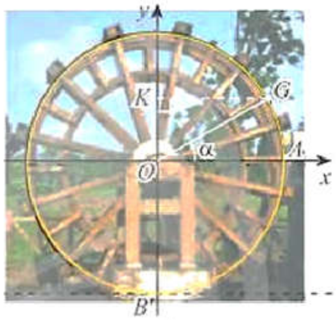
c) $y = \tan \frac{x}{2}$



d) $y=-\cot x$



Câu 34. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha=(OA,OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Lời giải

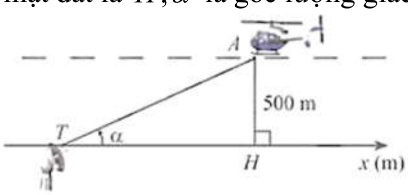
a) $h=3+3.\sin\alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0\le\alpha\le 4\pi$

Khi $h=1,5$. Suy ra $\sin\alpha=\frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha=\frac{7\pi}{6};\alpha=\frac{11\pi}{6};\alpha=\frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha=\frac{23\pi}{6}$

Câu 35. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H,α là góc lượng giác $(Tx,TA)(0<\alpha<\pi)$.



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H=500\cdot\cot\alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$ thì $\frac{-\sqrt{3}}{3}<\cot\alpha<\sqrt{3}$

Vậy $x_H\in\{-288,7;866\}$