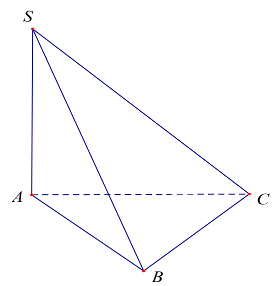
BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).



A. 60°. **B.** 45°. **C.** 135°. **D.** 90°.

Lời giải

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

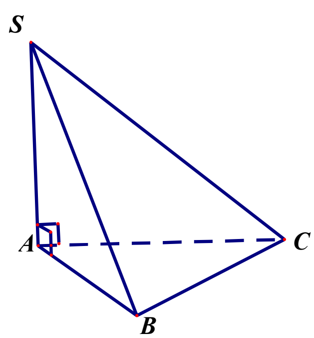
Tam giác SAC vuông cân tại A nên góc $\widehat{SCA}=45^{\circ}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

A. SB và AB. **B.** SB và SC. **C.** SA và SB. **D.** SB và BC.

Lời giải

Chọn A



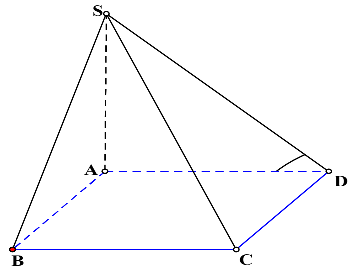
Ta có: Hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) là AB nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc giữa hai đường thẳng SB và AB.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

A. $\arcsin\frac{3}{5}$. **B.** 45^{0}. **C.** 60^{0}. **D.** 30^{0}.

Lời giải

Chọn C



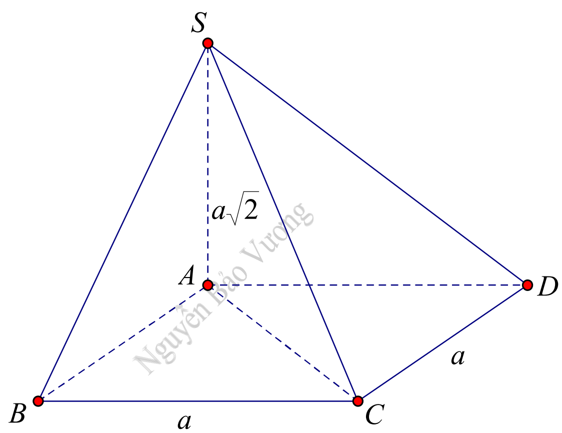
Vì $SA \perp ABCD$ nên góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Trong tam giác vuông SDA ta có: $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^0$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



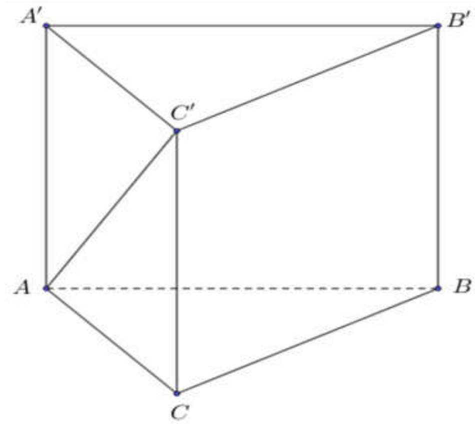
$(SC,(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}.$

Trong tam giác vuông SAC có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^0$.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và (ABC) bằng

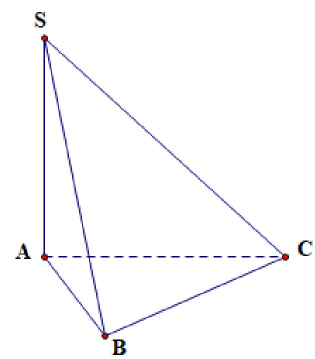
A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 75°.

Lời giải



Ta có $\widehat{\left(AC',(ABC)\right)}=\widehat{\left(AC',AC\right)}=\widehat{CAC'}$, $\tan\widehat{C'AC}=\dfrac{CC'}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{C'AC}=30^{\circ}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$ và $BC=\sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

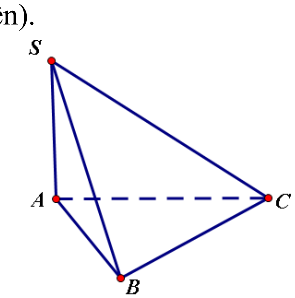
Chọn D

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA}$.

Mà $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+3a^2}}=1$.

Vậy $\widehat{SCA}=45^{\circ}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA=\sqrt{2}a$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AB=a$ (minh họa như hình vẽ bên).

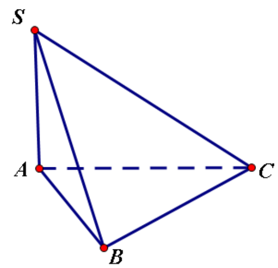


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn A

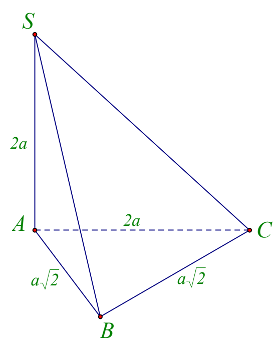


Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC).

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA} = \varphi$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45^0$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ bên).

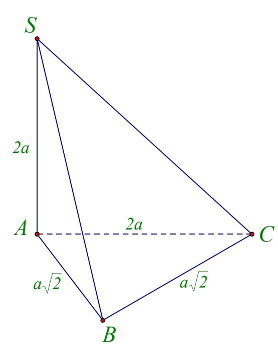


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60^o. **B.** 45^o. **C.** 30^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên đường thẳng AC là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó, $\alpha = \left(\widehat{SC, (ABC)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA}$ (tam giác SAC vuông tại A).

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = 2a$.

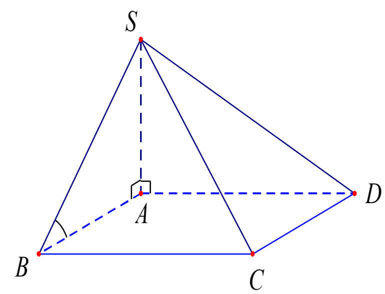
Suy ra $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1$ nên $\alpha = 45^o$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB=2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos\widehat{SBA}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{SBA}=60°$.

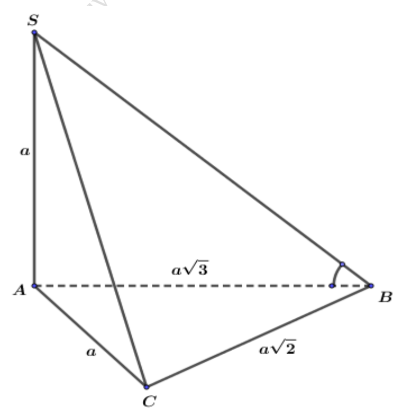
Vậy góc giữa đường thẳng SB và và mặt phẳng đáy bằng bằng $60°$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC=a$, $BC=\sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Có $SA\perp(ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SB,AB}\right)=\widehat{SBA}$.

Mặt khác có ΔABC vuông tại C nên $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=a\sqrt{3}$.

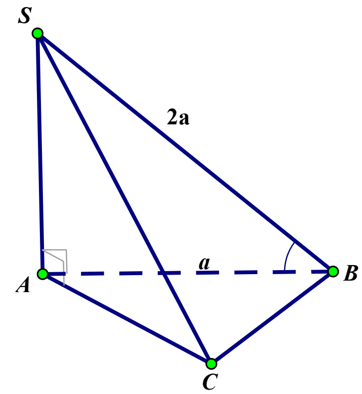
Khi đó $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=30°$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=a$ và $SB=2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng.

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải.

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là $\widehat{SBA}$.

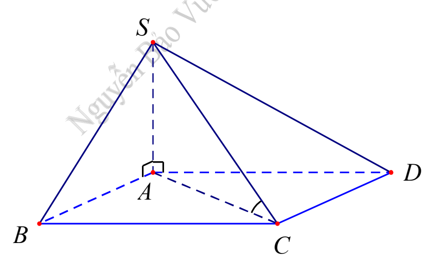
Tam giác SAB vuông tại A nên $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A

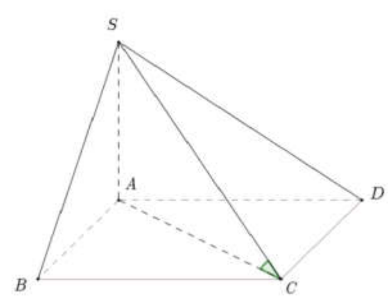


Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $SA = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{2}a$ $\Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và và mặt phẳng đáy bằng bằng $45°$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 3a$. Gọi φ là góc giữa SC và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ bên). Khi đó $\tan\varphi$ bằng



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

+) AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $(SC,(ABCD))=(SC,AC)=\angle SCA=\varphi$

Ta có: $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a$.

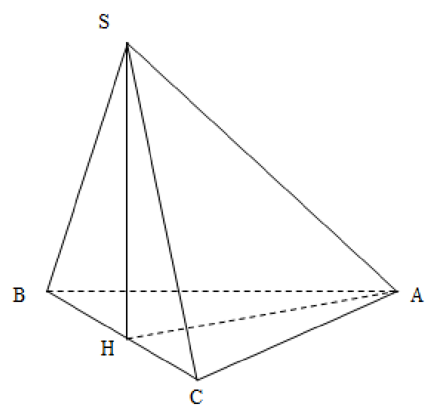
Tam giác SAC vuông tại A nên $\tan\varphi=\frac{SA}{AC}=\frac{3a}{\sqrt{5}a}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Gọi α là số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính $\tan\alpha$.

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



AH là hình chiếu của SA trên (ABC) $\Rightarrow$ $(SA,(ABC))=(SA,AH)=\widehat{SAH}=\alpha$.

$\Delta SBC=\Delta ABC$ $\Rightarrow SH=AH$ $\Rightarrow \Delta SAH$ vuông cân tại H $\Rightarrow \alpha=\widehat{SAH}=45°$.

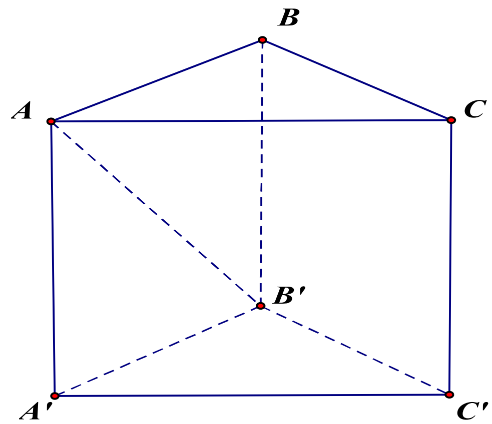
Vậy $\tan\alpha=1$.

Câu 15. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết của bài toán suy ra: $A'B'$ là hình chiếu vuông góc của AB' trên $(A'B'C')$.

Do đó, $\widehat{(AB',(A'B'C'))} = \widehat{(AB',A'B')} = \widehat{AB'A'}$.

Tam giác $AB'A'$ vuông tại A' có $AA' = A'B' = a \Rightarrow \Delta AA'B'$ vuông cân tại A'.

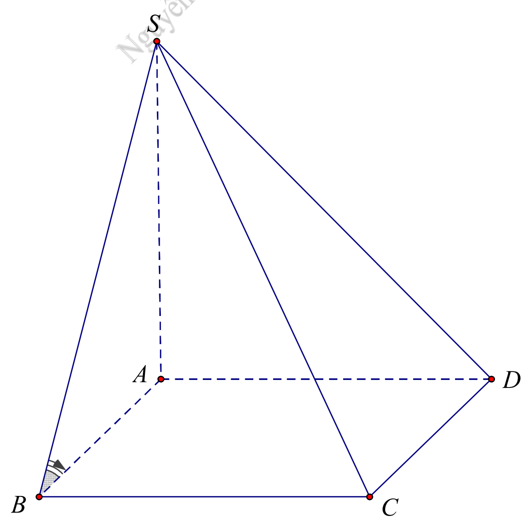
Suy ra $\widehat{(AB',(A'B'C'))} = \widehat{(AB',A'B')} = \widehat{AB'A'} = 45°$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot\varphi$?

A. $\cot\varphi = 2$. **B.** $\cot\varphi = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\cot\varphi = 2\sqrt{2}$. **D.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SB,BA}\right) = \widehat{SBA}$

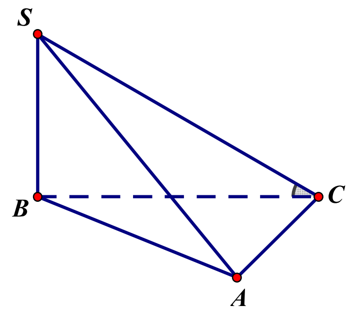
$\Rightarrow \cot\varphi = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{2a}{a} = 2.$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc (ABC). Góc giữa SC với (ABC) là góc giữa

A. SC và AC. **B.** SC và AB. **C.** SC và BC. **D.** SC và SB.

Lời giải

Chọn C



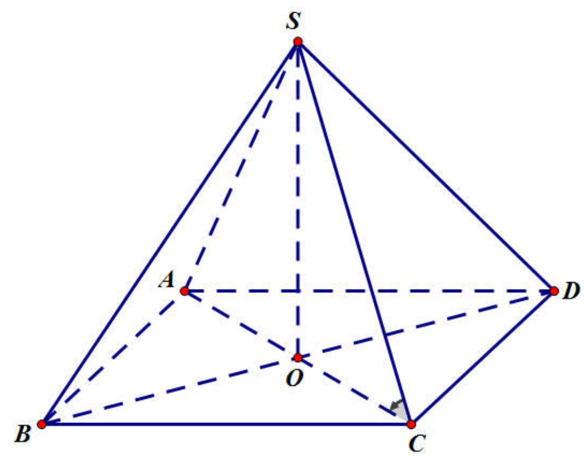
* Hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là BC nên góc giữa SC với (ABC) là góc giữa SC và BC.

Câu 18. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a, AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính số đo góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 60^0. **B.** 75^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn D



Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCO}$.

$BD = 4a \Rightarrow BO = 2a$

$SO = BO.\tan \widehat{SBO} = 2a.\frac{1}{2} = a$

$AC = 2a \Rightarrow OC = a$

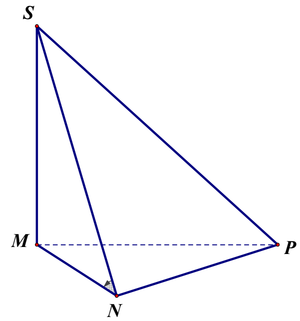
Vậy $\widehat{SCO} = 45^0$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.MNP$ có đáy là tam giác đều, $MN = a$, SM vuông góc với mặt phẳng đáy, $SP = 2a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Tính góc giữa đường thẳng SN và mặt phẳng đáy.

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SN = SP = 2a$

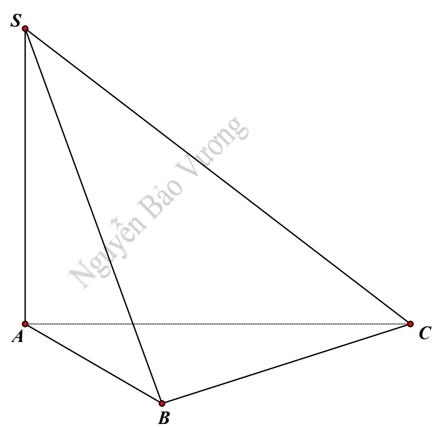
Vì $SM \perp (MNP) \to \left(\widehat{SN,(MNP)}\right) = \widehat{SNM}$

$\cos\widehat{SNM} = \dfrac{MN}{SN} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \to \widehat{SNM} = 60^\circ$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC đều cạnh a. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là:

A. $\arctan 2$ **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải.



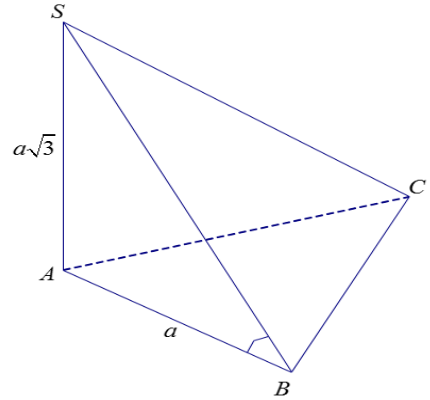
- Nhận thấy AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

- Do ΔSAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^0$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

A. 75°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải



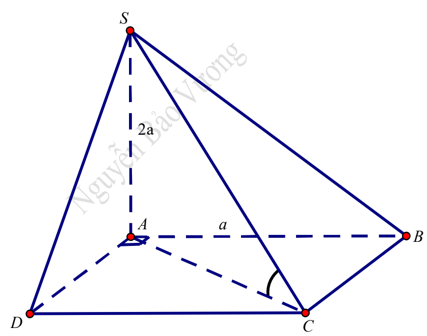
Vì $SA \perp (ABC)$ nên $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \widehat{SBA}$

Suy ra $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

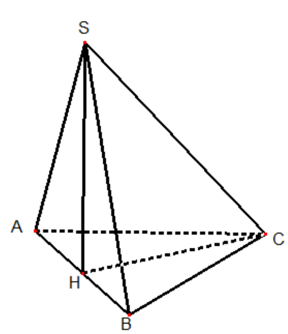


$\tan \alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 23. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, H là hình chiếu của S lên AB, tam giác SAB vuông cân tại S, SH vuông góc với (ABC). Góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng:

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 45^0.

Lời giải



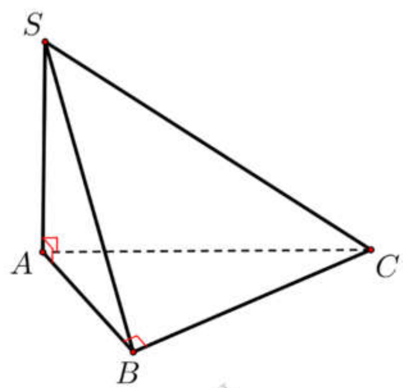
Do tam giác SAB vuông cân tại S nên H là trung điểm của AB và ta có $SH = \frac{1}{2}AB = a$.

Góc giữa cạnh SC và mặt đáy là góc $\widehat{SCH}$.

Xét tam giác vuông HSC có $HC = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $SH = a$ nên $\tan\widehat{SCH} = \frac{HS}{HC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 30^0$.

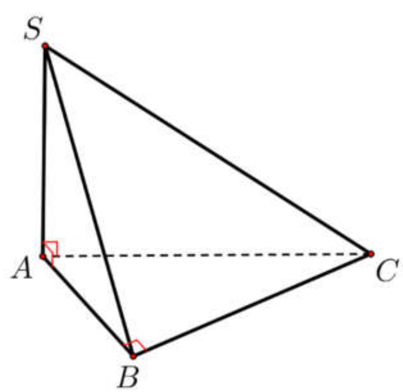
Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn B



Ta thấy hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là AC nên $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCA}$.

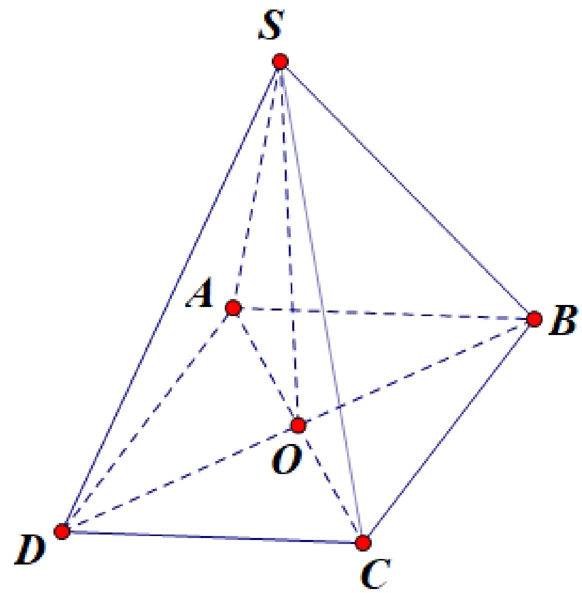
Mà $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$ nên $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

Câu 25. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $60°$. **B.** $75°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải



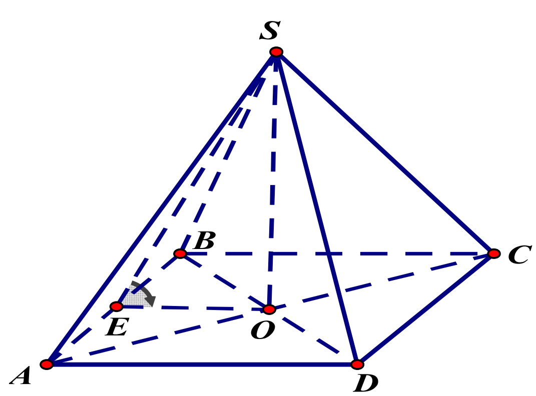
Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC}=60°$ nên ΔACD đều và $OD=\dfrac{2a.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan\widehat{SDO}=\dfrac{SO}{DO}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\widehat{SDO}=30°$.

Câu 26. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tang của góc nhị diện $[S,AB,O]$

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải



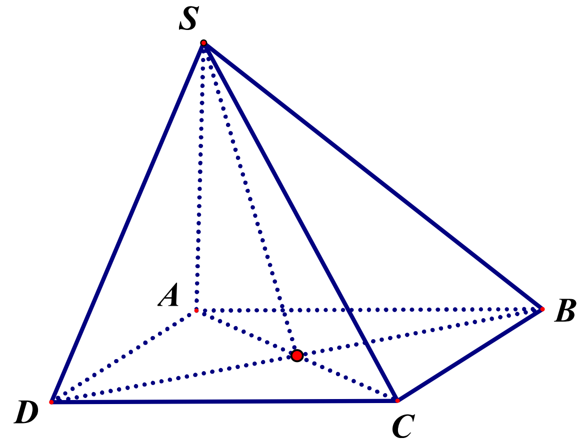
Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\widehat{SEO}$; $EO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSEO vuông tại O, ta có $\tan\widehat{SEO}=\dfrac{SO}{EO}=1$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Góc nhị diện $[S,BD,A]$?

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Từ A ta kẻ đường vuông góc tới BD, thì chân đường vuông góc là tâm O của hình vuông, từ đây dễ thấy $SO \perp BD$, nên góc giữa hai mặt phẳng là góc SOA.

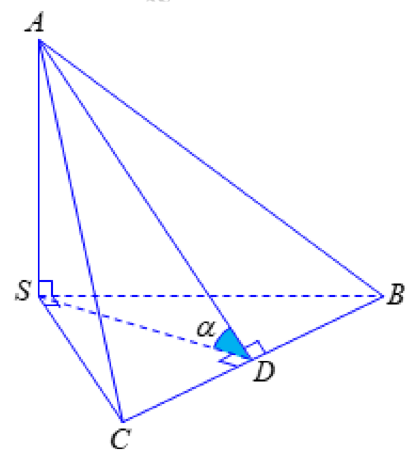
Xét tam giác ΔSOA có $\tan SOA = \frac{SA}{OA} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Vậy góc cần tìm bằng 60^0.

Câu 28. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB; SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc nhị diện $[S, BC, A]$

A. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

❍ Cách 1:



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD)$.

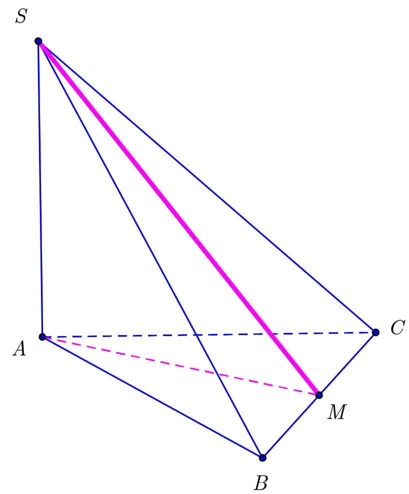
$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SDA} = \alpha$.

Khi đó tam giác SAD vuông tại S có $SD = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos\alpha = \frac{SD}{AD} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc nhị diện $[S, BC, A]$

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Kẻ $AM \perp BC$ tại M. Ta có $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\(SAM)\perp BC\\(SAM)\cap(SBC)=SM\\(SAM)\cap(ABC)=AM\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\left(\widehat{SM,AM}\right)$.

Góc nhị diện $[S,BC,A]$ bằng góc $\widehat{SMA}$.

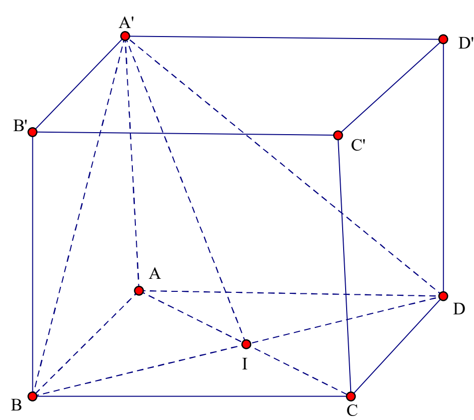
Ta có $\tan\widehat{SMA}=\dfrac{SA}{AM}=\dfrac{a}{a}=1\Rightarrow\widehat{SMA}=45°$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Giá trị sin của góc nhị diện $[A',BD,A]$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I=AC\cap BD$. Ta có: $\begin{cases}BD\perp AI\\BD\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BD\perp(AIA')$; $BD=(BDA')\cap(ABCD)$.

Do đó góc nhị diện $[A',BD,A]$ là $\widehat{AIA'}$.

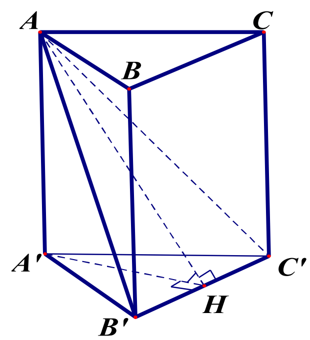
Ta có: $\Delta AA'I$ vuông tại A, có: $AA' = a; AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'I = \sqrt{AA'^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sin \widehat{AIA'} = \dfrac{AA'}{A'I} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 31. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi α là góc nhị diện $[A, B'C', A']$. Tính giá trị của $\tan\alpha$?

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$

$\Rightarrow AH \perp B'C'$ (do $\Delta AB'C'$ cân tại A) và $A'H \perp B'C'$(do $\Delta A'B'C'$đều).

Suy ra $[A, B'C', A'] = \widehat{AHA'}$.

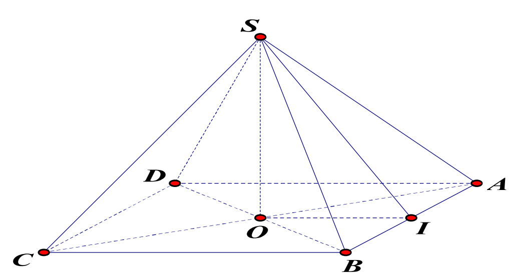
Vậy $\tan \widehat{AHA'} = \dfrac{AA'}{A'H} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và chiều cao $SO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Tính góc nhị diện $[S, AB, O]$

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = a$, gọi I là trung điểm của AB. Ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SI \perp AB \\ OI \perp AB \end{cases} \Rightarrow [S, AB, O] = \widehat{SIO}$$

Mặt khác, ta lại có:

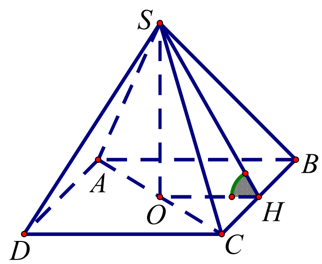
$$AB = a,\ SO = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ OI = \frac{1}{2}a \Rightarrow \tan\widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = 60^o$$

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S, BC, O]$

A. $\alpha \approx 75°46'$. **B.** $\alpha \approx 71°21'$. **C.** $\alpha \approx 68°31'$. **D.** $\alpha \approx 65°21'$.

Lời giải



Gọi O, H lần lượt là trung điểm của AC và BC.

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(5a)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{91}a}{2}$.

Vì $SA = SB = SC = SD = 5a$ nên $SO \perp (ABCD)$.

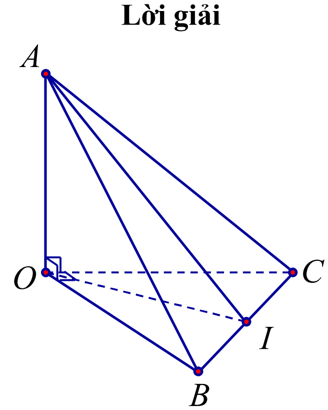
Ta có: $(SBC) \cap (ABCD) = BC$, $SH \perp BC$, $OH \perp BC$, suy ra góc $[S, BC, O]$bằng $\widehat{SHO} = \alpha$.

Xét tam giác SOH vuông tại O, ta có: $\cos\alpha = \frac{OH}{SH} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{91}a}{2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91} \Rightarrow \alpha \approx 65°21'$.

Câu 34. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc nhị diện $[A, BC, O]$

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên $AI \perp BC$.

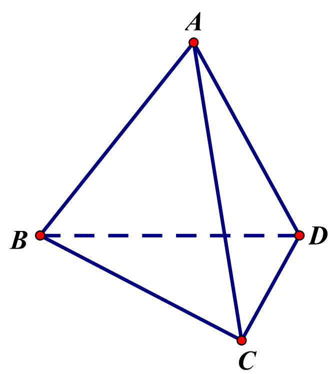
Ta có: $\begin{cases} (OBC)\cap(ABC)=BC \\ BC\perp AI \\ BC\perp OI \end{cases} \Rightarrow [A,BC,O]=\widehat{OIA}$.

Ta có: $OI=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{OB^2+OC^2}=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA}=\frac{OA}{OI}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{OIA}=30^\circ$.

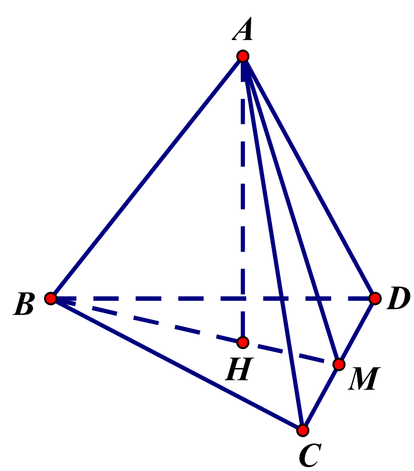
Vậy $[A,BC,O]=30^\circ$.

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Tính $\cos\varphi$.



A. $\cos\varphi=0$. **B.** $\cos\varphi=\frac{1}{2}$. **C.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD. Ta có $BM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) thì $H\in BM$ và $BH=\frac{2}{3}BM=\frac{AB\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) là $\widehat{ABM}$.

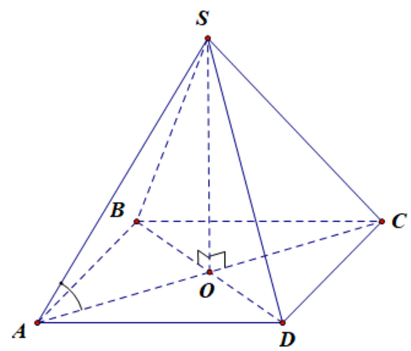
Ta có $\cos\varphi = \cos\widehat{ABM} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\dfrac{AB\sqrt{3}}{3}}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$. Độ lớn của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $75°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.

$\widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{(SA, AO)} = \widehat{SAO} = \alpha$.

Ta có $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAO vuông tại O có $\cos\alpha = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $\alpha = 60°$.

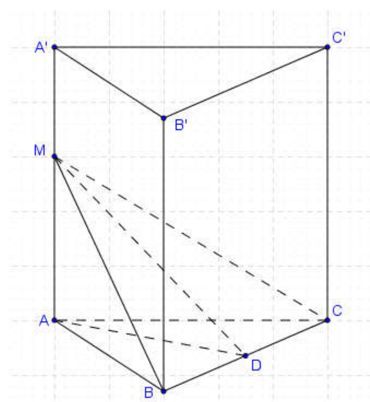
Vậy góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng $60°$.

Câu 37. Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \dfrac{3a}{4}$. Tang của góc nhị diện $[M, BC, A]$:

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là trung điểm của BC.

Ta có $(MBC) \cap (ABC) = BC$.

Và $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMD)$.

Do đó $\alpha = [M, BC, A] = \widehat{MDA}$, (vì tam giác MAD vuông tại A).

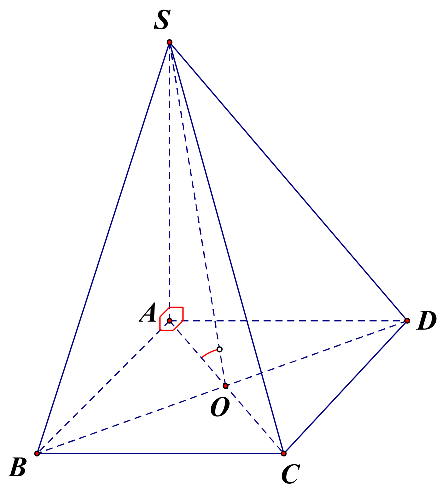
Vậy $\tan \alpha = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$.

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $30°$ **D.** $75°$

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$ ta có $SO \perp BD, AO \perp BD$

Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$ là góc $\widehat{SOA}$

Xét tam giác vuông SOA có $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}; OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Nên $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra góc $\widehat{SOA} = 30°$

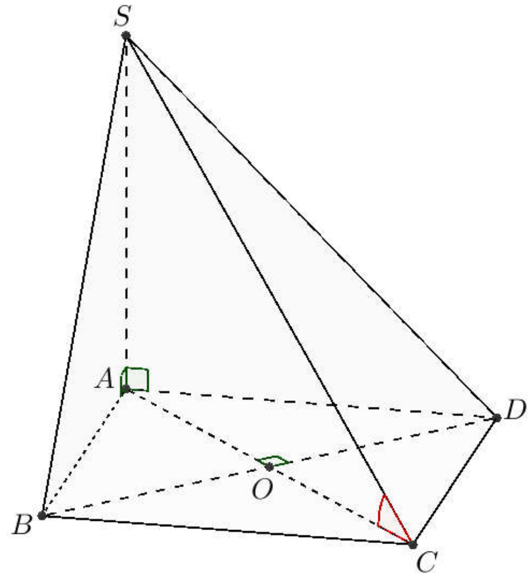
Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$.bằng $30°$

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SB = 5a$. Tính $\sin$ của góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải

Chọn D



$ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$ nên $AC = 3a\sqrt{2}$

Xét tam giác SAB vuông tại A: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \widehat{SCA}$

Xét tam giác SAC vuông tại A:

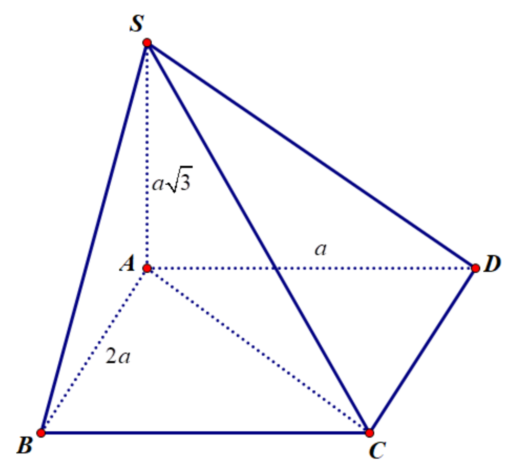
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$

$\sin \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa SC và mặt đáy bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải



Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC

Do đó $\left[\widehat{SC,(ABCD)}\right] = \widehat{SCA}$

$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$

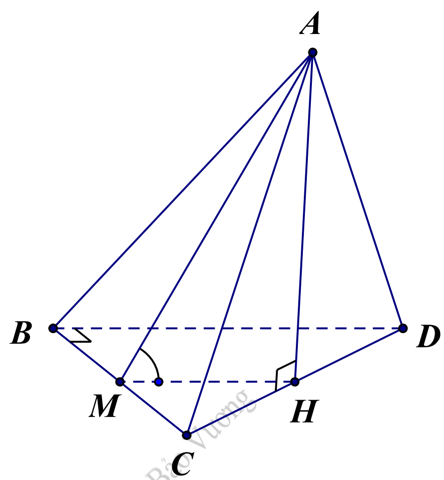
Trong tam giác vuông SAC: $\cos\widehat{SCA}=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác vuông tại đỉnh B, cạnh $CD=a$, $BD=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $AB=AC=AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc nhị diện $\left[A,BC,D\right]$

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M và H lần lượt là trung điểm BC và CD. Do $AB=AC=AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và H là chân đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy BCD nên $AH\perp(BCD)$.

Ta có $\begin{cases} BC\perp MH \\ BC\perp AH \\ MH, AH\subset(AMH)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AMH)$.

Suy ra $\begin{cases} BC\perp MH \\ BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow\left[A,BC,D\right]=\widehat{AMH}$.

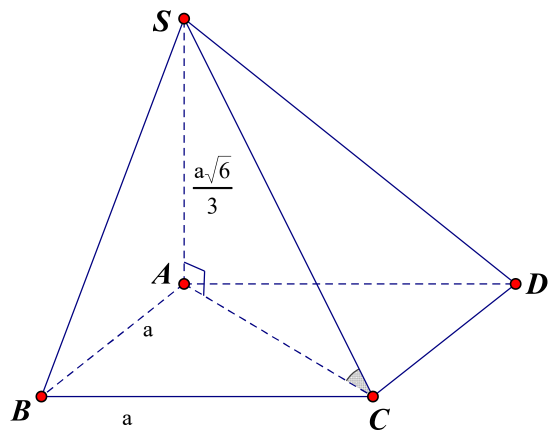
$$\tan\widehat{AMH}=\frac{AH}{MH}=\frac{\sqrt{AB^2-BH^2}}{\frac{1}{2}BD}=\frac{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}}=\sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{AMH}=\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA\perp(ABCD)$. Biết $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là:

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 75°. **D.** 60°.

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow (SC,(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

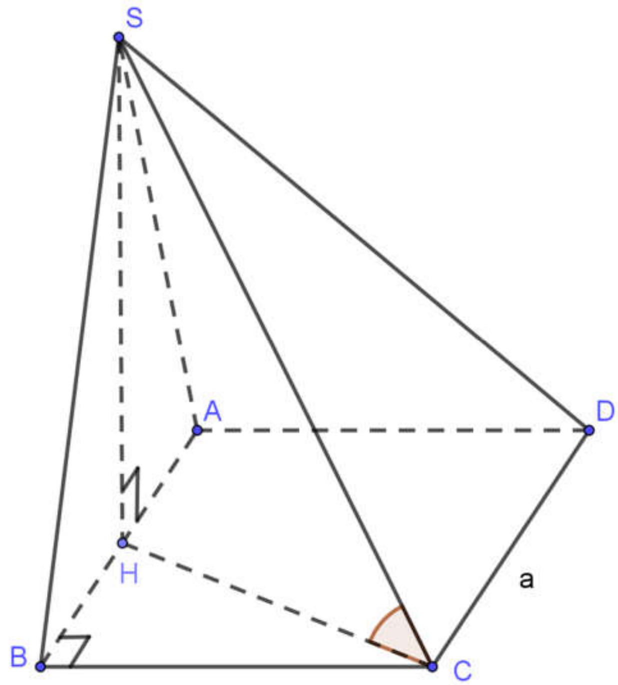
$\Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

Vậy **góc giữa** SC **và** $(ABCD)$ **là** $30°$**.**

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là

A. 120^o. **B.** 30^o. **C.** 45^o. **D.** 60^o.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB. Ta có $SH \perp (ABCD)$.

$S_{ABCD} = a^2$.

$V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH \Rightarrow SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

$CH = \sqrt{AC^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,CH}\right)$.

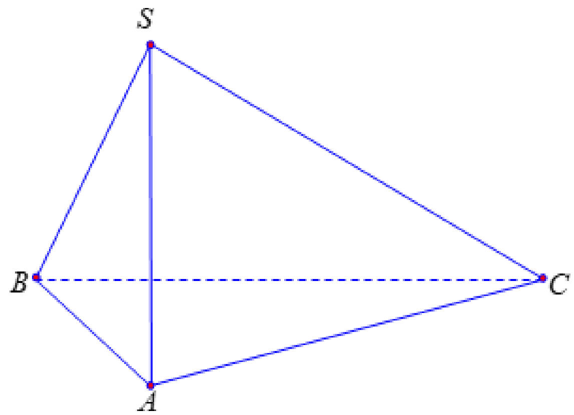
$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{CH} = \sqrt{3}$.

Vậy $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = 60^o$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc nhị diện $[B, SA, C]$

A. $30°$. **B.** $150°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

ta có: $\begin{cases} (SAB)\cap(SAC)=SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow [B,SA,C]=\widehat{BAC}$.

Xét ΔABC có $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{a^2+a^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC}=120°$.

Vậy $[B,SA,C]=120°$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

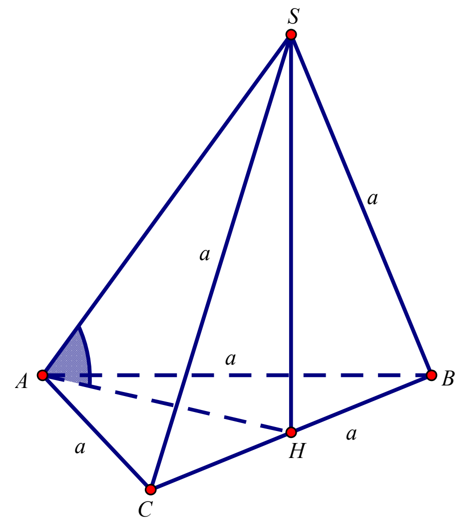
Ta có MC là hình chiếu của MC' lên (ABC). Suy ra $\alpha=\widehat{C'CM}$.

Xét tam giác MCC' vuông tại C có: $\tan\alpha=\dfrac{CC'}{CM}=\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Dễ thấy AH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng đáy.

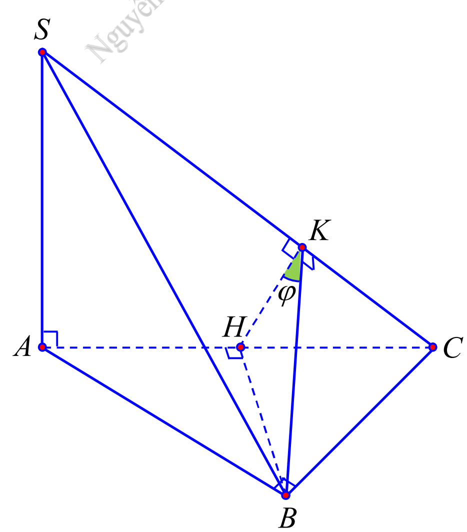
Do đó góc tạo bởi SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$.

Mặt khác, $\Delta ABC = \Delta SBC \Rightarrow SH = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy tam giác SAH là tam giác vuông cân đỉnh H hay $\widehat{SAH} = 45°$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = BC = a$ và $SA = a$. Góc nhị diện $[B,SC,A]$

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AC

Ta có $(SAC) \perp (ABC)$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HK \perp SC$ thì $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK$.

$\Rightarrow [B,SC,A] = \widehat{SKH} = \varphi$.

Mặt khác

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = a$ nên $AC = a\sqrt{2}$ và $BH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK = \dfrac{HC.SA}{SC} \Leftrightarrow HK = \dfrac{HC.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác BHK vuông tại H có $\tan\varphi = \dfrac{BH}{BK} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Vậy $[B, SC, A] = 60°$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng:

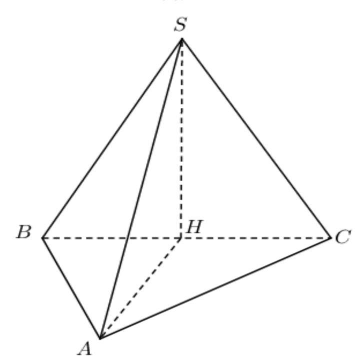
A. 45°. **B.** 30°. **C.** 75°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm cạnh $BC \Rightarrow SH \perp BC$; $SH = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}$ (ΔSBC đều)

$$\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \\ SH \perp AB; SH \in (SBC) \end{cases}$$



$\Rightarrow \left(\widehat{SA;(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA; AH}\right) = \widehat{SAH}$

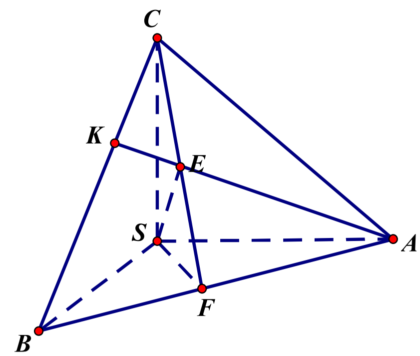
ΔABC vuông tại $A; H$ là trung điểm $BC \Rightarrow AH = \dfrac{BC}{2}$

ΔSAH vuông tại $H \Rightarrow \tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{\frac{BC.\sqrt{3}}{2}}{\frac{BC}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^\circ$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. sin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Lời giải



Trong tam giác ABC kẻ đường cao AK và CF và $AK \cap CF = \{E\}$ nên E là trực tâm tam giác ABC.

$\begin{cases} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{cases} \Rightarrow SC \perp (SAB)$ hay $SC \perp AB$

Mà $CF \perp AB$ nên $AB \perp (SCF) \Rightarrow AB \perp SE$. Chứng minh tương tự ta được

$BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp SE$. Vậy $SE \perp (ABC)$.

Ta có CE là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

$(SC,(ABC)) = (SC,CE) = \widehat{SCE}$

Ta có tam giác SCF vuông tại S nên $\frac{1}{SE^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SF^2}$. Mặt khác tam giác SAB vuông tại S nên $\frac{1}{SF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2}$. Suy ra $\frac{1}{SE^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SE^2} = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow SE = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

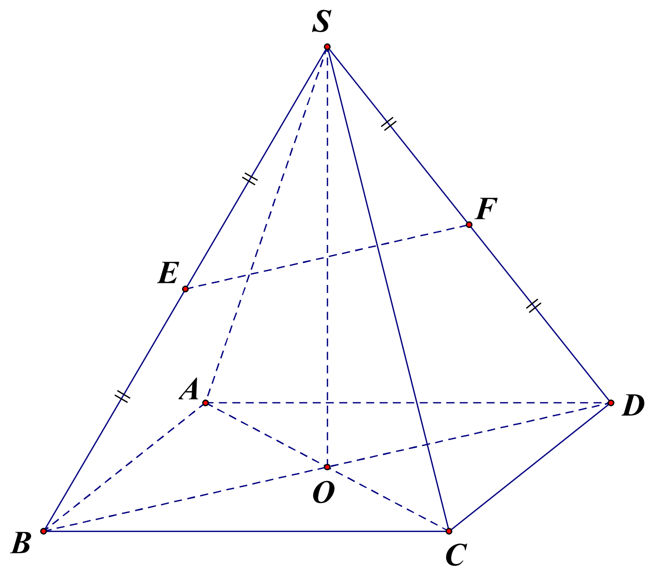
$\sin \widehat{SCE} = \frac{SE}{SC} = \frac{a}{\sqrt{3}} : a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của SB và SD, O là giao điểm của AC và BD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SO \perp (ABCD)$. **B.** $(SAC) \perp (SBD)$.

C. $EF // (ABCD)$. **D.** $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = 60°$.

Lời giải



Ta có:

+ $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

+ $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

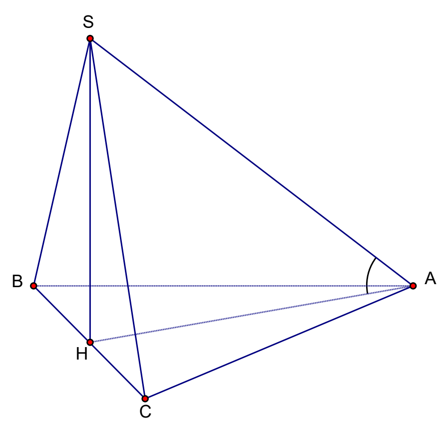
+ $EF // BD \Rightarrow EF // (ABCD)$.

+ $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SA, AO}\right) = \widehat{SAO} = 45°$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Biết ΔSBC đều, tính góc giữa SA và (ABC)

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $30°$ **D.** $60°$

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC suy ra $SH \perp (ABC)$

Do đó hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC) là AH

Do ΔABC và ΔSBC đều cạnh a nên $SH = AH \Rightarrow \Delta SAH$ vuông cân tại H

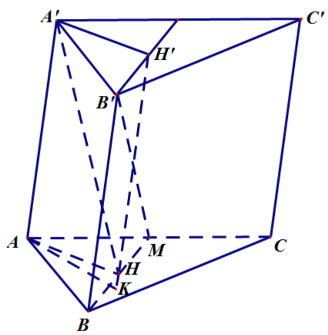
$\Rightarrow (SA,(ABC)) = \widehat{SAH} = 45°$.

Câu 52. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=30^0$. M là trung điểm AC. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BM. Khoảng cách từ C' đến mặt phẳng (BMB') bằng $\frac{3a}{4}$. Tính số đo góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy của hình lăng trụ.

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $d\left(C',(BMB')\right)=d\left(C,(BMB')\right)=d\left(A,(BMB')\right)=\frac{3a}{4}$,

Trong tam giác ABC có: $AC=2a, BM=a, AM=a$ suy ra tam giác ABM là tam giác đều cạnh a. Dựng hình bình hành $AA'H'H$ suy ra $H'\in(BMB')$, K là hình chiếu của A lên $H'H$.

$\begin{cases} BM\perp AH \\ BM\perp A'H \end{cases} \Rightarrow BM\perp(AA'H'H)\Rightarrow BM\perp AK$.

$\begin{cases} AK\perp BM \\ AK\perp HH' \end{cases} \Rightarrow AK\perp(BMB')\Rightarrow d\left(A,(BMB')\right)=AK=\frac{3a}{4}$.

Trong hình bình hành $AA'H'H$ ta có $AK.HH'=A'H.AH \Rightarrow \frac{A'H}{HH'}=\frac{AK}{AH}=\frac{3a}{4}.\frac{2}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác: $\widehat{\left(AA',(ABC)\right)}=\widehat{(AA',AH)}=\widehat{A'AH}$.

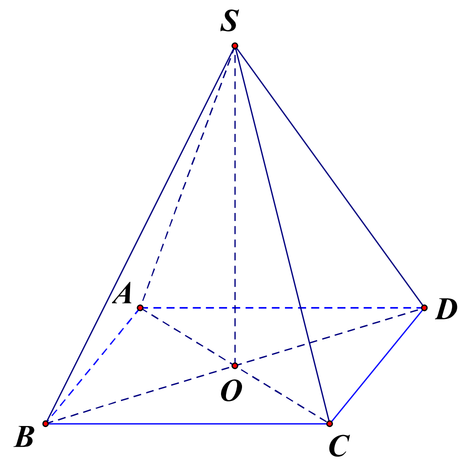
Trong tam giác vuông $AA'H$ có $\sin\widehat{AA'H}=\frac{A'H}{AA'}=\frac{A'H}{HH'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \widehat{AA'H}=60^0$.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO\perp(ABCD)$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc

A. $\widehat{ASO}$. **B.** $\widehat{SAO}$. **C.** $\widehat{SAC}$. **D.** $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AO \perp BD$.

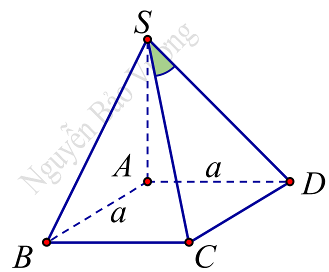
Mà $AO \perp SO$ do $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $AO \perp (SBD)$ hay O là hình chiếu của A lên (SBD).

Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{ASO}$ ($\widehat{ASO} < 90^\circ$ do ΔSAO vuông ở O).

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của **góc giữa đường thẳng** SC **và mặt phẳng** (SAB).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải



Dễ thấy $CB \perp (SAB)$ $\Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).

Vậy góc giữa **đường thẳng** SC **và mặt phẳng** (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\widehat{B} = 90^\circ; CB = a; SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan \widehat{CSB} = \dfrac{CB}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{CSB} = 30^\circ$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$ Gọi α là góc tạo bởi giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC), khi đó α thỏa mãn hệ thức nào sau đây:

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

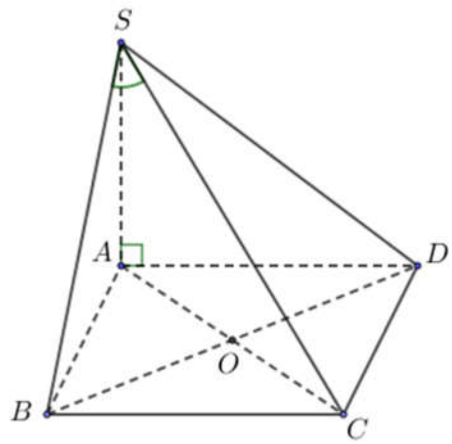
Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Suy ra $\alpha = \widehat{BSO}$.

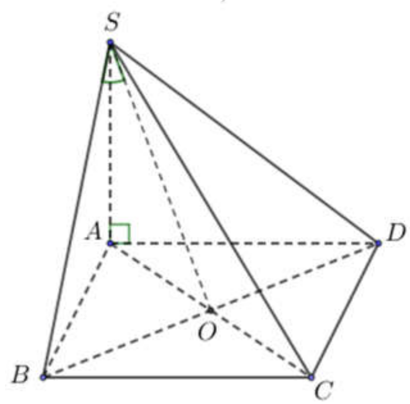
Lại có $BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=2a$. Suy ra $\sin\alpha=\frac{BO}{SB}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{6}$ (hình vẽ). Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$ ta được kết quả là:



A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải



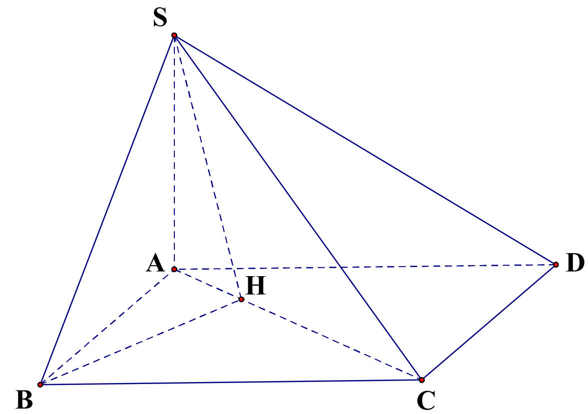
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $BO\perp(SAC)\Rightarrow\alpha=\widehat{(SB,(SAC))}=\widehat{BSO}$.

Ta có $SB=a\sqrt{7}$, $\sin\alpha=\frac{BO}{SB}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB=a$, $AD=\sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng:

A. $75°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC$ và $H \in AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

SH là hình chiếu của BH trên mặt phẳng (SAC).

Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BSH}$.

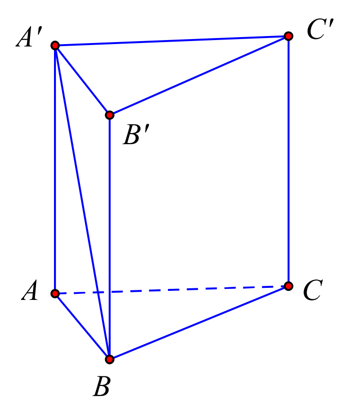
Ta có $BH = \dfrac{AB.BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SBH ta có $\sin \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSH} = 30°$.

Câu 58. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp A'B' \Rightarrow A'B' \perp BB'$ (1)

Bài ra có $AB \perp BC \Rightarrow A'B' \perp B'C'$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow A'B' \perp (BCC'B')$ $\Rightarrow \widehat{(A'B;(BCC'B'))} = \widehat{A'BB'}$

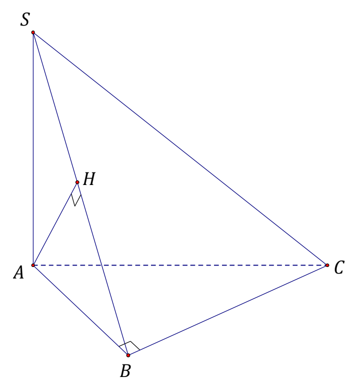
$$\Rightarrow \tan\left(A'B;\left(BCC'B'\right)\right)=\tan\widehat{A'BB'}=\frac{A'B'}{BB'}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\left(A'B;\left(BCC'B'\right)\right)=30^\circ.$$

Câu 59. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC=2a$, $BC=a$, $SB=2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B



Trong (SAB) kẻ $AH\perp SB$ $(H\in SB)$.

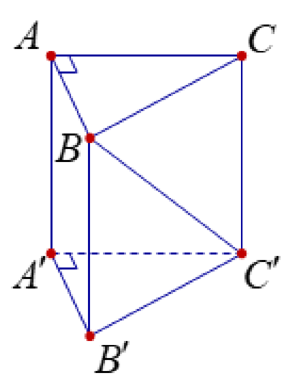
Vì $\begin{cases}SA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $SB\perp AH$ do cách dựng nên $AH\perp(SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

Tam giác ABC vuông ở B $\Rightarrow AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=a\sqrt{3}$

Tam giác SAB vuông ở A $\Rightarrow \sin\widehat{ASB}=\frac{AB}{SB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{ASB}=30^\circ$

Câu 60. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AA'=a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

ΔABC vuông cân tại $A\Rightarrow AB=AC=a$.

$\Delta ABA'$ vuông tại $A \Rightarrow A'B = a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} C'A' \perp A'B' \\ C'A' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'A' \perp \left(ABB'A'\right)$.

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$.

$\Rightarrow \left(BC';\left(ABB'A'\right)\right) = \left(BC';BA'\right)$.

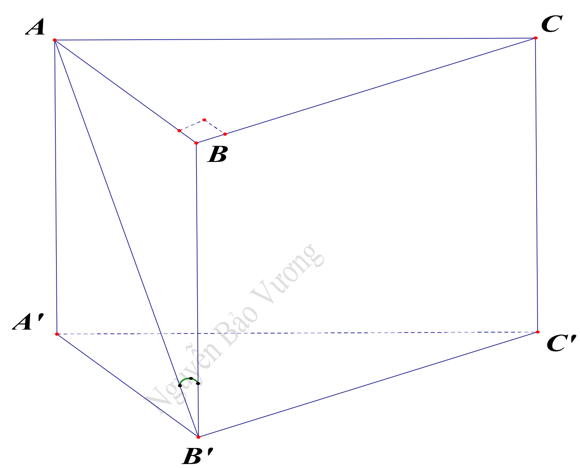
$\Delta A'BC'$ vuông tại $A' \Rightarrow \tan \widehat{A'BC'} = \dfrac{A'C'}{A'B} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 61. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2$, $BC = 1$, $AA' = 1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$, suy ra BB' là hình chiếu vuông góc của AB' trên mặt phẳng $(BCC'B')$.

Vậy góc giữa đường AB' và $(BCC'B')$ chính là góc góc $\widehat{AB'B}$.

Xét tam giác ABB' vuông tại B có $BB' = AA' = 1$, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}$

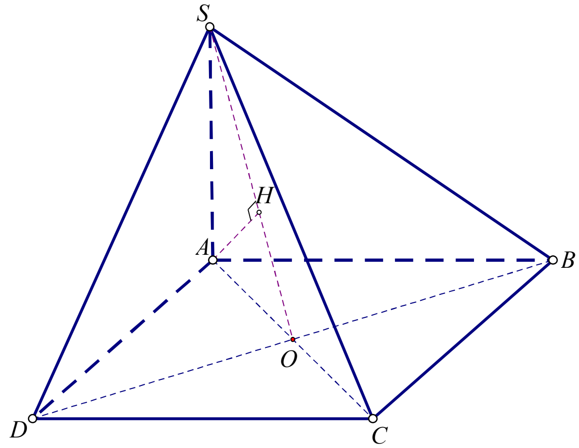
Suy ra $\tan \widehat{AB'B} = \dfrac{AB}{BB'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AB'B} = 60°$.

Câu 62.) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^0$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp \left(ABCD\right)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng $\left(SBD\right)$.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SO, ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH .$$

Từ $AH \perp SO, AH \perp BD$ suy ra $AH \perp (SBD)$, hay SH là hình chiếu vuông góc của SA lên (SBD),

Suy ra $\widehat{(SA,(SBD))} = \widehat{(SA,SO)} = \widehat{ASO}$.

Ta có ΔABC đều cạnh $2a$ nên $OA = a$.

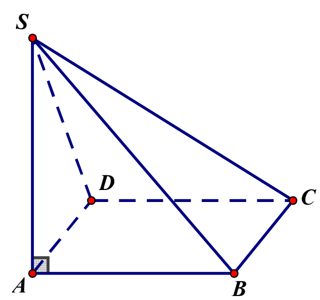
ΔSAO vuông tại A nên $\tan \widehat{ASO} = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AOS} = 30°$.

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ $\Rightarrow$ $BC \perp (SAB)$.

Hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB) là SB.

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là góc $\widehat{BSC}$.

Xét tam giác ΔSBC vuông tại B có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

$BC = AD = a\sqrt{3}$.

Suy ra tam giác ΔSBC vuông cân tại B.

Suy ra $\widehat{BSC} = 45°$.

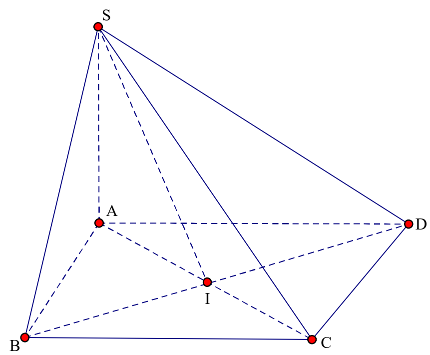
Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $45°$.

Câu 64. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

A. 30°. **B.** 75°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải.

Chọn A



Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD\perp AC$; Vì $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp BD$

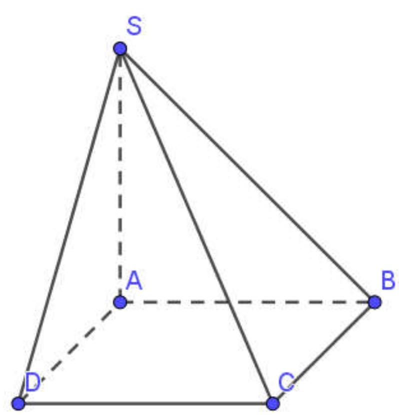
Suy ra $BD\perp(SAC)$, do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc $\widehat{BSI}$

Ta có: $SB=a\sqrt{2}$; $BI=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin\widehat{BSI}=\dfrac{BI}{SB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BSI}=30^\circ$.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA=2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

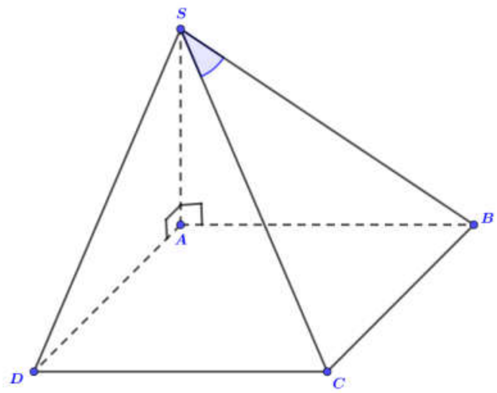
Mà $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \\ AD \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

$\cos\left(\widehat{SB,(SAD)}\right) = \cos\widehat{BSA} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa SC và (SAB).

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $(SAB) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = \widehat{CSB}$.

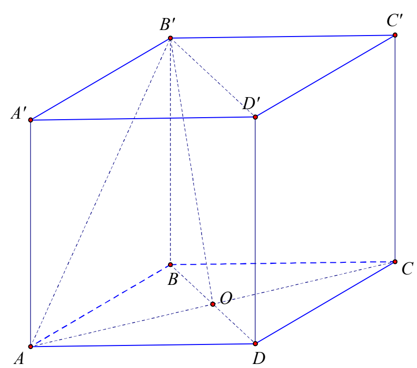
Tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B có: $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30°$.

Câu 67. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình bên). Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó ta có $AO \perp BD$ (1).

Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AO \perp (BDD'B') \Rightarrow \left(AB',(ABCD)\right) = \left(AB', B'O\right) = \widehat{AB'O}$.

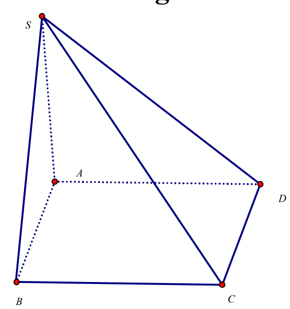
Xét tam giác vuông $AB'O$ có $\sin AB'O = \frac{AO}{AB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30°$.

Vậy $\left(AB',\left(ABCD\right)\right) = 30°$.

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2AD = 2a$ cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{15}$. Tính *tang* của góc giữa SC và mặt phẳng (SAD).

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$. Do đó góc giữa SC và mặt phẳng (SAD) là góc $\widehat{CSD}$.

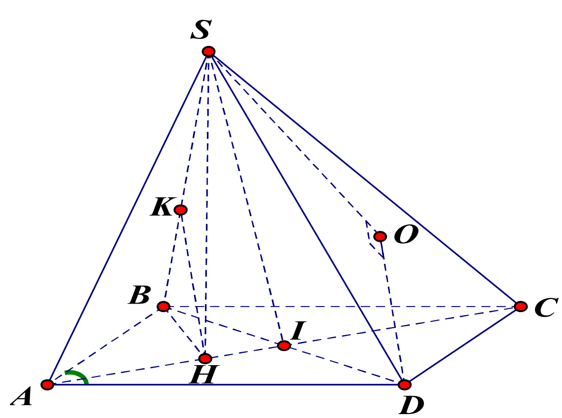
$\tan\widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{CD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{15a^2 + a^2}} = \frac{1}{2}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^o$.
$SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết, ABD là tam giác đều.
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Do $SA = SB = SD$ nên S nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD suy ra $SH \perp (ABD)$ hay $SH \perp (ABCD)$.

Do $(SBC)\perp(SBH)$ nên từ H kẻ $HK\perp SB$ tại K thì $HK=d\left(H,(SBC)\right)$ và

$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HB^2}+\frac{1}{HS^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{15}}{9}$.

Mặt khác, $d\left(H,(SBC)\right)=\frac{2}{3}d\left(A,(SBC)\right)=\frac{2}{3}d\left(D,(SBC)\right)\Rightarrow d\left(D,(SBC)\right)=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SBC). Khi đó: $\alpha=(SD,SO)=\widehat{DSO}$

và $DO=d\left(D,(SBC)\right)=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

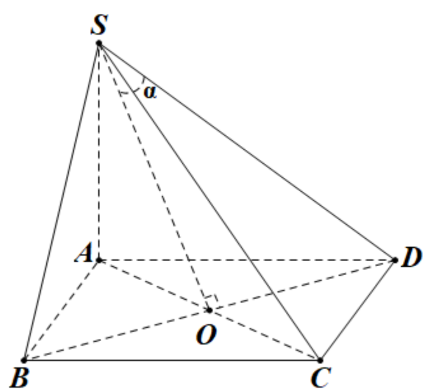
Xét tam giác SDO vuông tại O có: $\sin\alpha=\frac{DO}{SD}=\frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có: $\begin{cases}DO\perp AC\\ DO\perp SA\left(SA\perp(ABCD)\right)\end{cases}\Rightarrow DO\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(SAC)\Rightarrow\widehat{\left(SD;(SAC)\right)}=\widehat{(SD;SO)}=\widehat{DSO}=\alpha$.

Xét ΔSAD vuông tại A: $SD=\sqrt{3a^2+a^2}=2a$.

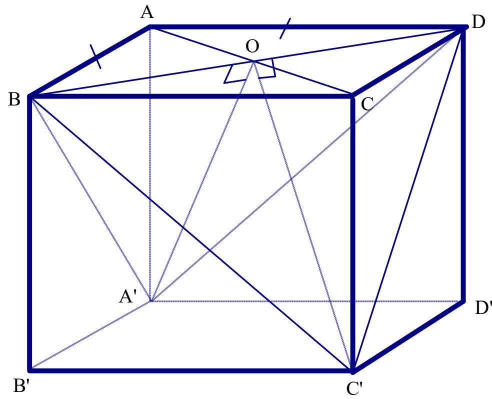
Xét ΔSOD vuông tại O: có $SD=2a$, $OD=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\sin\widehat{DSO}=\frac{DO}{SD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 71. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt $ABCD$ là hình vuông, $AA'=\frac{AB\sqrt{6}}{2}$. Xác định góc nhị diện $[A',BD,C']$

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$.

Đặt $AB = x \Rightarrow BC = x; AA' = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

$A'B = A'D = \sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \dfrac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta A'BD$ cân $\Rightarrow A'O \perp BD$.

$C'B = C'D = \sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \dfrac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta C'BD$ cân $\Rightarrow C'O \perp BD$.

+ $(A'BD) \cap (C'BD) = BD$

$A'O \perp BD, A'O \subset (A'BD)$

$C'O \perp BD, C'O \subset (C'BD)$

$\Rightarrow$ góc $[A', BD, C']$ bằng góc giữa $A'O$ và $C'O$.

+ Tính $\widehat{A'OC'}$.

$A'O = C'O = \sqrt{A'B^2 - BO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = x\sqrt{2}$.

$A'C' = x\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \Delta A'OC'$ đều $\Rightarrow \widehat{A'OC'} = 60^0$.

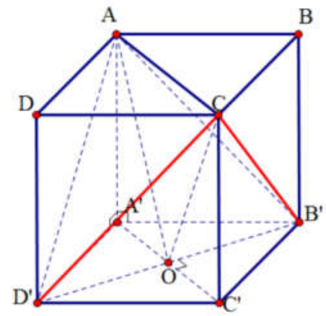
Vậy góc $[A', BD, C']$ bằng 60^0.

Câu 72. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC = 2, AA' = \sqrt{3}$. Tính góc nhị diện $[A, B'D', C]$

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = A'C' \cap B'D'$.

$(AB'D') \cap (CB'D') = B'D'$

Mà $B'D' \perp (ACC'A')$

Mặt khác: $\begin{cases} (A'C'CA) \cap (AB'D') = AO \\ (A'C'CA) \cap (CB'D') = CO \end{cases}$

suy ra góc $[A, B'D', C]$ là góc giữa AO và CO.

$CO = AO = \sqrt{AA'^2 + A'O^2} = 2 = AC \Rightarrow \Delta AOC$ là tam giác đều.

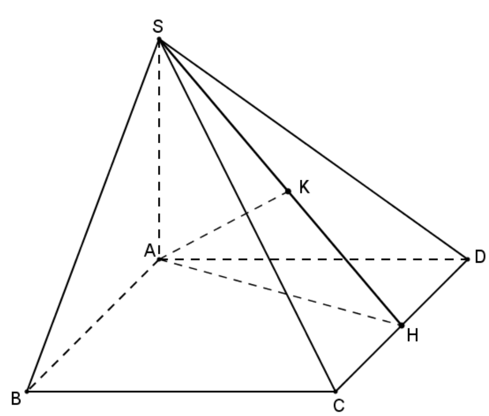
Vậy góc cần tìm bằng 60^0.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60^0$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SCD). Tính $\tan\alpha$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AH \perp CD$ tại H.

Trong mặt phẳng (SAH) kẻ $AK \perp SH$ tại K. Khi đó $AK \perp (SCD)$ nên góc giữa SA mặt phẳng (SCD) là $\widehat{ASH} = \alpha$.

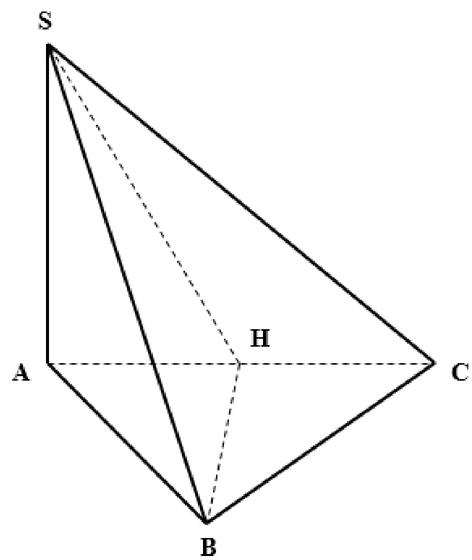
Tam giác ADC đều nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông ASH có $\tan \widehat{ASH} = \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^0$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH \perp AC$

Mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, $BH = AB.\sin 60^0 = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

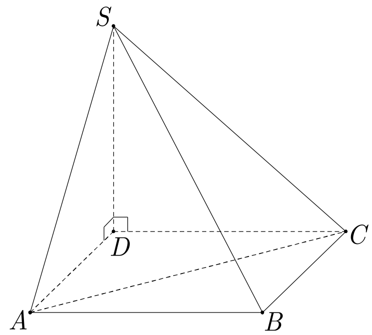
$AH = AB.\cos 60^0 = 2a.\dfrac{1}{2} = a$.

Xét tam giác SAH vuông tại S, $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có $SH = HB = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H.

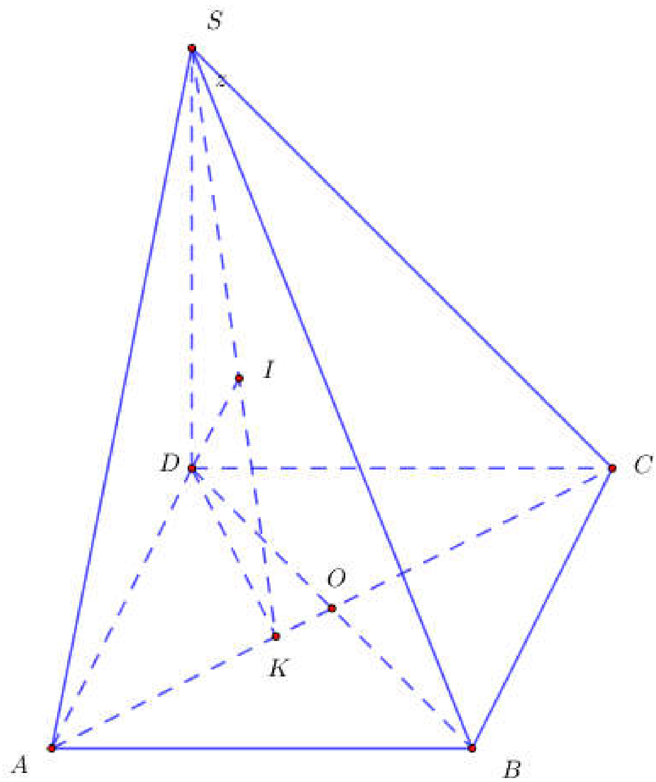
Vậy $\widehat{BSH} = 45^0$.

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ bên). Tính $\sin$ của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải



Ta có $\sin\left(\widehat{SB;(SAC)}\right)=\frac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB}=\frac{d\left(D;SAC\right)}{SB}$.

Xét tam giác ABC ta có $AC=\sqrt{BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos\widehat{BAC}}=a\sqrt{7}$.

$BO=\sqrt{\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{\frac{4a^2+a^2}{2}-\frac{7a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BD=a\sqrt{3}$ và $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{3a^2+3a^2}=a\sqrt{6}$.

Xét tam giác ADC ta có $\frac{AD}{\sin\widehat{C}}=\frac{AC}{\sin\widehat{D}}\Rightarrow\sin\widehat{C}=\frac{AD.\sin\widehat{D}}{AC}=\frac{a.\sin120^\circ}{a\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

Gọi K là hình chiếu của D lên AC, và I là hình chiếu của D lên SK. Ta có $\begin{cases}AC\perp DK\\AC\perp SD\end{cases}\Rightarrow AC\perp DI$. Do đó $\begin{cases}DI\perp SK\\DI\perp AC\end{cases}\Rightarrow d\left(D;(SAC)\right)=DI$.

Mặt khác $\sin\widehat{C}=\dfrac{DK}{DC}\Rightarrow DK=DC.\sin\widehat{C}=2a.\dfrac{\sqrt{21}}{14}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác SDK ta có $DI=\dfrac{SD.DK}{\sqrt{SD^2+DK^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2+\dfrac{21}{49}a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

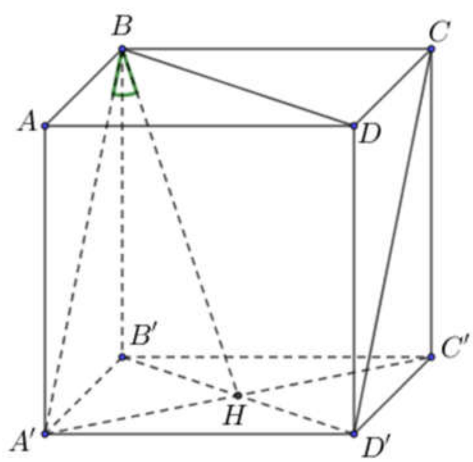
Vậy $\sin\left(\widehat{SB;(SAC)}\right)=\dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB}=\dfrac{DI}{SB}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}$.

Trong mặt phẳng (SDK) kẻ $DI\perp SK$ suy ra $d\left(D;(SAC)\right)=DI$.

Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải



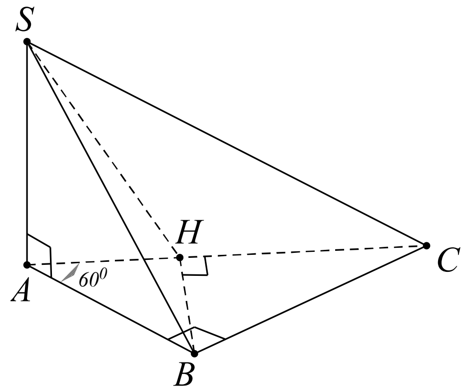
Gọi H là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có $A'H\perp B'D'$, $A'H\perp BB'\Rightarrow A'H\perp(BB'D'D)$. BH là hình chiếu của $A'B$ trên $(BB'D'D)\Rightarrow\left(\widehat{A'H,(BB'D'D)}\right)=\widehat{A'BH}=\alpha$. $\sin\alpha=\dfrac{A'H}{A'B}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $AB=2a$, $\widehat{BAC}=60^0$ và $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC\,(H \in AC)$ và theo giả thiết $BH \perp SA$ nên $BH \perp (SAC)$

Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAC)

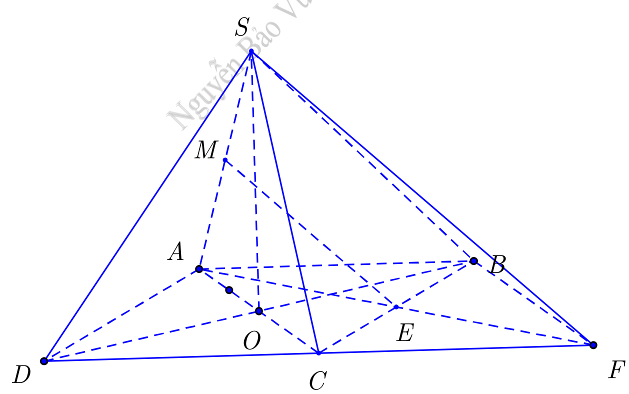
Suy ra, $\widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{(SB,SH)} = \widehat{BSH}$.

Mà ta có: $SB = a\sqrt{6}$, $HB = AB\sin 60^0 = a\sqrt{3}$ $\Rightarrow \sin(\widehat{BSH}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BSH} = 45^0$.

Câu 78. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA, α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD). Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải



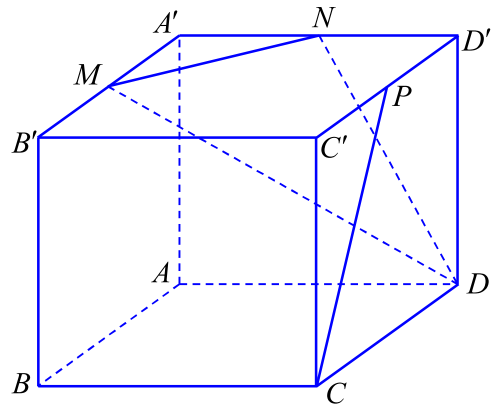
Dựng hình bình hành $ABFC$.

Ta có $EM \,//\, SF$ nên góc giữa EM và (SBD) bằng góc giữa SF và (SBD).

$FB \,//\, AC \Rightarrow FB \perp (SBD)$ do đó góc giữa SF và (SBD) bằng góc $\widehat{FSB}$.

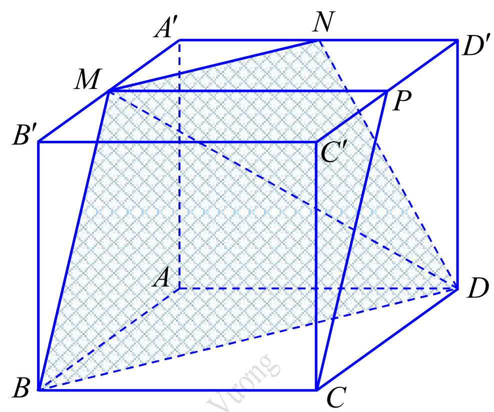
Ta có $\tan\widehat{FSB} = \dfrac{BF}{SB} = \dfrac{AC}{SB} = \sqrt{2}$. Vậy chọn **D.**

Câu 79. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$. Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng?



A. $0°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} MN // B'D' \\ BD // B'D' \end{cases} \Rightarrow MN // BD \Rightarrow$ bốn điểm M, N, B, D đồng phẳng.

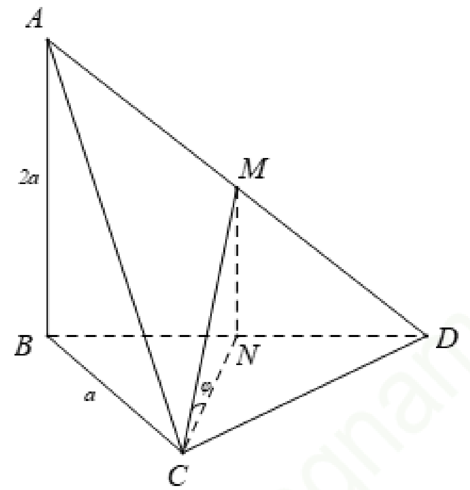
Lại có tứ giác $BCPM$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} CP // BM \\ BM \subset (DMN) \end{cases} \Rightarrow CP // (DMN)$

$\Rightarrow \left(\widehat{CP,(DMN)}\right) = 0°$.

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a, AB vuông góc với $mp(BCD)$, $AB = 2a$. M là trung điểm đoạn AD,gọi φ là góc giữa CM với $mp(BCD)$,khi đó:

A. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. ***D.*** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



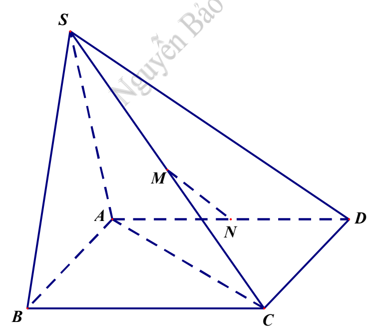
Gọi N là trung điểm BC. Ta có góc giữa CM với $mp(BCD)$ bằng góc MCN.

$+\ MN = \dfrac{AB}{2} = a$.

$+CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\tan\varphi = \dfrac{MN}{CN} = a.\dfrac{2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

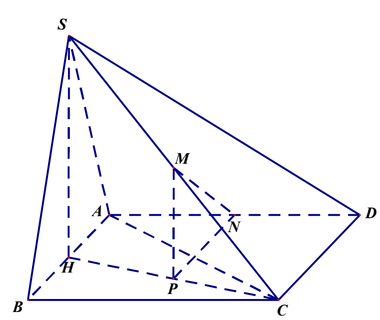
Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và AD (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa MN và mặt đáy $(ABCD)$ bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải



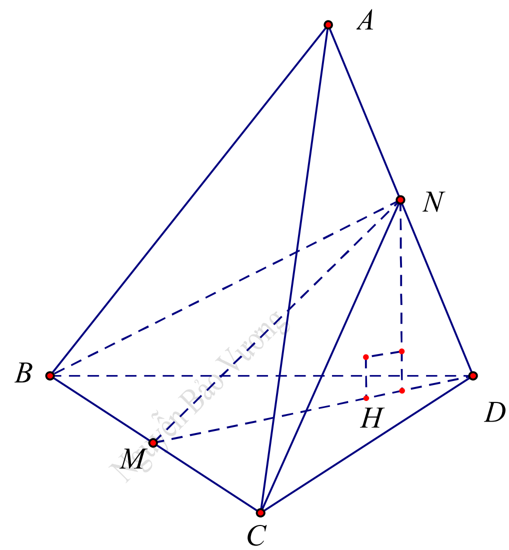
Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi P là trung điểm CH $\Rightarrow MP//SH \Rightarrow MP \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa MN với mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{MNP}$ (do $\widehat{MPN} = 90°$)

Có $MP = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $PN = \frac{AH + CD}{2} = \frac{\frac{a}{2} + a}{2} = \frac{3a}{4}$

$\Rightarrow \tan\widehat{MNP} = \frac{MP}{PN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{MNP} = 30°$.

Câu 82. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD (tham khảo hình vẽ). Gọi φ là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD). Tính $\tan\varphi$.



A. $\tan\varphi = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\varphi = \sqrt{3}$. **D.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Trong ΔAMD, kẻ $NH \perp MD$, suy ra $NH \perp (BCD)$.

Nên MD là hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng BCD.

Khi đó $\left(\widehat{MN,(BCD)}\right) = \left(\widehat{MN,MD}\right) = \widehat{NMD}$.

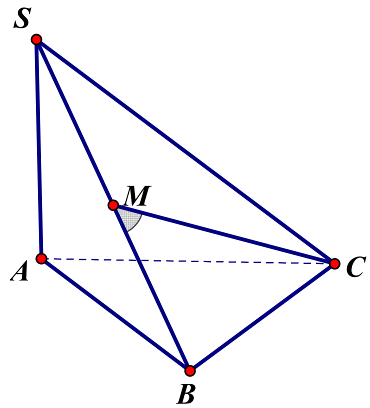
Ta có ΔNMD vuông tại N do đó $\tan\varphi = \frac{ND}{MN} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = 2a\sqrt{3}, AB = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) bằng:

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn C



Có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Có BM là hình chiếu của CM lên mặt phẳng (SAB). Suy ra $(CM;(SAB)) = \widehat{CMB}$

Ta có $\tan \widehat{CMB} = \dfrac{BC}{MB} = \dfrac{2AB}{SB} = \dfrac{2AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2.2a}{\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2}} = 1$

$\Rightarrow \widehat{CMB} = 45°$

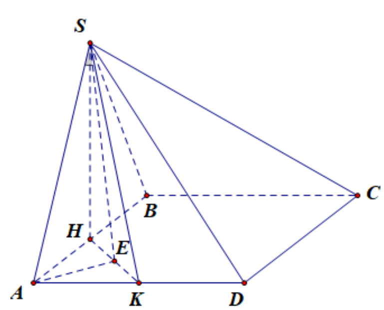
Vậy $(CM;(SAB)) = 45°$

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Tính sin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của đoạn KH, ta có ΔAHK vuông cân tại A vì $AH = AK = \dfrac{1}{2}a$ nên $AE \perp KH$ do đó

$\begin{cases} AE \perp SH \\ AE \perp HK \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHK)$, suy ra

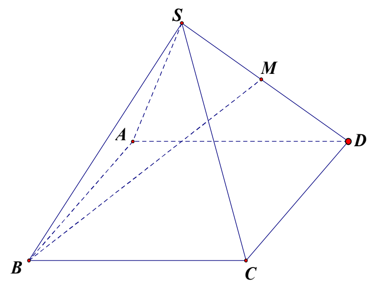
$\widehat{(SA,(SHK))} = \widehat{(SA,SE)} = \widehat{ASE} = \alpha$.

Mà $AE = \frac{1}{2}KH = \frac{1}{2}\sqrt{AH^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

ΔSEA vuông tại E có $\sin\alpha = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

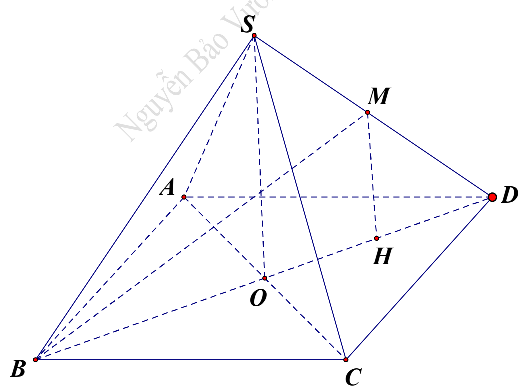
Câu 85. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH // SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ và $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Khi đó ta có $\tan\widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$.

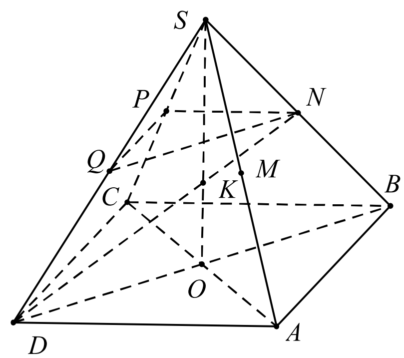
Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 86. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA=\sqrt{5}a$, $AB=a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính cosin của góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD nên mặt phẳng $(ABCD)$ song song mặt phẳng (MPQ) suy ra góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP) cũng là góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(ABCD)$.

Có $K=SO\cap DN$. Do $S.ABCD$ hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$ suy ra hình chiếu vuông góc của đường thẳng DN trên mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng DO nên

$\widehat{(DN,(ABCD))}=\widehat{(DN,DO)}$.

Xét tam giác vuông SOA có $OA=\frac{\sqrt{2}}{2}a; SA=\sqrt{5}a \Rightarrow SO=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Mà K là trọng tâm tam giác $SBD \Rightarrow OK=\frac{1}{3}SO=\frac{\sqrt{2}a}{2}=OD \Rightarrow \Delta OKD$ vuông cân tại O hay $\widehat{KDO}=45^0$.

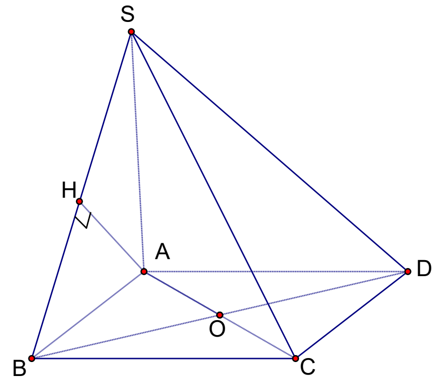
Hay $\left(\widehat{DN,(MPQ)}\right)=45^0 \Rightarrow \cos\left(\widehat{DN,(MPQ)}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Đặt α là góc giữa đường thẳng BD và (SBC). Giá trị của $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\sin\alpha = \dfrac{d\left(D,(SBC)\right)}{BD} = \dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{BD}$.

$\begin{cases}(SAB)\perp(SBC)\\(SAB)\cap(SBC)=SB\end{cases}$. Kẻ $AH\perp SB$ thì $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH=d\left(A,(SBC)\right)$.

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AS^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{2}{a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $BD=\sqrt{BA^2+AD^2}=2a$.

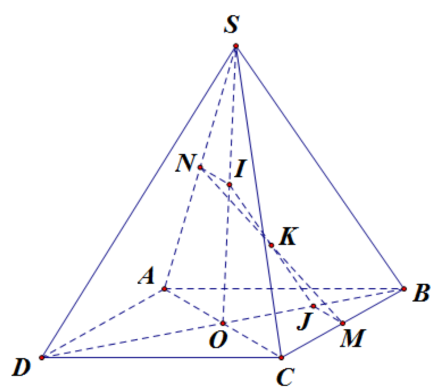
Vậy $\sin\alpha=\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{BD}=\dfrac{AH}{BD}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2.2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 88. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SA và α là góc tạo bởi đường thẳng MN với (SBD). Tính $\tan\alpha$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O=AC\cap BD$, I, J lần lượt là trung điểm của OS, OB.

Ta có $\left.\begin{array}{l}OA\perp(SBD)\\NI//AC//MJ\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}NI\perp(SBD)\\MJ\perp(SBD)\end{cases}$.

Suy ra $\left(MN,(SBD)\right)=(MN,IJ)$

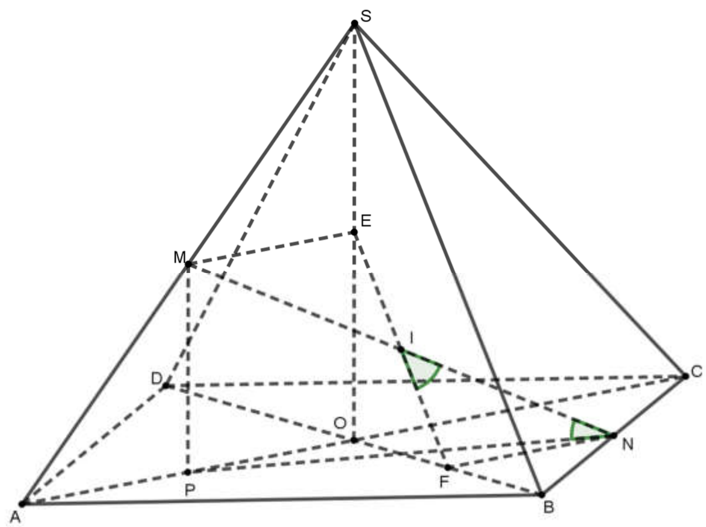
Có: $\left.\begin{array}{l}NI//AC//MJ\\NI=\dfrac{1}{4}AC=MJ\end{array}\right\}\Rightarrow MJNI$ là hình bình hành. Gọi $K=MN\cap IJ$ suy ra K là trung điểm của IJ và MN đồng thời $NI\perp IK$

Ta có $\tan\alpha = \tan\widehat{NKI} = \frac{NI}{IK} = \frac{OA}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$ trong đó a là cạnh của hình vuông $ABCD$.

Câu 89. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60^0, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD).

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP.CN.\cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra: $NP = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $MP = NP.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}$; $SO = 2MP = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}$.

Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành (vì ME và NF song song và cùng bằng $\frac{1}{2}OA$).

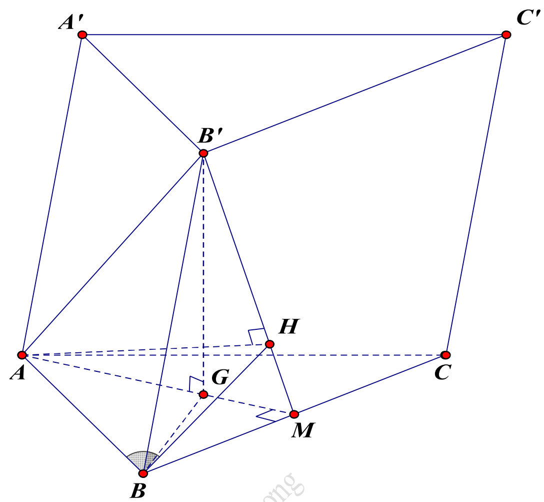
Gọi I là giao điểm của MN và EF, khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

$\cos\widehat{NIF}=\dfrac{IK}{IN}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{4}{a\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 90. **Cho lăng trụ** $ABC.A'B'C'$ **có đáy là tam giác đều cạnh** a**. Hình chiếu vuông góc của** B' **lên mặt phẳng** (ABC) **trùng với trọng tâm** G **của tam giác** ABC**. Cạnh bên hợp với** (ABC) **góc** $60°$**. Sin của góc giữa** AB **và mặt phẳng** $(BCC'B')$**.**

A. $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$. **B.** $\dfrac{3}{2\sqrt{13}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Lời giải



Ta có $B'G\perp(ABC)$ **nên** BG **là hình chiếu của** BB' **lên mặt phẳng** (ABC)**.**

$\Rightarrow(BB',(ABC))=(BB',BG)=\widehat{B'BG}=60°$.

Gọi M **là trung điểm** BC **và** H **là hình chiếu của** A **lên** $B'M$**, ta có**

$\begin{cases}BC\perp AM\\ BC\perp B'G\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AB'M)\Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $AH\perp B'M$ **nên** $AH\perp(BCC'B')$**.**

Do đó HB **là hình chiếu của** AB **lên mặt phẳng** $(BCC'B')$**.**

$\Rightarrow(AB,(BCC'B'))=(AB,HB)=\widehat{ABH}$.

Xét tam giác ABH **vuông tại** H **có** $\sin\widehat{ABH}=\dfrac{AH}{AB}$.

$B'G=BG.\tan 60°=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{3}.\sqrt{3}=a$.

$B'M=\sqrt{B'G^2+GM^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

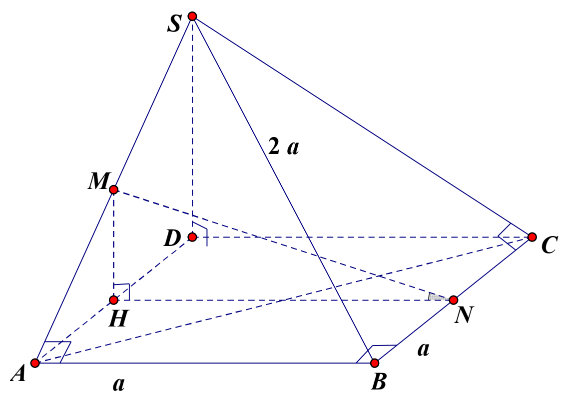
Ta có $\Delta AHM\sim\Delta B'GM\Rightarrow AH=\dfrac{AM.B'G}{B'M}=\dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{39}}{6}}=\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Vậy $\sin\widehat{ABH}=\dfrac{\dfrac{3a}{\sqrt{13}}}{a}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$, $SA\perp AB$, $SC\perp BC$, $SB=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Gọi α là góc giữa MN với (ABC). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải



Gọi D là hình chiếu của S lên (ABC), ta có:

$\begin{cases}BC\perp SC\\BC\perp SD\end{cases}\Rightarrow BC\perp CD$ và $\begin{cases}AB\perp SA\\AB\perp SD\end{cases}\Rightarrow AB\perp AD$.

Mà ABC là tam giác vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

Gọi H là trung điểm của AD, ta có $MH\,//\,SD$ mà $\Rightarrow MH\perp(ABCD)$.

Do đó HN là hình chiếu của MN lên (ABC).

$\Rightarrow\alpha=(MN,(ABC))=(MN,NH)=\widehat{MNH}$.

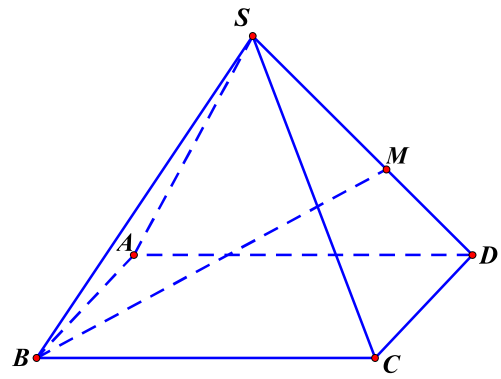
$SC=\sqrt{SB^2-BC^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

$SD=\sqrt{SC^2-DC^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$.

$\tan\alpha=\dfrac{MH}{NH}=\dfrac{\dfrac{1}{2}.SD}{AB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

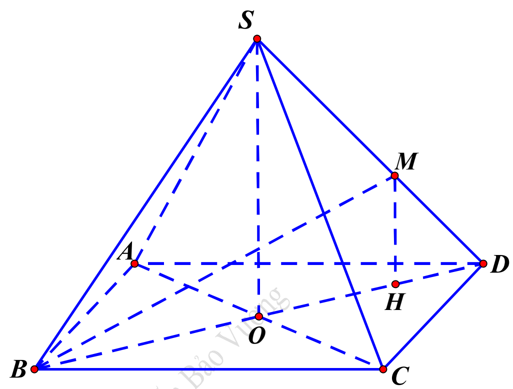
Câu 92. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM=2MD$.



Tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải



Ta có $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SOD vuông tại O có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $MH \perp BD$ tại H nên $(BM;(ABCD)) = \widehat{MBH}$

Do $MH \perp BD \Rightarrow MH // SO$. Ta có $\frac{MH}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{HD}{OD} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow MH = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ và $HD = \frac{1}{3}OD = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow BH = BD - HD = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$.

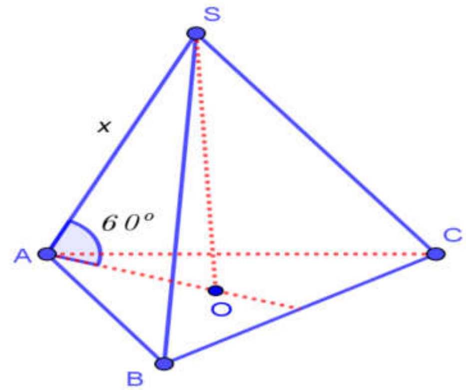
Xét tam giác BHM vuông tại H có:

$\tan(BM;(ABCD)) = \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} \Rightarrow \tan(BM;(ABCD)) = \frac{1}{5}$.

Câu 93. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải



Đặt $SA = x$.

Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

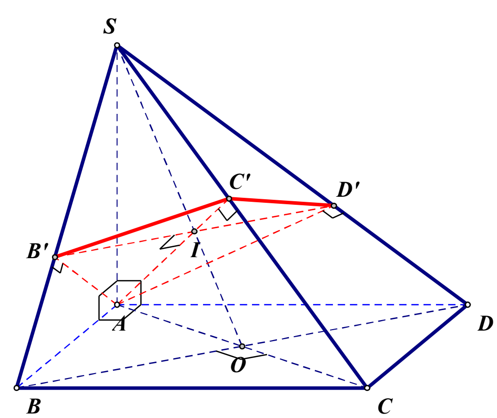
Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (BCD) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $\angle SAO = 60°$.

Xét tam giác vuông SAO: $\cos 60° = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{AO}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45^0. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Dễ thấy $\widehat{SBA} = 45°$. Ta có $B'D' \perp SC$ và $BD \perp SC$ và SC không vuông góc với mặt phẳng (SBD), suy ra $BD // B'D'$. Nên từ $I = SO \cap AC'$ nên từ I kẻ $B'D' // BD$ cắt SB, SD lần lượt tại B', D'.

Từ trên suy ra $B'D' \perp AC'$ và $\begin{cases} AB' \perp SC \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB$.

Suy ra $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} AC'.B'D'$. Mà $AC' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2.a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B'D' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} AC'.B'D' = \dfrac{\sqrt{3}}{6} a^2$.