CHỦ ĐỀ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- **BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11**
- **|**FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

NỘI DUNG CÂU HỎI

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là $184\,cm$, bánh xe trước có đường kính là $92\,cm$, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.

a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.
b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).
c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Câu 2. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức: $B(t)=80+7\sin\frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng $mmHg$ (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

a) 6 giờ sáng;
b) 10 giờ 30 phút sáng;
c) 12 giờ trưa;
d) 8 giờ tối.

Câu 3. Một đường tròn có bán kính $20\,cm$. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{12}$
b) $1{,}5$;
c) 35°;
d) 315°.

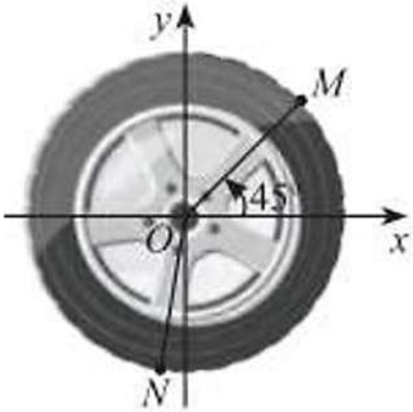
Câu 4. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là $680\,mm$.

Câu 5. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính $9000\,km$. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2\,h$.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1h; 3h; 5h$.
b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường $200000\,km$ sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

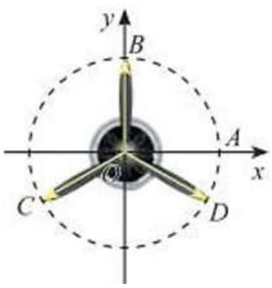
Câu 6. Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON).



Hình 15

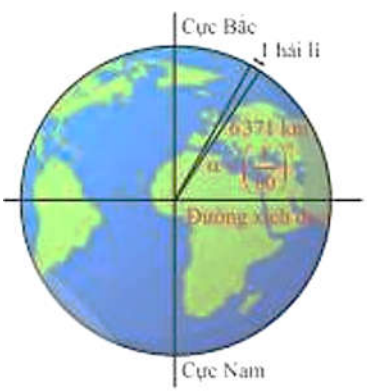
Câu 7. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$; $\frac{-\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$; $\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.



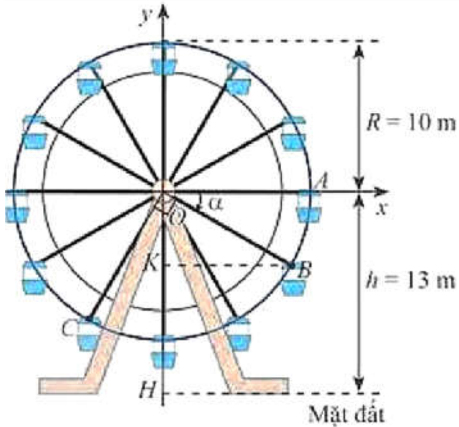
Hình 16

Câu 8. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha=\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là $6371\,km$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

Câu 9. Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.

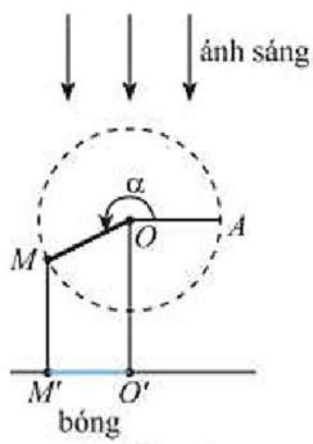


Hình 11

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13+10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha=-30^{\circ}$.

b) Khi điểm B cách mặt đất $4m$ thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 10. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $15cm$? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Câu 11. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là $11rad/s$ (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA=58cm$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Hình 13

Câu 12. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Câu 13. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là $860 mm$.

Câu 14. Kim giờ dài $6cm$ và kim phút dài $11cm$ của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Câu 15. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài $1,75m$ và $1,26m$. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Câu 16. Huyện lị Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lị Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lị đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6378 km$.

Câu 17. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Câu 18. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.

a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là $35cm$. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Câu 19. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Câu 20. Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

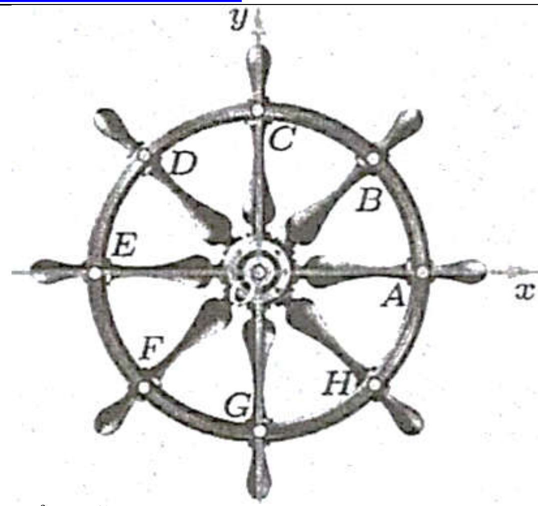
Câu 21. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là bao nhiêu?

Câu 22. Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5cm$ (lấy $\pi = 3,1416$).

Câu 23. Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$ và kim phút dài $13,34cm$. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu?

Câu 24. Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng $60cm$, ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm A, B, C lần lượt tương ứng với vị trí các số $2, 9, 4$.
Tính độ dài các cung nhỏ AB và AC (kết quả tính theo đơn vị centimét và làm tròn đến hàng phần trăm).

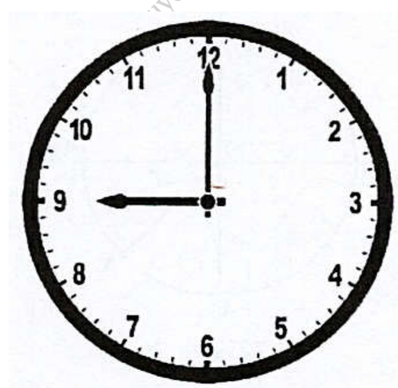
Câu 25. Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thuỷ tương ứng với một đường tròn lượng giác.



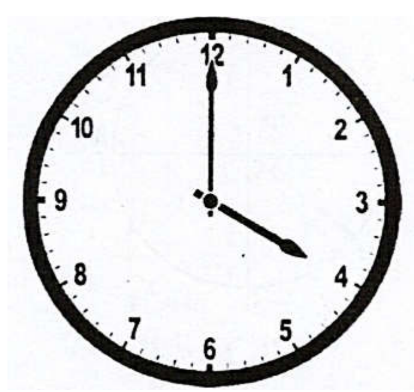
a) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn các góc lượng giác sau đây theo đơn vị radian:
$(OA, OB), (OA, OD), (OA, OE), (OA, OF)$.
Các góc đều được định hướng theo chiều dương.
b) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A, C, E, G theo đơn vị radian.
c) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A, E theo đơn vị độ.
d) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác theo đơn vị radian:
$(OA, OB) + (OB, OC); (OA, OC) + (OC, OH)$.

Câu 26. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Xét tia Ou là kim giờ, Ov là kim phút. Xét chiều quay của góc là chiều kim đồng hồ, hãy viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ou, Ov) trong các trường hợp sau:

a)

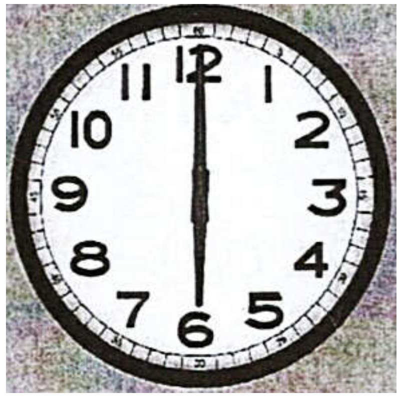


b)



Câu 27. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Ta xem tia Ou là kim giờ, tia Ov là kim phút. Xét tia OA với điểm A trùng vị trí số 3 trên chiếc đồng hồ. Hãy viết một công thức

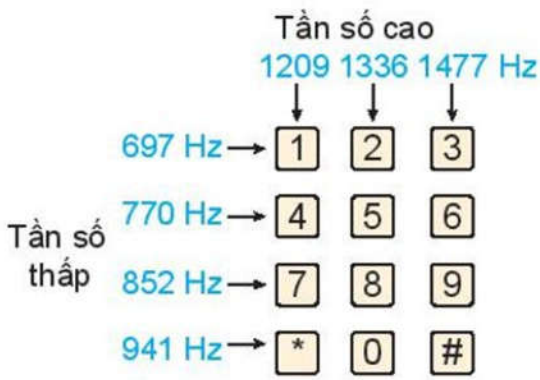
duy nhất để thể hiện số đo tổng quát của cả hai góc lượng giác (OA, Ou) và (OA, Ov) với góc quay xác định theo chiều dương.



Câu 28. Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là $55\,cm$. Nếu xe chạy với tốc độ $50\,km/h$ thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Câu 29. Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).



a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số côsin.

Câu 30. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A > 0)$ và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

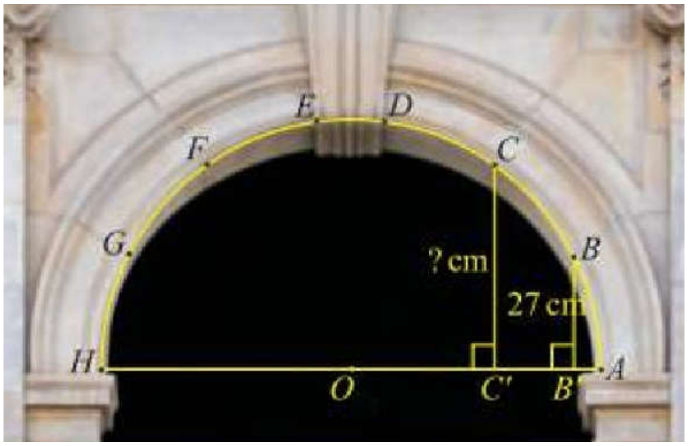
$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)(cm),$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)(cm).$$

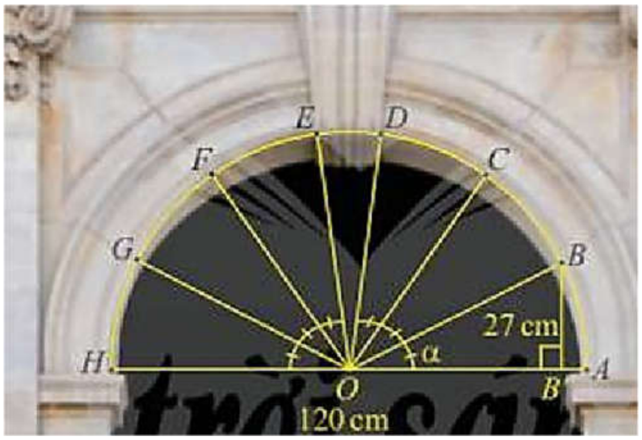
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Câu 31. Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nữa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC,

CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chốt ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng cách từ điểm B đến đường kính AH, làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm C đến AH?

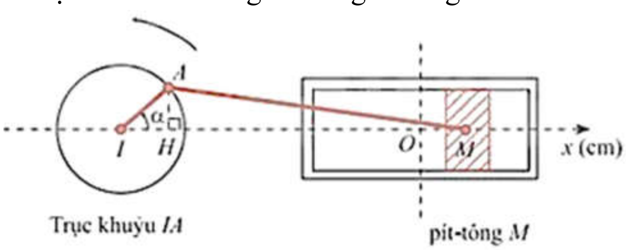


Câu 32. cho biết vòm cổng rộng $120\,cm$ và khoảng cách từ B đến đường kính AH là $27\,cm$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

Câu 33. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.



Hình 4

a) Biết $IA = 8\,cm$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3\,cm$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 34. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài $31\,m$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $30\,m$, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α.

Hình 5

a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP), từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 35. Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

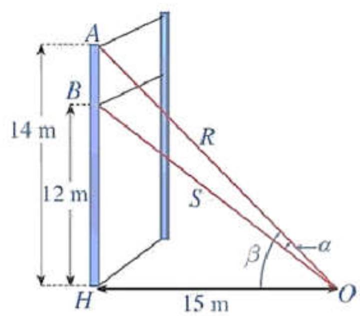
$u = 40\sin(120\pi t) + 10\sin(360\pi t)$ (V);

$i = 4\sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)$ (A).

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i(W)$. Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có luỹ thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Câu 36. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 18).

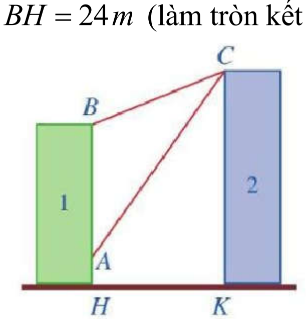


Hình 18

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

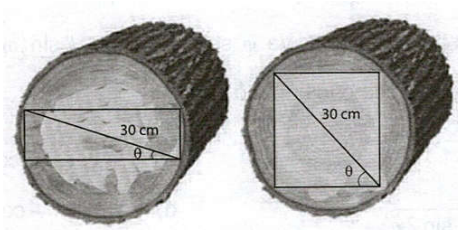
Câu 37. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32m$, $AH = 6m, BH = 24m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

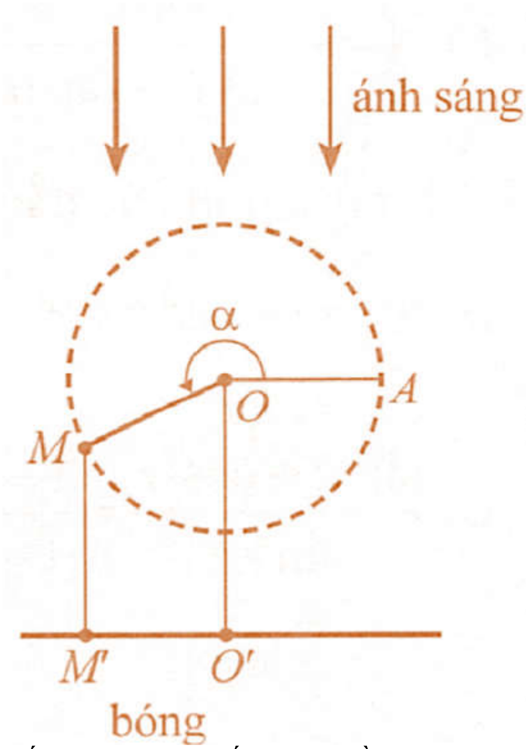
Câu 38. Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính $30cm$.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gồ được tính bởi công thức $S(\theta)=450\sin 2\theta\left(cm^2\right)$, ở đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gồ là lớn nhất.

Câu 39. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $10\,cm$?



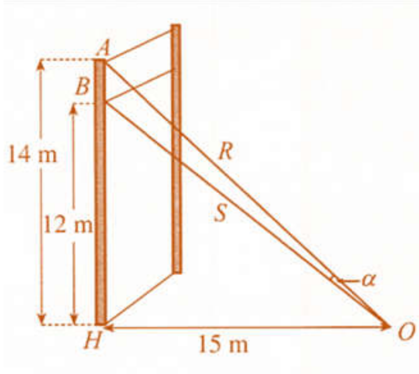
Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Câu 40. Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

$$d(t)=4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]+12,\ t\in\mathbb{Z} \text{ và } 1\le t\le 365.$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 41. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14\,m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12\,m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 3).

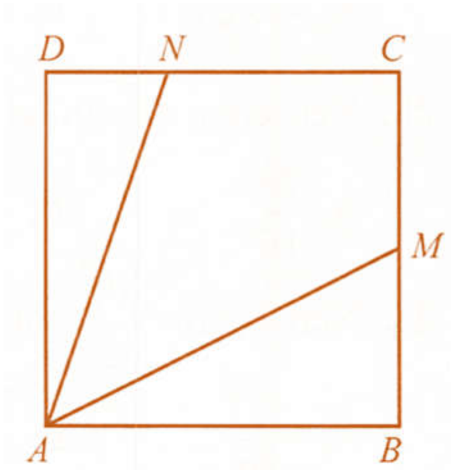


Hình 3

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Câu 42. Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C. Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN, ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$

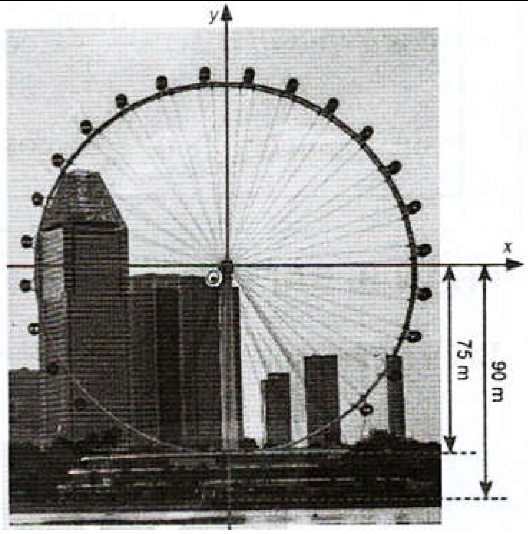


Hình 4

a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.

b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

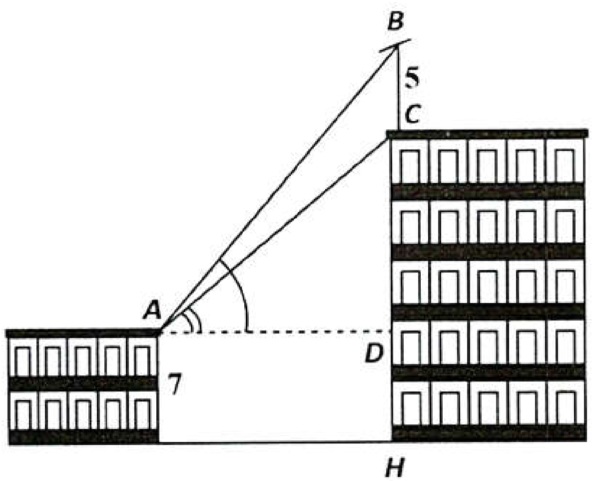
Câu 43. Một chiếc đu quay có bán kính $75m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90m$, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Câu 44. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của toà nhà là $18,9m$, hai toà nhà cách nhau $10m$.

a) Tính $\tan\alpha$;

b) Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Câu 45. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A>0)$ và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình: $x_1(t)=3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}\right)(cm), x_2(t)=3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{4}\right)(cm)$. Tìm dao động tổng hợp $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Câu 46. Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng $9200km$. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

a) Tính quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ; 1,5 giờ; 3 giờ.

b) Sau khoảng bao nhiêu giờ thì X di chuyển được quãng đường $240000km$?

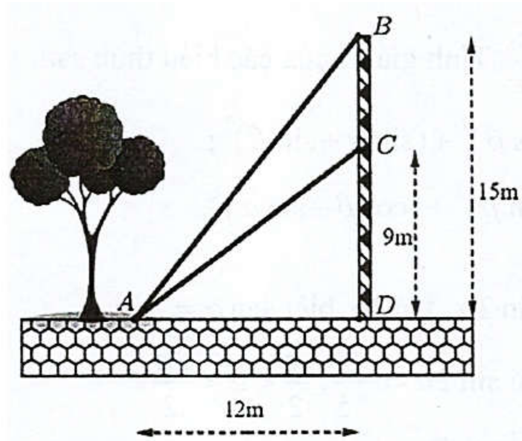
c) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, hỏi sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc bao nhiêu rad?

(Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 47. Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây.

a) Tính theo đơn vị radian độ lớn của góc mà một chất điểm trên bánh xe quay được sau 6 giây.
b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng $340mm$. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 48. Từ một vị trí A, người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D. Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn $\alpha = \widehat{BAC}$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

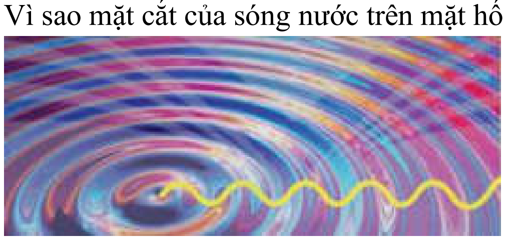
Câu 49. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3cm, \varphi = 0$;

b) $A = 3cm, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

c) $A = 3cm, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 50. Vì sao mặt cắt của sóng nước trên mặt hồ được gọi là có dạng hình sin?

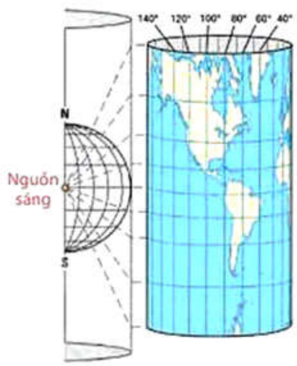


Câu 51. Li độ $s(cm)$ của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2\cos \pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1;1](cm)$.

Hình 6

(Theo https://www.britannica.com/sciencel simple-harmonic-motion)

Câu 52. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ $\varphi^{\circ}(-90<\varphi<90)$ được cho bởi hàm số $y=20\tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)(cm)$. Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá $20cm$ trên bản đồ.



Hình 9

(Theo https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/)

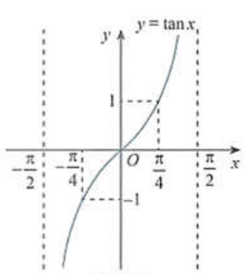
Giải

Vì điểm nằm cách xích đạo không quá $20cm$ trên bàn đồ nên ta có $-20\le y\le 20$.

Khi đó $-20\le 20\tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)\le 20$ hay $-1\le\tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)\le 1$.

Ta có $-90<\varphi<90$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{180}\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Xét đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (Hình 10).

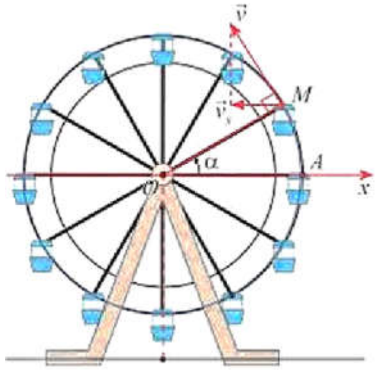


Hình 10

Ta thấy $-1\le\tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)\le 1$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{180}\varphi\le\frac{\pi}{4}$ hay $-45\le\varphi\le 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá $20cm$ nằm ở vĩ độ từ -45° đến 45°.

~!Câu 53. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha=(Ox,OM)$ theo hàm số $v_x=0,3\sin\alpha(m/s)$ (Hình 11).

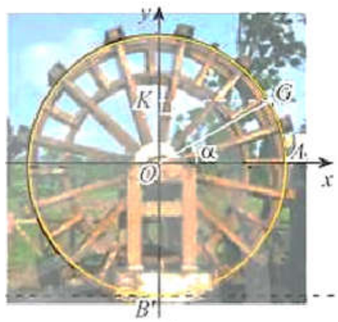


Hình 11

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$, góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

Câu 54. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).

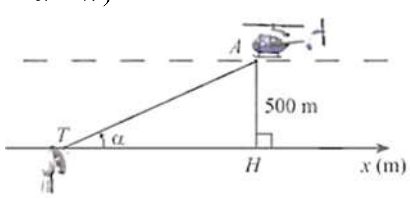


Hình 12

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Câu 55. Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác $(Tx, TA)(0 < \alpha < \pi)$.



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 56. Giả sử vận tốc v (tính bằng lítgiây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức $v = 0,85\sin\frac{\pi t}{3}$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây).

a) Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v>0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v<0$.
Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

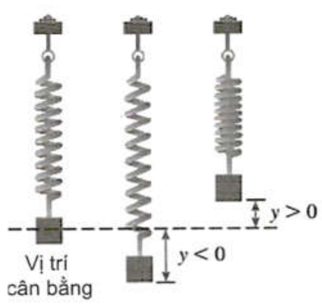
Câu 57. Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A>0), \omega t+\varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t)=-5\cos 4\pi t(cm)$.
a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.
b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t=2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

Câu 58. Giả sử khi một cơn sóng biển đị qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.
a) Tìm chu kì của sóng.
b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Câu 59. Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t)=0,8\cos 0,5t+4$.
(Theo https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf)
a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t=2$ là bao nhiêu mét?
b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu $3,6m$ để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thuỷ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 60. Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y=25\sin 4\pi t$ ở đó y được được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.
b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.
c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Câu 61. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao $40m$ in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t)=40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$
ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.
a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.
b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Câu 62. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là

$f_1(t)=C\sin\omega t$ và $f_2(t)=C\sin(\omega t+\alpha)$.

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=C\sin\omega t+C\sin(\omega t+\alpha)$.

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$, ở đó A,B là hai hằng số phụ thuộc vào α.

b) Khi $C=10$ và $\alpha=\frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t)=k\sin(\omega t+\varphi)$.

Câu 63. Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động $(A>0)$ và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$x_1(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)(cm)$ và $x_2(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)(cm)$.

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Câu 64. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$p(t)=120+15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Câu 65. Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s=3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s\le-\frac{3}{2}$.

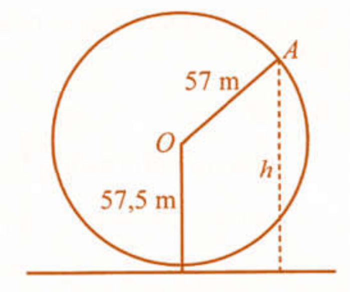
Câu 66. Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: $x=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega>0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t=0,t=\frac{T}{4},t=\frac{T}{2},t=\frac{3T}{4},t=T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn $[0;2T]$ trong trường hợp:

a) $A=3cm,\varphi=0$;

b) $A=3cm,\varphi=-\frac{\pi}{2}$;

c) $A=3cm,\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Câu 67. Một vòng quay trò chơi có bán kính $57m$, trục quay cách mặt đất $57,5m$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t)=57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút $(t\geq 0)$ (Hình 12).



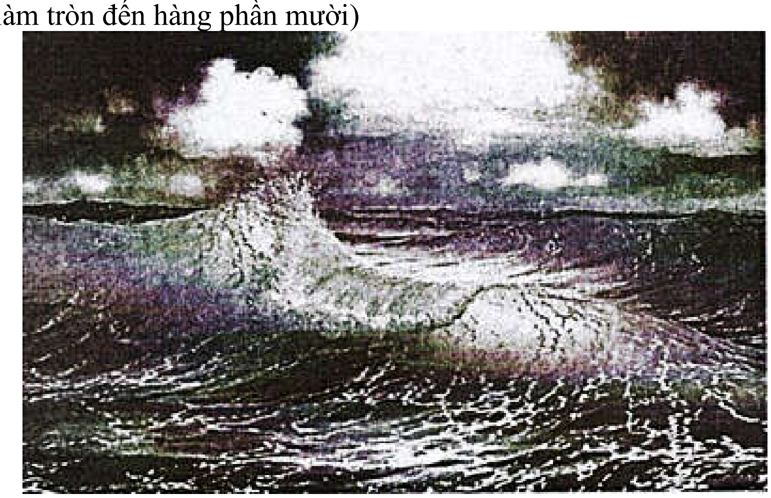
Hình 12

a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?
b) Khi $t=0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?
c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t=0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là $86m$?

Câu 68. Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

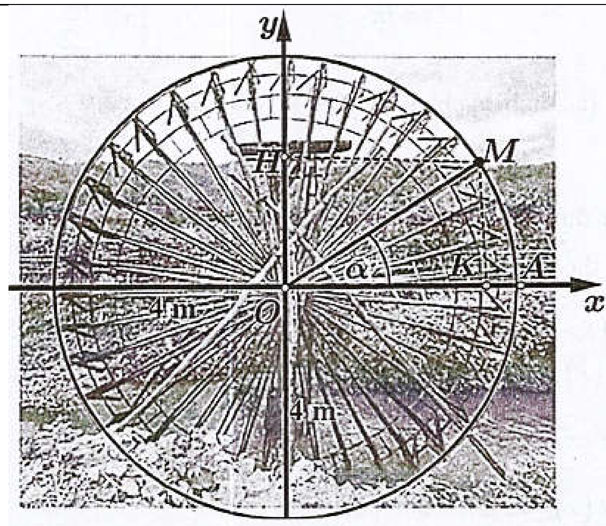
Câu 69. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t)=75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.

a) Tìm chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây, 20 giây.
b) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t=0$ giây), hãy tìm thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất.
(Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 70. Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O, bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha=(OA,OM)$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O;4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).
a) Hãy lập hàm số $h(x)$ thể hiện chiều cao của điểm M so với mặt nước theo góc α. Tìm góc α khi điểm M cách mặt nước $6m$.
b) Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t=0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 71. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

Câu 72. Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là $\alpha\left(0° \le \alpha \le 360°\right)$ thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha).$$

(Theo trang usno.navy.mil).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

a) $F = 0$ (trăng mới);

b) $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);

c) $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);

d) $F = 1$ (trăng tròn).

Câu 73. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500\,m/s$ hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$, ở đó $g = 9,8\,m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

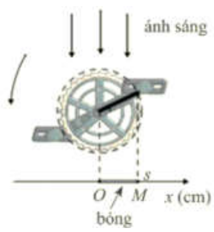
a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị tí đặt khẩu pháo $22000\,m$.
c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Câu 74. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

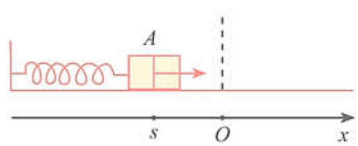
Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Câu 75. Trong hình bên, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $s = 17\cos 5\pi t$ với $s(cm)$ là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Làm cách nào để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng $10\,cm$?



Câu 76. Quay lại bài toán khởi động, phương trình chuyển động của bóng đầu trục bàn đạp là $x = 17\cos 5\pi t (cm)$ với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng $10\,cm$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 77. Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Toạ độ $s(cm)$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}\,cm$?



Hình 9

(Theo https://ww.britannica.com/science/simple-harmonic-motion)

Câu 78. Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1\,km$. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10} rad/s$ và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rọi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

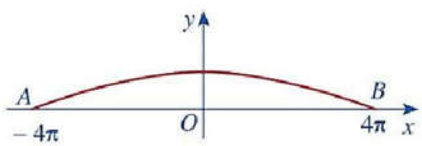
Hình 10

(Theo https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology)

a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO. Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t.

b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N = -1(km)$. Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Câu 79. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos\frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 38.



Hình 38

Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.

Câu 80. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$.

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

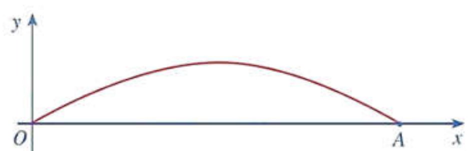
Câu 81. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \ge 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?

Hình 39

Câu 82. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \le t < 24$) cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021). Tìm t để độ sâu của mực nước là:

a) $15\,m$;
b) $9\,m$;
c) $10,5\,m$.

Câu 83. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin\frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



Hình 40

a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là $9m$ sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3m$.

Câu 84. Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$.

(Theo https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;

b) Vận tốc con lắc bằng $1,5 cm/s$.

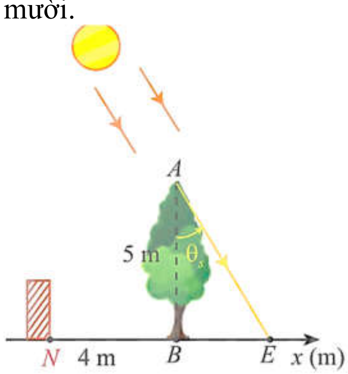
Câu 85. Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao $5m$. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx. Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức $\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t-12) rad$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle)

a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t.

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4(m)$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 1

Câu 86. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$,

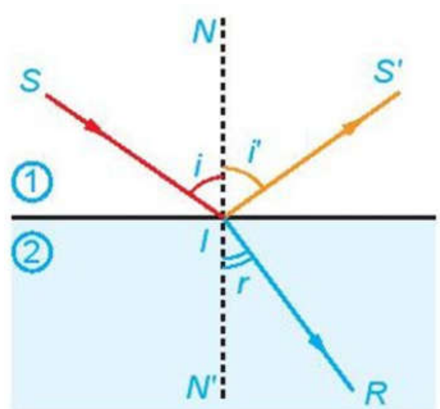
trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.

b) Tìm số nhịp tim mỗi phút.

c) Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Câu 87. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình.

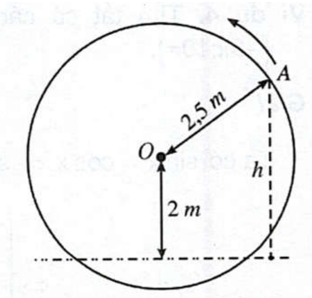


Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50°$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Câu 88. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước $2m$ (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$

với x là thời gian quay của guồng $(x \geq 0)$, tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?
b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Câu 89. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

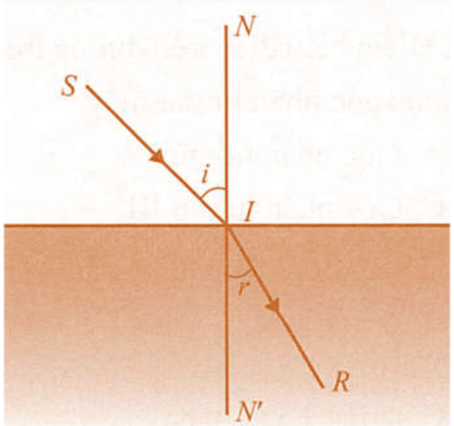
$L(t) = 12 + 2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Câu 90. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.
a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là $100mmHg$.
b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là $120mmHg$.

Câu 91. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30°. Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu?



Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 92. Một quả bóng được ném xiên một góc $\alpha\left(0^{\circ} \leq \alpha \leq 90^{\circ}\right)$ từ mặt đất với tốc độ $v_0(m/s)$. Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d=\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu $10 m/s$ và góc ném là 30° so với phương ngang.

b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là $10 m/s$ thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là $5m$?

Câu 93. Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t)=30+20\sin\left(\frac{\pi}{25}t+\frac{\pi}{3}\right)$.

a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao $40m$ lần đầu tiên?

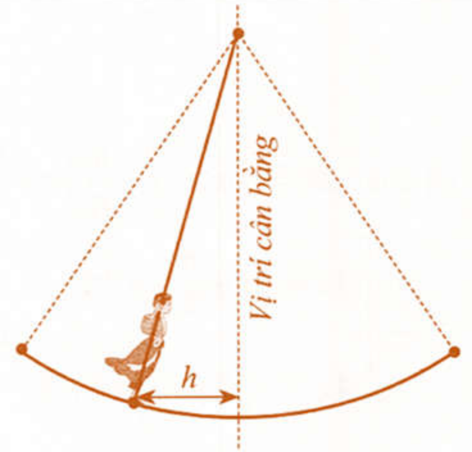
Câu 94. Vận tốc $v_1(cm/s)$ của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc $v_2(cm/s)$ của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

$v_1(t)=-4\cos\left(\frac{2t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ và $v_2(t)=2\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng $2cm/s$;

b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Câu 95. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 14). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t(s)$ (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h=|d|$ với $d=3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d>0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d<0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?



Hình 14

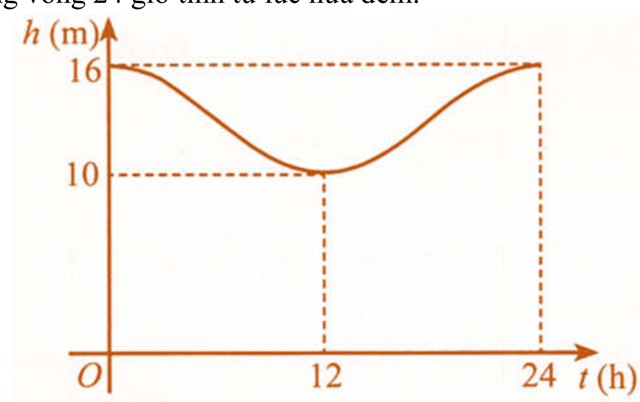
Giải

Do $-1 \le \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \le 1$ nên $-3 \le 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \le 3$ hay $-3 \le d \le 3$. Do đó, $0 \le |d| \le 3$.

Vậy $h=3$ khi $|d|=3$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=\pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=k\pi \Leftrightarrow t=\frac{1+3k}{2}$ với $k\in\mathbb{Z}, k\ge 0$; $h=0$ khi $|d|=0$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow t=\frac{5+6k}{4}$ với $k\in\mathbb{Z}, k\ge 0$.

~!Câu 96. Mực nước cao nhất tại một cảng biển là $16m$ khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là $10m$. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

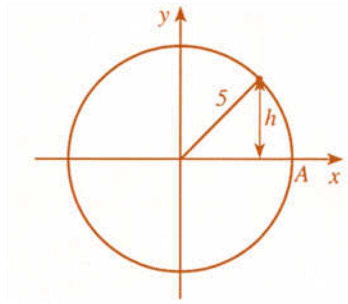
Biết chiều cao của mực nước $h(m)$ theo thời gian $t(h)(0 \le t \le 24)$ được cho bởi công thức $h=m+a\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a.

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là $11,5m$.

Câu 97. Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính $5cm$. Khoảng cách $h(cm)$ từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h=|y|$, trong đó

$y = a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây $(t \geq 0)$ và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).



Hình 16

a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?

b) Tìm giá trị của a.

c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5cm$ và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.

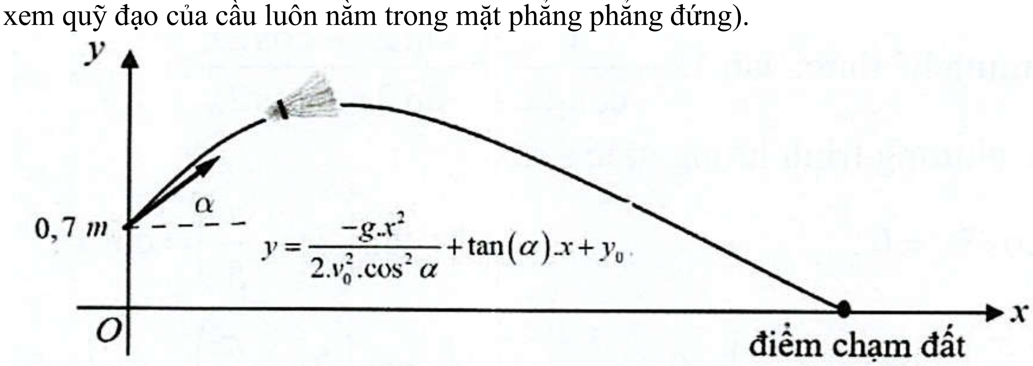
Câu 98. Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, chọn điểm có tọa độ $(O; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là: $y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$; trong đó:

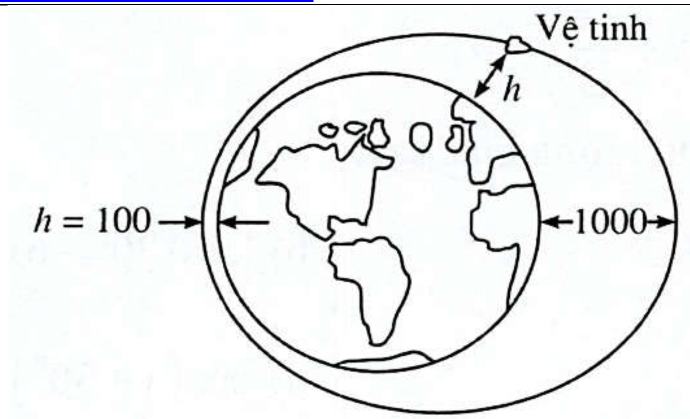
- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8m/s^2$);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68m$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? (biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7m$ so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là $8m/s$, bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Câu 99. Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h=550+450\cdot\cos\frac{\pi}{50}t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất $250\,km$. Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó ?

Câu 100. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x=-2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định các thời điểm vật có li độ bằng $1cm$.

Câu 101. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $(0\le t<24)$ cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+8$.

Tìm t để độ sâu của mực nước là:

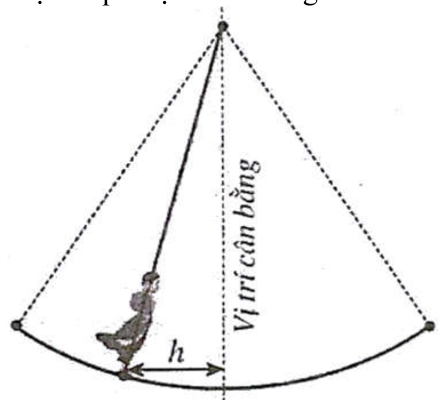
a) $8m$;

b) $6,5m$.

Câu 102. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x=1,5\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h=|x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng.

a) Trong 10 giây đầu tiên, thời điểm nào vật ở xa vị trí cân bằng nhất?

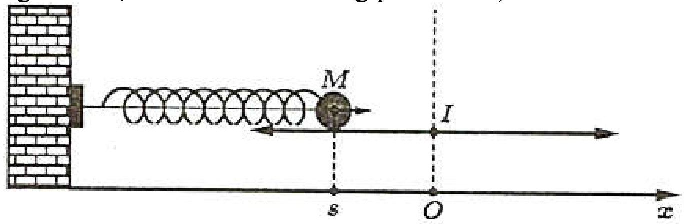
b) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?



Câu 103. Một vật M được gắn vào đầu lò xo và dao động quanh vị trí cân bằng I, biết rằng O là hình chiếu vuông góc của I trên trục Ox, toạ độ điểm M trên Ox tại thời điểm t (giây) là đại lượng s (đơn vị: cm) được tính bởi công thức $s=8,6\sin\left(8t+\frac{\pi}{2}\right)$

a) Tìm khoảng cách từ vật đến vị trí cân bằng tại thời điểm $t=3$ giây.

b) Thời điểm nào trong khoảng 2 giây đầu tiên thì $s = 4,3cm$?
(Các kết quả gần đúng trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm)



LỜI GIẢI THAM KHẢO

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là $184cm$, bánh xe trước có đường kính là $92cm$, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.

a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.
b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).
c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

a) Chu vi của bánh xe sau là: $C_s = \pi.184$ (cm).
Khi đó, bánh xe sau đi mỗi vòng được quãng đường có độ dài là 184π (cm).
Trong 10 phút, bánh xe sau chuyển động được $80.10 = 800$ (vòng).
Quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút hay chính là quãng đường đi được khi bánh xe sau lăn 800 vòng là $800\ .\ 184\pi\ =\ 147200\pi(cm) = 1,472\pi(km)$.

b) Ta có: 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ.

Vận tốc của máy kéo là $v = \frac{1,472\pi}{\frac{1}{6}} \approx 27,75$ (km/giờ).

c) Chu vi của bánh xe trước là: $C_t = \pi.92(cm)$.
Khi bánh xe sau lăn được 800 vòng trong 10 phút thì bánh xe trước lăn được số vòng là $\frac{147200\pi}{92\pi} = 1600$ (vòng).

Vận tốc của bánh xe trước trong chuyển động này là $\frac{1600}{10} = 160$ (vòng/phút).

Câu 2. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức: $B(t)=80+7\sin\frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng $mmHg$ (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

a) 6 giờ sáng;
b) 10 giờ 30 phút sáng;
c) 12 giờ trưa;
d) 8 giờ tối.

Lời giải

a) $t=6, B(t)=80+7\sin\frac{6\pi}{12}=80+7\sin\frac{\pi}{2}=87(mmHg)$

b) $t=10.5, B(t)=80+7\sin\frac{10.5\pi}{12}=82.6788(mmHg)$

c) $t=12, B(t)=80+7\sin\frac{12\pi}{12}=80+7\sin\pi=80(mmHg)$

d) $t=20, B(t)=80+7\sin\frac{20\pi}{12}=80+7\sin\frac{5\pi}{3}=73.9378(mmHg)$

Câu 3. Một đường tròn có bán kính $20\,cm$. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{12}$
b) $1,5$;
c) $35°$;
d) $315°$.

Lời giải

a) Độ dài cung đường tròn: $l=20\times\frac{\pi}{12}=5.236$ (cm)

b) Độ dài cung đường tròn: $l=20\times1.5=30$ (cm)

c) Đổi $35°=\frac{7\pi}{36}$

Độ dài cung đường tròn: $l=20\times\frac{7\pi}{36}=12.2173$ (cm)

d) Đổi $315°=\frac{7\pi}{4}$

Độ dài cung đường tròn: $l=20\times\frac{7\pi}{4}=109.9557$ (cm)

Câu 4. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là $680\,mm$.

Lời giải

a) 1 giây bánh xe quay được số vòng là: $11:5=\frac{11}{5}$ (vòng)

Góc mà bánh xe quay được trong 1 giây: $\frac{11}{5}\times360°=792°=4.4\pi(rad)$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60\times\frac{11}{5}=132$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C=680\pi(mm)$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là
$680\pi\times132=89760\pi(mm)=89,76\pi(m)$

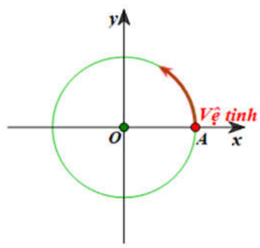
Câu 5. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính $9000\,km$. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2\,h$.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1h;3h;5h$.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường $200000\,km$ sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Giả sử vệ tinh được định tại vị trí A, chuyển động quanh Trái Đất được mô tả như hình vẽ dưới đây:



a) Vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo tức là vệ tinh chuyển động được quãng đường bằng chu vi của quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km.

Do đó quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $2h$ là: $2\pi\cdot9000=18\pi(km)$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $1h$ là: $\frac{18\pi}{2}.1=9\pi(km)$.

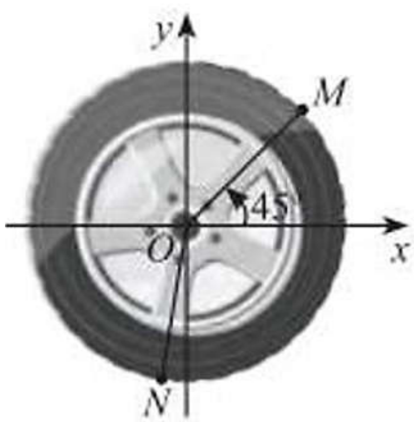
Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $3h$ là: $\frac{18\pi}{2}.3=27\pi(km)$.

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $5h$ là: $\frac{18\pi}{2}.5=45\pi(km)$.

b) Ta thấy vệ tinh chuyển động được quãng đường là $9\pi(km)$ trong $1h$.

Vậy vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km trong thời gian là: $\frac{200000}{9\pi}\approx7074$ (giờ).

Câu 6. Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox,ON).



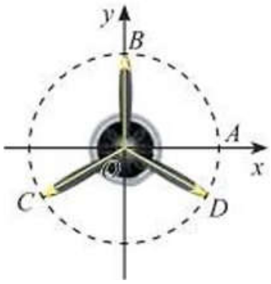
Hình 15

Lời giải

$(Ox,ON)=-99^{\circ}+k\cdot360^{\circ}$

Câu 7. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z});\ \frac{-\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z});\ \frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

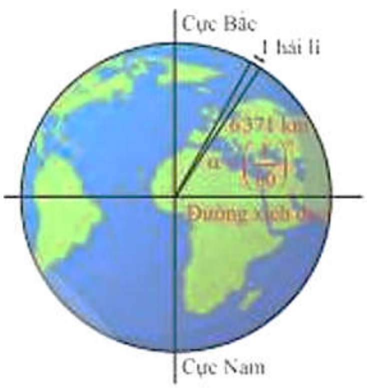


Hình 16

Lời giải

Điểm B, C, D biểu diễn cho góc lượng giác $\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$

Câu 8. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha=\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là $6371 km$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



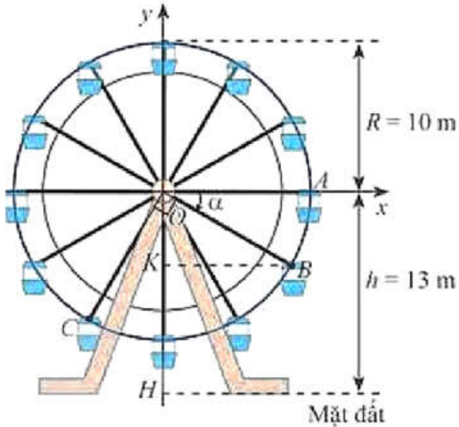
Hình 17

Lời giải

$$\alpha=\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}=\frac{\pi}{10800} rad$$

1 hải lí $=\frac{\pi}{10800}\cdot 6371\approx 1,85(km)$

Câu 9. Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.



Hình 11

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13+10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha=-30^{\circ}$.

b) Khi điểm B cách mặt đất $4m$ thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\alpha>0, \sin\alpha>0$ và $OK=10\sin\alpha$

Ta có: $KH=OH+OK=13+10\sin\alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\alpha<0$, $\sin\alpha<0$ và $OK=10.(-\sin\alpha)$.

Ta có : $KH=OH-OK=13-10\cdot(-\sin\alpha)=13+10\sin\alpha$

Khi $\alpha=-30^{\circ}, KH=13+10\cdot\dfrac{-1}{2}=8$

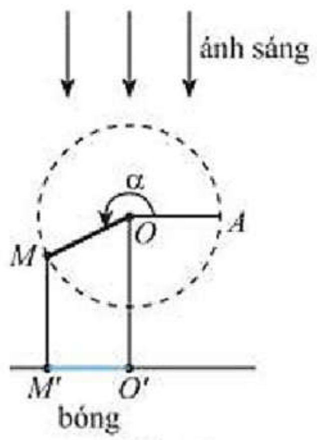
b) Gọi $(OA,OC)=\beta$. Ta có: $\beta=\alpha-90^{\circ}$

Khi $KH=4$. Suy ra $\sin\alpha=\dfrac{-9}{10}, \alpha<0$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{-9}{10}\right)^2}=\dfrac{-\sqrt{19}}{10}$$

Điểm C cách mặt đất là: $13+10\sin\beta\approx 12,96$

Câu 10. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\dfrac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $15cm$? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Lời giải

Sau khi thanh OM quay được 3 vòng, vị trí của thanh là OA.

Quay tiếp $\frac{1}{10}$, thanh sẽ tạo với OA một góc $\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

Độ dài của bóng $O'M' = OM\cos\alpha = 15 \cdot \cos\frac{\pi}{5} = 12,1(cm)$.

Câu 11. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là $11 rad/s$ (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58cm$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Hình 13

Lời giải

Sau một phút di chuyển, van V quay được một góc là $11.60 = 660\ (rad)$

Khoảng cách từ van đến mặt đất là: $58 + 58.\sin 660 \approx 57,7(cm)$

Câu 12. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Trong 3 giây, quạt quay được: $3 \cdot \frac{45}{60} = \frac{9}{4}$ (vòng)

Vậy quạt quay dược một góc: $2\pi.\frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2}$ (rad)

Câu 13. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là $860\,mm$.

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{12}{6}=2$ vòng, tức là quay được một góc $4\pi(rad)$ hay 720°.

b) Trong 1 phút, quãng đường mà người đi xe đã đi được là:
$I=430\cdot 4\pi\cdot 60=103200\pi(mm)$.

Câu 14. Kim giờ dài $6cm$ và kim phút dài $11cm$ của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Lời giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π; kim giờ quét được một góc $\frac{\pi}{6}$. Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right):\frac{11\pi}{6}=\frac{1}{11}$. (giờ)

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là $I=R\cdot\alpha=6\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{\pi}{6}+11\cdot\frac{1}{11}\cdot 2\pi=\frac{23\pi}{11}(cm)$.

Câu 15. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài $1,75m$ và $1,26m$. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Lời giải

a) Trong 15 phút thì mũi kim phút vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng
$\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot R=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1,75=\frac{7}{8}\pi\approx 2,75(m)$.

b) Trong 15 phút thì mũi kim giờ vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}$ đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng
$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}\cdot 2\pi\cdot R=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}\cdot 2\pi\cdot 1,26=\frac{21}{400}\pi\approx 0,16(m)$.

Câu 16. Huyện lị Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lị Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lị đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6378km$.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^{\circ}-9^{\circ}=14^{\circ}$. Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6378\cdot 14\cdot\pi}{180}\approx 1558(km)$

Câu 17. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Lời giải

a) Sau 1 giây, cánh quat quay được $\frac{175}{60}=\frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12}\cdot 2\pi=\frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6}\cdot 5=\frac{175\pi}{6}$.

b) Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là

$42\pi:\frac{35\pi}{6}=7,2$ giây.

Câu 18. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.

a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là $35cm$. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8}=3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75.60=225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225.2\pi=450\pi$.

b) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r=0,35m$.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi\cdot 0,35\approx 494,8(m)$.

Câu 19. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau $2h$, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng $-2\pi(rad)$.

Vậy khi vệ tinh chuyển động được $3h$ thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad).

Câu 20. Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Do vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút và chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 15 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $-2\pi(rad)$.

Do đó, sau 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $\frac{-2\pi}{15}\cdot 10=\frac{-4\pi}{3}(rad)$.

Câu 21. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

01 bánh răng tương ứng với $\frac{360^{\circ}}{72}=5^{\circ}\Rightarrow 10$ bánh răng là 50°.

Câu 22. Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5cm$ (lấy $\pi=3,1416$).

Lời giải

Ta có:

3 phút xe đi được $\frac{3\times 60}{20}\times 60=540$ vòng.

Độ dài 1 vòng bằng chu vi bánh xe là: $2\pi R=2\times 3,1416\times 6,5=40,8408cm$.

Vậy quãng đường xe đi được là $540\times 40,8408=22054,032cm$.

Câu 23. Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$ và kim phút dài $13,34cm$. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

6 giờ thì kim giờ vạch lên 1 cung có số đo π nên 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{1}{12}\pi$, suy ra độ dài cung tròn mà nó vạch lên là $l=R\alpha=10,57\times\frac{3,14}{12}\approx 2,77cm$.

Chú ý: 1 cung tròn bán kính R có góc tương ứng $\alpha(rad)$ thì độ dài cung tròn là: $l=\alpha R$.

Câu 24. Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng $60cm$, ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm A,B,C lần lượt tương ứng với vị trí các số $2,9,4$.

Tính độ dài các cung nhỏ AB và AC (kết quả tính theo đơn vị centimét và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Bán kính đường tròn là $R=\frac{60}{2}=30\,cm$.

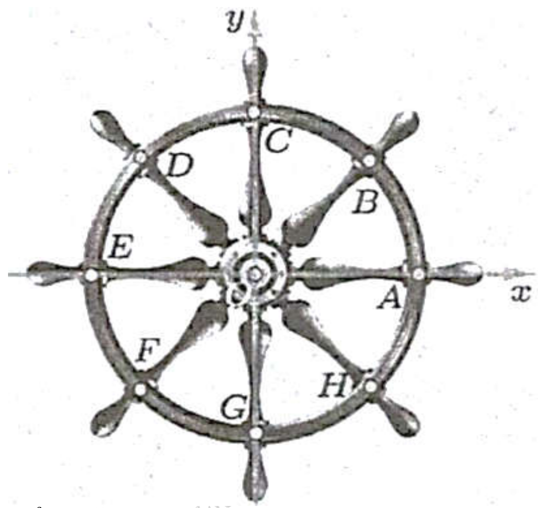
a) Ta có: $\widehat{AOB}=150^{\circ}=\frac{150\pi}{180}rad=\frac{5\pi}{6}rad$; suy ra độ dài cung nhỏ AB là

$l_{\overset{\frown}{AB}}=R\cdot\widehat{AOB}=30\cdot\frac{5\pi}{6}=25\pi\approx 78,54\,cm$.

b) Ta có: $\widehat{AOC}=60^{\circ}=\frac{60\pi}{180}rad=\frac{\pi}{3}rad$; suy ra độ dài cung nhỏ AC là

$l_{\overset{\frown}{AC}}=R\cdot\widehat{AOC}=30\cdot\frac{\pi}{3}=10\pi\approx 31,42\,cm$

Câu 25. Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thuỷ tương ứng với một đường tròn lượng giác.



a) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn các góc lượng giác sau đây theo đơn vị radian:
$(OA,OB),(OA,OD),(OA,OE),(OA,OF)$.
Các góc đều được định hướng theo chiều dương.
b) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A,C,E,G theo đơn vị radian.
c) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A,E theo đơn vị độ.
d) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác theo đơn vị radian:
$(OA,OB)+(OB,OC);(OA,OC)+(OC,OH)$.

Lời giải

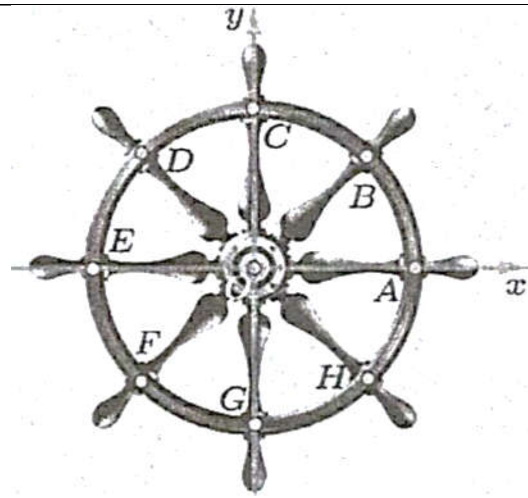
a) Ta có: $(OA,OB)=\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z});(OA,OD)=\frac{3\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$;

$(OA,OE)=\pi+k2\pi(k\in\mathbb{Z});(OA,OF)=\frac{5\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

b) Ta thấy A,C,E,G lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác $0rad,\frac{\pi}{2}rad,\pi rad,\frac{3\pi}{2}rad,2\pi rad$,

$\frac{5\pi}{2}$rad,... Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau $\frac{\pi}{2}$ rad. Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho

các góc lượng giác ấy là $k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.



c) Ta thấy hai điểm A, E lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \ldots$ Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau 180°. Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

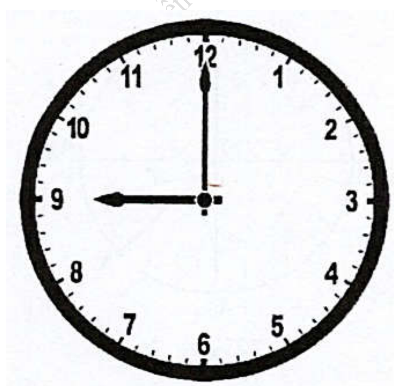
d) Theo hệ thức Sa-lơ, ta có:

$$(OA, OB) + (OB, OC) = (OA, OC) = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

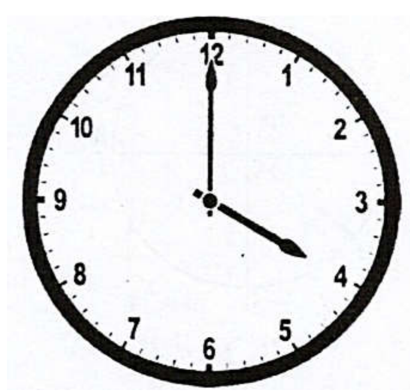
$$(OA, OC) + (OC, OH) = (OA, OH) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 26. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Xét tia Ou là kim giờ, Ov là kim phút. Xét chiều quay của góc là chiều kim đồng hồ, hãy viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ou, Ov) trong các trường hợp sau:

a)



b)

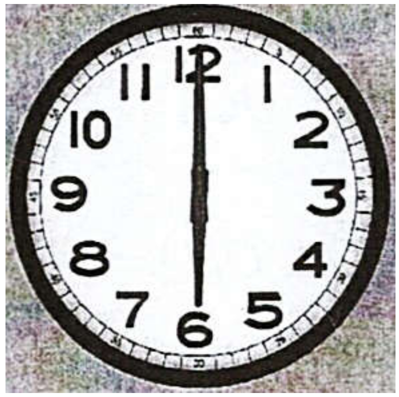


Lời giải

a) Ta có $(Ou, Ov) = 90^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $(Ou, Ov) = 240^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

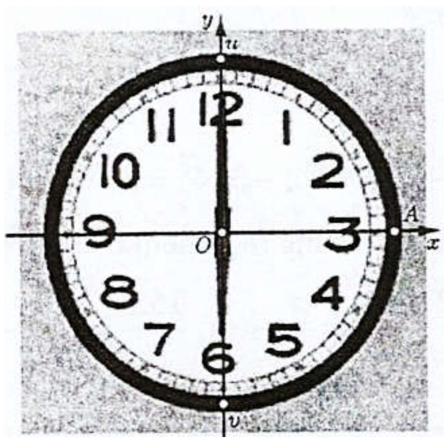
Câu 27. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Ta xem tia Ou là kim giờ, tia Ov là kim phút. Xét tia OA với điểm A trùng vị trí số 3 trên chiếc đồng hồ. Hãy viết một công thức duy nhất để thể hiện số đo tổng quát của cả hai góc lượng giác (OA,Ou) và (OA,Ov) với góc quay xác định theo chiều dương.



Lời giải

Xét đường tròn lượng giác như hình vẽ sau:

Công thức góc lượng giác cần tìm là $x=90^{\circ}+k180^{\circ}(k\in\mathbb{Z})$.



Câu 28. Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là $55\,cm$. Nếu xe chạy với tốc độ $50\,km/h$ thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

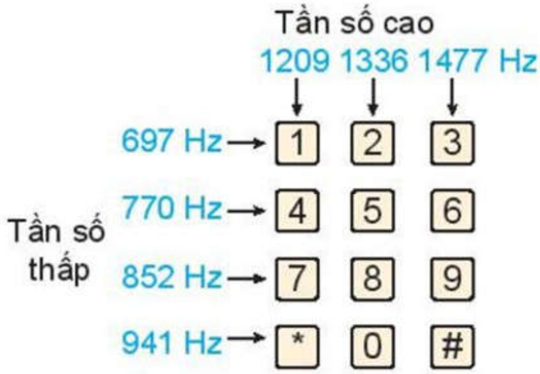
Tốc độ xe là: $50\,km/h=\dfrac{50.100000}{3600}cm/s=\dfrac{12500}{9}cm/s$.

Mỗi vòng bánh x e có chiều dài: $2\pi R=2\pi\cdot\dfrac{55}{2}=55\pi(cm)$.

Vậy mỗi giây thì bánh xe lăn được số vòng là $\dfrac{12500}{9}:(55\pi)\approx 8,04$ (vòng).

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Câu 29. Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y=\sin\left(2\pi f_1 t\right)+\sin\left(2\pi f_2 t\right)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).



a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số côsin.

Lời giải

a) $y=\sin(2\pi 770t)+\sin(2\pi 1209t)=\sin(1540\pi t)+\sin(2418\pi t)$

b)

$$\sin(1540\pi t)+\sin(2418\pi t)=2\sin\frac{1540\pi t+2418\pi t}{2}\cos\frac{1540\pi t-2418\pi t}{2}=2\sin(1979\pi t)\cos(-878\pi t)$$

Câu 30. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A>0)$ và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$x_1(t)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)(cm)$,

$x_2(t)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)(cm)$.

Tìm dao động tổng hợp $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

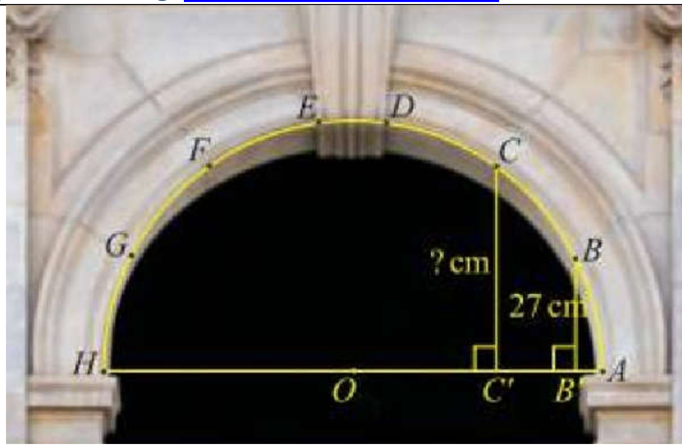
Lời giải

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=2\operatorname{coss}\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{12}\right)$$

Biên độ là $A=2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi=-\frac{\pi}{12}$

Câu 31. Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nữa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chốt ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng cách từ điểm B đến đường kính AH, làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm C đến AH?



Lời giải

Do các cung AB, BC bằng nhau nên góc lượng giác $(OC, OB) = (OB, OA)$

Suy ra $(OC, OA) = 2 \cdot (OB, OA)$

Ta có:

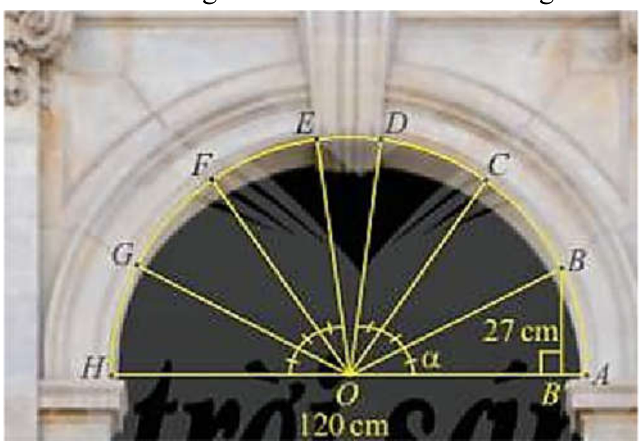
$BB' = R \cdot \sin(OB, OA)$

$CC' = R \cdot \sin(OC, OA)$

Do ta biết được BB', đường kính AH nên có thể tính được R và $\sin(OB, OA)$

Từ đó tính được sin(OC, OA) và biết được khoảng cách từ điểm C đến AH.

Câu 32. cho biết vòm cổng rộng $120\,cm$ và khoảng cách từ B đến đường kính AH là $27\,cm$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

Lời giải

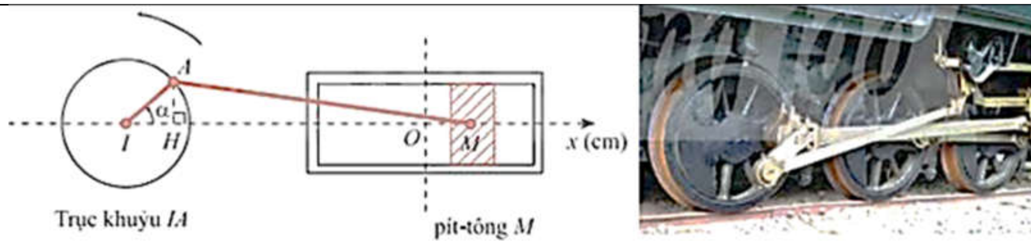
Ta có $AH = 120$. Suy ra $R = 120 : 2 = 60(cm)$

$$\sin\alpha = \frac{BB'}{R} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{319}}{20} \text{ do có } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$CC' = \text{R. } \sin 2\alpha = \text{R. } 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 60 \cdot 2 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{\sqrt{319}}{20} \approx 48,2(cm)$$

Câu 33. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.



Hình 4

a) Biết $IA = 8cm$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3cm$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ thì M ở vị trí O, H ở vị trí I. Ta có $IO = HM = AM$

$x_M = IM - OI = IH + HM - OI = IH + AM - AM = IH = IA \cdot \cos\alpha$

$x_M = 8\cos\alpha$

b) Sau khi chuyển động 1 phút, trục khuỷu quay được một góc là α

Khi đó $x_M = -3cm$. Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{-3}{8}$

Sau khi chuyển động 2 phút, trục khuỷu quay được một góc là 2α

$x_M = 8 \cdot \cos 2\alpha = 8.\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = -5,75$

Câu 34. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài $31m$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $30m$, góc giữa các cánh quạt là $\dfrac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α.

Hình 5

a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP), từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) $\sin\alpha = \dfrac{-30}{31} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{-30}{31}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{61}}{31}$

b) $\sin(OA, ON) = \sin\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} - \cos\alpha \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3} \approx 0,27$

Chiều cao điểm N so với mặt đất là: $60 + 31.0,27 = 68,37\ (m)$

$\sin(OA, OP) = \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} - + \cos\alpha \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3} \approx 0,7$

Chiều cao điểm P so với mặt đất là: $60 + 31.0,7 = 81,7\ (m)$

Câu 35. Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$u\quad =40\sin(120\pi t)+10\sin(360\pi t)\quad (V);$

$i\quad =4\sin(120\pi t)+\sin(360\pi t)\quad (\mathrm{A}).$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P=u\cdot i(W)$. Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có luỹ thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Lời giải

Ta có:

$P=u\cdot i=[40\sin(120\pi t)+10\sin(360\pi t)]\cdot[4\sin(120\pi t)+\sin(360\pi t)]$

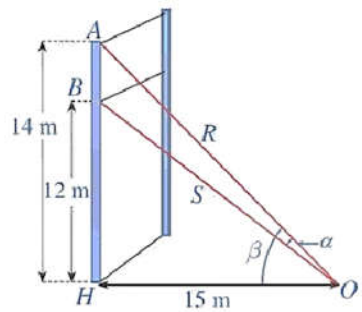
$=160\sin^2(120\pi t)+10\sin^2(360\pi t)+80\sin(120\pi t)\sin(360\pi t)$

$=80[1-\cos(240\pi t)]+5[1-\cos(720\pi t)]+40[\cos(360\pi t-120\pi t)-\cos(360\pi t+120\pi t)]$

$=85-80\cos(240\pi t)-5\cos(720\pi t)+40\cos(240\pi t)-40\cos(480\pi t)$

$=85-40\cos(240\pi t)-5\cos(720\pi t)-40\cos(480\pi t)(W).$

Câu 36. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 18).



Hình 18

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Xét ΔAOH vuông tại H, ta có: $\tan\beta=\dfrac{AH}{HO}=\dfrac{14}{15}$.

Đặt $\widehat{BOH}=\gamma$

Xét ΔBOH vuông tại H, ta có: $\tan\gamma=\dfrac{BH}{HO}=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$.

$$\tan\alpha=\tan(\beta-\widehat{BOH})=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}=\frac{\frac{14}{15}-\frac{4}{5}}{1+\frac{14}{15}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{131}{75}}=\frac{10}{131}$$

Vậy $\tan\alpha=\dfrac{10}{131}$.

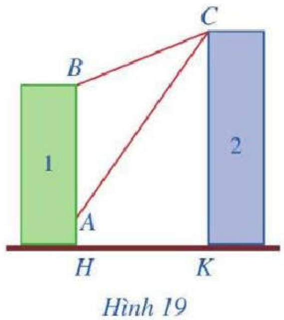
b) Từ $\tan\ \alpha=\dfrac{10}{131}$, để tìm số đo góc α, ta sử dụng máy tính cầm tay ấn lần lượt các nút:

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$

Ta được kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là 4°.

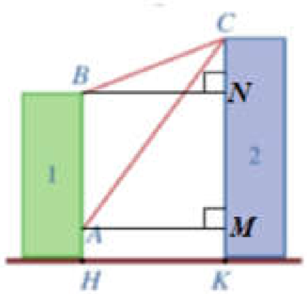
Vậy $\alpha\approx 4^\circ$

Câu 37. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK=20m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A,B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32\,m$, $AH = 6\,m, BH = 24\,m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Lời giải



Kẻ $AM \perp CK, BN \perp CK$ (hình vẽ) ta có: $BN = AM = HK = 20(m)$

$CN = CK - NK = CK - BH = 32 - 24 = 8(m)$;

$MN = AB = BH - AH = 24 - 6 = 18(m)$

$CM = CN + MN = 8 + 18 = 26(m)$

Đặt $\widehat{BCN} = \alpha, \widehat{ACM} = \beta$.

Xét ΔBCN vuông tại N có: $\tan\alpha = \frac{BN}{CN} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$;

Xét ΔACM vuông tại M có: $\tan\beta = \frac{AM}{CM} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$;

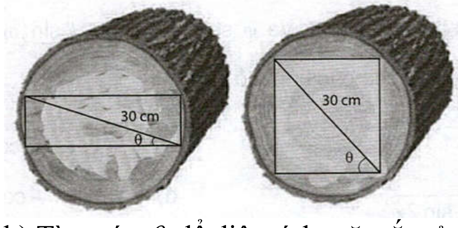
Ta có: $\tan\widehat{ACB} = \tan(\widehat{BCN} - \widehat{ACM}) = \tan(\alpha - \beta)$

$$\Rightarrow \tan\widehat{ACB} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{13}}{1 + \frac{5}{2}\cdot\frac{10}{13}} = \frac{45}{76} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 0{,}01^\circ$$

Vậy góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất) có số đo xấp xỉ $0{,}01^\circ$.

Câu 38. Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính $30\,cm$.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức $S(\theta) = 450\sin 2\theta\,(cm^2)$, ở đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

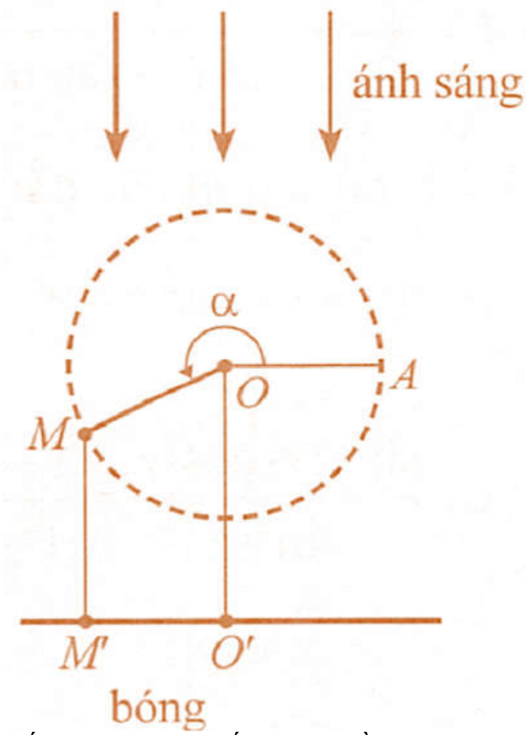
Lời giải

a) Mặt cắt của thanh xà gỗ (hình dưới) là hình chữ nhật có hai kích thước là $AB = 30\cos\theta$ và $BC = 30\sin\theta$.

Vậy diện tích mặt cắt là $S = AB \cdot BC = 30 \cdot 30\sin\theta\cos\theta = 450\sin 2\theta$.

b) Ta có $S = 450\sin 2\theta \le 450$. Vậy diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1$ hay góc $\theta = 45^\circ$.

Câu 39. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $10cm$?



Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có $\alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}$.

Suy ra $O'M' = |OM\cos\alpha| = \left|10\cos\frac{120\pi}{13}\right| \approx 7,5cm$.

Câu 40. Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

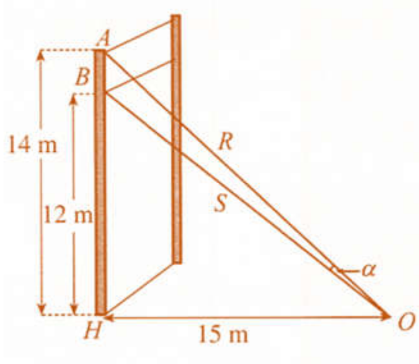
$$d(t) = 4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] + 12,\ t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \le t \le 365.$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

$d(31) = 9,01$ giờ.

Câu 41. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 3).



Hình 3

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}$.

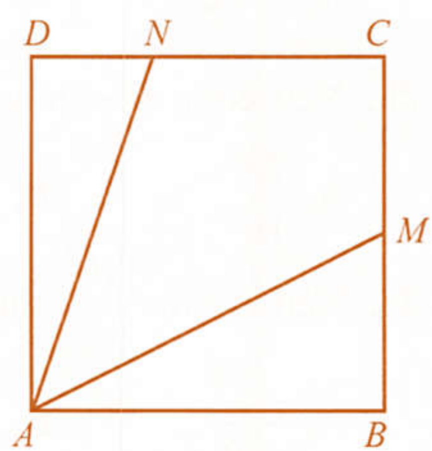
Trong tam giác vuông AOH, $\tan\widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}$.

Trong tam giác vuông BOH, $\tan\widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\tan\alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan\widehat{AOH} - \tan\widehat{BOH}}{1 + \tan\widehat{AOH}\cdot\tan\widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{10}{131}$.

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Câu 42. Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C. Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN, ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$



Hình 4

a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.
b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

a) Trong tam giác vuông ABM, $\tan\widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN, $\tan\widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

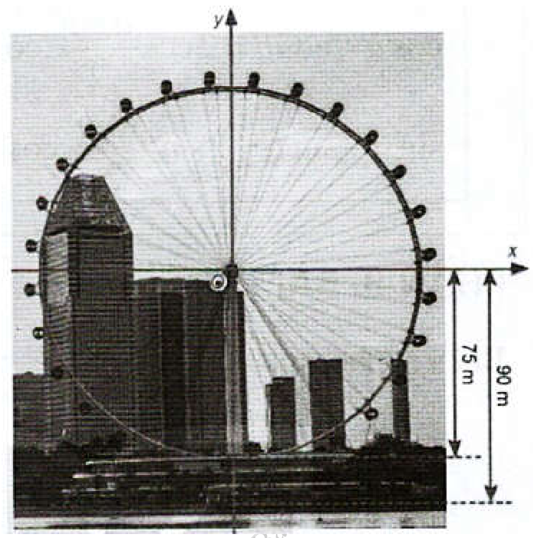
Do đó, $\tan(\widehat{BAM}+\widehat{DAN})=\dfrac{\tan\widehat{BAM}+\tan\widehat{DAN}}{1-\tan\widehat{BAM}\tan\widehat{DAN}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$

b) *Do* $\tan(\widehat{BAM}+\widehat{DAN})=1$ nên $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=45^\circ$.

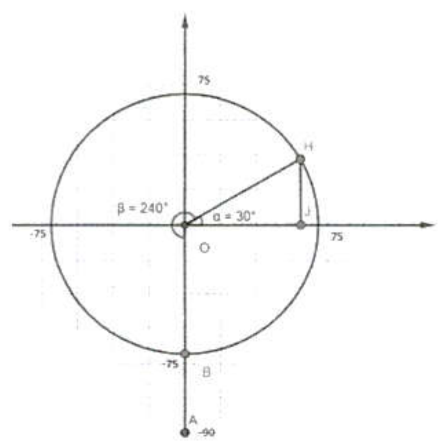
Suy ra $\widehat{MAN}=90^\circ-(\widehat{BAM}+\widehat{DAN})=45^\circ$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45°.

Câu 43. Một chiếc đu quay có bán kính $75m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90m$, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Lời giải



Do tính đối xứng, dù đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ, ta đều thấy rằng độ cao của người đó là như nhau sau cùng một khoảng thời gian. Ở đây ta xét đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Gắn đu quay có bán kính $75m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90m$ vào hệ trục tọa độ Oxy ta được hình bên:

Sau 20 phút quay cabin đi được một góc là $\dfrac{20}{30}\cdot 360^\circ=240^\circ$ tức là đến vị trí điểm H.

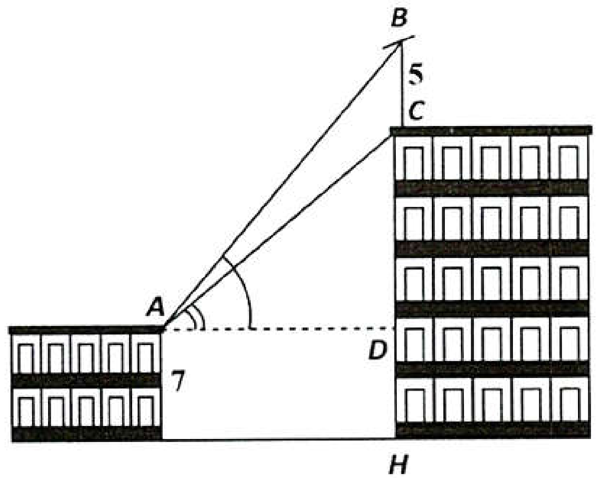
Khi đó góc $\widehat{HOJ}=30^\circ$ và $HJ=30^\circ.OH=37,5(m)$.

Vậy sau 20 phút quay, người đó ở độ cao $37,5+90=127,5(m)$.

Câu 44. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của toà nhà là $18,9m$, hai toà nhà cách nhau $10m$.

a) Tính $\tan\alpha$;

b) Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Lời giải

a) Ta có: $AD = 10m$

$CD = 18,9 - 7 = 11,9m$

$BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9m$

$\tan\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{16,9}{10}$

b) $\tan\alpha = \frac{16,9}{10} \Rightarrow \alpha = 59^{\circ}$.

Câu 45. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A > 0)$ và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình: $x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)(cm), x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)(cm)$. Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

Ta có $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$

$$= 3.2\left(\cos\left(\frac{\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\right)$$

$$= 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right)$$

Vậy biên độ của dao động là $6\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$. Pha ban đầu của chuyển động là $\frac{5\pi}{24}$.

Câu 46. Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng $9200 km$. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

a) Tính quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ; 1,5 giờ; 3 giờ.

b) Sau khoảng bao nhiêu giờ thì X di chuyển được quãng đường $240000 km$?

c) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, hỏi sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc bao nhiêu rad?

(Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

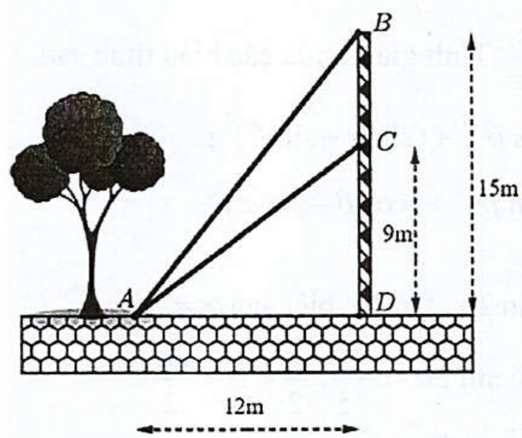
a) Một vòng di chuyển của X chính là chu vi đường tròn:
$C = 2\pi R = 2\pi.9200 = 18400\pi(km)$.
Sau 1 giờ, vệ tinh di chuyển nửa đường tròn với quãng đường là:
$\frac{1}{2}C = 9200\pi \approx 28902,65(km)$.
Sau 1,5 giờ, vệ tinh di chuyển được $\frac{1,5.1}{2}$ đường tròn (hay $\frac{3}{4}$ đường tròn), quãng đường là:
$\frac{3}{4}C = \frac{3}{4}\cdot 18400\pi = 13800\pi \approx 43353,98(km)$.
Sau 3 giờ, X di chuyển được $\frac{3}{2}$ đường tròn, tức là:
$\frac{3}{2}C = \frac{3}{2}\cdot 18400\pi = 27600\pi \approx 86707,96(km)$.
b) Số giờ để vệ tinh X thực hiện quãng đường $240000km$ là: $\frac{240000}{9200\pi} \approx 8,3$ (giờ).
c) Sau 4,5 giờ thì số vòng tròn mà vệ tinh X di chuyển được là: $\frac{4,5}{2} = \frac{9}{4}$ (vòng).
Số đo góc lượng giác thu được là: $\frac{9}{4}\cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}(rad)$.

Câu 47. Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây.
a) Tính theo đơn vị radian độ lớn của góc mà một chất điểm trên bánh xe quay được sau 6 giây.
b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng $340mm$. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Số vòng bánh xe thực hiện được sau 6 giây là $\frac{6.25}{10} = 15$; góc thu được tương ứng là $15.2\pi = 30\pi$ (rad).
b) Sau 2,35 phút (= 141 giây), số vòng mà bánh xe thực hiện được là:
$\frac{141.25}{10} = 352,5$ vòng. Bán kính bánh xe: $R = 340\,mm = 0,34\,m$.
Quãng đường mà người đi xe đạp thực hiện được sau 2,35 phút là:
$352,5\cdot 2\pi R = 352,5\cdot 2\pi \cdot 0,34 = \frac{2397}{10}\pi \approx 753,04(m)$.

Câu 48. Từ một vị trí A, người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D. Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn $\alpha = \widehat{BAC}$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



Lời giải

Ta có:

$\tan\alpha = \tan(\widehat{BAD} - \widehat{CAD})$

$= \dfrac{\tan\widehat{BAD} - \tan\widehat{CAD}}{1 + \tan\widehat{BAD}\tan\widehat{CAD}} = \dfrac{\dfrac{15}{12} - \dfrac{9}{12}}{1 + \dfrac{15}{12}\cdot\dfrac{9}{12}} = \dfrac{8}{31}$.

Vì vậy $\alpha \approx 14,47^\circ$.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 49. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \dfrac{T}{4}, t = \dfrac{T}{2}, t = \dfrac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0;2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3cm, \varphi = 0$;

b) $A = 3cm, \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$;

c) $A = 3cm, \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Từ $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ta có $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Khi đó ta có phương trình li độ là $x = A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t + \varphi\right)$.

a)

- Với $A = 3cm$ và $\varphi = 0$ thay vào phương trình li độ $x = A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$x = 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)$

•$t = 0$ thì $x = 3\cos 0 = 3$;

•$t = \dfrac{T}{4}$ thì $x = 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{T}{4}\right) = 3\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$;

•$t = \dfrac{T}{2}$ thì $x = 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{T}{2}\right) = 3\cos\pi = -3$

•$t=\frac{3T}{4}$ thì $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}\right)=3\cos\frac{3\pi}{2}=0$;

•$t=T$ thì $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}.T\right)=3\cos 2\pi=3$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$:

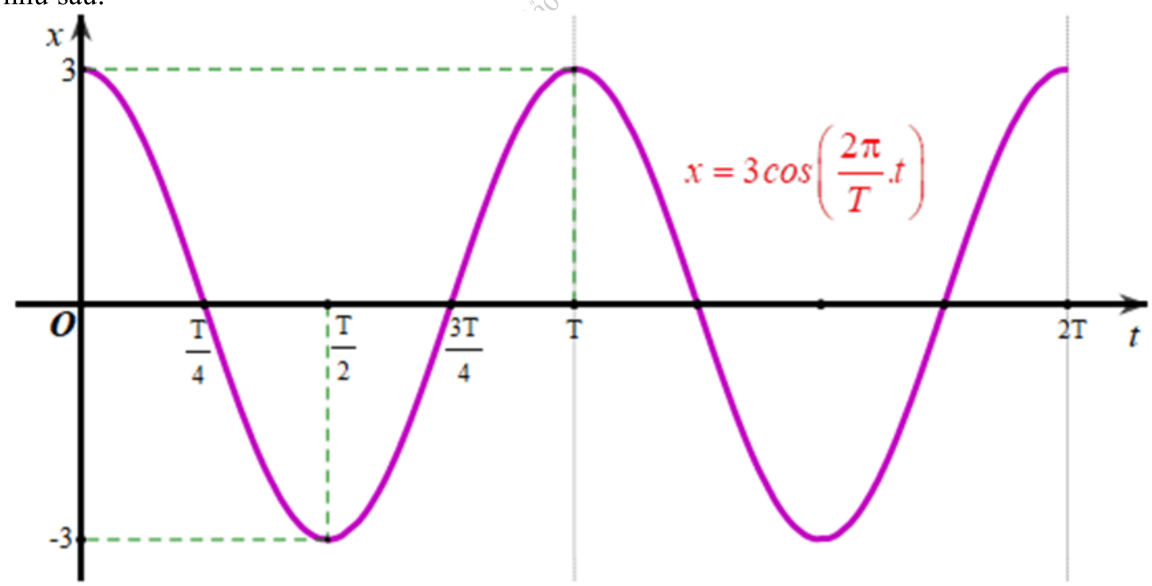
Xét hàm số $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ có chu kì là T.

Ta vẽ đồ thị hàm số $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$	3	0	-3	0	3

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T, ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[T;2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$ như sau:



b) - Với $A=3cm$ và $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t+\varphi\right)$ ta có:

$x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t-\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)=3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$

$\cdot t=0$ thì $x=3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)=3\sin 0=0$

$\cdot t=\frac{T}{4}$ thì $x=3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}=3$;

$\cdot t=\dfrac{T}{2}$ thì $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{T}{2}\right)=3\sin\pi=0$;

$\cdot t=\dfrac{3T}{4}$ thì $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{3T}{4}\right)=3\sin\dfrac{3\pi}{2}=-3$;

$\cdot t=T$ thì $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot T\right)=3\sin 2\pi=0$.

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$:

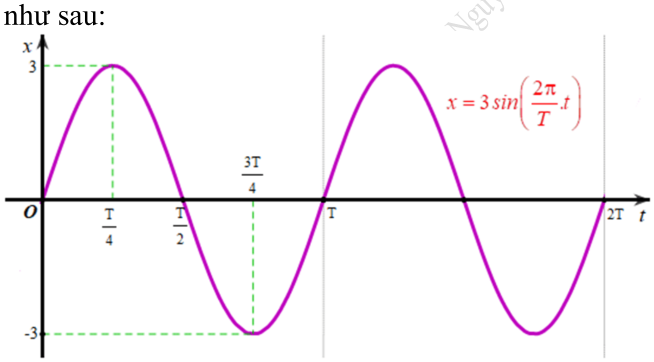
Xét hàm số $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T},t\right)$ có chu kì là T.

Ta vẽ đồ thị hàm số $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;T]$ theo bảng sau:

t	0	$\dfrac{T}{4}$	$\dfrac{T}{2}$	$\dfrac{3T}{4}$	T
$x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}.t\right)$	0	3	0	-3	0

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T, ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[T;2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x=3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$ như sau:



c) - Với $A=3cm$ và $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x=\mathrm{A}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t+\varphi\right)$ ta có:

$x=3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-3\cos\left(\pi-\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=-3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)=-3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right)$

$\cdot t=0$ thì $x=-3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot 0\right)=-3\sin 0=0$

$\cdot t=\dfrac{T}{4}$ thì $x=-3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{T}{4}\right)=-3\sin\dfrac{\pi}{2}=-3$;

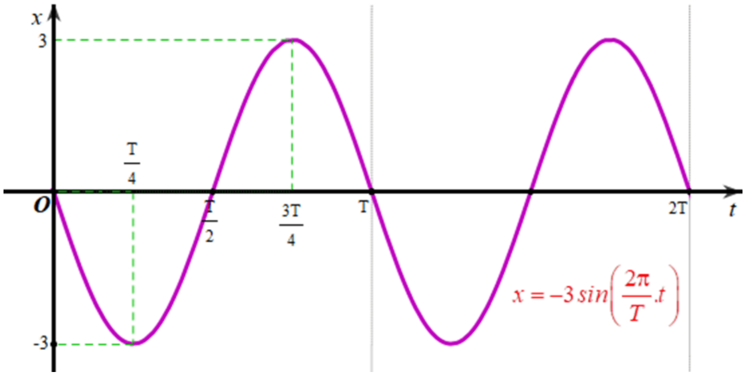
$\cdot t=\dfrac{T}{2}$ thì $x=-3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{T}{2}\right)=-3\sin\pi=0$;

$\cdot t=\dfrac{3T}{4}$ thì $x=-3\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{3T}{4}\right)=-3\sin\dfrac{3\pi}{2}=3$;

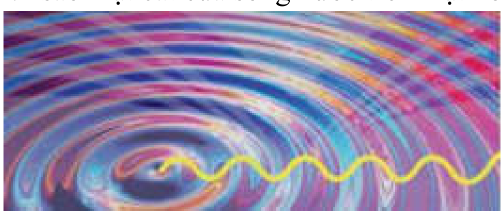
$\cdot t = T$ thì $x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T}.T\right) = -3\sin 2\pi = 0$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$:

Đồ thị hàm số $x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T},t\right)$ là hình đối xứng với đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ qua trục hoành:



Câu 50. Vì sao mặt cắt của sóng nước trên mặt hồ được gọi là có dạng hình sin?



Lời giải

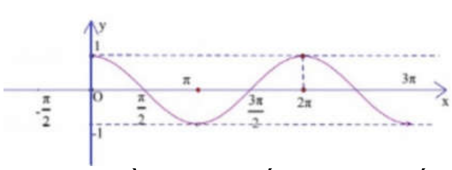
Vì hình ảnh mặt cắt sóng nước giống với đồ thị của hàm lượng giác $y = \sin x$

Câu 51. Li độ $s(cm)$ của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2\cos \pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1;1](cm)$.

(Theo https://www.britannica.com/sciencel simple-harmonic-motion)

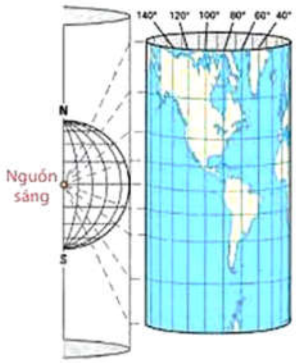
Lời giải

Trong 3 giây đầu, $0 \le t \le 3$ nên $0 \le \pi t \le 3\pi$



Dựa vào đồ thị hàm số côsin, ta thấy $\cos \pi t = 1$ khi $\pi t = 0$ và $\pi t = 2\pi$
Vậy con lắc có li độ lớn nhất tại các thời điểm $t = 0$ và t = 2

Câu 52. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ $\varphi^{\circ}\,(-90<\varphi<90)$ được cho bởi hàm số $y=20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)(cm)$. Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá $20\,cm$ trên bản đồ.



Hình 9

(Theo https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/)

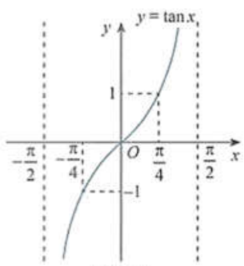
Giải

Vì điểm nằm cách xích đạo không quá $20\,cm$ trên bàn đồ nên ta có $-20\le y\le 20$.

Khi đó $-20\le 20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)\le 20$ hay $-1\le\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)\le 1$.

Ta có $-90<\varphi<90$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{180}\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Xét đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ (Hình 10).

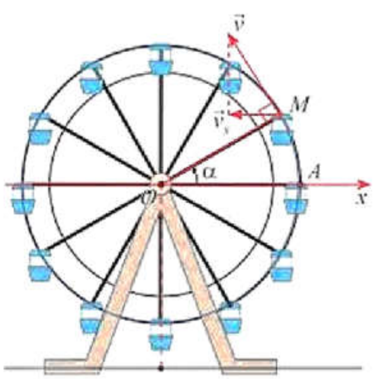


Hình 10

Ta thấy $-1\le\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)\le 1$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{180}\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$ hay $-45\le\varphi\le 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá $20\,cm$ nằm ở vĩ độ từ -45° đến 45°.

Câu 53. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha=(Ox,OM)$ theo hàm số $v_x=0,3\sin\alpha\,(m/s)$ (Hình 11).



Hình 11

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

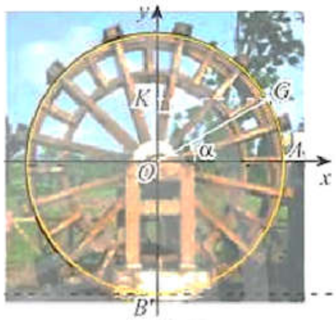
Lời giải

a) Do $-1 \le \sin\alpha \le 1$ nên $-0,3 \le 0,3\sin\alpha \le 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3(m)$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3\ (m)$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số sin, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \le \alpha \le 2\alpha$), v_x tăng khi $\pi \le \alpha \le 2\pi$

Câu 54. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Lời giải

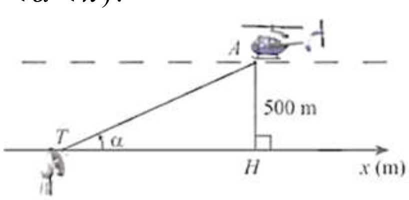
a) $h = 3 + 3.\sin\alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \le \alpha \le 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin\alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$

Câu 55. Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác $(Tx, TA)(0 < \alpha < \pi)$.



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot\alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $\frac{-\sqrt{3}}{3} < \cot\alpha < \sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$

Câu 56. Giả sử vận tốc v (tính bằng lítgiây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức $v = 0,85\sin\frac{\pi t}{3}$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây).

a) Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

Lời giải

a) Thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ chính là một chu kì tuần hoàn của hàm $v(t)$ và là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ (giây)

Ta có: 1 phút = 60 giây.

Do đó, số chu kì hô hấp trong một phút của người đó là $\frac{60}{6} = 10$ (chu kì).

b) Ta có: $v = 0.85\sin\frac{\pi t}{3}$

- $v < 0$ khi $0.85\sin\frac{\pi t}{3} > 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi t}{3} > 0$

Mà $-1 \le \sin\frac{\pi t}{3} \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $0 < \sin\frac{\pi t}{3} \le 1$

- $v < 0$ khi $0.85\sin\frac{\pi t}{3} < 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi t}{3} < 0$

Mà $-1 \le \sin\frac{\pi t}{3} \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $-1 \le \sin\frac{\pi t}{3} < 0$

Với t $\in (0;3)$ ta có $0 < \sin\frac{\pi t}{3} \le 1$

Với $t \in (3;5]$ ta có $-1 \le \sin\frac{\pi t}{3} < 0$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm sau 0 giây đến trước 3 giây thì người đó hít vào và khoảng thời điểm sau 3 giây đến 5 giây thì người đó thở ra.

Câu 57. Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A > 0), \omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5\cos 4\pi t (cm)$.

a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

Lời giải

a) Ta có: $-5\cos 4\pi t = 5\cos(4\pi t + \pi)$.

Khi đó vật dao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 5\cos(4\pi t + \pi)(cm)$ với biên độ dao động là $A = 5 > 0$ và pha ban đầu của dao động là $\varphi = \pi$.

b) Pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây) là $\omega t + \varphi = 4\pi.2 + \pi = 9\pi$.

Dao động điều hòa có chu kì là $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}=0.5$, có nghĩa là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần là 0,5 giây. Do đó, trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được $2:0,5=4$ dao động toàn phần.

Câu 58. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}=20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}\times 20\right)=90(cm)$.

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 59. Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t)=0,8\cos 0,5t+4$.

(Theo https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t=2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu $3,6\,m$ để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thuỷ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t=2$. Ta có: $h(t)=0,8\cdot\cos(0,5\cdot 2)+4=4,43(m)$

b)

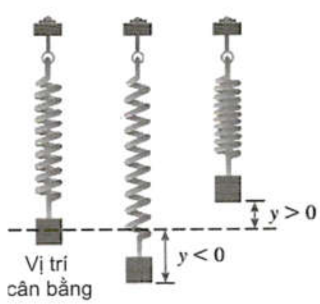
Dựa vào đồ thị hàm số cos:

Những thời điểm tàu không thể hạ thuỷ là khi $0,8\cos 0,5t+4<3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t<-0,5$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}<0,5t<\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 4,19<t<8,38$

Vậy thời điểm tàu có thể hạ thuỷ là $(0;4,19)\cup(8,38;12)$

Câu 60. Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y=25\sin 4\pi t$ ở đó y được được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.

b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.

c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Lời giải

a) Hàm số $y=25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$. Suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T=\frac{1}{2}$ giây.

b) Vì chu kì dao động của con lắc là $T=\frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $f=\frac{1}{T}=2\,Hz$.

c) Vì phương trình dao động của con lắc là $y=25\sin 4\pi t$, nên biên độ dao động của nó là $A=25\,cm$. Từ đó, khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $2A=50\,cm$.

Câu 61. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao $40\,m$ in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t)=40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$

ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

a) - Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t=8-6=2$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là $S(2)=40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 2\right)\right|=40\sqrt{3}(m)$.

- Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t=12-6=6$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là $S(6)=40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 6\right)\right|=0(m)$.

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

- Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t=14-6=8$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8)=40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 8\right)\right|=\frac{40\sqrt{3}}{3}(m)$.

- Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t=\left(17+\frac{3}{4}\right)-6=\frac{39}{4}$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là $S\left(\frac{39}{4}\right)=40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot\frac{39}{4}\right)\right|\approx 59,86(m)$.

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao tòa nhà khi

$S(t)=40 \Leftrightarrow 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|=40 \Leftrightarrow \cot\frac{\pi}{12}t=\pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow t=\pm 3+12k\,(k\in\mathbb{Z})$.

Vì $0\le t\le 12$ nên $t=3$ hoặc $t=9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t\to 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12}t\to\pi$, do đó $\cot\frac{\pi}{12}t\to-\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 62. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là

$f_1(t)=C\sin\omega t$ và $f_2(t)=C\sin(\omega t+\alpha)$.

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=C\sin\omega t+C\sin(\omega t+\alpha)$.

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$, ở đó A,B là hai hằng số phụ thuộc vào α.

b) Khi $C=10$ và $\alpha=\frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t)=k\sin(\omega t+\varphi)$.

Lời giải

a) Ta có $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$

$=C\sin\omega t+C\sin(\omega t+\alpha)=C\sin\omega t+C(\sin\omega t\cos\alpha+\cos\omega t\sin\alpha)$.

Vậy $f(t)=C(1+\cos\alpha)\sin\omega t+C\sin\alpha\cos\omega t=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ với $A=C(1+\cos\alpha),B=C\sin\alpha$.

b) Khi $C=10$ và $\alpha=\frac{\pi}{3}$, ta có

$$f(t)=10\sin\omega t+10\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)=10\cdot 2\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=10\sqrt{3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k=10\sqrt{3}$ và $\varphi=\frac{\pi}{6}$

Câu 63. Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động $(A>0)$ và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$x_1(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)(cm)$ và $x_2(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)(cm)$.

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Lời giải

a) Ta có $x(t)=x_1(t)+x_2(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=3.2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$=6\cos\frac{\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t)=3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{12}\right)$.

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A=3\sqrt{2}\,cm$ và pha ban đầu là $\varphi=\frac{\pi}{12}$.

Câu 64. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$p(t)=120+15\cos150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Lời giải

a) Hàm số $p(t)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \frac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và $p\left(t+\frac{1}{75}\right)=120+15\cos(150\pi t+2\pi)=120+15\cos 150\pi t=p(t)$.

Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \le \cos 150\pi t \le 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \le p(t) \le 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

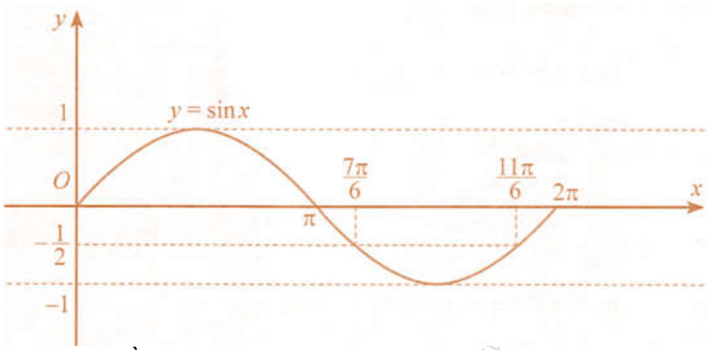
Vậy chỉ số huyết áp của người đó là $135/105$.

Câu 65. Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s=3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \le -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trong 4 giây đầu, ta có $0 \le t \le 4$, suy ra $0 \le \frac{\pi}{2}t \le 2\pi$.

Đặt $x=\frac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0;2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[0;2\pi]$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0;2\pi]$, ta có:

$s \le -\frac{3}{2}$ khi $3\sin x \le -\frac{3}{2}$ hay $\sin x \le -\frac{1}{2}$, suy ra $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$.

Do đó $\frac{7}{3} \le t \le \frac{11}{3}$.

Câu 66. Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: $x=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega>0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t=0, t=\frac{T}{4}, t=\frac{T}{2}, t=\frac{3T}{4}, t=T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn $[0;2T]$ trong trường hợp:

a) $A=3cm, \varphi=0$;

b) $A=3cm, \varphi=-\frac{\pi}{2}$;

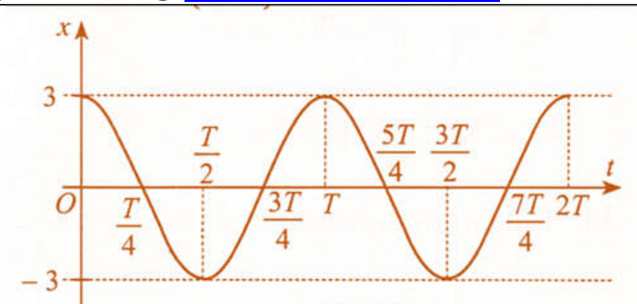
c) $A=3cm, \varphi=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) Khi $A=3cm, \varphi=0$, ta có: $x=3\cos(\omega t)=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3

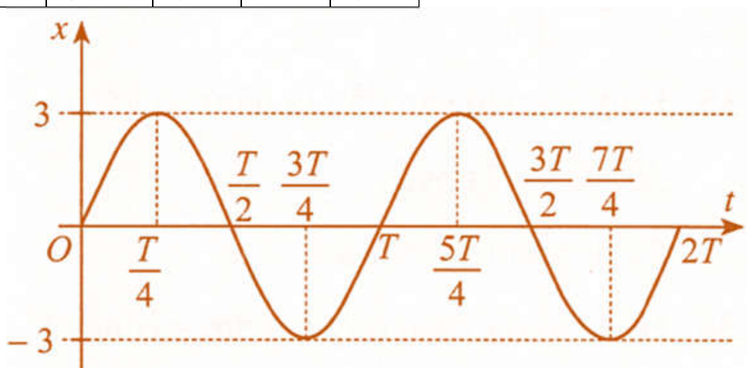


Hình 9

b) Khi $A=3cm, \varphi=-\frac{\pi}{2}$, ta có: $x=3\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0

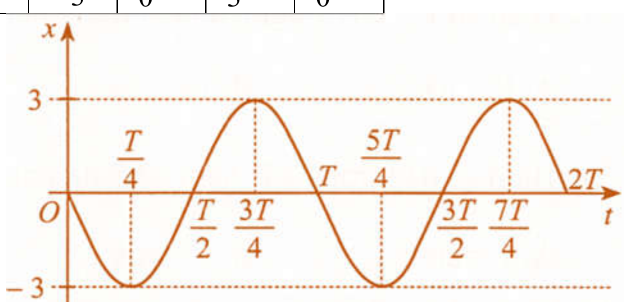


Hình 10

c) Khi $A=3cm, \varphi=\frac{\pi}{2}$, ta có: $x=3\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)$.

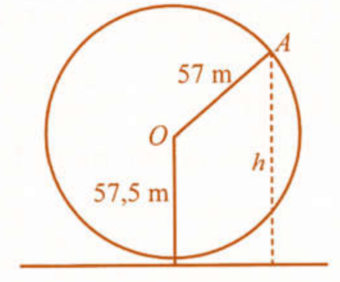
Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



Hình 11

Câu 67. Một vòng quay trò chơi có bán kính $57\,m$, trục quay cách mặt đất $57,5\,m$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t)=57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút $(t\geq 0)$ (Hình 12).



Hình 12

a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?
b) Khi $t=0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?
c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t=0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là $86m$?

Lời giải

a) Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số $h(t)$ bằng 15 phút.

b) Khi $t=0$ thì $h=57\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+57,5=0,5(m)$. Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng $0,5m$.

c) Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)=1$ hay $t=7,5$ (phút); cabin đạt được chiều cao là $86m$ lần đầu tiên khi $t=5$ (phút).

Câu 68. Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Do $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]\ge -1 \Rightarrow 3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]\ge -3$

$\Rightarrow 3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12\ge 9 \Rightarrow d(t)\ge 9$.

Vậy thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi:

$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Leftrightarrow t-80=182\left(-\frac{1}{2}+2k\right) \Leftrightarrow t=364k-11, k\in\mathbb{Z}$.

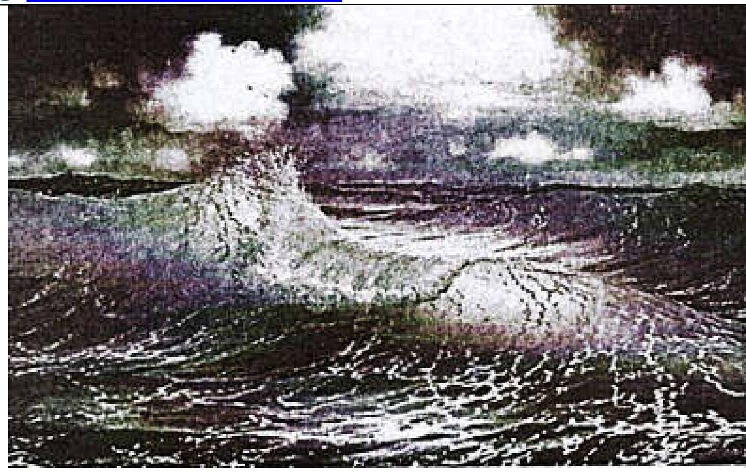
Mặt khác: $0\le 364k-11\le 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364}\le k\le\frac{376}{364} \Leftrightarrow k=1$(do $k\in\mathbb{Z}$)

$\Rightarrow t=364-11=353$

Vậy thành phố T có ít giờ ánh sáng Mặt Trời nhất là 9 giờ khi $t=353$, tức là vào ngày thứ 353 trong năm.

Câu 69. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t)=75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.

a) Tìm chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây, 20 giây.
b) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t=0$ giây), hãy tìm thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất.
(Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

a) Khi $t=5$, ta có: $h(5)=75\sin\left(\frac{\pi.5}{8}\right)\approx 69,3(cm)$.

Khi $t=20$, ta có: $h(20)=75\sin\left(\frac{\pi\cdot 20}{8}\right)=75(cm)$.

b) Ta có: $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)\le 1\Rightarrow 75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)\le 75$ hay $h(t)\le 75$.

Giá trị lớn nhất của $h(t)$ là 75, khi đó $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)=1\Rightarrow\frac{\pi t}{8}=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$ $\Rightarrow t=4+16k(k\in\mathbb{Z})$. Vì $t\in[0;30]\Rightarrow t\in\{4;20\}$ (ứng với k bằng 0 và 1).

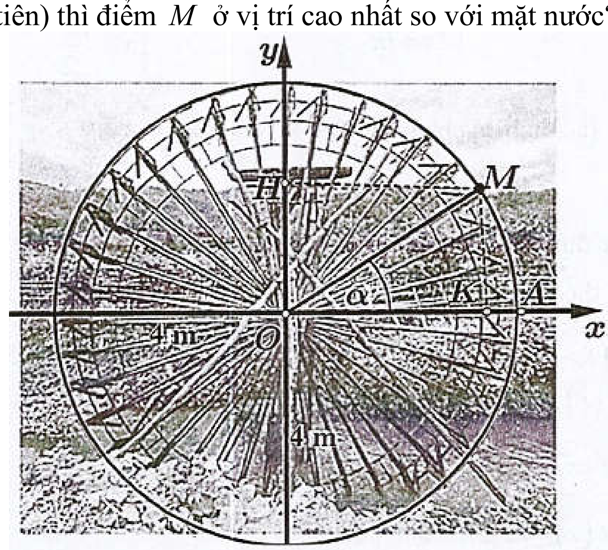
Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì cơn sóng đạt chiều cao cực đại (là $75cm$).

Câu 70. Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O, bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha=(OA,OM)$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O;4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

a) Hãy lập hàm số $h(x)$ thể hiện chiều cao của điểm M so với mặt nước theo góc α. Tìm góc α khi điểm M cách mặt nước $6m$.

b) Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t=0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Lời giải

a) Ta có: $h(x)=4+4\sin\alpha$. Khi M cách mặt nước $6m$ thì $h(x)=6$.

$\Leftrightarrow 4+4\sin\alpha = 6 \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ \alpha = \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

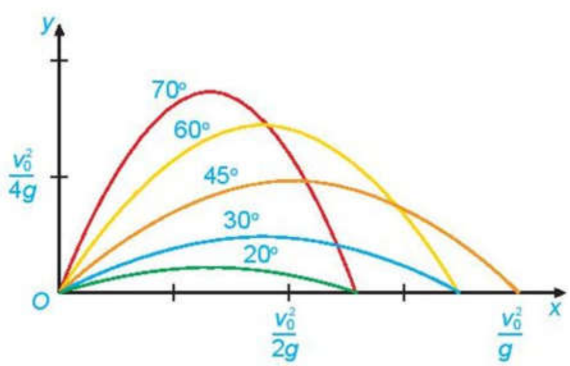
b) Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước (tức là $h(x)=8$) thì $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1 vòng quay đầu tiên).

Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t = \dfrac{\frac{\pi}{2}\cdot 40}{2\pi} = 10$ (giây).

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 71. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

Lời giải



Chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ đặt tại vị trí khẩu pháo, trục Ox theo hướng khẩu pháo như hình bên. Khi đó, theo Vật lí, ta biết rằng quỹ đạo của quả đạn pháo có dạng đường parabol có phương trình (với g là gia tốc trọng trường) $y = \dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$.

Cho $y=0$ ta được $\dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0$, suy ra $x=0$ hoặc $x = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Quả đạn tiếp đất khi $x = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Ta có $x = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \le \dfrac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Do $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45°$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng $45°$.

Câu 72. Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là $\alpha\left(0° \leq \alpha \leq 360°\right)$ thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha).$$

(Theo trang usno.navy.mil).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

a) $F=0$ (trăng mới);

b) $F=0,25$ (trăng lưỡi liềm);

c) $F=0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);

d) $F=1$ (trăng tròn).

Lời giải

a) Với $F=0$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=1 \Leftrightarrow a=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Với $F=0,25$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=0,25 \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $\alpha=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

c) Với $F=0,5$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=0.5 \Leftrightarrow \cos a=0 \Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

d) Với $F=1$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=1 \Leftrightarrow \cos a=-1 \Leftrightarrow a=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 73. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0=500\,m/s$ hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y=\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$, ở đó $g=9,8\,m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị tí đặt khẩu pháo $22000\,m$.

c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

Vì $v_0=500\,m/s, g=9,8\,m/s^2$ nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$y=\frac{-9.8}{2\times500^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$ hay $y=\frac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$

a) Quả đạn chạm đất khi $y=0$, khi đó $y=\frac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$

$\Leftrightarrow x\left(\dfrac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x+\tan\alpha\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{2500000\cos^2\alpha\times\tan\alpha}{49}$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{2500000\cos\alpha\sin\alpha}{49}$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{1250000\sin 2\alpha}{49}$

Loại $x=0$ (đạn pháo chưa được bắn).

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x=\dfrac{1250000\sin 2\alpha}{49}(m)$.

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo $22000m$ thì $x=22000m$.

Khi đó $\dfrac{1250000\sin 2\alpha}{49}=22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha=\dfrac{539}{625}$

Gọi $\beta\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ là góc thỏa mãn $\beta=\dfrac{539}{625}$. Khi đó ta có: $\sin 2\alpha=\sin\beta$

$\Leftrightarrow 2\alpha=\beta+k2\pi$ hoặc $2\alpha=\pi-\beta+k2\pi (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\beta}{2}+k\pi$ hoặc $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}+k\pi (k\in\mathbb{Z})$

c) Hàm số $y=\dfrac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$ là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa độ đỉnh $I(x_I;y_I)$ là

$$\begin{cases} x_I=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\tan\alpha}{2\times\dfrac{-49}{250000\cos^2\alpha}}=\dfrac{1250000\cos\alpha\sin\alpha}{49} \\ y_I=f(x_I)=\dfrac{-49}{2500000\cos^2\alpha}\left(\dfrac{1250000\cos\sin\alpha}{49}\right)^2+\dfrac{1250000\cos\alpha\sin\alpha}{49}\tan\alpha \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} x_I=\dfrac{1250000\cos\alpha\sin\alpha}{49} \\ y_I=\dfrac{625000\sin^2\alpha}{49} \end{cases}$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là $y_{\max}=\dfrac{625000\sin^2\alpha}{49}$

Ta có $y_{\max}=\dfrac{625000\sin^2\alpha}{49}\le\dfrac{625000}{49}$, dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 a=1$ hay $\alpha=90^\circ$.

Như vậy góc bắn $\alpha=90^\circ$ thì quả đan đạt độ cao lớn nhất.

Câu 74. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$x=2\cos\left(5t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hòa là vị trí vật đứng yên, khi đó $x=0$, ta có

$$2\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=\frac{2\pi}{15}+k\frac{\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$$

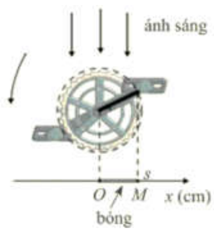
Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0\le t\le 6$ hay

$$0\le\frac{2\pi}{15}+k\frac{\pi}{5}\le 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le k\le\frac{90-2\pi}{3\pi}$$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Câu 75. Trong hình bên, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $s=17\cos 5\pi t$ với $s(cm)$ là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Làm cách nào để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng $10cm$?



Lời giải

Độ dài bóng OM bằng $10cm$ khi $s=10$ hoặc $s=-10$.

Khi $s=10$. Ta có: $17\cos 5\pi t=10$

Khi $s=10$. Ta có: $17\cos 5\pi t=-10$

Từ đó, ta có thể xác định được các thời điểm t

Câu 76. Quay lại bài toán khởi động, phương trình chuyển động của bóng đầu trục bàn đạp là $x=17\cos 5\pi t(cm)$ với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng $10cm$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có $|x|=10$

$\Leftrightarrow |17\cos 5\pi t|=10$

$\Leftrightarrow 17\cos 5\pi t=10 \vee 17\cos 5\pi t=-10$

$\bullet 17\cos 5\pi t=10$

$\Leftrightarrow 5\pi t=0,94+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \vee 5\pi t=-0,94+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

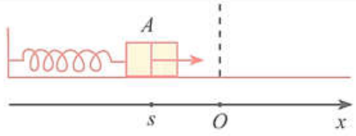
$\Leftrightarrow t=0,06+0,4k, k\in\mathbb{Z} \vee t=-0,06+0,4k, k\in\mathbb{Z}$

$\bullet 17\cos 5\pi t=-10$

$\Leftrightarrow 5\pi t=2,2+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \vee 5\pi t=-2,2+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=0,14+0,4k, k\in\mathbb{Z} \vee t=-0,14+0,4k, k\in\mathbb{Z}$

Câu 77. Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Toạ độ $s(cm)$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s=10\sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s=-5\sqrt{3}\,cm$?



Hình 9

(Theo https://ww.britannica.com/science/simple-harmonic-motion)

Lời giải

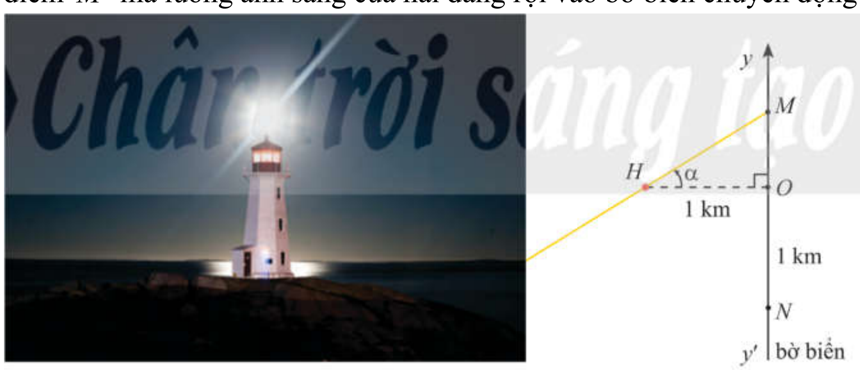
Khi: $s=-5\sqrt{3}$ thì $10\sin\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-5\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 10t+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \vee 10t+\dfrac{\pi}{2}=\pi-\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{12}+\dfrac{1}{5}k, k\in\mathbb{Z} \vee t=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{5}k, k\in\mathbb{Z}$

Câu 78. Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO=1km$. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\dfrac{\pi}{10}rad/s$ và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rọi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



Hình 10

(Theo https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology)

a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO. Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t.

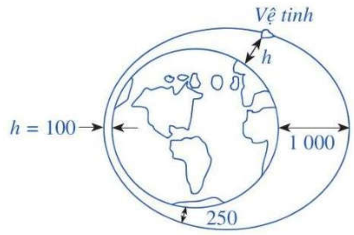
b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N=-1(km)$. Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Lời giải

a) $y_M=\tan\dfrac{\pi}{10}t$

b) Khi $y_N=-1$ ta có $\tan\dfrac{\pi}{10}t=-1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{10}t=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=\dfrac{15}{2}+10k, k\in\mathbb{Z}$

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (Hình 33). Độ cao $h(km)$ của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h=550+450\cos\dfrac{\pi}{50}t$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất 1000 km;250km;100km ?



Hình 33

Lời giải

- Để vệ tinh cách mặt đất 1000 km thì $550+450\cos\frac{\pi}{50}t=1000$

$\Leftrightarrow 450\cos\frac{\pi}{50}t=450 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{50}t=1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50}t=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z},t\geq 0)$

$\Leftrightarrow t=k2\pi\cdot\frac{50}{\pi}=100k\,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tại các thời điểm $t=100k$ (với $k\in\mathbb{Z},t\geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất $1000\,km$.

- Để vệ tinh cách mặt đất 250 km thì $550+450\cos\frac{\pi}{50}t=250$

$\Leftrightarrow 450\cos\frac{\pi}{50}t=-300 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{50}t=-\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{50}t\approx 2,3+k2\pi\\ \frac{\pi}{50}t\approx -2,3+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z},t\geq 0)$

(Dùng máy tính cầm tay (chuyển về chế độ "radian") bấm liên tiếp $\boxed{SHIFT}\boxed{\cos}\boxed{-}\boxed{2}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{=}$ ta được kết quả gần đúng là 2,3)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\approx\frac{115}{\pi}+100k\\ t\approx -\frac{115}{\pi}+100k\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z},t\geq 0)$

Vậy tại các thời điểm $t\approx\pm\frac{115}{\pi}+100k$ (với $k\in\mathbb{Z},t\geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 250 km.

- Để vệ tinh cách mặt đất 100 km thì $550+450\cos\frac{\pi}{50}t=100$

$\Leftrightarrow 450\cos\frac{\pi}{50}t=-450$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{50}t=-1$

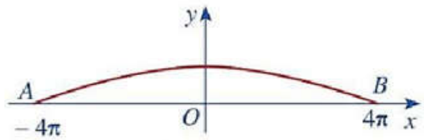
$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50}t=\pi+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z},t\geq 0).$

$\Leftrightarrow t=50+100k\,(k\in\mathbb{Z}\}$

Vậy tại các thời điểm $t=50+100k$ (với $k\in\mathbb{Z},t\geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 100 km.

Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải một trong các phương trình có dạng: $\sin x = m, \cos x = m, \tan x = m, \cot x = m$, trong đó x là ẩn số, m là số thực cho trước. Các phương trình đó là các phương trình lượng giác cơ bản.

Câu 79. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos\frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 38.



Hình 38

Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.

Lời giải

Với mỗi điểm M nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M.

Xét phương trình: $4,2 \cdot \cos\frac{x}{8} = 3 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{8} = \frac{5}{7}$. Do $x \in [-4\pi; 4\pi]$ nên $\frac{x}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó, ta có: $\cos\frac{x}{8} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{x}{8} \approx \pm 0,775$, suy ra $\left|\frac{x}{8}\right| < 0,78 \Leftrightarrow |x| < 6,24$.

Do sà lan có thể đi qua được gầm cầu nên chiều rộng của khối hàng hoá là: $2|x| < 12,48 < 12,5(m)$.

Câu 80. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$.

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Để thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12 = 12$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t - 80 = 182k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 80 + 182k (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 80 + 182k \le 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -80 < 182k \le 285 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{40}{91} < k \le \frac{285}{182} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$$

Với $k = 0$ thì $t = 80 + 182.0 = 80$;

Với $k=1$ thì $t=80+182\cdot 1=262$

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm.

b) Để thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)+12=9$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80=-91+364k\,(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t=-11+364k\,(k\in\mathbb{Z})$$

Do $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$ nên ta có:

$$\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ 0<-11+364k\le 365\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ 11<364k\le 376\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ \frac{11}{364}<k\le\frac{94}{91}\end{cases}\Leftrightarrow k=1$$

Với $k=1$ thì $t=-11+364.1=353$.

Vậy thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Để thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)+12=15$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80=91+364k\,(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t=171+364k\,(k\in\mathbb{Z})$$

Do $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$ nên ta có:

$$\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ 0<171+364k\le 365\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ -171<364k\le 194\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ -\frac{171}{364}<k\le\frac{97}{182}\end{cases}\Leftrightarrow k=0$$

Với $k=0$ thì $t=171+364.0=171$.

Vậy thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 171 trong năm.

Câu 81. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t\ge 0$) bởi hệ thức $h=|d|$ với $d=3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d>0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d<0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?

Hình 39

Lời giải

• Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3 m thì:

$$\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=3$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\cos[\frac{\pi}{3}(2t-1)]=3\\3\cos[\frac{\pi}{3}(2t-1)]=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=1\\\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}(2t-1)=k2\pi\\\frac{\pi}{3}(2t-1)=\pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t-1=6k\\2t-1=3+6k\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t=6k+1\\2t=6k+4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3k+\frac{1}{2}\\t=3k+2\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Do $t\geq 0,k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;\ldots\}$

Khi đó $\left[\begin{array}{l}t\in\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2};\frac{13}{2};\ldots\right\}\\t\in\{2;5;8;\ldots\}\end{array}\right.\Leftrightarrow t\in\left\{\frac{1}{2};2;\frac{7}{2};5;\frac{13}{2};8;\ldots\right\}$.

Vậy $t\in\left(\frac{1}{2};2;\frac{7}{2};5;\frac{13}{2};8;\ldots\right)$ (giây) thì khoảng cách h là $3m$.

• Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là $0m$ thì:

$$\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=0\Leftrightarrow 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow 2t-1=\frac{3}{2}+3k$$

$$\Leftrightarrow 2t=\frac{5}{2}+3k\Leftrightarrow t=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}k.$$

Do $t\geq 0,k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;\ldots\}$, khi đó $t\in\left\{\frac{5}{4};\frac{11}{4};\frac{17}{4};\ldots\right\}$.

Vậy $t\in\left\{\frac{5}{4};\frac{11}{4};\frac{17}{4};\ldots\right\}$ (giây) thì khoảng cách h là $0m$.

Câu 82. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $(0 \le t < 24)$ cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021). Tìm t để độ sâu của mực nước là:

a) $15m$;

b) $9m$;

c) $10,5m$.

Lời giải

a) Để độ sâu của mực nước là $15m$ thì:

$$h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 15 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = -\frac{6}{\pi} + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

Do $0 \le t < 24$ nên $0 \le -\frac{6}{\pi} + 12k < 24$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\pi} \le 12k < 24 + \frac{6}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \le k < 2 + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\}$.

Với $k = 1$ thì $t = -\frac{6}{\pi} + 12.1 \approx 10,09$ (giờ);

Với $k = 2$ thì $t = -\frac{6}{\pi} + 12.2 \approx 22,09$ (giờ).

Vậy lúc 10,09 giờ và 22,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 15 m.

b) Để độ sâu của mực nước là $9m$ thì:

$$h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 9 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

Do $0 \le t < 24$ nên $0 \le 6 - \frac{6}{\pi} + 12k < 24$

$$\Leftrightarrow -6 + \frac{6}{\pi} \le 12k < 18 + \frac{6}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \le k < \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Với $k = 0$ thì $t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12.0 \approx 4,09$ (giờ);

Với $k = 1$ thì $t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12.1 \approx 16,09$ (giờ).

Vậy lúc 4,09 giờ và 16,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 9 m.

c) Để độ sâu của mực nước là 10,5 m thì:

$$h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)+12=10,5$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi t}{6}+1=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ \frac{\pi t}{6}+1=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4-\frac{6}{\pi}+12k \quad (1) \\ t=-4-\frac{6}{\pi}+12k\,(2)\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

- Do $0\le t<24$ nên (1) ta có: $0\le 4-\frac{6}{\pi}+12k<24$

$\Leftrightarrow -4+\frac{6}{\pi}\le 12k<20+\frac{6}{\pi}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi}\le k<\frac{5}{3}+\frac{1}{2\pi}$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1\}$.

Với $k=0$ thì $t=4-\frac{6}{\pi}+12.0\approx 2,09$ (giờ);

Với $k=1$ thì $t=4-\frac{6}{\pi}+12.1\approx 14,09$ (giờ).

- Do $0\le t<24$ nên từ (2) ta có: $0\le -4-\frac{6}{\pi}+12k<24$

$\Leftrightarrow 4+\frac{6}{\pi}\le 12k<28+\frac{6}{\pi}\Leftrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi}\le k<\frac{7}{3}+\frac{1}{2\pi}$

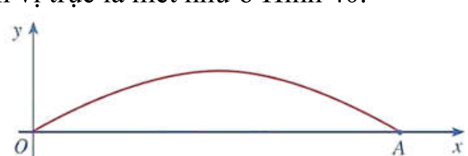
Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;2\}$.

Với $k=1$ thì $t=-4-\frac{6}{\pi}+12.1\approx 6,09$ (giờ);

Với $k=2$ thì $t=-4-\frac{6}{\pi}+12.2\approx 18,09$ (giờ).

Vậy lúc 2,09 giờ, 6,09 giờ, 14,09 giờ và 18,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 10,5 m.

Câu 83. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y=4,8\cdot\sin\frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



Hình 40

a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là $9m$ sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3m$.

Lời giải

a) Hai vị trí O và A là hai vị trí chân cầu, tại hai vị trí này ta có: $y=0$

$\Leftrightarrow 4,8\cdot\sin\frac{x}{9}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{9}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{9}=k\pi(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x=9k\pi(k\in\mathbb{Z})$

Quan sát đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y=4,8\cdot\sin\frac{x}{9}$ cắt trục hoành tại điểm O và A liên tiếp nhau với $x\ge 0$.

Xét $k=0$, ta có $x_1=0$;

Xét $k=1$, ta có $x_2=9\pi$.

Mà $x_1=0$ nên đây là hoành độ của O, do đó $x_2=9\pi$ là hoành độ của điểm A.

Khi đó $OA=9\pi\approx 28,3$.

Vậy chiều rộng của con sông xấp xỉ 28,3 m.

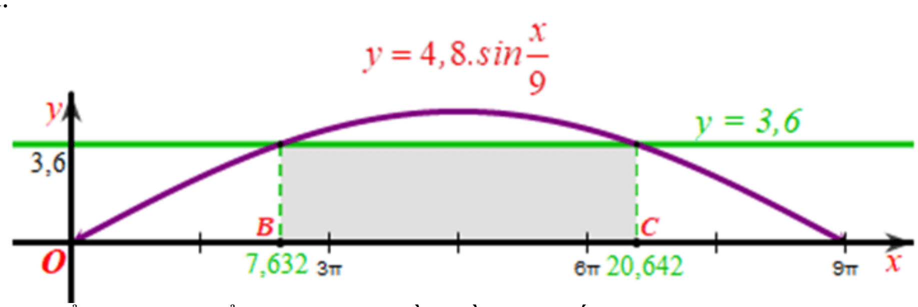
b) Do sà lan có độ cao $3,6$m so với mực nước sông nên khi sà lan đi qua gầm cầu thì ứng với $y=3,6$.

$$\Leftrightarrow 4,8.\sin\frac{x}{9}=3,6 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{9}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{9}\approx 0,848+k2\pi \\ \frac{x}{9}\approx \pi-0,848+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\approx 7,632+18k\pi \\ x\approx 9\pi-7,632+18k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Xét $k=0$, ta có $x_1\approx 7,632; x_2\approx 20,642$.

Ta biểu diễn các giá trị x vừa tìm được trên hệ trục tọa độ vẽ đồ thị hàm số $y=4,8\cdot\sin\frac{x}{9}$ như sau:

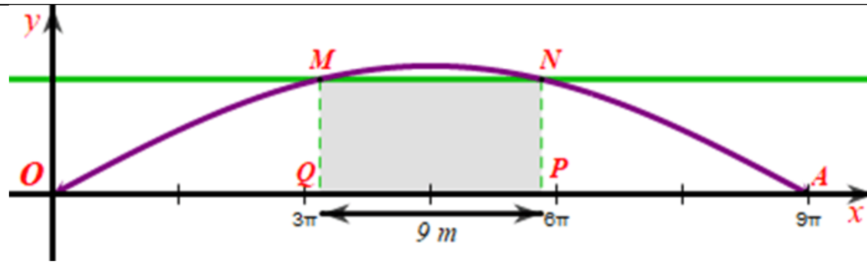


Khi đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì khối hàng hóa có độ cao $3,6$m phải có chiều rộng nhỏ hơn độ dài đoạn thẳng BC trên hình vẽ.

Mà $BC\approx 20,642-7,632=13,01(m)<13,1(m)$.

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $13,1$m.

c) Giả sử sà lan chở khối hàng được mô tả bởi hình chữ nhật $MNPQ$:



Khi đó $QP = 9; OA = 28,3$ và $OQ = PA$.

Mà $OQ + QP + PA = OA \Rightarrow OQ + 9 + OQ \approx 28,3 \Rightarrow OQ \approx 9,65$

Khi đó $y_M = 4,8 \cdot \sin\frac{x_M}{9} = 4,8 \cdot \sin\frac{OQ}{9} \approx 4,8 \cdot \sin\frac{9,65}{9} \approx 4,22(m) < 4,3(m)$.

Vậy để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3$ m.

Câu 84. Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$.

(Theo https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;

b) Vận tốc con lắc bằng $1,5\,cm/s$.

Lời giải

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$

b) Khi $v = 1,5$ Ta có:

$\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{-\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$

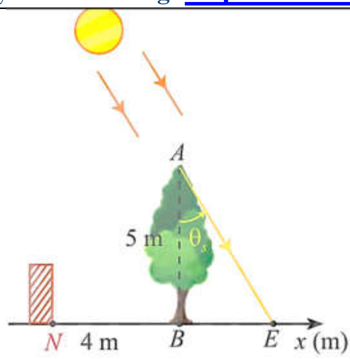
Câu 85. Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao $5m$. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx. Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức $\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t-12)rad$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle)

a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t.

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4(m)$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 1

Lời giải

a) $x_E = 5\tan\frac{\pi}{12}(t-12)$

b) Do $6 < t < 18$ nên $\frac{-\pi}{2} < \frac{\pi}{12}(t-12) < \frac{\pi}{2}$

Dựa vào đồ thị hàm tan:

Bóng cây phủ qua tường rào khi $x_E < -4 \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{12}(t-12) < \frac{-4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-12) < -0,67 \Leftrightarrow t < 9,4$

Vậy thời điểm bóng cây phủ qua hàng rào là $6 < t < 9,4$

Câu 86. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$,

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.

b) Tìm số nhịp tim mỗi phút.

c) Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Lời giải

a) Chu kì của hàm số $p(t)$ là $T = \frac{2\pi}{160\pi} = \frac{1}{80}$

b) Thời gian giữa hai lần tim đập là $T = \frac{1}{80}$ (phút)

Số nhịp tim mỗi phút là $1 : \frac{1}{80} = 80$ nhịp.

c) Ta có: $-1 \le \sin(160\pi t) \le 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

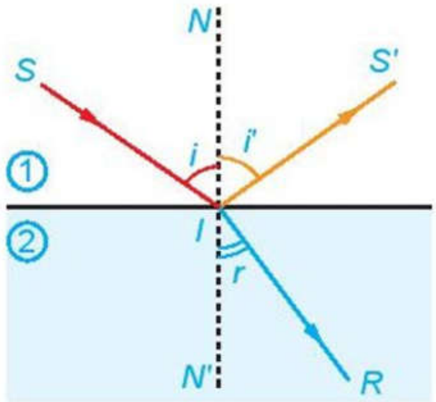
$\Leftrightarrow -25 \le 25\sin(160\pi t) \le 25$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 115 + (-25) \le 115 + 25\sin(160\pi t) \le 115 + 25$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 90 \le p(t) \le 140$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

Do đó, chỉ số huyết áp của người này là $\frac{140}{90}$ và chỉ số huyết áp của người này cao hơn mức bình thường.

Câu 87. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình.



Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_2}{n_1}$.

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i=50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $i=50^\circ, n1=1, n2=1,33$, thay vào $\frac{\sin i}{\text{sinr}}=\frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$\frac{\sin 50^\circ}{\sin r}=\frac{1.33}{1}$ $(DKXD: \sin r\neq 0)$

$\Rightarrow \sin r=\frac{\sin 50^\circ}{1.33}$

$\Leftrightarrow \sin r\approx 0,57597$ (Thoa man)

$\Leftrightarrow \sin r\approx \sin\left(35^\circ 10'\right)$

$\Leftrightarrow r\approx 35^\circ 10'+k360^\circ \vee r\approx 180^\circ-35^\circ 10'+k360^\circ (k\in\mathbb{Z})$

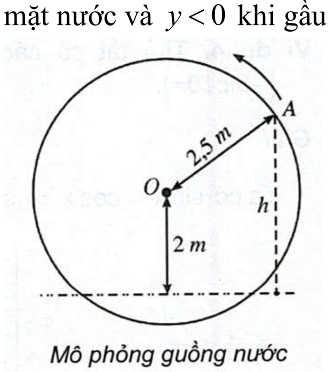
$\Leftrightarrow r\approx 35^\circ 10'+k360^\circ \vee r\approx 144^\circ 50'+k360^\circ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $0^\circ<r<90^\circ$ nên $r\approx 35^\circ 10'$.

Vậy góc khúc xạ $r\approx 35^\circ 10'$.

Câu 88. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước $2\,m$ (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h=|y|$ trong đó $y=2+2,5\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)$

với x là thời gian quay của guồng $(x\geq 0)$, tính bằng phút; ta quy ước rằng $y>0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y<0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Lời giải

a) $Vi^{-}1 \le \sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right) \le 1$ nên $-2,5 \le 2,5\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right) \le 2,5$ và do đó ta có

$-0,5 = 2-2,5 \le 2+2,5\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right) \le 2+2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra, gầu ở vị trí cao nhất khi $\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+k(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy gầu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots$ phút.

Tương tự, gầu ở vị trí thấp nhất khi

$\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=k(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm $0,1,2,3,\ldots$ phút.

b) Gầu cách mặt nước $2m$ khi $2+2,5\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=2$

$\Leftrightarrow \sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy chiếc gầu cách mặt nước $2m$ lần đầu tiên tại thời điểm $x=\frac{1}{4}$ phút.

Câu 89. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

$L(t)=12+2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$, $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$.

a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

Vì $-1 \le \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \le 1$ nên $-2,83 \le 2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \le 2,83$, do đó

$9,17 = 12-2,83 \le 12+2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \le 12+2,83 = 14,83 \forall t\in\mathbb{R}$.

a) Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=-1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=-\frac{45}{4}+365k(k\in\mathbb{Z})$.

Vì $0<t\le 365$ nên $k=1$, suy ra $t=-\frac{45}{4}+365=353,75$. Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

b) Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=171,25+365k(k\in\mathbb{Z})$.

Vì $0<t\le 365$ nên $k=0$, suy ra $t=171,25$. Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

c) Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12+2,83\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=10 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=-\frac{200}{283} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{365}(t-80)\approx -0,78+k2\pi \\ \frac{2\pi}{365}(t-80)\approx 3,93+k2\pi\end{array}\right.$$

Từ đó ta được $\left[\begin{array}{l} t \approx 34,69+365k \\ t \approx 308,30+365k \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. Vì $0<t \leq 365$ nên $k=0$ suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$. Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

Câu 90. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t)=100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là $100mmHg$.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là $120mmHg$.

Lời giải

a) Huyết áp là $100mmHg$ khi

$$P(t)=100 \Leftrightarrow 100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t=k\pi \Leftrightarrow t=\frac{3k}{7}(k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $0<t<1 \Leftrightarrow 0<\frac{3k}{7}<1 \Leftrightarrow 0<k<\frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in\{1;2\}$ vì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 mmHg.

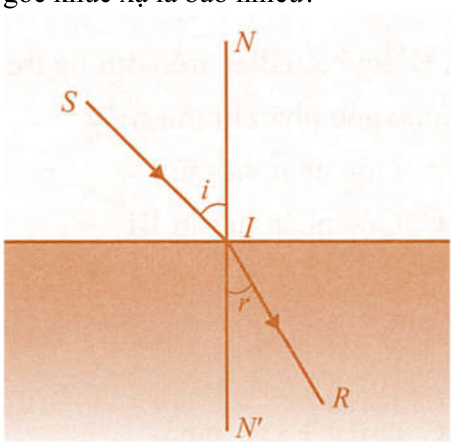
b) Huyết áp là $120mmHg$ khi

$$P(t)=120 \Leftrightarrow 100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=\frac{3}{14}+\frac{6k}{7}(k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $0<t<1 \Leftrightarrow 0<\frac{3}{14}+\frac{6k}{7}<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{11}{12} \Leftrightarrow k=0$ vì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg.

Câu 91. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30°. Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu?



Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Vì $\frac{\sin 45^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=\frac{\sin 60^{\circ}}{\sin r}$ nên $\sin r=\frac{\sin 60^{\circ}\sin 30^{\circ}}{\sin 45^{\circ}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $r=37,76^{\circ}$.

Câu 92. Một quả bóng được ném xiên một góc $\alpha\left(0^{\circ}\le\alpha\le 90^{\circ}\right)$ từ mặt đất với tốc độ $v_0(m/s)$. Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{10}$.

a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu $10m/s$ và góc ném là 30° so với phương ngang.

b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là $10m/s$ thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là $5m$?

Lời giải

a) $d=5\sqrt{3}\approx 8,66(m)$;

b) $d=5\Leftrightarrow\frac{10^2\cdot\sin 2\alpha}{10}=5\Leftrightarrow 10\sin 2\alpha=5\Leftrightarrow\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\alpha=30^{\circ}$ hoặc $2\alpha=150^{\circ}\Leftrightarrow\alpha=15^{\circ}$ hoặc $\alpha=75^{\circ}$.

Câu 93. Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t)=30+20\sin\left(\frac{\pi}{25}t+\frac{\pi}{3}\right)$.

a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao $40m$ lần đầu tiên?

Lời giải

a) $50m$;

b) 12,5 giây.

Câu 94. Vận tốc $v_1(cm/s)$ của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc $v_2(cm/s)$ của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

$v_1(t)=-4\cos\left(\frac{2t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ và $v_2(t)=2\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng $2cm/s$;

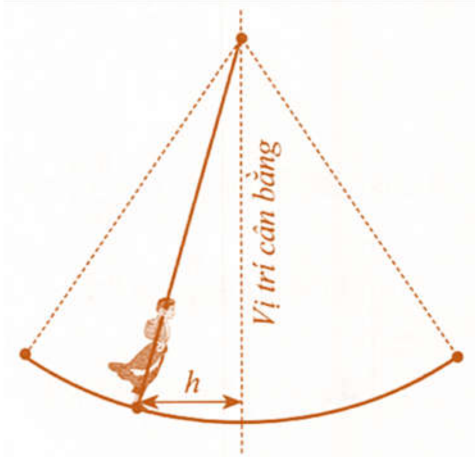
b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Lời giải

a) $t=\frac{5\pi}{8}+k3\pi,k\in\mathbb{N}$ và $t=\frac{13\pi}{8}+k3\pi,k\in\mathbb{N}$;

b) $t=\frac{19\pi}{16}+k\frac{3\pi}{2},k\in\mathbb{N}$ và $t=\frac{13\pi}{32}+k\frac{3\pi}{4},k\in\mathbb{N}$.

Câu 95. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 14). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t(s)$ (với $t\ge 0$) bởi hệ thức $h=|d|$ với $d=3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d>0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d<0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m;0m$?



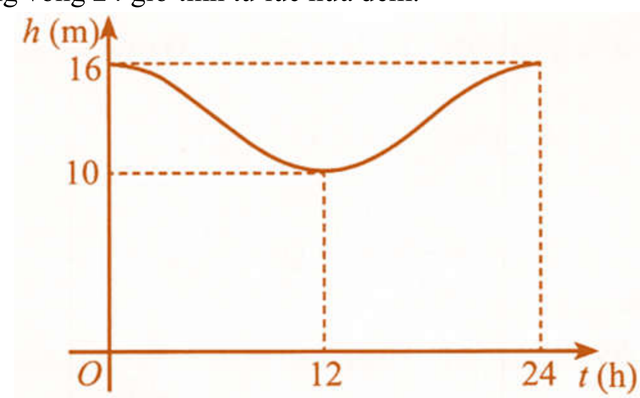
Hình 14

Giải

Do $-1 \le \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \le 1$ nên $-3 \le 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \le 3$ hay $-3 \le d \le 3$. Do đó, $0 \le |d| \le 3$.

Vậy $h=3$ khi $|d|=3$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=\pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0$
$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=k\pi \Leftrightarrow t=\frac{1+3k}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \ge 0$; $h=0$ khi $|d|=0$ hay
$\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi$
$\Leftrightarrow t=\frac{5+6k}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \ge 0$.

Câu 96. Mực nước cao nhất tại một cảng biển là $16m$ khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là $10m$. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

Biết chiều cao của mực nước $h(m)$ theo thời gian $t(h)(0 \le t \le 24)$ được cho bởi công thức $h=m+a\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a.

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là $11,5m$.

Lời giải

a) Chiều cao của mực nước cao nhất là $m+a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=1$ và thấp nhất bằng $m-a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-1$. Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} m+a=16 \\ m-a=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13 \\ a=3. \end{cases}$

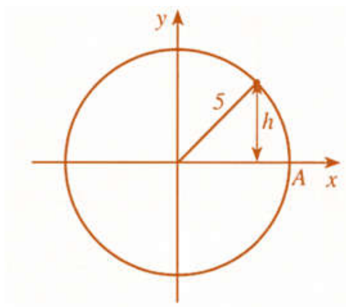
b) Từ câu a ta có công thức: $h=13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là $11,5m$ nên

$13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12}t=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=8+24k \\ t=-8+24k \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t=8$ (h) và $t=16$ (h).

Câu 97. Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính $5\,cm$. Khoảng cách $h(cm)$ từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h=|y|$, trong đó $y=a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây $(t\ge 0)$ và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).



Hình 16

a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?
b) Tìm giá trị của a.
c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h=2,5cm$ và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.

Lời giải

a) Xét $h=0$ hay $a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)=0 \Leftrightarrow t=5k$ với $k\in\mathbb{Z}$ và $k\ge 0$.

Ta nhận thấy, từ thời điểm ban đầu, cứ sau 5 giây, khoảng cách từ chất điểm đến trục hoành lại bằng 0. Suy ra sau mỗi 5 giây, chất điểm chuyển động được nửa vòng. Vậy chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây.
b) Do chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây nên khi $t=2,5$ giây thì chất điểm chuyển động được một phần tư vòng theo chiều dương, suy ra tại $t=2,5$ ta có $y=|y|=h=5 \Leftrightarrow a\sin\left(\frac{\pi}{5}\cdot\frac{5}{2}\right)=5 \Leftrightarrow a=5$.

c) Từ kết quả câu b, ta có: $y=5\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$. Do $h=2,5cm$ và chất điểm nằm ở dưới trục hoành nên $y=-2,5$. Với $y=-2,5$, ta có:

$5\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)=-2,5 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{5}t=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ \frac{\pi}{5}t=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{-5+60k}{6} \\ t=\frac{35+60k}{6}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Với vòng quay đầu tiên thì $0\le t\le 10$, do đó $t=\frac{35}{6}, t=\frac{55}{6}$.

Vậy tại thời điểm $t=\frac{35}{6}$ giây, $t=\frac{55}{6}$ giây thì chất điểm ở vị trí có $h=2,5cm$ và nằm ở dưới trục hoành.

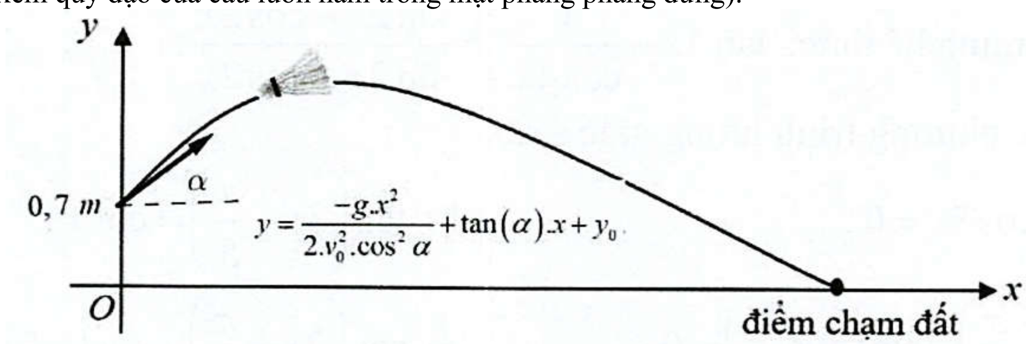
Câu 98. Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, chọn điểm có tọa độ $(O;y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là: $y=\frac{-g\cdot x^2}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha}+\tan(\alpha)\cdot x+y_0$; trong đó:

- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8m/s^2$);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68m$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? (biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7m$ so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là $8m/s$, bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Lời giải

Với $g=9,8m/s^2$, vận tốc ban đầu $v_0=8m/s$, phương trình quỹ đạo của cầu:

$$y=\frac{-g\cdot x^2}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha}+\tan(\alpha)\cdot x+y_0$$

Khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68m$; nghĩa là $x=6,68m$.

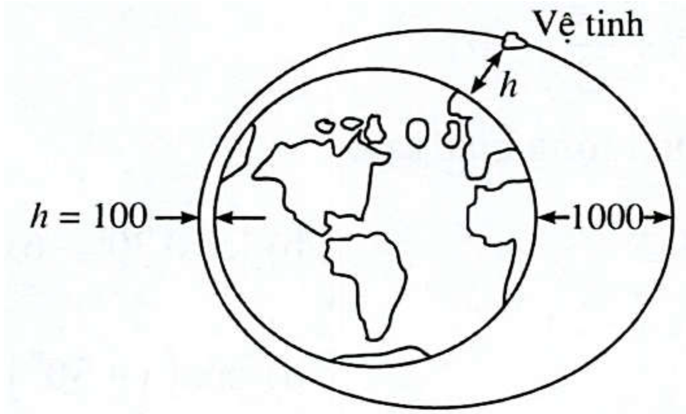
Ta có: $\frac{-9,8\cdot(6,68)^2}{128\cdot\cos^2\alpha}+\tan(\alpha)\cdot(6,68)+0,7=0$

$$\Leftrightarrow \frac{-9,8\cdot(6,68)^2}{128}\left(1+\tan^2\alpha\right)+\tan(\alpha)\cdot(6,68)+0,7=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\alpha\approx 1,378 \\ \tan\alpha\approx 0,576\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha\simeq 54,04^\circ \\ \alpha\simeq 29,97^\circ\end{array}\right.$$

Vậy người chơi đã phát cầu một góc gần 54^0 hoặc gần 30° so với mặt đất.

Câu 99. Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h=550+450\cdot\cos\frac{\pi}{50}t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất $250\,km$. Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó ?

Lời giải

Ta có phương trình: $550+450\cdot\cos\frac{\pi}{50}t=250 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{50}t=-\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{50}t\approx 2,3+k2\pi\\ \frac{\pi}{50}t\approx -2,3+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\approx 36,61+k100\\ t\approx -36,61+k100\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm $t\approx 36,61$ (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.

Câu 100. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x=-2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định các thời điểm vật có li độ bằng $1cm$.

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên, khi đó $x=0$, ta có:

$-2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6}=k\pi \Leftrightarrow t=6k.$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 10 giây, tức là $0\le t\le 10$ hay $0\le 6k\le 10 \Leftrightarrow 0\le k\le\frac{10}{6}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 10 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 2 lần.

Câu 101. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $(0\le t<24)$ cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+8$.

Tìm t để độ sâu của mực nước là:

a) $8m$;

b) $6,5m$.

Lời giải

a) Ta có: $h=8 \Leftrightarrow 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)+8=8 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=8$

$$\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow t=1+6k, k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy vào lúc $1h, 7h, 13h, 19h$ thì độ sâu của mực nước là $8m$.

b) Ta có: $h=6,5 \Leftrightarrow 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)+8=\dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ \dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{t}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}+2k \\ \dfrac{t}{6}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{3}+2k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2+12k \\ t=-6+12k\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Mà $0\le t<24$ nên $0\le 2+12k<24 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}\le k<\dfrac{11}{6} \Leftrightarrow k\in\{0;1\} \Rightarrow t=2h;14h$

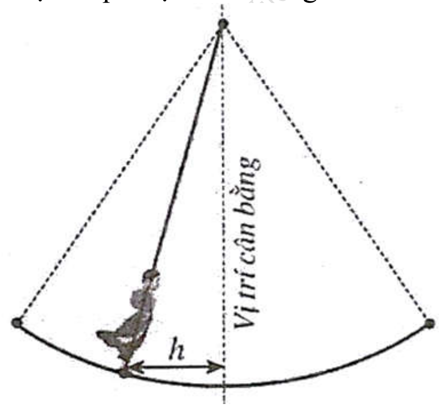
Mà $0\le t<24$ nên $0\le -6+12k<24 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le k<\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow k\in\{1;2\} \Rightarrow t=6h;18h$

Vậy vào lúc $2h, 6h, 14h, 18h$ thì độ sâu của mực nước là $6,5m$.

Câu 102. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x=1,5\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h=|x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng.

a) Trong 10 giây đầu tiên, thời điểm nào vật ở xa vị trí cân bằng nhất?

b) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?



Lời giải

a) Ta có $h=|x|=\left|1,5\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)\right|\le 1,5$.

Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là $h=1,5m$.

Khi đó $\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{t\pi}{4}=k2\pi \\ \dfrac{t\pi}{4}=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=8k \\ t=4+8k\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy trong 10 giây đầu tiên thì vật ở xa vị trí cân bằng nhất tại các thời điểm $t=0, t=4, t=8$ (giây).

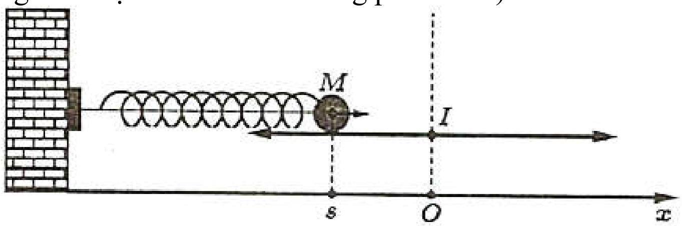
b) Khi vật ở vị trí cân bằng thì $x=0 \Leftrightarrow 1,5\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{t\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow t=2+4k(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật ở vị trí cân bằng tại các thời điểm $t=2, t=6, t=10, t=14, t=18$ (giây); tức là có 5 lần vật qua vị trí cân bằng.

Câu 103. Một vật M được gắn vào đầu lò xo và dao động quanh vị trí cân bằng I, biết rằng O là hình chiếu vuông góc của I trên trục Ox, toạ độ điểm M trên Ox tại thời điểm t (giây) là đại lượng s (đơn vị: cm) được tính bởi công thức $s=8,6\sin\left(8t+\frac{\pi}{2}\right)$

a) Tìm khoảng cách từ vật đến vị trí cân bằng tại thời điểm $t=3$ giây.
b) Thời điểm nào trong khoảng 2 giây đầu tiên thì $s=4,3cm$?
(Các kết quả gần đúng trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

a) Khi $t=3$ thì $s=8,6\sin\left(8.3+\frac{\pi}{2}\right)\approx 3,65(cm)$.

Vậy vật cách vị trí cân bằng một khoảng xấp xỉ $3,65cm$.

b) Khi $s=4,3$ thì $8,6\sin\left(8t+\frac{\pi}{2}\right)=4,3 \Rightarrow \sin\left(8t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 8t+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{4} \\ t=\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{4} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $t\in(0;2)$ nên có 5 giá trị t thoả mãn là: $t_1\approx 0,65s; t_2\approx 1,44s; t_3\approx 0,13s$; $t_4\approx 0,92s; t_5\approx 1,7s$.