BÀI 3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

- CHƯƠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Công thức cộng

Câu 1. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Tính $\sin\frac{\pi}{12}$ và $\tan\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

Câu 2. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) $\frac{5\pi}{12}$

b) -555°.

Lời giải

$$\bullet\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\bullet\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\bullet\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\bullet\sin\left(-555^{\circ}\right)=\sin\left(720^{\circ}-555^{\circ}\right)=\sin165^{\circ}=\sin\left(180^{\circ}-165^{\circ}\right)=\sin15^{\circ}$$

$$=\sin\left(45^{\circ}-30^{\circ}\right)=\sin\left(45^{\circ}\right)\cdot\cos\left(30^{\circ}\right)-\cos\left(45^{\circ}\right)\cdot\sin\left(30^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\bullet\cos\left(-555^{\circ}\right)=\cos\left(720^{\circ}-555^{\circ}\right)=\cos165^{\circ}=-\cos\left(180^{\circ}-165^{\circ}\right)=-\cos15^{\circ}$$

$$=-\cos\left(45^{\circ}-30^{\circ}\right)=-\cos\left(45^{\circ}\right)\cdot\cos\left(30^{\circ}\right)-\sin\left(45^{\circ}\right)\cdot\sin\left(30^{\circ}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\bullet\tan\left(-555^{\circ}\right)=\frac{\sin\left(-555^{\circ}\right)}{\cos\left(-555^{\circ}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Câu 3. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Tính $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right),\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ biết $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Do $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha<0$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{-5}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-12}{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-5\sqrt{3}-12}{26}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha=\frac{-12}{13}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{-5}{13}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-17\sqrt{2}}{26}$$

Câu 4. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài $31m$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $30m$, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α.

Hình 5

a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP), từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) $\sin\alpha = \frac{-30}{31} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{-30}{31}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{31}$

b) $\sin(OA, ON) = \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - \cos\alpha \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \approx 0,27$

Chiều cao điểm N so với mặt đất là: $60 + 31.0,27 = 68,37\ (m)$

$\sin(OA, OP) = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - + \cos\alpha \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \approx 0,7$

Chiều cao điểm P so với mặt đất là: $60 + 31.0,7 = 81,7\ (m)$

Câu 5. Tính các giá trị lượng giác sau:

a) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ khi $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ khi $\sin\alpha = -\frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

c) $\cos(a+b)\cos(a-b)$ khi $\cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}$.

d) $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\tan(a+b)$ khi $\sin a = \frac{8}{17}, \tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$.

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Suy ra: $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{4}$.

Vậy $\tan\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\alpha} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$.

b) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\cos\alpha > 0$.

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Suy ra: $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{5}{13}$.

Vậy $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{5-12\sqrt{3}}{26}$.

c) Ta có:

$\cos a=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin^2 a=1-\cos^2 a=\frac{8}{9}$;

$\cos b=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin^2 b=1-\cos^2 b=\frac{15}{16}$

Từ đó:

$\cos(a+b)\cos(a-b)=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)(\cos a\cos b+\sin a\sin b)$

$=\cos^2 a\cos^2 b-\sin^2 a\sin^2 b=-\frac{119}{144}$

d)Với a, b là các góc nhọn, ta có: $\cos a>0,\cos b>0,\ \sin b>0$.

Khi đó:

$\cos b=\sqrt{\frac{1}{\tan^2 b+1}}=\frac{12}{13}\Rightarrow\sin b=\frac{5}{13}$

$\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\frac{15}{17}$

Vậy:

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b=\frac{21}{221}$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b=\frac{140}{221}$

$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}=\frac{171}{140}$

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

a) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

b) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\tan\alpha=2$.

c) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ khi $\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

d) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\tan\alpha=\frac{7}{8}$.

Lời giải

a) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Ta có $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\ =1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{12}{13}\\ \sin\alpha=-\frac{12}{13}\end{array}\right.$.

Vì $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$.

Khi đó

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2.\left(-\frac{5}{13}\right)^2-1=\frac{-119}{169}$

$\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha \;= 2.\frac{-12}{13}.\frac{-5}{13} \;= \frac{120}{169}$

$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{120}{119}$.

b) Tính $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\tan\alpha = 2$.

Đặt $t = \tan\alpha = 2$.

Ta có $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2.2}{1+2^2} = \frac{4}{5}$.

$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-2^2}{1+2^2} = \frac{-3}{5}$,

$\tan 2\alpha = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{4}{-3}$.

c) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ khi $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Ta có $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha \;= 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$.

TH1: Với $\cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

TH2: Với $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\tan\alpha = \frac{7}{8}$.

Đặt $t = \tan\alpha = \frac{7}{8}$.

Ta có $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2.\frac{7}{8}}{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{112}{113}$.

$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{15}{113}$.

$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{112}{15}$.

Câu 7. Tính giá trị của biểu thức

a. $A = \sin^2 20^0 + \sin^2 100^0 + \sin^2 140^0$

b. $B = \cos^2 10^0 + \cos^2 110^0 + \cos^2 130^0$

c. $C=\tan 20^0.\tan 80^0+\tan 80^0.\tan 140^0+\tan 140^0.\tan 20^0$

d. $D=\tan 10^0.\tan 70^0+\tan 70^0.\tan 130^0+\tan 130^0.\tan 190^0$

e. $E=\dfrac{\cot 225^0-\cot 79^0.\cot 71^0}{\cot 259^0+\cot 151}$

f. $F=\cos^2 75^0-\sin^2 75^0$

g. $G=\dfrac{1-\tan 15^0}{1+\tan 15^0}$

h. $H=\tan 15^0+\cot 15^0$.

Lời giải

a.Tính $A=\sin^2 20^0+\sin^2 100^0+\sin^2 140^0$

$$\begin{aligned}A&=\sin^2 20^0+\sin^2 100^0+\sin^2 140^0\\&=\sin^2 20^0+\sin^2 80^0+\sin^2 40^0\\&=\frac{1-\cos 40^0}{2}+\frac{1-\cos 160^0}{2}+\frac{1-\cos 80^0}{2}\\&=\frac{3}{2}-\frac{\cos 40^0+\cos 160^0+\cos 80^0}{2}\end{aligned}$$

Mà ta có:

$$\cos 40^0+\cos 160^0+\cos 80^0=\left(\cos 40^0+\cos 80^0\right)+\cos 160^0$$
$$=2\cos 60^0\cos 20^0-\cos 20^0$$
$$=\cos 20^0\left(2\cos 60^0-1\right)=0$$

Vậy $A=\dfrac{3}{2}$.

b.Tính $B=\cos^2 10^0+\cos^2 110^0+\cos^2 130^0$

$$B=\cos^2 10^0+\cos^2 110^0+\cos^2 130^0=\cos^2 10^0+\cos^2 70^0+\cos^2 50^0$$
$$=\frac{1+\cos 20^0}{2}+\frac{1+\cos 140^0}{2}+\frac{1+\cos 100^0}{2}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{\left(\cos 20^0+\cos 100^0\right)+\cos 140^0}{2}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{2\cos 40^0.\cos 60^0-\cos 40^0}{2}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{\cos 40^0\left(2\cos 60^0-1\right)}{2}=\frac{3}{2}$$

c.Tính $C=\tan 20^0.\tan 80^0+\tan 80^0.\tan 140^0+\tan 140^0.\tan 20^0$

Ta chứng minh công thức sau

$$\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\tan x.\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-3$$

Nhận Xét: $\tan\left(a-b\right)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}\Rightarrow \tan a.\tan b=\dfrac{\tan a-\tan b}{\tan\left(a-b\right)}-1$

Do vậy:

$\square$ $\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan x}{\tan\frac{\pi}{3}}-1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan x\right]-1\ (*)$

$\square$ $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\frac{\pi}{3}}-1$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]-1\ \ (**)$

$\square$ $\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).\tan(x)=\dfrac{\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan x}{\tan\frac{2\pi}{3}}-1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan x\right]-1\ (***)$

Cộng theo vế $(*)\ (**)\ (***)$ ta được:

$\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\tan x.\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-3$

Vậy $C=\tan 20^0.\tan 80^0+\tan 80^0.\tan 140^0+\tan 140^0.\tan 20^0=-3$

d.Tương tự câu c

e. $E=\dfrac{\cot 225^0-\cot 79^0.\cot 71^0}{\cot 259^0+\cot 251^0}$

$\square$ $\cot 225^0=\cot\left(180^0+45^0\right)=\cot 45^0$

$\square$ $\cot 79^0=\tan 11^0$

$\square$ $\cot 71^0=\tan 19^0$

$\square$ $\cot 259^0=\cot\left(180^0+79^0\right)=\tan 79^0=\cot 11^0$

$\square$ $\cot 251^0=\cot\left(180^0+71^0\right)=\cot\left(71^0\right)=\tan 19^0$

Vậy $E=\dfrac{\cot 225^0-\cot 79^0.\cot 71^0}{\cot 259^0+\cot 251^0}=\dfrac{1-\tan 11^0.\tan 19}{\tan 11^0+\tan 19^0}=\tan\left(11^0+19^0\right)=\tan 30^0=\sqrt{3}$

f. $F=\cos^2 75^0\text{-}\sin^2 75^0=\cos 150^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

g. $G=\dfrac{1\text{-}\tan 15^0}{1+\tan 15^0}=\dfrac{\tan 45^0\text{-}\tan 15^0}{\tan 45^0+\tan 15^0}=\tan\left(45^0\text{-}15^0\right)=\tan 30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$

h. $H=\tan 15^0+\cot 15^0=\dfrac{\sin 15^0}{\cos 15^0}+\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=\dfrac{\sin^2 15^0+\cos^2 15^0}{\sin 15^0.\cos 15^0}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sin 2.15^0}=\dfrac{2}{\sin 30^0}=4$

Câu 8. Chứng minh rằng:

a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

b) $\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a$;

c) $4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=4\sin^2 x-3$;

d) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos x$.

Lời giải

a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x+\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$.

b) $\sin(a+b)\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)(\sin a\cos b-\cos a\sin b)$

$=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-(1-\sin^2 a)\sin^2 b$

$=\sin^2 a-\sin^2 a\sin^2 b-\sin^2 b+\sin^2 a\sin^2 b$

$=\sin^2 a-\sin^2 b=1-\cos^2 a-(1-\cos^2 b)$

$=\cos^2 b-\cos^2 a$.

Cách 2

$\sin(a+b)\sin(a-b)=-\dfrac{1}{2}[\cos 2a-\cos 2b]$

$=-\dfrac{1}{2}\left[(2\cos^2 a-1)-(2\cos^2 b-1)\right]=\cos^2 b-\cos^2 a$

$=-\dfrac{1}{2}\left[(1-2\sin^2 a)-(1-2\sin^2 b)\right]=\sin^2 a-\sin^2 b$

c) Áp dụng ý b) ở trên và $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ta được

$4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=4\left(\sin^2 x-\sin^2\dfrac{\pi}{3}\right)=4\left(\sin^2 x-\dfrac{3}{4}\right)$

$=4\sin^2 x-3$.

d) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}-\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=2\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}=2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sqrt{2}\cos x$.

Câu 9. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin(x+y).\sin(x-y)=\sin^2 x-\sin^2 y$;

b) $\tan x+\tan y=\dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$;

c) $\tan x.\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right).\tan x=-3$;

d) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right).\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$;

e) $(\cos 70^0+\cos 50^0)(\cos 230^0+\cos 290^0)-(\cos 40^0+\cos 160^0)(\cos 320^0+\cos 380^0)=0$;

f) $\tan x.\tan 3x=\dfrac{\tan^2 2x-\tan^2 x}{1-\tan^2 x.\tan^2 2x}$.

Lời giải

a)

$VT=\sin\left(x+y\right).\sin\left(x-y\right)=\left(\sin x.\cos y+\sin y.\cos x\right).\left(\sin x.\cos y-\sin y.\cos x\right)$

$=\sin^2 x.\cos^2 y-\sin^2 y.\cos^2 x=\sin^2 x.\left(1-\sin^2 y\right)-\sin^2 y.\left(1-\sin^2 x\right)$

$=\sin^2 x-\sin^2 y=VP$

Điều phải chứng minh.

b)

$$VP=\frac{2\sin\left(x+y\right)}{\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)}=\frac{2\left(\sin x.\cos y+\sin y.\cos x\right)}{\cos x.\cos y-\sin x.\sin y+\cos x.\cos y+\sin x.\sin y}$$

$$=\frac{2\left(\sin x.\cos y+\sin y.\cos x\right)}{2\cos x.\cos y}=\tan x.\tan y=VP$$

Điều phải chứng minh.

c)

Xét đẳng thức: $\tan\left(a-b\right)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}\Leftrightarrow\tan a.\tan b=\frac{\tan a-\tan b}{\tan\left(a-b\right)}-1$.

Áp dụng:

$$\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan x-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)}-1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan x-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]-1$$

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]-1$$

$$\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan x\right]-1$$

Cộng theo vế ta được: $\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).\tan x=-3$

Điều phải chứng minh.

d)

$$VT=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\sin\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left[\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right).$$

Điều phải chứng minh.

Cách 2.

$$VT=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin x.\sin\frac{\pi}{3}\right).\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{4}-\sin x.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{6}-\sin x.\sin\frac{\pi}{6}\right).\left(\cos x.\cos\frac{3\pi}{4}-\sin x.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right).\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right).\left(\cos x-\sin x\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right).\left(\cos x+\sin x\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}.\left(\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x.\cos x-\sin x.\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x.\cos x-\sin^2 x-\sin x.c\right.$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}\cos^2 x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right).$$

Điều phải chứng minh.

e)

Ta có

$+\ \cos 230^0=\cos\left(180^0+50^0\right)=-\cos 50^0$

$+\ \cos 290^0=\cos\left(360^0-70^0\right)=\cos 70^0$

$+\ \cos 160^0=\cos\left(90^0+70^0\right)=-\sin 70^0$

$+\ \cos 320^0=\cos\left(360^0-40^0\right)=\cos 40^0=\sin 50^0$

$+\ \cos 380^0=\cos 20^0=\sin 70^0$

Khi đó

$$VT=\left(\cos 70^0+\cos 50^0\right).\left(\cos 230^0+\cos 290^0\right)-\left(\cos 40^0+\cos 160^0\right).\left(\cos 320^0+\cos 380^0\right)$$

$$=\left(\cos 70^0+\cos 50^0\right).\left(-\cos 50^0+\cos 70^0\right)-\left(\sin 50^0-\sin 70^0\right).\left(\sin 50^0+\sin 70^0\right)$$

Điều

$$=\cos^2 70^0-\cos^2 50^0-\sin^2 50^0+\sin^2 70^0$$

$$=-\left(\cos^2 50^0+\sin^2 50^0\right)+\left(\cos^2 70^0+\sin^2 70^0\right)=-1+1=0.$$

phải chứng minh.

f) $VP=\dfrac{\tan^2 2x-\tan^2 x}{1-\tan^2 x.\tan^2 2x}=\dfrac{\tan 2x-\tan x}{1+\tan 2x.\tan x}.\dfrac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x.\tan x}=\tan x.\tan 3x=VT$.

Điều phải chứng minh.

Câu 10. Chứng minh các hệ thức sau với điều kiện cho trước

a.) $2\tan a=\tan\left(a+b\right)$ khi $\sin b=\sin a.\cos\left(a+b\right)$

b.) $2\tan a=\tan\left(a+b\right)$ khi $3\sin b=\sin\left(2a+b\right)$

c.) $\tan a.\tan b=-\dfrac{1}{3}$ khi $\cos\left(a+b\right)=2\cos\left(a-b\right)$

d.) $\tan\left(a+b\right).\tan b=\dfrac{1-k}{1+k}$ khi $\cos\left(a+2b\right)=k.\cos a$

Lời giải

a. Ta có

$2\tan a=\tan(a+b)\Leftrightarrow \frac{2\sin a}{\cos a}=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin a}{\cos a}=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin a\cos(a+b)-\cos a.\sin(a+b)}{\cos a\cos(a+b)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin a\cos(a+b)+\sin a\cos(a+b)-\cos a.\sin(a+b)}{\cos a\cos(a+b)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin a\cos(a+b)+\sin(a-a-b)}{\cos a\cos(a+b)}=0\Leftrightarrow \frac{\sin b-\sin b}{\cos a\cos(a+b)}=0$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b. b. Ta có:

$2\tan a-\tan(a+b)=\frac{2\sin a}{\cos a}-\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$=\frac{2\sin a}{\cos a}-\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$

$=\frac{2\sin a\cos a\cos b-2\sin^2 a\sin b-\sin a\cos a\cos b-\sin b\cos^2 a}{\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}$

$=\frac{\sin a\cos a\cos b-\sin b-\sin^2 a\sin b}{\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}$

$=\frac{-\sin b+\sin a\cos a\cos b-\sin^2 a\sin b}{\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}$

$=\frac{-2\sin b+2\sin a\cos a\cos b-2\sin^2 a\sin b}{2\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}$

$=\frac{-3\sin b+2\sin a\cos a\cos b+\sin b-2\sin^2 a\sin b}{2\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}=\frac{-3\sin b+\sin 2a\cos b+\sin b(1-2\sin^2 a)}{2\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}$

$=\frac{-3\sin b+\sin 2a\cos b+\sin b\cos 2a}{2\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}=\frac{-3\sin b+\sin(2a+b)}{2\cos a.(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}=0$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

c. Ta có: $\tan a\tan b=\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}=\frac{\cos(a-b)-2\cos(a-b)}{\cos(a-b)+2\cos(a-b)}=\frac{-\cos(a-b)}{3\cos(a-b)}=-\frac{1}{3}$

d. Ta có:

$\tan(a+b)\tan b=\frac{\sin(a+b)\sin b}{\cos(a+b)\cos b}=\frac{\cos a-\cos(a+2b)}{\cos a+\cos(a+2b)}=\frac{\cos a-k\cos a}{\cos a+k\cos a}=\frac{(1-k)\cos a}{(1+k)\cos a}=\frac{1-k}{1+k}$

Dạng 2. Công thức nhân đôi

Câu 11. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Tính $\cos\frac{\pi}{8}$ và $\tan\frac{\pi}{8}$

Lời giải

Ta có: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\cos^2\frac{\pi}{8}-1$. Suy ra $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Vì $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\pi}{8}>0$. Suy ra $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

Ta có: $\tan^2\frac{\pi}{8}+1=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$. Suy ra $\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

Vì $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ nên $\tan\frac{\pi}{8}>0$. Suy ra $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$

Câu 12. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Tính các giá trị lượng giác của góc 2α, biết:

a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

b) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$ và $\pi<\alpha<2\pi$.

Lời giải

a) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{3}$

Do $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$. Suy ra $\sin 2\alpha>0$ $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{-1}{8}$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{-31}{32}$

Do $\pi<\alpha<2\pi$ nên $\sin\alpha<0$. Mà $\cos\alpha<0$. Suy ra $\sin 2\alpha>0$.

$\sin 2\alpha=-\sqrt{1-\cos 2\alpha}=\frac{\sqrt{63}}{32}$

Câu 13. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\alpha$

b) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\sin 2\alpha$.

Lời giải

a) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\alpha=-\sqrt{2}\cos\alpha-\cos\alpha=-(\sqrt{2}+1)\cos\alpha$

b) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\sin 2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1$

Câu 14. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết:

a) $\cos 2\alpha=\frac{2}{5}$ và $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$;

b) $\sin 2\alpha=-\frac{4}{9}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

a) Do $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$ và $\cos\alpha>0$

Ta có: $\frac{2}{5}=\cos 2\alpha=2.\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

Suy ra: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{70}}{10}$ và $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{30}}{10}$

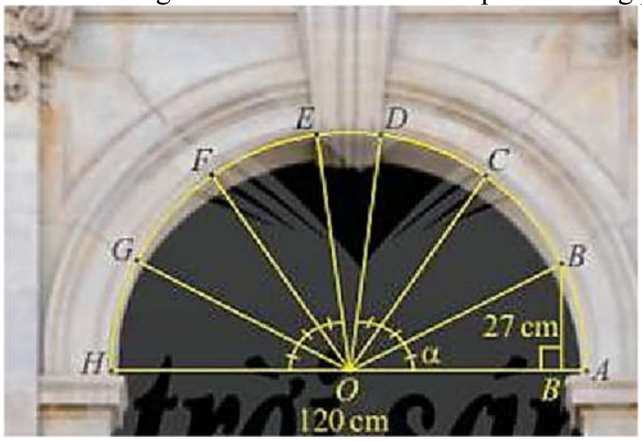
b) Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ nên $\pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Suy ra: $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$ và $\cos 2\alpha<0$

$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\frac{\sqrt{65}}{9}$

Suy ra: $\cos\alpha\approx-0,69$ và $\sin\alpha\approx 0,16$

Câu 15. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Trong bài toán khởi động, cho biết vòm cổng rộng $120cm$ và khoảng cách từ B đến đường kính AH là $27cm$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

Lời giải

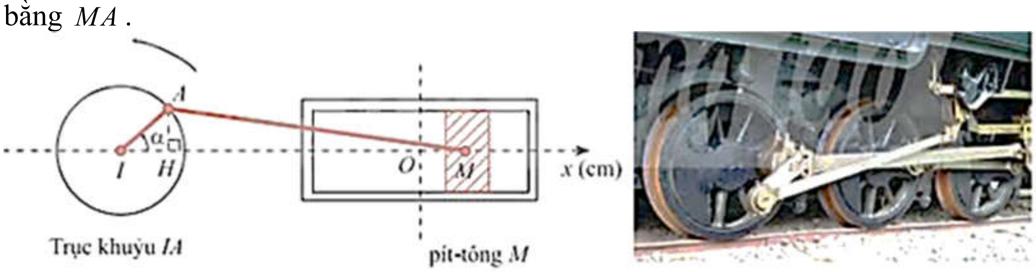
Ta có $AH = 120$. Suy ra $R = 120 : 2 = 60(cm)$

$$\sin\alpha = \frac{BB'}{R} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{319}}{20} \text{ do có } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$CC' = \text{R. } \sin 2\alpha = \text{ R. } 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 60\cdot 2\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{\sqrt{319}}{20} \approx 48,2(cm)$$

Câu 16. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.



Hình 4

a) Biết $IA = 8cm$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3cm$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì M ở vị trí O, H ở vị trí I. Ta có $IO = HM = AM$

$$x_M = IM - OI = IH + HM - OI = IH + AM - AM = IH = IA\cdot\cos\alpha$$

$$x_M = 8\cos\alpha$$

b) Sau khi chuyển động 1 phút, trục khuỷu quay được một góc là α

Khi đó $x_M = -3cm$. Suy ra $\cos\alpha = \frac{-3}{8}$

Sau khi chuyển động 2 phút, trục khuỷu quay được một góc là 2α

$$x_M = 8\cdot\cos 2\alpha = 8.\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = -5,75$$

Câu 17. Tính giá trị biểu thức:

a. $A=\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}$

b. $B=\dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}$

c. $C=\sin10^0\sin50^0\sin70^0$

d. $D=\sin6^0\sin42^0\sin66^0\sin78^0$

e. $E=16\cos20^0\cos40^0\cos60^0\cos80^0$

Lời giải

Áp dụng công thức: $\sin2a=2\sin a.\cos a$ ta có:

$A=\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}$

a.Áp dụng công thức: $\tan2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2a}\Rightarrow\frac{1-\tan^2a}{2\tan a}=\frac{1}{\tan2a}=\cot2a$

ta có: $B=\dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}=2.\dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{2\tan\frac{\pi}{8}}=2\cot(2.\frac{\pi}{8})=2\cot\frac{\pi}{4}=2$

c. Áp dụng công thức: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$ và $\sin2a=2\sin a.\cos a$ ta có:

$C=\sin10^0\sin50^0\sin70^0=\sin10^0.\cos40^0\cos20^0=\dfrac{2\sin10^0\cos10^0.\cos20^0\cos40^0}{2\cos10^0}$

$=\dfrac{\sin20^0.\cos20^0\cos40^0}{2\cos10^0}=\dfrac{\sin40^0\cos40^0}{4\cos10^0}=\dfrac{\sin80^0}{8\cos10^0}=\dfrac{\cos10^0}{8\cos10^0}=\dfrac{1}{8}$

d. Tương tự câu c ta có:

$D=\sin6^0\sin42^0\sin66^0\sin78^0=\sin6^0\cos48^0\cos24^0\cos12^0$

$=\dfrac{2\sin6^0\cos6^0\cos12^0\cos24^0\cos48^0}{2\cos6^0}$

$=\dfrac{\sin12^0\cos12^0\cos24^0\cos48^0}{2\cos6^0}$

$=\dfrac{\sin24^0\cos24^0\cos48^0}{4\cos6^0}=\dfrac{\sin48^0\cos48^0}{8\cos6^0}=\dfrac{\sin96^0}{16\cos6^0}$

Do: $\sin96^0=\sin\left(90^0-\left(-6^0\right)\right)=\cos\left(-6^0\right)=\cos6^0$ nên $D=\frac{1}{16}$

e. Ta có:

$E=16\cos20^0\cos40^0\cos60^0\cos80^0=\dfrac{8\sin20^0\cos20^0\cos40^0\cos80^0}{\sin20^0}$

$=\dfrac{4\sin40^0\cos40^0\cos80^0}{\sin20^0}=\dfrac{2\sin80^0\cos80^0}{\sin20^0}=\dfrac{\sin160^0}{\sin20^0}=1$

Câu 18. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. Cho $\tan\frac{x}{2}=-2$. Tính $A=\dfrac{3\sin x+4\cos x}{4\cot x+3\tan x}$

b. Cho $\sin x=-\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$. Tính $\cos\frac{x}{2}$ và $\sin\frac{x}{2}$

c. Cho $\tan x=\frac{1}{15}$. Tính $B=\dfrac{\sin2x}{1+\tan2x}$

d. Cho $\tan\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$. Tính $C=\frac{2\sin 2x-\cos 2x}{\tan 2x+\cos 2x}$

Lời giải

a. $A=\frac{3\sin x+4\cos x}{4\cot x+3\tan x}=\frac{3\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}+4\frac{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}}{4\frac{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}{2\tan\frac{x}{2}}+3\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}}=\frac{-24}{35}.$

b. $\sin x=-\frac{4}{5}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{9}{25}$

Do $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ nên $\cos x=\frac{3}{5}$

$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-cosx}{2}=\frac{1}{5},\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+cosx}{2}=\frac{4}{5}$

Do $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}<\frac{x}{2}<\pi$ nên $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\frac{x}{2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

c. $B=\frac{\sin 2x}{1+\tan 2x}=\frac{\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}{1+\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}=\frac{1680}{14351}.$

d. $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{4}{5},\ \cos x=\frac{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$C=\frac{2\sin 2x-\cos 2x}{\tan 2x+\cos 2x}=\frac{4\sin x.cosx-\left(2\cos^2 x-1\right)}{\frac{2\sin x.cosx}{2\cos^2 x-1}+\left(2\cos^2 x-1\right)}=\frac{-287}{551}.$

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $G=cos\frac{2\pi}{31}.cos\frac{4\pi}{31}.cos\frac{8\pi}{31}.cos\frac{16\pi}{31}.cos\frac{32\pi}{31}$

b) $H=\sin 5^\circ.\sin 15^\circ.\sin 25^\circ...\sin 75^\circ.\sin 85^\circ$

c) $I=\cos 10^\circ.cos 20^\circ.cos 30^\circ...cos 70^\circ.cos 80^\circ$

d) $K=96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$

e) $L=cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}$

f) $M=\sin\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có

$G=cos\frac{2\pi}{31}.cos\frac{4\pi}{31}.cos\frac{8\pi}{31}.cos\frac{16\pi}{31}.cos\frac{32\pi}{31}$

$\Leftrightarrow G.\sin\frac{2\pi}{31}=\sin\frac{2\pi}{31}.\cos\frac{2\pi}{31}.\cos\frac{4\pi}{31}.\cos\frac{8\pi}{31}.\cos\frac{16\pi}{31}.\cos\frac{32\pi}{31}$

$\Leftrightarrow G.\sin\frac{2\pi}{31}=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{31}.\cos\frac{4\pi}{31}.\cos\frac{8\pi}{31}.\cos\frac{16\pi}{31}.\cos\frac{32\pi}{31}$

$\Leftrightarrow G.\sin\frac{2\pi}{31}=\frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{31}.\cos\frac{8\pi}{31}.\cos\frac{16\pi}{31}.\cos\frac{32\pi}{31}$

$\Leftrightarrow G.\sin\frac{2\pi}{31}=\frac{1}{8}\sin\frac{16\pi}{31}.\cos\frac{16\pi}{31}.\cos\frac{32\pi}{31}$

$\Leftrightarrow G.\sin\frac{2\pi}{31}=\frac{1}{16}\sin\frac{32\pi}{31}.\cos\frac{32\pi}{31}$

$\Leftrightarrow G.\sin\frac{2\pi}{31}=\frac{1}{32}\sin\frac{64\pi}{31}$

$\Leftrightarrow G.\sin\frac{2\pi}{31}=\frac{1}{32}\sin\left(\frac{2\pi}{31}+2\pi\right)$

$\Leftrightarrow G=\frac{1}{32}$

b) Ta có

$H=\sin 5^\circ.\sin 15^\circ.\sin 25^\circ...\sin 75^\circ.\sin 85^\circ$

$=\sin 5^\circ.\cos 5^\circ.\sin 15^\circ.\cos 15^\circ.\sin 25^\circ.\cos 25^\circ.\sin 35^\circ.\cos 35^\circ.\sin 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{32}\sin 10^\circ.\sin 30^\circ.\sin 50^\circ.\sin 70^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{32.\cos 10^\circ}.\cos 10^\circ.\sin 10^\circ.\sin 30^\circ.\sin 50^\circ.\cos 20^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{64.\cos 10^\circ}.\sin 20^\circ.\cos 20^\circ.\frac{1}{2}.\sin 50^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{256.\cos 10^\circ}.\sin 40^\circ.\cos 40^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{512.\cos 10^\circ}.\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{2}}{512}$

c) Ta có

$I=\cos 10^\circ.\cos 20^\circ.\cos 30^\circ...\cos 70^\circ.\cos 80^\circ$

$=\cos 10^\circ.\sin 10^\circ.\cos 20^\circ.\sin 20^\circ.\cos 30^\circ.\sin 30^\circ\cos 40^\circ.\sin 40^\circ$

$=\frac{1}{16}.\sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 60^\circ.\sin 80^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{32}.\sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{64}.\sin 20^\circ.(\cos 40^\circ-\cos 120^\circ)$

$=\frac{\sqrt{3}}{64}.\sin 20^\circ.\left(\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{64}.\sin 20^\circ.\left(2.\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{128}.\sin 20^\circ.\left(3-4.\sin^2 20^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{128}.\sin 60^\circ=\frac{3}{256}$

d) Ta có

$K=96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$

$=48\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$

$=24\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$

$=12\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6}=6\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=9$

e) $L=\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}$

$=\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}$

$=-\frac{1}{2}.\left(\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{8\pi}{15}\right).\left(\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}\right)$

$=-\frac{1}{2}.\left(\cos\frac{\pi}{15}.\cos\left(2.\frac{\pi}{15}\right).\cos\left(2^2.\frac{\pi}{15}\right).\cos\left(2^3.\frac{\pi}{15}\right)\right).\left(\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\left(2.\frac{3\pi}{15}\right)\right)$

$=-\frac{1}{2}.\left(\frac{\sin\left(2^4.\frac{\pi}{15}\right)}{16.\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)}\right).\left(\frac{\sin\left(2^2.\frac{3\pi}{15}\right)}{4.\sin\left(\frac{3\pi}{15}\right)}\right)=-\frac{1}{2}.\left(\frac{\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)}{16.\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)}\right).\left(\frac{\sin\left(\frac{12\pi}{15}\right)}{4.\sin\left(\frac{3\pi}{15}\right)}\right)$

$=-\frac{1}{2}.\left(\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)}{16.\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)}\right).\left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{15}\right)}{4.\sin\left(\frac{3\pi}{15}\right)}\right)=\frac{1}{128}$

f) Ta có

$M=\sin\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

Câu 20. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$. b) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

c) $\sin x.\cos^3 x-\cos x.\sin^3 x=\frac{1}{4}\sin 4x$.

d) $\sin^6\frac{x}{2}-\cos^6\frac{x}{2}=\frac{1}{4}(4-\sin^2 x)$ e) $1-\sin x=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

f) $\frac{1-\sin^2 x}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}$

g) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=1$. h) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$

i) $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. k) $\tan x.\tan 3x=\frac{\tan^2 2x-\tan^2 x}{1-\tan^2 x.\tan^2 2x}$

l) $\sin^3 x.(1+\cot x)+\cos^3 x(1+\tan x)=\sin x+\cos x$

m) $\cot x+\tan x=\frac{2}{\sin 2x}$

n) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}=\cos\frac{x}{8}$, với $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x=1-\frac{1}{2}.\sin^2 2x$

$=1-\frac{1}{2}.\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}.\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

b) $\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)$

$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x.\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$=1-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$.

c) $\sin x.\cos^3 x-\cos x.\sin^3 x=\sin x\cos x.(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$.

d) $\sin^6\frac{x}{2}-\cos^6\frac{x}{2}=\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)^3-\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^3=\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin^4\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}\right)$

$=1-2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1-\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

$=1-\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2=1-\frac{\sin^4 x}{4}=\frac{1}{4}\left(4-\sin^2 x\right)$

e) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=2.\left[\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right]=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-\sin x$

f) $\frac{1-\sin^2 x}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\cos^2 x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]}=\frac{\cos^2 x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)(1+\sin 2x)}$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\frac{\cos^2 x}{1+\sin 2x}=\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}.\frac{\cos^2 x}{1+\sin 2x}=\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}$

g) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right).\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}.\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}=1$

h) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan x}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$.

i) $\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{\cos x}{1-\sin x}$.

k) $\frac{\tan^2 2x-\tan^2 x}{1-\tan^2 x.\tan^2 2x}=\frac{(\tan 2x-\tan x)(\tan 2x+\tan x)}{(1-\tan x\tan 2x)(1+\tan x\tan 2x)}=\tan 3x.\tan x$

l) $\sin^3 x.(1+\cot x)+\cos^3 x(1+\tan x)=\sin^2 x.(\sin x+\cos x)+\cos^2 x.(\sin x+\cos x)$

$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x.$

m) $\cot x+\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$.

n) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}}$ $Do\ \frac{x}{2}\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{4}}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}}=\cos\frac{x}{8}.$$

Dạng 3. Biến đổi tích thành tổng

Câu 21. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Tính giá trị của biểu thức $\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$ và $\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8}$.

Lời giải

$$\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{24}-\frac{5\pi}{24}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{5\pi}{24}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{8}-\frac{5\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 22. Biến đổi thành tổng

a) $2\sin(a+b)\cos(a-b)$ b) $2\cos(a+b)\cos(a-b)$

c) $4\sin 3x\sin 2x\cos x$ d) $4\sin\frac{13x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$

e) $\sin(x+30^0)\cos(x-30^0)$ f) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}$

g) $2\sin x\sin 2x\sin 3x$ h) $8\cos x\sin 2x\sin 3x$

i) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2x$ k) $4\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a)$

Bài giải:

a) $2\sin(a+b)\cos(a-b)=\sin 2a+\sin 2b$

b) $2\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos 2a+\cos 2b$

c) $4\sin 3x\sin 2x\cos x=2\sin 3x(\sin 3x+\sin x)=2\sin^2 3x+2\sin 3x\sin x$

$=2\sin^2 3x-\cos 4x+\cos x$

d) $4\sin\frac{13x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{13x}{2}(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2})=2\sin\frac{13x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\sin\frac{13x}{2}\cos\frac{x}{2}=$

$=\sin 8x+\sin 5x+\sin 7x+\sin 6x$.

e) $\sin(x+30^0)\cos(x-30^0)=\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 60^0)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}$

f) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=-\frac{1}{2}(\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5})$

g) $2\sin x\sin 2x\sin 3x=\sin 3x(\cos x-\cos 3x)=\frac{1}{2}(2\sin 3x\cos x-\sin 6x)$

$=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x-\sin 6x)$

h)

$8\cos x\sin 2x\sin 3x=4\sin 3x(\sin 3x+\sin x)=4\sin^2 3x+\sin 3x\sin x=4\sin^2 3x+2\cos 2x-2\cos 4x$

i) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2x=\cos 2x\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\right)=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos^2 2x$

k) $4\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a)=2\cos(a-b)\left(\cos(b-a)+\cos(b-2c+a)\right)$

$=2\cos(a-b)\cos(b-a)+2\cos(a-b)\cos(b-2c+a)$

$=1+\cos(2a-2b)+\cos(2a-2c)+\cos(2c-2b)$

Dạng 4. Biến đổi tổng thành tích

Câu 23. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Tính $\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

$$\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=2\cdot\cos\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}=2\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 24. Biến đổi thành tích

a, $A=2\sin 4x+\sqrt{2}$

b, $B=3-4cos^2x$

c, $D=\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x$

d, $E=3+4\cos 4x+\cos 8x$

e, $F=\sin 5x+\sin 6x+\sin 7x+\sin 8x$

f, $G=1+\sin 2x-\cos 2x-\tan 2x$

g, $H=\sin^2(x+90^\circ)-3\cos^2(x-90^\circ)$

h, $L=1+\sin x+\cos x$

Lời giải

a, $A=2\left(\sin 4x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\sin 4x+\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$.

b, $B=1-2\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}-\cos 2x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\right)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

c, $D=\sin 2x+\sin 6x+\sin 4x=2\sin 4x\cos 2x+\sin 4x=\sin 4x(2\cos 2x+1)$

$=2\sin 4x\left(\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}\right)=4\sin 4x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

d, $E=3+4\cos 4x+2\cos^2 4x-1=2(\cos 4x+1)^2=8\cos^4 2x.$

e, $F=\sin 5x+\sin 8x+\sin 6x+\sin 7x=2\sin\frac{13x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=4\sin\frac{13x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$.

f, $G=1-\cos 2x+\sin 2x-\tan 2x=(1-\cos 2x)(1-\tan 2x)=2\sin^2 x\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 2x\right)$

$$=\frac{2\sin^2 x\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}.\cos 2x}=\frac{2\sqrt{2}\sin^2 x\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}.$$

g, $H=\cos^2 x-3\sin^2 x=\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)$

$=4\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

h,

$L=\sin x+(\cos x+1)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 25. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}$

b) $B=16.\sin 10^\circ.\sin 30^\circ.\sin 50^\circ.\sin 70^\circ.\sin 90^\circ$

c) $C=\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ$

d) $D=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

e) $E=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

f) $F=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$

g) $G=\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$

h) $H=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

Lời giải

a) Ta có: $A=\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}=\sin\frac{\pi}{30}\cos\frac{8\pi}{30}\cos\frac{2\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{30}\sin\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 16.\cos\frac{\pi}{30}.A=16\cos\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{30}\cos\frac{8\pi}{30}\cos\frac{2\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{30}\sin\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 16.\cos\frac{\pi}{30}.A=8.\sin\frac{2\pi}{30}\cos\frac{2\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{30}\cos\frac{8\pi}{30}.\frac{1}{2}=4\sin\frac{4\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{30}\cos\frac{8\pi}{30}.\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 16.\cos\frac{\pi}{30}.A=2\sin\frac{8\pi}{30}\cos\frac{8\pi}{30}.\frac{1}{2}=\sin\frac{16\pi}{30}.\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{15\pi}{30}+\frac{\pi}{30}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{30}\Rightarrow A=\frac{1}{32}$

b) Ta có: $B=16.\sin10°.\sin30°.\sin50°.\sin70°.\sin90°=16.\sin10°.\sin30°.\cos40°.\cos20°$

$\Leftrightarrow B.\cos10°=16.\sin10°.\cos10°.\frac{1}{2}.\cos40°.\cos20°.1$

$\Leftrightarrow B.\cos10°=4\sin20°.\cos20°.\cos40°.$

$\Leftrightarrow B.\cos10°=2\sin40°.\cos40°=\cos80°=\sin10°\to B=1$

c) $C=(\cos24°+\cos48°)-(\cos84°+\cos12°)=2\cos36°.\cos12°-2\cos48°.\cos36°$

$=2\cos36°(\cos12°-\cos48°)=4\cos36°.\sin30°.\sin18°$

$=2(1-2\sin^2 18°).\sin18°=-4\sin^3 18°+2\sin18°$

Ta có: $\cos36°=\sin54°\Leftrightarrow 1-2\sin^2 18°=3\sin18°-4\sin^3 18°\Leftrightarrow 4\sin^3 18°-2\sin^2 18°-3\sin18°+1=0$

Đặt $t=\sin18°, 0<t<1.$ Ta được phương trình: $4t^3-2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\4t^2+2t-1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\,(L)\\t=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\,(L)\\t=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$. Suy ra $\sin18°=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Vậy: $C=-4\sin^3 18°+2\sin18°=\frac{1}{2}$

d) $\mathrm{D}=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{2\pi}{7}.D=2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{2\pi}{7}.D=\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{2\pi}{7}.D=\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\left(2\pi-\frac{6\pi}{7}\right)=\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin\frac{2\pi}{7}$

Vậy $D=\frac{-1}{2}$.

e) $E=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{7}.E=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{7}.E=\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}$

Vậy $E=\frac{1}{2}$.

f) $F=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}+2\cos\frac{6\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}=0$

g) $G=\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{5}.G=2\sin\frac{\pi}{5}.\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{5}.G=\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{5\pi}{5}-\sin\frac{3\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{5}-\sin\frac{5\pi}{5}+\sin\frac{9\pi}{5}-\sin\frac{7\pi}{5}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{5}.G=-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{9\pi}{5}=-\sin\frac{\pi}{5}+\sin=-2\sin\frac{\pi}{5}$

Vậy $G=-1$.

h) $\mathrm{H}=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{11}.H=2\sin\frac{\pi}{11}.\left(\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{11}.H=\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{11}.H=\sin\frac{10\pi}{11}=\sin\frac{\pi}{11}\to H=\frac{1}{2}$. Vậy $H=\frac{1}{2}$.

Câu 26. Tính các tổng sau

a. $S_1=\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha\ (\alpha\neq k\pi)$

b. $S_2=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

c. $S_3=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{5\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}$

d. $S_4=\frac{1}{\cos a.\cos2a}+\frac{1}{\cos2a.\cos3a}+\ldots+\frac{1}{\cos4a.\cos5a}$, với $a=\frac{\pi}{5}$.

e. $S_5=\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos2x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos4x}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\cos2^{n-1}x}\right)$

Lời giải

a. $S_1=\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha\ (\alpha\neq k\pi)$

Nhân cả hai vế với $2\sin\alpha$ ta có:

$2\sin\alpha.S_1=2\sin\alpha.\cos\alpha+2\sin\alpha.\cos3\alpha+2\sin\alpha.\cos5\alpha+\ldots+2\sin\alpha.\cos(2n-1)\alpha$

$\Rightarrow 2\sin\alpha.S_1=\sin2\alpha+(\sin4\alpha-\sin2\alpha)+(\sin6\alpha-\sin4\alpha)+\ldots+[\sin2n\alpha-\sin(2n-2)\alpha]$

$\Rightarrow 2\sin\alpha.S_1=\sin2n\alpha$

$\Rightarrow S_1=\frac{\sin2n\alpha}{2\sin\alpha}$

Vậy $S_1=\frac{\sin2n\alpha}{2\sin\alpha}$.

b. Xét bài toán tổng quát. Tính tổng $S_2=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin(n-1)x$.

Nhân cả hai vế với $2\sin\frac{x}{2}$ ta có:

$$2\sin\frac{x}{2}.S_2=2\sin\frac{x}{2}.\sin x+2\sin\frac{x}{2}.\sin 2x+2\sin\frac{x}{2}.\sin 3x+\ldots+2\sin\frac{x}{2}.\sin(n-1)x$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}.S_2=\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{7x}{2}\right)+\ldots+\left[\cos\left(\frac{2n-3}{2}\right)x-\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\right]$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}.S_2=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}.S_2=2\sin\frac{(n-1)x}{2}.\sin\frac{nx}{2}$$

$$\Rightarrow S_2=\frac{\sin\frac{(n-1)x}{2}.\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Áp dụng với $x=\frac{\pi}{n}$ ta được: $S_2=\dfrac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\dfrac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

c. Áp dụng câu a với $\alpha=\frac{\pi}{n}$ ta được: $S_3=\dfrac{\sin(2n\pi)}{2\sin\frac{\pi}{n}}=0$.

d. Ta có : $S=\dfrac{1}{\sin a}\left[\dfrac{\sin(2a-a)}{\cos 2a.\cos a}+\dfrac{\sin(3a-2a)}{\cos 3a.\cos 2a}+\ldots+\dfrac{\sin(5a-4a)}{\cos 5a.\cos 4a}\right]$

$$=\frac{1}{\sin a}\left(\frac{\sin 2a.\cos a-\sin a.\cos 2a}{\cos 2a.\cos a}+\frac{\sin 3a.\cos 2a-\sin 2a.\cos 3a}{\cos 3a.\cos 2a}+\ldots+\frac{\sin 5a.\cos 4a-\sin 4a.\cos 5a}{\cos 5a.\cos 4a}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin a}(\tan 2a-\tan a+\tan 3a-\tan 2a+\ldots+\tan 5a-\tan 4a)$$

$$=\frac{1}{\sin a}(\tan 5a-\tan a)$$

Với $a=\frac{\pi}{5}$ ta được $S=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}\left(\tan\pi-\tan\frac{\pi}{5}\right)=-\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}$.

e. Ta có: $S_5=\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(1+\dfrac{1}{\cos 2x}\right)\left(1+\dfrac{1}{\cos 4x}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right)$

$$=\left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}\right)\left(\frac{1+\cos 4x}{\cos 4x}\right)\ldots\left(\frac{1+\cos 2^{n-1}x}{\cos 2^{n-1}x}\right)$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}.2\cos^2 x.2\cos^2 2x\ldots2\cos^2 2^{n-2}x}{\cos x.\cos 2x.\cos 4x\ldots\cos 2^{n-1}x}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}.2\cos\frac{x}{2}.2\cos x.2\cos 2x.2\cos 4x\ldots2\cos 2^{n-2}x}{\cos 2^{n-1}x}$$

Nhân hai vế với $\sin\frac{x}{2}$ và áp dụng công thức nhân đôi $2\sin\alpha.\cos\alpha=\sin 2\alpha$ ta được

$$\sin\frac{x}{2}.S_5=\frac{\cos\frac{x}{2}.\sin 2^{n-1}x}{\cos 2^{n-1}x}\Rightarrow \sin\frac{x}{2}.S_5=\cos\frac{x}{2}.\tan 2^{n-1}x$$

$$\Rightarrow S_5=\tan 2^{n-1}x.\cot\frac{x}{2}$$

Vậy $S_5=\tan 2^{n-1}x.\cot\frac{x}{2}$.

Câu 27. Tính $\sin^2 2x$, biết: $\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=7$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \tan x\neq 0\\ \cot x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0$

Ta có:

$$\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=7\Leftrightarrow\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=7$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos^4 x+\sin^4 x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}=7\Leftrightarrow \cos^4 x+\sin^4 x+1=7\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x+1=9\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x+\sin^2 x)^2+1=\frac{9}{4}(2\sin x.\cos x)^2\Leftrightarrow 1+1=\frac{9}{4}\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{8}{9}$$

Giá trị tính được thỏa mãn điều kiện $\sin 2x\neq 0$

Vậy $\sin^2 2x=\frac{8}{9}$

Câu 28. Rút gọn các biểu thức sau:

a/ $A=\frac{\cos 7x-\cos 8x-\cos 9x+\cos 10x}{\sin 7x-\sin 8x-\sin 9x+\sin 10x}$

$b/B=\frac{\sin 2x+2\sin 3x+\sin 4x}{\sin 3x+2\sin 4x+\sin 5x}$

$c/C=\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{\cos x+2\cos^2 x-1}$

$d/D=\frac{\sin 4x+\sin 5x+\sin 6x}{\cos 4x+\cos 5x+\cos 6x}$

Lời giải

$$a/\ A=\frac{(\cos 10x+\cos 7x)-(\cos 9x+\cos 8x)}{(\sin 10x+\sin 7x)-(\sin 9x+\sin 8x)}=\frac{2\cos\frac{17x}{2}\cos\frac{3x}{2}-2\cos\frac{17x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{17x}{2}\cos\frac{3x}{2}-2\sin\frac{17x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{17x}{2}(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2})}{2\sin\frac{17x}{2}(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2})}=\cot\frac{17x}{2}$$

$b/B=\dfrac{(\sin 4x+\sin 2x)+2\sin 3x}{(\sin 5x+\sin 3x)+2\sin 4x}=\dfrac{2\sin 3x.\cos x+2\sin 3x}{2\sin 4x.\cos x+2\sin 4x}$

$=\dfrac{2\sin 3x(\cos x+1)}{2\sin 4x(\cos x+1)}=\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

$c/C=\dfrac{(\cos 3x+\cos x)+1+2\cos^2 x-1}{\cos x+(2\cos^2 x-1)}=\dfrac{2\cos 2x.\cos x+2\cos^2 x}{\cos x+(2\cos^2 x-1)}$

$=\dfrac{2\cos x(\cos 2x+\cos x)}{\cos x+\cos 2x}=2\cos x$

$d/D=\dfrac{(\sin 6x+\sin 4x)+\sin 5x}{(\cos 6x+\cos 4x)+\cos 5x}=\dfrac{2\sin 5x.\cos x+\sin 5x}{2\cos 5x.\cos x+\cos 5x}=\dfrac{\sin 5x(2\cos x+1)}{\cos 5x(2\cos x+1)}=\tan 5x$

Câu 29. Chứng minh các đẳng thức lượng giác:

a. $\tan 9°-\tan 27°-\tan 63°+\tan 81°=4$

b. $\tan 20°-\tan 40°+\tan 80°=3\sqrt{3}$

c. $\tan 10°-\tan 50°+\tan 60°+\tan 70°=2\sqrt{3}$

d. $\tan 30°+\tan 40°+\tan 50°+\tan 60°=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}.\cos 20°$

e. $\tan^6 20°-33\tan^4 20°+27\tan^2 20°-3=0$

Lời giải

a. $VT=\dfrac{\sin 9°}{\cos 9°}+\dfrac{\sin 81°}{\cos 81°}-\left(\dfrac{\sin 27°}{\cos 27°}+\dfrac{\sin 63°}{\cos 63°}\right)$

$=\dfrac{\sin 9°\cos 81°+\cos 9°\sin 81°}{\cos 9°\cos 81°}-\dfrac{\sin 27°\cos 63°+\cos 27°\sin 63°}{\cos 27°\cos 63°}$

$=\dfrac{\sin\left(9°+81°\right)}{\cos 9°\sin 9°}-\dfrac{\sin\left(27°+63°\right)}{\cos 27°\sin 27°}=\dfrac{2}{\sin 18°}-\dfrac{2}{\sin 54°}=\dfrac{2\left(\sin 54°-\sin 18°\right)}{\sin 18°\sin 54°}=\dfrac{2.2\cos 36°\sin 18°}{\sin 18°\sin 54°}=4$

b. $VT=\tan 20°-\tan\left(60°-20°\right)+\tan\left(60°+20°\right)$

$=\tan 20°-\dfrac{\tan 60°-\tan 20°}{1+\tan 60°\tan 20°}+\dfrac{\tan 60°+\tan 20°}{1-\tan 60°\tan 20°}$

$=\tan 20°-\dfrac{\sqrt{3}-\tan 20°}{1+\sqrt{3}\tan 20°}+\dfrac{\sqrt{3}+\tan 20°}{1-\sqrt{3}\tan 20°}$

$=\tan 20°+\dfrac{\left(\sqrt{3}+\tan 20°\right)\left(1+\sqrt{3}\tan 20°\right)-\left(\sqrt{3}-\tan 20°\right)\left(1-\sqrt{3}\tan 20°\right)}{1-3\tan^2 20°}$

$=\tan 20°+\dfrac{8\tan 20°}{1-3\tan^2 20°}=\dfrac{9\tan 20°-3\tan^3 20°}{1-3\tan^2 20°}=\dfrac{3\tan 20°\left(3-\tan^2 20°\right)}{1-3\tan^2 20°}$

$=3\tan 60°=3\sqrt{3}$ (công thức nhân ba)

* Từ câu này ta chứng minh được công thức tổng quát:

$\tan a-\tan\left(60°-a\right)+\tan\left(60°+a\right)=3\tan 3a$

c. Chứng minh tương tự câu b ta có

$\tan 10°-\tan 50°+\tan 70°=\tan 10°-\tan\left(60°-10°\right)+\tan\left(60°+10°\right)=3\tan 30°=3.\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan 10°-\tan 50°+\tan 60°+\tan 70°=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

d. $VT=\dfrac{\sin 30°}{\cos 30°}+\dfrac{\sin 40°}{\cos 40°}+\dfrac{\sin 50°}{\cos 50°}+\dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$

$$=\frac{\sin 30^\circ\cos 60^\circ+\cos 30^\circ\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ\cos 60^\circ}+\frac{\sin 40^\circ\cos 50^\circ+\cos 40^\circ\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ\cos 50^\circ}$$

$$=\frac{\sin(30^\circ+60^\circ)}{\cos 30^\circ\sin 30^\circ}+\frac{\sin(40^\circ+50^\circ)}{\cos 40^\circ\sin 40^\circ}=\frac{2}{\sin 60^\circ}+\frac{2}{\sin 80^\circ}=\frac{2(\sin 80^\circ+\sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ\sin 80^\circ}$$

$$=\frac{2.2\sin 70^\circ\cos 10^\circ}{\sqrt{3}/2\cos 10^\circ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin 70^\circ=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^\circ$$

e. $\tan^6 20^\circ-33\tan^4 20^\circ+27\tan^2 20^\circ-3=0$

$\Leftrightarrow \tan^6 20^\circ-33\tan^4 20^\circ+27\tan^2 20^\circ=3$

$\Leftrightarrow \tan^6 20^\circ-6\tan^4 20^\circ+9\tan^2 20^\circ=27\tan^4 20^\circ-18\tan^2 20^\circ+3$

$\Leftrightarrow \left(\tan^3 20^\circ-3\tan 20^\circ\right)^2=3\left(1-3\tan^2 20^\circ\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\tan^3 20^\circ-3\tan 20^\circ}{1-3\tan^2 20^\circ}\right)^2=3$

$\Leftrightarrow \left(\tan(20^\circ.3)\right)^2=3 \Leftrightarrow (\tan 60^\circ)^2=3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2=3$ (luôn đúng)

Câu 30. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cot x-\tan x-2\tan 2x=4\cot 4x$ .b) $\frac{1-2\sin^2 2x}{1-\sin 4x}=\frac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}$.

c) $\frac{1}{\cos^6 x}-\tan^6 x=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+1$.d) $\tan 4x-\frac{1}{\cos 4x}=\frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$.

e) $\tan 6x-\tan 4x-\tan 2x=\tan 2x.\tan 4x.\tan 6x$.

f) $\frac{\sin 7x}{\sin x}=1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x$.

g) $\cos 5x.\cos 3x+\sin 7x.\sin x=\cos 2x.\cos 4x$.

Lời giải

a) $\cot x-\tan x-2\tan 2x=4\cot 4x$

$$\mathrm{VT}=\cot x-\tan x-2\tan 2x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x.\cos x}-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{4\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)}{\sin 4x}=\frac{4\cos 4x}{\sin 4x}=4\cot 4x=VP.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

b) $\frac{1-2\sin^2 2x}{1-\sin 4x}=\frac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}$

$$VT=\frac{1-2\sin^2 2x}{1-\sin 4x}=\frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{(\cos 2x-\sin 2x)^2}=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}=\frac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}=VP\Rightarrow \text{đpcm}.$$

c) $\frac{1}{\cos^6 x}-\tan^6 x=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+1$

$$VT=\frac{1}{\cos^6 x}-\tan^6 x=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3-\tan^6 x=\left(1+\tan^2 x\right)^3-\tan^6 x$$

$$=1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x-\tan^6 x=1+3\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$=1+\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}=VP$$

Suy ra điều phải chứng minh.

d) $\tan 4x-\dfrac{1}{\cos 4x}=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$

$VT=\tan 4x-\dfrac{1}{\cos 4x}=\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}-\dfrac{1}{\cos 4x}=\dfrac{\sin 4x-1}{\cos 4x}=\dfrac{-(\cos 2x-\sin 2x)^2}{\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)}=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$

$=VP$

Suy ra điều phải chứng minh.

e) $\tan 6x-\tan 4x-\tan 2x=\tan 2x.\tan 4x.\tan 6x$

Ta có $\tan 6x=\dfrac{\tan 4x+\tan 2x}{1-\tan 2x.\tan 4x}\Leftrightarrow \tan 6x\left(1-\tan 2x.\tan 4x\right)=\tan 4x+\tan 2x$

$\Leftrightarrow \tan 6x-\tan 6x.\tan 2x.\tan 4x=\tan 4x+\tan 2x$

$\Leftrightarrow \tan 6x-\tan 4x-\tan 2x=\tan 2x.\tan 4x.\tan 6x$.

Suy ra điều phải chứng minh.

f) $\dfrac{\sin 7x}{\sin x}=1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x$

$\Leftrightarrow \sin 7x=\sin x+2\cos 2x.\sin x+2\cos 4x.\sin x+2\cos 6x.\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 7x=\sin x+\sin 3x-\sin x+\sin 5x-\sin 3x+\sin 7x-\sin 5x$

$\Leftrightarrow \sin 7x=\sin 7x$ (luôn đúng).

Suy ra điều phải chứng minh.

g) $\cos 5x.\cos 3x+\sin 7x.\sin x=\cos 2x.\cos 4x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\cos 8x+\cos 2x\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cos 6x-\cos 8x\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos 6x+\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 6x\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos 6x+\cos 2x\right)$ (luôn đúng). Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 31. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cot x-\tan x-2\tan 2x=4\cot 4x$. b) $\dfrac{1-2\sin^2 2x}{1-\sin 4x}=\dfrac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}$.

c) $\dfrac{1}{\cos^6 x}-\tan^6 x=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+1$.d) $\tan 4x-\dfrac{1}{\cos 4x}=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$.

e) $\tan 6x-\tan 4x-\tan 2x=\tan 2x.\tan 4x.\tan 6x$.

f) $\dfrac{\sin 7x}{\sin x}=1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x$.

g) $\cos 5x.\cos 3x+\sin 7x.\sin x=\cos 2x.\cos 4x$.

h) Cho $\sin\left(2a+b\right)=5\sin b$. Chứng minh: $\dfrac{2\tan\left(a+b\right)}{\tan a}=3$.

i) Cho $\tan\left(a+b\right)=3\tan a$. Chứng minh: $\sin\left(2a+2b\right)+\sin 2a=2\sin 2b$.

Lời giải

a) $\cot x-\tan x-2\tan 2x=4\cot 4x$

Ta có: $\cot x-\tan x-2\tan 2x=\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}-2\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\dfrac{2\cos^2 x-2\sin^2 x}{\sin 2x}-\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}$

$=\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}-\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}=\dfrac{4\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)}{\sin 4x}=\dfrac{4\cos 4x}{\sin 4x}=4\cot 4x$.

b) $\dfrac{1-2\sin^2 2x}{1-\sin 4x}=\dfrac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}$

Ta có: $\dfrac{1-2\sin^2 2x}{1-\sin 4x}=\dfrac{\cos 4x}{\left(\cos 2x-\sin 2x\right)^2}=\dfrac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\left(\cos 2x-\sin 2x\right)^2}=\dfrac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}=\dfrac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}$ (do $\cos 2x\neq 0$).

c) $\frac{1}{\cos^6 x}-\tan^6 x=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+1$

Ta có:

$\frac{1}{\cos^6 x}-\tan^6 x=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3-\tan^6 x=\left(1+\tan^2 x\right)^3-\tan^6 x$

$=1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x-\tan^6 x=1+3\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+1$.

d) $\tan 4x-\frac{1}{\cos 4x}=\frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$

Ta có: $\tan 4x-\frac{1}{\cos 4x}=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}-\frac{1}{\cos 4x}=\frac{\sin 4x-1}{\cos 4x}=\frac{-\left(\cos 2x-\sin 2x\right)^2}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}=\frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$.

e) $\tan 6x-\tan 4x-\tan 2x=\tan 2x.\tan 4x.\tan 6x$

Ta có: $\tan\left(2x+4x\right)=\frac{\tan 2x+\tan 4x}{1-\tan 2x\tan 4x}$.

Suy ra: $\tan 6x-\tan 2x\tan 4x\tan 6x=\tan 2x+\tan 4x$.

Do đó: $\tan 6x-\tan 4x-\tan 2x=\tan 2x.\tan 4x.\tan 6x$.

f) $\frac{\sin 7x}{\sin x}=1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x$

Ta có: $\sin x\left(1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x\right)$

$=\sin x+2.\frac{1}{2}\left(\sin 3x-\sin x\right)+2.\frac{1}{2}\left(\sin 5x-\sin 3x\right)+2.\frac{1}{2}\left(\sin 7x-\sin 5x\right)$

$=\sin x+\sin 3x-\sin x+\sin 5x-\sin 3x+\sin 7x-\sin 5x$

$=\sin 7x$.

Suy ra: $\frac{\sin 7x}{\sin x}=1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x$.

g) $\cos 5x.\cos 3x+\sin 7x.\sin x=\cos 2x.\cos 4x$

Ta có: $\cos 5x.\cos 3x+\sin 7x.\sin x=\frac{1}{2}\left(\cos 8x+\cos 2x\right)+\frac{1}{2}\left(\cos 6x-\cos 8x\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 6x\right)=\frac{1}{2}.2\cos 4x.\cos 2x=\cos 2x\cos 4x$.

h) Cho $\sin\left(2a+b\right)=5\sin b$. Chứng minh: $\frac{2\tan\left(a+b\right)}{\tan a}=3$.

Ta có: $\frac{2\tan\left(a+b\right)}{\tan a}=2.\frac{\sin\left(a+b\right)}{\cos\left(a+b\right)}.\frac{\cos a}{\sin a}=2.\frac{\sin\left(2a+b\right)+\sin b}{\sin\left(2a+b\right)-\sin b}=2.\frac{6\sin b}{4\sin b}=3$.

i) Cho $\tan\left(a+b\right)=3\tan a$. Chứng minh: $\sin\left(2a+2b\right)+\sin 2a=2\sin 2b$.

Ta có: $\tan\left(a+b\right)=3\tan a$

$\Leftrightarrow\frac{\sin\left(a+b\right)}{\cos\left(a+b\right)}=3\frac{\sin a}{\cos a}$

$\Leftrightarrow\sin\left(a+b\right)\cos a=3\sin a\cos\left(a+b\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\sin\left(2a+b\right)+\sin b\right]=\frac{3}{2}\left[\sin\left(2a+b\right)-\sin b\right]$

$\Leftrightarrow\sin\left(2a+b\right)+\sin b=3\sin\left(2a+b\right)-3\sin b\Leftrightarrow\sin\left(2a+b\right)=2\sin b$.

Khi đó: $\sin\left(2a+2b\right)+\sin 2a=2\sin\left(2a+b\right)\cos b=2.2\sin b.\cos b=2\sin 2b$.

Dạng 5. Bài toán tam giác

Qui ước: Cho tam giác ABC gọi a,b,c là ba cạnh đối diện của ba góc A,B,C; h_a,h_b,h_c là ba đường cao; m_a,m_b,m_c là ba đường trung tuyến; l_A,l_B,l_C là ba đường phân giác; r là bán kính đường trong nội tiếp ; R là bán kính đường trong ngoại tiếp và $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ là nữa chu vi.

Điều kiện A,B,C là ba góc của một tam giác là $\begin{cases} A,B,C \\ A+B+C=\pi \end{cases}$ nên suy ra

$A+B=\pi-C$, $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\ldots$

Định lý hàm số côsin $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

Suy ra $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Định lý hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ suy ra $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$

Công thưc tính diện tích $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$.

Công thức phân giác $l_A=\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$,....

Công thức trung tuyến $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$,....

Câu 32. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$.

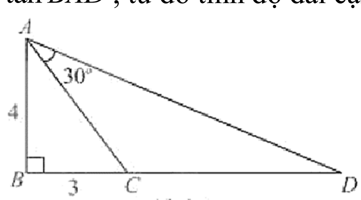
Lời giải

Trong tam giác ABC, ta có: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$

Ta có: $\sin A=\sin(\pi-B-C)\Leftrightarrow \sin A=\sin(B+C)$

$\Leftrightarrow \sin A=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C$

Câu 33. **(SGK-CTST-11-Tập 1)** Trong Hình 3, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB=4, BC=3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thoả mãn $\widehat{CAD}=30^\circ$. Tính $\tan\widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD.



Hình 3

Lời giải

$\tan\widehat{BAC}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{4}$

$\tan\widehat{BAD}=\tan(\widehat{BAC}+\widehat{CAD})=\dfrac{\tan\widehat{BAC}+\tan\widehat{CAD}}{1-\tan\widehat{BAC}\cdot\tan\widehat{CAD}}\approx 2,34$

$CD=BD-BC=AB\cdot\tan\widehat{BAD}\approx 6,36$

Câu 34. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin C=\sin A.cosB+\sin B.cosA$.

b) $\dfrac{\sin C}{\text{cosA}.cosB}=\text{tanA}+tanB\left(A,B\neq 90^\circ\right)$.

c) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C\left(A,B,C\neq 90^\circ\right)$.

d) $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$.

e) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1$.

f) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

g) $\cot B+\frac{\cos C}{\sin B.cosA}=\cot C+\frac{\cos B}{\sin C.cosA}\left(A\neq 90^\circ\right)$.

h) $\cos\frac{A}{2}.cos\frac{B}{2}.cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}.cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

i) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Lời giải

j) $\sin C=\sin A.\text{cosB}+\sin B.\text{cosA}$.

Ta có $A+B+C=\pi\Leftrightarrow A+B=\pi-C$.

$\Leftrightarrow\sin(A+B)=\sin(\pi-C)$. $\Leftrightarrow$ $\sin A.\text{cosB}+\sin B.\text{cosA}=\sin C$ (đpcm).

k) $\frac{\sin C}{\text{cosA}.\text{cosB}}=\text{tanA}+\text{tanB}\left(A,B\neq 90^\circ\right)$.

Ta có $\text{tanA}+\text{tanB}=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A.\cos B}=\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}=\frac{\sin C}{\cos A.\cos B}$.

l) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C\left(A,B,C\neq 90^\circ\right)$

Ta có $-\tan C=\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}$.

Nên $-\tan C(1-\tan A.\tan B)=\tan A+\tan B$.

Do đó $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.

m) $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$.

$\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=\cot B(\cot A+\cot C)+\cot C.\cot A$.

$=\frac{\cos B}{\sin B}\left(\frac{\sin(A+C)}{\sin A.\sin C}\right)+\cot C.\cot A$.

$=\frac{\cos B}{\sin A.\sin C}+\frac{\cos C.\cos A}{\sin A.\text{sinC}}=\frac{\cos B+\frac{1}{2}(\cos(A+C)+\cos(A-C))}{\sin A.\text{sinC}}$.

$=\frac{\frac{1}{2}(\cos(A-C)-\cos(A+C))}{\sin A.\text{sinC}}=\frac{\sin A.\text{sinC}}{\sin A.\text{sinC}}=1$.

n) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1$.

$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}$.

$=\frac{\sin\frac{B}{2}}{cos\frac{B}{2}}\left(\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}$.

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\left(cos\left(\frac{C}{2}-\frac{A}{2}\right)-cos\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(cos\left(\frac{C}{2}-\frac{A}{2}\right)+cos\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=1.$$

o) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{C}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\left(\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.-1\right)\cot\frac{C}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\left(\frac{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}-1\right)\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\left(\frac{\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}\right)\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}.$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}$. Luôn đúng

Vậy $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

p) $\cot B+\dfrac{\cos C}{\sin B.\cos A}=\cot C+\dfrac{\cos B}{\sin C.\cos A}\left(A\neq 90^{\circ}\right)$

$\cot B+\frac{\cos C}{\sin B.\cos A}=\cot C+\frac{\cos B}{\sin C.\cos A}\Leftrightarrow \cot B-\cot C=\frac{\cos B}{\sin C.\cos A}-\frac{\cos C}{\sin B.\cos A}$.

$\Leftrightarrow \frac{\cos B\sin C-\cos C\sin B}{\sin B\sin C}=\frac{1}{\cos A}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\sin 2B-\sin 2C\right)}{\sin B\sin C}\right)$.

$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(C-B\right)}{\sin B\sin C}=\frac{1}{\cos A}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\sin 2B-\sin 2C\right)}{\sin B\sin C}\right)\Leftrightarrow \frac{\sin\left(C-B\right)}{\sin B\sin C}=\frac{1}{\cos A}\frac{\cos\left(B+C\right)\sin\left(B-C\right)}{\sin B\sin C}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(C-B\right)}{\sin B\sin C}=\frac{1}{\cos A}\frac{-\cos A\sin\left(B-C\right)}{\sin B\sin C}\Leftrightarrow \frac{\sin\left(C-B\right)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin\left(C-B\right)}{\sin B\sin C}$

Vậy $\cot B+\frac{\cos C}{\sin B.\cos A}=\cot C+\frac{\cos B}{\sin C.\cos A}\left(A\neq 90^{\circ}\right)$.

q) $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

Đặt $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}=T$.

$\mathrm{T}=\sin\frac{A}{2}.\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

$\mathrm{T}=\cos\frac{A}{2}.\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)$.

$\mathrm{T}=\cos\frac{A}{2}.\left(\cos\frac{B+C}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)$.

$\mathrm{T}=\cos\frac{A}{2}.\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

r) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Ta có $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$.

$=1-\frac{1}{2}\left(\cos A+\cos B\right)+\sin^2\frac{C}{2}$

$=1-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)+\sin^2\frac{C}{2}=1-\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)+\sin^2\frac{C}{2}$

$=1+\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)$

$=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Câu 35. Cho tam giác ABC chứng minh:

a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$.

b) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

c) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$.

d) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\left(1+\cos A.\cos B.\cos C\right)$.

e) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A.\cos B.\cos C$.

f) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

b) Ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

c) Ta có:

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$
$$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$$
$$=2\sin C\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$
$$=4\sin A.\sin B.\sin C$$

d) Ta có:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\sin^2 C$$
$$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+1-\cos^2 C$$
$$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$$
$$=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$$
$$=2+\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$
$$=2+2\cos A.\cos B.\cos C$$
$$=2(1+\cos A.\cos B.\cos C)$$

e) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=$

$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$$
$$=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$$
$$=-2\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]-1$$
$$=-2\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]-1$$
$$=-1-4\cos A.\cos B.\cos C$$

f) **Cách 1:**

$$\tan A+\tan B+\tan C=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}+\tan C$$
$$=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}+\tan C$$
$$=\tan C\left(\frac{\cos C}{\cos A\cos B}+1\right)$$
$$=\tan C\left(\frac{-\cos(A+B)+\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\right)$$
$$=\tan C.\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}$$
$$=\tan A.\tan B.\tan C$$

Cách 2:

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$
$$\Leftrightarrow -\tan C=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$
$$\Leftrightarrow -\tan C+\tan C\tan A\tan B=\tan A+\tan B$$
$$\Leftrightarrow \tan C\tan A\tan B=\tan A+\tan B+\tan C$$

Câu 36. Tìm các góc của tam giác ABC, biết:

a) $B-C=\frac{\pi}{3}$, $\sin B.\sin C=\frac{1}{2}$.

b) $B+C=\frac{2\pi}{3}$, $\sin B.\cos C=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

a) Ta có $0<A,B,C<\pi$ và $A+B+C=\pi\Rightarrow B+C=\pi-A$.

$$\sin B.\sin C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)]=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}-\cos(\pi-A)=1$$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\cos A=1\Leftrightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$ (vì $0<A,B,C<\pi$) $\Rightarrow B+C=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

Khi đó ta có $\begin{cases}B-C=\frac{\pi}{3}\\ B+C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=\frac{\pi}{2}\\ C=\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

Vậy $A=\frac{\pi}{3},B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{6}$.

b) Ta có $0<A,B,C<\pi$ và $A+B+C=\pi\Rightarrow B+C=\pi-A$.

$$\sin B.\cos C=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}[\sin(B-C)+\sin(B+C)]=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow\sin(B-C)+\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow\sin(B-C)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin(B-C)=\frac{1}{2}\Rightarrow B-C=\frac{\pi}{6}$ (vì $0<A,B,C<\pi\Rightarrow 0<B-C<\pi$).

Khi đó ta có $\begin{cases}B-C=\frac{\pi}{6}\\ B+C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=\frac{5\pi}{12}\\ C=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

$\Rightarrow A=\pi-B-C=\frac{\pi}{3}$

Vậy $A=\frac{\pi}{3},B=\frac{5\pi}{12},C=\frac{\pi}{4}$.

Câu 37. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

b) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\left(1+\cos A\cos B\cos C\right)$.

Lời giải

a) Ta có $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

Mặt khác trong tam giác ABC ta có $A+B+C=\pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$.

Suy ra $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$.

Vậy $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

.

b) Ta có

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2 C$

$=2-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C=2-\cos\left(A+B\right)\cos\left(A-B\right)-\cos^2 C$.

Vì $A+B+C=\pi$ suy ra $\cos\left(A+B\right)=-\cos C$ nên

$2-\cos\left(A+B\right)\cos\left(A-B\right)-\cos^2 C$

$=2+\cos C\cos\left(A-B\right)+\cos C\cos\left(A+B\right)=2+\cos C\left[\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)\right]$

$=2+\cos C.2\cos A\cos B=2\left(1+\cos A\cos B\cos C\right)$.

Câu 38. Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có

a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$;

b) $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$.

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A+\tan B=\tan A\tan B\tan C-\tan C=\tan C\left(\tan A\tan B-1\right)$. (*)

Do tam giác ABC không vuông nên $A+B\neq\frac{\pi}{2}$ suy ra

$\tan A\tan B-1=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}-1=\frac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=\frac{-\cos\left(A+B\right)}{\cos A\cos B}\neq 0$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C \Leftrightarrow \tan\left(A+B\right)=-\tan C$. Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C=\pi$.

b) Vì $A+B+C=\pi$ suy ra $\cot\left(A+B\right)=-\cot C$.

Theo công thức cộng ta có

$\cot\left(A+B\right)=\frac{1}{\tan\left(A+B\right)}=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{1-\frac{1}{\cot A\cot B}}{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

Suy ra $=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C\Leftrightarrow \cot A\cot B-1=-\cot C\left(\cot A+\cot B\right)$

Hay $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

Câu 39. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$.

b) $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $\tan\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\cot\left(\dfrac{C}{2}\right)=\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{C}{2}\right)}$. Suy ra

$$\dfrac{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}=\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{C}{2}\right)}\Leftrightarrow \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=1-\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{A}{2}.$$

Tức là $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$.

b) Từ kết quả câu a) ta có

$$\dfrac{1}{\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}}+\dfrac{1}{\cot\dfrac{C}{2}\cot\dfrac{A}{2}}=1\Leftrightarrow \cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}.$$

Câu 40. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\sin A+\sin B\le 2\cos\dfrac{C}{2}$;

b) $\cos A+\cos B\le 2\sin\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\le 2\sin\dfrac{A+B}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}$.

b) Ta có $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\le 2\cos\dfrac{A+B}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}$.

Câu 41. Chứng minh trong mọi tam giác ABC nhọn ta đều có

a) $\cot A+\cot B\ge 2\tan\dfrac{C}{2}$;

b) $\sin A\sin B\ge\cos C$.

Lời giải

a) Ta có $\cot A+\cot B=\dfrac{\sin\left(A+B\right)}{\sin A.\sin B}=\dfrac{\sin C}{\sin A.\sin B}=\dfrac{2\sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{C}{2}}{\sin A.\sin B}$.

Do A,B là các góc trong tam giác nên $\sin A>0$, $\sin B>0$. Theo bất đẳng thức CôSi, ta có

$$\sin A.\sin B\le\left(\dfrac{\sin A+\sin B}{2}\right)^2\le\left(\dfrac{2\cos\dfrac{C}{2}}{2}\right)^2=\cos^2\dfrac{C}{2}$$

Suy ra $\cot A+\cot B\ge\dfrac{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos^2\dfrac{C}{2}}=2\tan\dfrac{C}{2}$.

b) Do tam giác ABC nhọn nên $\cos A>0$, $\cos B>0$ nên ta có

$\sin A\sin B \geq \sin A\sin B - \cos A\cos B$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B \geq -\cos(A+B) \Leftrightarrow \sin A\sin B \geq \cos C$.

Câu 42. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\tan A\tan B\tan C \geq 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn;

b) $\cos A+\cos B+\cos C \leq \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

a) Vì tam giác ABC nhọn nên $\tan A>0$, $\tan B>0$, $\tan C>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$\tan A+\tan B+\tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$.

Theo bài 2, ta có $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ nên

$\tan A+\tan B+\tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C} \Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\left(\sqrt[3]{(\tan A\tan B\tan C)^2}-3\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(\tan A\tan B\tan C)^2} \geq 3$

$\Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C \geq 3\sqrt{3}$

b) Ta có $\cos A+\cos B+\cos C = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos C$

Vì $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ nên $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$.

Mặt khác $\cos C = 1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$. Do đó $\cos A+\cos B+\cos C = 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$

$=-2\left(\sin^2\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-2\left(\sin^2\dfrac{C}{2}-2\sin\dfrac{C}{2}.\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{A-B}{2}\right)+1+\dfrac{1}{2}\cos^2\dfrac{A-B}{2}$

$=-2\left(\sin\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\right)^2+1+\dfrac{1}{2}\cos^2\dfrac{A-B}{2}$.

Vì $\left|\cos\dfrac{A-B}{2}\right| \leq 1$ suy ra $\cos^2\dfrac{A-B}{2} \leq 1$ nên $\cos A+\cos B+\cos C \leq 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 43. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

a) $\sin A = \dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$.

b) $3(\cos B+\sin A)+4(\sin B+\cos A)=10$.

Lời giải

a) Ta có: $\sin A = \dfrac{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}} \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}} \Leftrightarrow \sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $A=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại A.

b) Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki, ta có

$3(\cos B+\sin A)+4(\sin B+\cos A) \leq \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(\cos B+\sin A)^2+(\cos A+\sin B)^2}$

$\Leftrightarrow 10 \leq 5\sqrt{2+2\sin(A+B)} \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{2+2\sin(A+B)} \Leftrightarrow \sin(A+B) \geq 1 \Leftrightarrow \sin(A+B)=1$

Suy ra $A+B=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại C.

Câu 44. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

a) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)=0$.b) $\tan A+\cot A=(\sin B+\cos B)^2$.

Lời giải

a) Theo định lý hàm số sin, ta có: $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$. Do đó

$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)=0 \Leftrightarrow \sin A\sin(B-C)-\sin B\sin(A-C)=0$

$\Leftrightarrow \sin(B+C)\sin(B-C)-\sin(A+C)\sin(A-C)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(\cos 2C-\cos 2B)-(\cos 2C-\cos 2A)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos 2A=\cos 2B \Leftrightarrow A=B$.

Vậy tam giác ABC là câncân tại C.

b) Để biểu thức có nghĩa khi và chỉ khi $A\neq\frac{\pi}{2}$.

Do $\tan A+\cot A=(\sin B+\cos B)^2\geq 0$. Hơn nữa $\tan A$ và $\cot A$ cùng dấu nên suy ra $\tan A\geq 0$, $\cot A\geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\tan A+\cot A\geq 2\sqrt{\tan A\cot A}=2\ (1)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\tan A=\cot A\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{4}$.

Mặt khác, ta có $(\sin B+\cos B)^2=\left[\sqrt{2}\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=2\sin^2\left(B+\frac{\pi}{4}\right)\leq 2\ (2)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow B=\frac{\pi}{4}$.

Từ (1) và (2), suy ra $\tan A+\cot A=(\sin B+\cos B)^2=2$ khi và chỉ khi $A=B=\frac{\pi}{4}$.

Vậy tam giác ABC là vuông câncân tại C.

Câu 45. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

a) $\begin{cases} a=2b\cos C & (1) \\ \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 & (2) \end{cases}$.b) $\begin{cases} \cos B\cos C=\dfrac{1}{4} & (1) \\ \dfrac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}=a^2 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2R\sin A=4R\sin B\cos C \Leftrightarrow \sin A=2\sin B\sin C$.

$\Leftrightarrow \sin(B+C)=2\sin B\cos C\Leftrightarrow \sin(B-C)=0\Leftrightarrow B=C\Leftrightarrow b=c$. $(1')$.

Thay $b=c$ vào (2) ta được $a^2=\frac{2b^3-a^3}{2b-a}\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$.$(2')$.

Từ $(1')$ và $(2')$ suy ra $a=b=c$.

Vậy tam giác ABC đều.

b) Ta có

$(2)\Leftrightarrow a^3-a^2b-a^2c=a^3-b^3-c^3\Leftrightarrow b^3+c^3=a^2(b+c)\Leftrightarrow (b+c)(b^2-bc+c^2)=a^2(b+c)$

$\Leftrightarrow b^2-bc+c^2=a^2\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=bc\Leftrightarrow 2bc\cos A=bc\Leftrightarrow \cos A=\frac{1}{2}\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{3}$.$(1')$.

Hơn nữa, $(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\cos(B-C)+\cos(B+C)\right]=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos(B-C)-\cos A=\frac{1}{2}$

Do $\cos A=\frac{1}{2}$ nên $\cos(B-C)=1$. Suy ra $B=C$.$(2')$.

Từ $(1')$ và $(2')$, suy ra $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

Vậy tam giác ABC đều.

Câu 46. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

a) $\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}=\frac{a}{\sin B\sin C}$ .b) $\frac{\sin A+\cos B}{\sin B+\cos A}=\tan A$.

Lời giải

a) Áp dụng định lý hàm số sin, ta có

$$\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}=\frac{a}{\sin B\sin C}\Leftrightarrow\frac{2R\sin B}{\cos B}+\frac{2R\sin C}{\cos C}=\frac{2R\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{\cos B\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin C}{\cos B\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow\cos B\cos C=\sin B\sin C\Leftrightarrow\cos\left(B+C\right)=0.$$

Suy ra $B+C=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có

$$\frac{\sin A+\cos B}{\sin B+\cos A}=\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\Leftrightarrow\cos A\cos B-\sin A\sin B=0\Leftrightarrow\cos\left(A+B\right)=0.$$

Suy ra $A+B=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}$.

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

Câu 47. Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có

a) $1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$;b) $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2\left(R+r\right)$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$ nên đề bài tương đương với giả thiết

$1+\frac{r}{R}=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ hay $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Ta có $\text{VT}=\frac{S}{p}=\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)}$

$$=2R\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\text{VP}.$$

b) Áp dụng kết quả câu a) ta có

$$\text{VT}=a\frac{\cos A}{\sin A}+b\frac{\cos B}{\sin B}+c\frac{\cos C}{\sin C}=2R\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)=2R\left(1+\frac{r}{R}\right)=\text{VP}.$$

Câu 48. Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có

a) $\frac{\cos\frac{A}{2}}{\ell_A}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\ell_B}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\ell_C}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

b) $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=p$.

Lời giải.

a) Từ công thức phân giác $\ell_A=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ suy ra $\frac{\cos\frac{A}{2}}{\ell_A}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Tương tự, ta có $\frac{\cos\frac{B}{2}}{\ell_B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ và $\frac{\cos\frac{C}{2}}{\ell_C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Cộng vế theo vế của các đẳng thức thì được điều cần chứng minh.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{VT}&=\frac{1}{2}bc(1+\cos A)+\frac{1}{2}ca(1+\cos B)+\frac{1}{2}ab(1+\cos C)\\&=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}bc.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{1}{2}ca.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{1}{2}ab.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{1}{4}(a+b+c)^2=p^2=\mathrm{VP}.\end{aligned}$$

Dạng 6. Bài toán min-max

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin\alpha|\le 1, |\cos\alpha|\le 1$ với mọi số thực α

Câu 49. Chứng minh rằng với $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ thì

a) $2\cot^2\alpha\ge 1+\cos 2\alpha$ b) $\cot\alpha\ge 1+\cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)\ge 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha}-1\ge 1-\sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha\ge 2 \Leftrightarrow \sin^4\alpha-2\sin^2\alpha+1\ge 0$$

$\Leftrightarrow\left(\sin^2\alpha-1\right)^2\ge 0$ (đúng) ĐPCM.

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ge\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ge\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\quad (*)$$

Vì $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \cos\alpha>0\end{cases}$ nên

$(*)\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha\ge\sin 2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1\ge\sin 2\alpha$ (đúng) ĐPCM.

Câu 50. Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha+\frac{1}{2\sin\alpha}\right)\ge 2$

Lời giải

Ta có $\left(\sin\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha+\frac{1}{2\sin\alpha}\right)=\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}+1$

Vì $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha\cos\alpha>0$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}\ge 2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha.\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}}=1$$

Suy ra $\left(\sin\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha+\frac{1}{2\sin\alpha}\right)\ge 2$ ĐPCM.

Câu 51. Chứng minh rằng với $0\le\alpha\le\pi$ thì $\left(2\cos 2\alpha-1\right)^2-4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>\left(\sqrt{2\sin\alpha}-2\right)\left(3-2\cos 2\alpha\right)$.

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow\left(2\cos 2\alpha-1\right)^2-2\left[1-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]+2\left(3-2\cos 2\alpha\right)>\sqrt{2\sin\alpha}\left[3-2\left(1-2\sin^2\alpha\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2\alpha-8\cos 2\alpha+5+2\sin\alpha>\sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1-\cos 2\alpha\right)^2+1+2\sin\alpha>\sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 16\sin^4\alpha+2\sin\alpha+1>\sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha+1\right)$$

Đặt $\sqrt{2\sin\alpha}=t$, vì $0\le\alpha\le\pi\Rightarrow 0\le t\le\sqrt{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $t^8+t^2+1>t\left(t^4+1\right)\Leftrightarrow t^8-t^5+t^2-t+1>0$ (*)

+ Nếu $0\le t<1$: (*) $\Leftrightarrow t^8+t^2\left(1-t^3\right)+1-t>0$ đúng vì $1-t>0,\ 1-t^3>0, t^2\ge 0$ và $t^8\ge 0$.

+ Nếu $1\le t\le\sqrt{2}$: (*) $\Leftrightarrow t^5\left(t^3-1\right)+t\left(t-1\right)+1>0$ đúng vì $t^5\left(t^3-1\right)\ge 0,\ t\left(t-1\right)\ge 0$.

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Câu 52. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:
a) $A=\sin x+\cos x$ b) $B=\sin^4 x+\cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

Vì $\sin 2x\le 1$ nên $A^2=1+\sin 2x\le 1+1=2$ suy ra $-\sqrt{2}\le A\le\sqrt{2}$.

Khi $x=\frac{\pi}{4}$ thì $A=\sqrt{2}$, $x=-\frac{3\pi}{4}$ thì $A=-\sqrt{2}$

Do đó $\max A=\sqrt{2}$ và $\min A=-\sqrt{2}$.

b) Ta có $B=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}+\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$

$$=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{2+1+\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x$$

Vì $-1\le\cos 4x\le 1$ nên $\frac{1}{2}\le\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x\le 1$ suy ra $\frac{1}{2}\le B\le 1$.

Vậy $\max B=1$ khi $\cos 4x=1$ và $\min B=\frac{1}{2}$ khi $\cos 4x=-1$.

Câu 53. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A=2-2\sin x-\cos 2x$

Lời giải

Ta có $A=2-2\sin x-\left(1-2\sin^2 x\right)=2\sin^2 x-2\sin x+1$

Đặt $t=\sin x,\ |t|\le 1$ khi đó biểu thức trở thành $A=2t^2-2t+1$

Xét hàm số $y=2t^2-2t+1$ với $|t|\le 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	5 ↘	$\frac{1}{2}$	↗ 1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A=5$ khi $t=-1$ hay $\sin x=1$.

$\min A=\frac{1}{2}$ khi $t=\frac{1}{2}$ hay $\sin x=\frac{1}{2}$.

Câu 54. Cho $0<x<\frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\tan x+\cot x\ge 2$

Lời giải

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\tan x>0\\ \cot x>0\end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\tan x+\cot x\ge 2\sqrt{\tan x.\cot x}=2$.

Câu 55. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $B=\cos 2x+\sqrt{1+2\sin^2 x}$

Lời giải

Ta có $B=\cos 2x+\sqrt{1+1-\cos 2x}=\cos 2x+\sqrt{2-\cos 2x}$

Đặt $t=\sqrt{2-\cos 2x}\Rightarrow\cos 2x=2-t^2$, vì $-1\le\cos 2x\le 1\Rightarrow 1\le t\le\sqrt{3}$

Biểu thức trở thành $B=2-t^2+t$.

Xét hàm số $y=-t^2+t+2$ với $1\le t\le\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên

t	1	$\sqrt{3}$
y	2 ↘	$\sqrt{3}-1$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max B=2$ khi $t=1$ hay $\cos 2x=1$.

$\min A=\sqrt{3}-1$ khi $t=\sqrt{3}$ hay $\cos 2x=-1$.

Câu 56. Chứng minh rằng $\cos x(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+2})\le\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{3}P=\sqrt{3}\sin x.\cos x+\sqrt{3}\cos x.\sqrt{\sin^2 x+2}\le\frac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{2}+\frac{3\cos^2 x+\sin^2 x+2}{2}=3$

Vậy: $P \le \sqrt{3}$

Câu 57. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2\sin x + \sin 2x$.

Lời giải

Ta có $P = 2\sin x + 2\sin x\cos x = 2\sin x(1+\cos x)$

Suy ra $P^2 = 4\sin^2 x(1+\cos x)^2 = \sin^2 x\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)$

Ta có $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{4} \ge \cos x$ suy ra

$P \le \sin^2 x\left(1+2\cos^2 x+\frac{1}{2}+\cos^2 x\right) = \sin^2 x\left(\frac{3}{2}+3\cos^2 x\right)$

Mặt khác theo bất đẳng thức $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, $\forall x, y \in R$ ta có

$$\sin^2 x\left(\frac{5}{4}+3\cos^2 x\right) = \frac{1}{3}.3\sin^2 x\left(\frac{3}{2}+3\cos^2 x\right) \le \frac{1}{3}.\left[\frac{3\sin^2 x+\left(\frac{3}{2}+3\cos^2 x\right)}{2}\right]^2 = \frac{27}{16}$$

Suy ra $P \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$.