BÀI 4. KHOẢNG CÁCH

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a, kí hiệu d(M,a).

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến (P), kí hiệu d(M,(P)).

Chú ý:

Ta quy ước:

- d(M,a) = 0 khi và chỉ khi M thuộc a;
- d(M,(P)) = 0 khi và chỉ khi M thuộc (P).

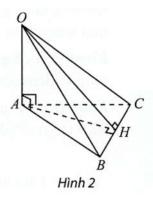
Nhận xét:

- a) Lấy điểm N tuỳ ý trên đường thẳng a, ta luôn có $d(M,a) \le MN$.
- b) Lấy điểm N tuỳ ý trên mặt phẳng (P), ta luôn có $d(M,(P)) \le MN$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $O \cdot ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết OA = a.

- a) Tính khoảng cách từ điểm O đến (ABC).
- b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.

Giải



- a) Ta có $OA \perp (ABC)$, suy ra d(O,(ABC)) = OA = a.
- b) Vẽ $AH \perp BC$, ta có $OH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc), suy ra d(O,BC) = OH.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OAH, ta có $OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy ta có
$$d(O,BC) = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$
.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song **Kiến thức trọng tâm**

Định nghĩa

Khoảng cách giữu hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b, kí hiệu d(a,b).

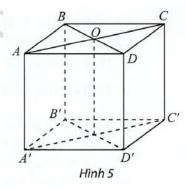
Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P), kí hiệu d(a,(P)).

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì trên (P) đến (Q), kí hiệu d((P),(Q)).

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a:

- a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và (AA'C'C);
- b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AA'D'D) và (BB'C'C).

Giải



a) Ta có
$$DD' / /AA', d(DD', (AA'C'C)) = d(D, (AA'C'C)).$$

Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Ta có $DO \perp AC$ và $DO \perp AA'$, suy ra $DO \perp (AA'C'C)$.

Vậy
$$d(DD', (AA'C'C)) = d(D, (AA'C'C)) = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
.

b) Ta có
$$(AA'D'D)//(BB'C'C)$$
 suy ra $d((AA'D'D),(BB'C'C)) = d(A,(BB'C'C))$.

Do $AB \perp BB'$ và $AB \perp BC$, suy ra $AB \perp (BB'B'C)$.

Vậy
$$d((AA'D'D),(BB'C'C)) = AB = a$$
.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

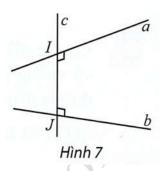
Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

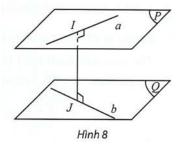
Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a và b.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu d(a,b).



Chú ý:

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song với nó và chứa đường còn lại.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



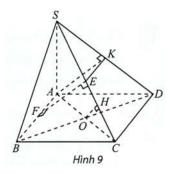
Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- a) SB và CD;
- b) AB và SC.

Giải

a) Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp SB$.

Mặt khác $BC \perp CD$, suy ra BC là đoạn vuông góc chung của hai đường SB và CD. Ta có d(SB,CD) = BC = a.



b) Cách 1. Ta có $AB \perp (SAD)$ và SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD). Vẽ $AK \perp SD, KE / /AB, EF / /AK$. Ta có $AB \perp AK, AK \perp SD$, suy ra $AK \perp SC$. Do EF / /AK, suy ra ta cũng có $EF \perp AB$ và EF cắt AB tại E cắt E và EF cắt E cắt E cách E c

Các kết quả trên chứng tỏ EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC

Trong tam giác *SAD* vuông cân tại *A* ta có $AK = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy
$$d(AB,SC) = EF = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
.

Cách 2. Ta có mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB, suy ra:

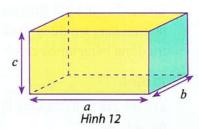
$$d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD)) = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

4. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

Thể tích khối hộp chữ nhật

Kiến thức trọng tâm

Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước V = abc.

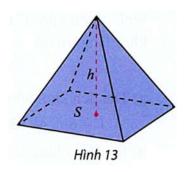


Thể tích khối chóp

Khoảng cách h từ đỉnh đến mặt phẳng đáy của một hình chóp gọi là chiều cao của hình chóp đó. Người ta chứng minh được công thức sau đây:

Kiến thức trọng tâm

Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao $V = \frac{1}{3}Sh$.



Thể tích khối chóp cụt đều

Kiến thức trọng tâm

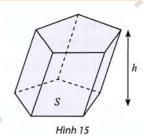
Để tìm thể tích khối chóp cụt đều, ta sử dụng công thức sau đây: $V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS'} + S'\right)$ với h là chiều cao và S, S' là diện tích hai đáy.

Thể tích khối lăng trụ

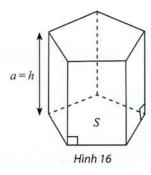
Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng đáy của hình lăng trụ là chiều cao của hình lăng trụ đó.

Kiến thức trọng tâm

Thể tích khối lăng trụ bằng tích điện tích đáy và chiều cao V = Sh.



Chú ý: Ta gọi khối lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy là khối lăng trụ đứng. Chiều dài cạnh bên a của khối lăng trụ đứng bằng chiều cao h và ta có công thức: V = Sa.

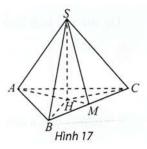


Ví dụ 4.

- a) Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước là: 6a; 4a; 3a.
- b) Tính thể tích khối tứ diện đều SABC cạnh a.
- c) Cho khối lăng trụ $ABCD \cdot ABCD \cdot ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 2a, cạnh bên AA = 2a, hình chiếu của A' trên (ABCD) trùng với giao điểm O của AC và BD. Tính thể tích khối lăng trụ đó.

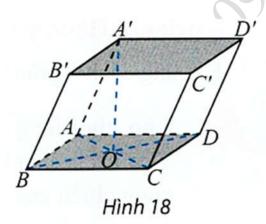
Giải

- a) Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước: $V = 6a \cdot 4a \cdot 3a = 72a^3$.
- b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC). Ta có ba tam giác vuông SHA, SHB, SHC bằng nhau, suy ra HA = HB = HC. Vậy H là tâm của tam giác đều ABC.



Ta có:
$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
, $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Khối tứ diện đều SABC có thể tích là $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

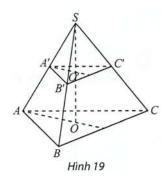


c) Chiều cao của khối lăng trụ: $h = AO = \sqrt{AA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V = S \cdot h = 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}$.

Ví dụ 5. Cắt khối chóp tam giác đều *S.ABC* với cạnh đáy bằng *a* và chiều cao 2*a* bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cụt đều được tạo thành.

Giải



Gọi $ABC \cdot A'B'C'$ là khối chóp cụt đều được tạo thành, O và O' lần lượt là tâm của hai đáy ABC và A'B'C' (Hình 19). Ta có:

Chiều cao của khối chóp cụt đều là $h = OO' = \frac{SO}{2} = \frac{2a}{2} = a$;

Tam giác đều ABC có diện tích: $S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

Tam giác đều A'B'C' có cạnh $A'B' = \frac{AB}{2}$ nên có diện tích: $S' = \frac{AB^2\sqrt{3}}{16} = \frac{S}{4}$.

Do đó, thể tích khối chóp cụt đều được tạo thành là:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS'} + S'\right) = \frac{1}{3}a\left(S + \frac{S}{2} + \frac{S}{4}\right) = \frac{7aS}{12} = \frac{7a}{12} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}.$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính khoảng cách

Câu 1. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cho biết SA = a và SA vuông góc với (ABCD).

- a) Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAD).
- b) Tính khoảng cách từ điểm A đến cạnh SC.

Câu 2. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách:

- a) Giữa hai mặt phẳng $\left(ACD'\right)$ và $\left(A'C'B\right)$.
- b) Giữa đường thẳng AB và (A'B'C'D').

Câu 3. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đều bằng a và vuông góc từng đôi một. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- a) OA và BC;
- b) OB và AC.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông tại B, biết SA = AB = BC = a. Tính theo a khoảng cách:

- a) Từ điểm B đến đường thẳng SC.
- b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).
- c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách:

- a) Từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').
- b) Giữa hai đường thẳng song song BC và AD'.
- c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và BC.

- **Câu 6.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot ABCD \cdot$
- a) Giữa hai đường thẳng AB và C'D'.
- b) Giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (A'B'C'D').
- c) Từ điểm A đến đường thẳng B'D'.
- d) Giữa hai đường thẳng AC và B'D'.
- **Câu 7.** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $a, SA \perp (ABC)$ và SA = 2a. Tính theo a khoảng cách:
- a) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).
- b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).
- c) Giữa hai đường thẳng AB và SC.
- **Câu 8.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60° , biết tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a khoảng cách:
- a) Từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).
- b) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).
- c) Giữa hai đường thẳng AB và SC.
- **Câu 9.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có AB = a, $AD = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách:
- a) Từ điểm A đến mặt phẳng (BDD'B').
- b) Giữa hai đường thẳng BD và CD.
- **Câu 10.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và AB = AC = AA' = a. Tính theo a khoảng cách:
- a) Từ điểm A đến đường thẳng B'C'.
- b) Giữa hai đường thẳng BC và AB'.
- **Câu 11.** Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng Δ , hai điểm B,C thuộc Δ sao cho BC = a, diện tích tam giác ABC bằng S. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ theo a,S.
- **Câu 12.** Cho hình chóp S.ABC có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông tại S, AB = a, $SA = \frac{3a}{5}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).
- **Câu 13.** Cho hình thang cân ABCD có AB / / CD, AB = 6a, CD = 14a, AD = BC = 5a.
- a) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên CD. Tính độ dài các đoạn thẳng HK, DH, CK.
- b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

```
Câu 14. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, SAB là tam giác đều,
(SAB) \perp (ABCD), AB = a, AD = 2a.
a) Chứng minh rằng CD / (SAB). Tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB).
b) Chứng minh rằng BC / (SAD). Tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD).
Câu 15. Cho hình lăng trụ ABC. A'B'C' 'có
(A'ABB') \perp (ABC), AA' = 2a, \widehat{A'AB} = 60^\circ. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C').
Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật ABCD \cdot A'B'C'D' có AB = a, AD = 3a, AA' = 2a. Tính khoảng cách
giữa hai đường thẳng:
a) AB và B'C';
b) AA' và BC;
c) BB' và C'D'.
Câu 17. Cho hình chóp S.ABC có SA \perp (ABC), AB \perp BC, SA = AB = 3a, BC = 4a. Tính khoảng
cách:
a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB);
b) Giữa hai đường thẳng SA và BC;
c) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC);
d) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC);
e*) Giữa hai đường thẳng AB và SC.
Câu 18. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, AB = 2a, AD = 3a, tam giác SAB
vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách:
a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB);
b) Giữa hai đường thẳng SB và CD;
c) Giữa hai đường thẳng BC và SA;
d) Từ điểm S đến mặt phẳng (ABCD).
Câu 19. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, AC cắt BD tại O,
SO \perp (ABCD), SA = 2a. Tính khoảng cách:
a) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBD);
b) Giữa hai đường thẳng SO và CD;
c) Từ điểm O đến mặt phẳng (SCD);
d*) Giữa hai đường thắng AB và SD.
Câu 20. Cho hình hộp ABCD \cdot A'B'C'D' có ABCD là hình thoi cạnh a, AA' \perp (ABCD),
AA' = 2a, AC = a. Tính khoảng cách:
```

- a) Từ điểm A đến mặt phẳng (BCC'B');
- b) Giữa hai mặt phẳng (ABB'A') và (CDD'C');
- c*) Giữa hai đường thẳng BD và A'C.
- **Câu 21.** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh 2a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 30° . Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng:
- a) *SB*;
- b) *SC*;
- c) SI.
- **Câu 22.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ đỉnh D' đến đường chéo AC'.
- **Câu 23.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:
- a) SB và AD;
- b) BD và SC.
- **Câu 24.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- **Câu 25.** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, M là trung điểm của SC.
- a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).
- b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG).
- **Câu 26.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và B'C'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và B'D'.
- **Câu 27.** Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI.
- Câu 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với AB = 2a;
- $BC = \frac{3a}{2}$; AD = 3a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của BD. Biết
- góc giữa mặt phẳng $\left(\textit{SCD}\right)$ và mặt phẳng $\left(\textit{ABCD}\right)$ bằng $60^{\circ}.$ Tính khoảng cách
 - a) từ C đến mặt phẳng (SBD).
 - **b)** từ B đến mặt phẳng (SAH).

- **Câu 29.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = 2a; AD = 3a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AC. Biết góc giữa (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Tính khoảng cách:
 - a) Từ H đến (SAB).
 - **b)** Từ H đến (SCD).
 - c) Từ H đến (SBD).
- **Câu 30.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, biết AB = 2a, $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
 - a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
 - b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).
 - c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).
 - d) Gọi M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCM) và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDM).
- **Câu 31.** Cho tứ diện S.ABC có tam giác ABC vuông cân đỉnh B, AB = a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = a.
 - a) Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$.
 - b) Tính khoảng cách từ điểm A đến (SBC).
 - c) Gọi I là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm I đến (SBC).
 - d) Gọi J là trung điểm của AC. Tính khoảng cách từ điểm J đến (SBC).
 - e) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính khoảng cách từ điểm G đến (SBC).
- **Câu 32.** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. O là tâm hình vuông ABCD.
 - a) Tính khoảng cách từ điểm A đến (SBC).
 - b) Tính khoảng cách từ điểm O đến (SBC).
 - c) G_1 là trọng tâm ΔSAC . Từ G_1 kẻ đường thẳng song song với SB cắt OB tại I. Tính khoảng cách từ điểm G_1 đến (SBC), khoảng cách từ điểm I đến (SBC).
 - d) J là trung điểm của SD. Tính khoảng cách từ điểm J đến $\left(SBC\right)$.
 - e) Gọi G_2 là trọng tâm của ΔSDC . Tính khoảng cách từ điểm G_2 đến (SBC).

- **Câu 33.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và (SAB) vuông góc với (ABCD). Gọi I là trung điểm của cạnh AB, E là trung điểm của cạnh BC.
 - a) Chứng minh $(SIC) \perp (SED)$.
 - b) Tính khoảng cách từ điểm I đến (SED).
 - c) Tính khoảng cách từ điểm C đến (SED).
 - d) Tính khoảng cách từ điểm A đến (SED).
- **Câu 34.** Cho hình chóp S.ABCD, CÓ $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$, đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a.
 - a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).
 - b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).
 - c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (P) song song với (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.
- **Câu 35.** Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy; $SA = a\sqrt{3}$. Tam giác ABC đều cạnh a. Tính khoảng cách
 - a) SA và BC
 - b) SB và CI với I là trung điểm của AB
 - c) Từ B tới mặt phẳng (SAC)
 - d) Từ J tới mặt phẳng (SAB) với J là trung điểm của SC
- **Câu 36.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = 2a, AD = 3a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc AB với AH = HB. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° .
 - a) Tính góc giữa CD và SB
 - b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)
 - c) $ext{Tính khoảng cách từ } O$ đến mặt phẳng $\left(ext{SBC}
 ight)$
 - d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathit{AD}\$ và $\mathit{SB}\$
 - e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SE với E là điểm thuộc AD sao cho AE = a
- **Câu 37.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AD > AB = 2a. Gọi M là trung điểm CD. Tam giác SAM cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.Biết $\left(\widehat{SD}; \left(\widehat{ABCD}\right)\right) = \alpha$ với
- $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{6a}{\sqrt{5}}$.

- a) Tính khoảng cách từ C đến (SAD).
- b) Tính khoảng cách gữa hai đường thẳng SA và DN, với $N \in BC$ và $CN = \frac{1}{3}BN$.
- **Câu 38.** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a; $AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB. Tính khoảng cách:
 - a) từ A tới mặt phẳng (SBD).B) giữa hai đường SH và CD.
 - c) giữa hai đường SH và AC.d) giữa hai đường SB và CD.
 - e) giữa hai đường BC và SA.f) giữa hai đường SC và BD.
- **Câu 39.** Cho hình chóp tam giác S.ABC, đáy ABC là tam giác đều cạnh 2a. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn AI sao cho $AH = \frac{1}{2}HI$. Biết góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách
 - a) từ M đến mặt phẳng (SAI), với M là trung điểm của SC.
 - b) giữa hai đường thẳng SA và BC.
 - c) giữa hai đường SB với AM, với M là trung điểm của SC.
- **Câu 40.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$; AD = 2a. Biết tam giác SAB là tam giác cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$. Gọi H là trung điểm của AB. Tính khoảng cách
 - a) từ A đến (SBD).
 - b) giữa hai đường thẳng SH và BD.
 - c) giữa hai đường thẳng BC và SA.
- **Câu 41.** (SGK CTST 11 Tập 2) Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo, $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).
- **Câu 42.** (SGK CTST 11 Tập 2) Cho hai tam giác cân *ABC* và *ABD* có đáy chung *AB* và không cùng nằm trong một mặt phẳng.
- a) Chứng minh rằng $AB \perp CD$.
- b) Xác định đoạn vuông góc chung của AB và CD.
- **Câu 43.** (SGK CTST 11 Tập 2) Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.
- a) Chứng minh $AB \perp (SIJ)$.
- b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Dang 2. Tính thể tích

- **Câu 44.** (SGK CTST 11 Tập 2) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60° .
- a) Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.
- b) Tính thể tích của khối lăng trụ.
- **Câu 45.** (SGK CTST 11 Tập 2) Cho hình hộp đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bên AA' = 2a và đáy ABCD là hình thoi có AB = a và $AC = a\sqrt{3}$.
- a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AA.
- b) Tính thể tích của khối hộp.
- **Câu 46.** (SGK CTST 11 Tập 2) Cho hình chóp tứ giác đều $S \cdot ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a và có O là giao điểm hai đường chéo của đáy.
- a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.
- b) Tính thể tích của khối chóp.
- **Câu 47.** (SGK CTST 11 Tập 2) Tính thể tích của khối chóp cụt lục giác đều $ABCDEF \cdot A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}$, OO' = a.
- **Câu 48.** Cho khối chóp đều $S \cdot ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.
- **Câu 49.** Cho khối lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh AA' = a và hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.
- Câu 50. Cho hình chóp cụt đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy lớn ABCD là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, đáy nhỏ A'B'C'D' là hình vuông cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng a. Tính theo a thể tích khối chóp cụt $ABCD \cdot A'B'C'D'$.
- **Câu 51.** Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$; AB = a; $AC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{SBA} = 60^{\circ}$, $\widehat{BAC} = 45^{\circ}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.
- Câu 52. Cho khối chóp đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.
- **Câu 53.** Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có A'B'C' và AA'C' là hai tam giác đều cạnh a. Biết $(ACC'A') \perp (A'B'C')$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.
- **Câu 54.** Cho tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOB} = 90^\circ; \widehat{BOC} = 60^\circ; \widehat{COA} = 120^\circ$. Tính theo a thể tích khối tứ diện OABC.

Câu 55. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, biết $SO \perp (ABCD)$, $AC = 2a\sqrt{3}$, BD = 2a và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

Câu 56. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC), SA = a$ và đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M, AN vuông góc với SC tại N. Tính theo a thể tích khối chóp S.AMN.

Câu 57. Cho hình chóp S. ABC có $SA \perp (ABC)$ và $\widehat{BAC} = 60^{\circ}$, biết diện tích các tam giác ABC, SAB và SAC lần lượt là $3\sqrt{3}$;9;12. Tính thể tích khối chóp S.ABC

Câu 58. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC), SB = 2a. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Câu 59. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot ABC$ có BB = a, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Câu 60. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

Câu 61. Tính thể tích của khối chóp cụt tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có chiều cao bằng 3a, AB = 4a, A'B' = a.

Câu 62. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại $B,AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Các mặt bên (SAB),(SBC) tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp S.ABC.

Câu 63. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B có AB = a, AD = 3a, BC = a. Tính thể tích khối chóp S.BCD theo a.

Câu 64. Cho hình lăng trụ đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a.

Biết
$$d(A,(A'BC)) = \frac{a\sqrt{57}}{12}$$
. Tính $V_{ABC \cdot A'B'C'}$.

Câu 65. Một hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có ba kích thước là 2cm, 3cm và 6cm. Tính thể tích của khối tứ diện ACB'D'.

Câu 66. Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có đường cao HH' = 2a. Cho biết AB = 2a, A'B' = a. Gọi B_1 , C_1 lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính thể tích của:

- a) Khối chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$;
- b) Khối lăng trụ $AB_1C_1 \cdot A'B'C'$.

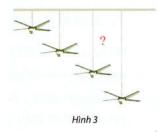
Dạng 3. Ứng dụng

Câu 67. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình 22) có mặt sàn cầu cách mặt đường 3,5m, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu

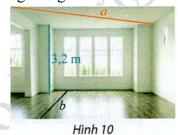
là 0.8m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



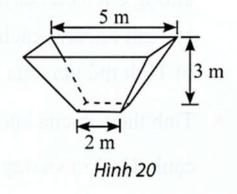
Câu 68. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một quạt trần có bề dày của thân quạt là 20cm. Người ta muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn nhà là 2,5m. Hỏi phải làm cán quạt dài bao nhiều? Cho biết trần nhà cao 3,6 m.



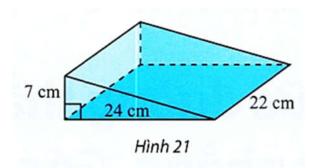
Câu 69. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một căn phòng có trần cao 3,2 m. Tính khoảng cách giữa một đường thẳng a trên trần nhà và đường thẳng b trên sàn nhà.



Câu 70. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính thể tích của một bồn chứa có dạng khối chóp cụt đều có kích thước được cho như trong Hình 20.



Câu 71. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính thể tích cái nêm hình lăng trụ đứng có kích thước như trong Hình 21.



Câu 72. Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay với vận tốc $500 \, km / h$ và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15° . Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiều kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Câu 73. Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiều độ? Vì sao?

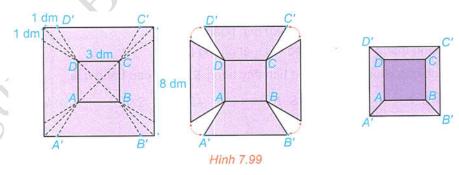
Câu 74. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng $30\,cm$, $60\,cm$, cạnh bên của sọt dài $50\,cm$. Tính thể tích của sọt.



Hinh 7.98

Câu 75. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8*dm*, bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

- a) Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.
- b) Tính cạnh bên của thùng.
- c) Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiều lít nước?



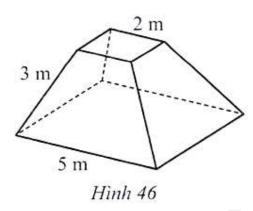
Câu 76. Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$, AB = 5m,

AA' = 3m, AD = 4m. Đáy bể là hình chữ nhật A'B'C'D' được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang. a) Giải tích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.

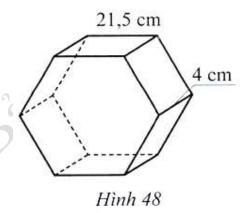
b) Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là $40m^3$.

Câu 77. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh 1*m* để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiều để thùng hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Câu 78. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cựt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài 5m, cạnh đáy trên dài 2m, cạnh bên dài 3m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Câu 79. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là 4*cm* và cạnh lục giác dài 21,5*cm*. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimét khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 80. Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $80\,cm$, đáy nhỏ có cạnh bằng $40\,cm$ và cạnh bên bằng $80\,cm$.



Agusten Bao Tuones. Ophologodos Agusten Bao Tuones.