

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT

• CHƯƠNG 6. LOGARIT

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Giải phương trình mũ và logarit

Câu 1. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các phương trình sau:

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9}$

b) $2 \cdot 10^{2x} = 30$;

c) $4^{2x} = 8^{2x-1}$.

Lời giải

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x+2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{3}$

b) $2 \cdot 10^{2x} = 30 \Leftrightarrow 10^{2x} = 15 \Leftrightarrow 2x = \log 15 \Leftrightarrow x = \frac{\log 15}{2}$

c) $4^{2x} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow (2^2)^{2x} = (2^3)^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow 4x = 6x-3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Câu 2. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2$;

b) $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$.

Lời giải

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2$

$$\Leftrightarrow x-2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

b) $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+6) = \log_2(x+1) + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+6) = \log_2[2(x+1)]$$

$$\Leftrightarrow x+6 = 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Câu 3. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các phương trình sau:

a) $5^{2x-1} = 25$;

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1}$;

c) $10^{1-2x} = 100000$.

Lời giải

a) $5^{2x-1} = 25 \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 5^2 \Leftrightarrow 2x-1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} = (3^2)^{2x+1}$

$$\Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{4x+2} \Leftrightarrow x+1 = 4x+2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$$

c) $10^{1-2x} = 100000 \Leftrightarrow 10^{1-2x} = 10^5 \Leftrightarrow 1-2x = 5 \Leftrightarrow x = -2$

Câu 4. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các phương trình sau. Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

a) $3^{x+2} = 7$

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5$.

Lời giải

a) $3^{x+2} = 7 \Leftrightarrow x+2 = \log_3 7 \Leftrightarrow x = \log_3 7 - 2 \Leftrightarrow x = -0,229$

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 10^{2x+1} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \log \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x = \left(\log \frac{5}{3} - 1 \right) : 2 \Leftrightarrow x = -0,389$

Câu 5. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các phương trình sau:

a) $\log_6(4x+4) = 2$;

b) $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1$.

Lời giải

a) $\log_6(4x+4) = 2 \Leftrightarrow 4x+4 = 6^2 \Leftrightarrow x = 8$

b) $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{x-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = 3 \Leftrightarrow x = 3(x-2) \Leftrightarrow x = 3$

Câu 6. Giải mỗi phương trình sau:

a) $(0,3)^{x-3} = 1$;

b) $9^{x-2} = 243^{x+1}$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$

d) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$.

Lời giải

a) $(0,3)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) $9^{x-2} = 243^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2(x-2)} = 3^{5(x+1)} \Leftrightarrow 2(x-2) = 5(x+1) \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3 \Leftrightarrow x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7$.

d) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 2x+1 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

Câu 7. Giải mỗi phương trình sau:

a) $3^{x-1} = 5$;

b) $3^{x^2-4x+5} = 9$;

c) $2^{2x+3} = 8\sqrt{2}$;

d) $8^{x-2} = 4^{1-2x}$;

e) $2^{x^2-3x-2} = 0,25 \cdot 16^{x-3}$;

g) $2^{x^2-4x+4} = 3$.

Lời giải

a) $x = 1 + \log_3 5$.

b) $x = 1$ hoặc $x = 3$.

- d) $x = \frac{8}{7}$.
 e) $x = 3$ hoặc $x = 4$.
 c) $x = \frac{1}{4}$.
 g) $x = 2 \pm \sqrt{\log_2 3}$.

Câu 8. Giải mỗi phương trình sau:

- a) $\log_4(x-4) = -2$;
 b) $\log_3(x^2 + 2x) = 1$;
 c) $\log_{25}(x^2 - 4) = \frac{1}{2}$
 d) $\log_9[(2x-1)^2] = 2$;
 e) $\log(x^2 - 2x) = \log(2x - 3)$;
 g) $\log_2(x) + \log_1(2x+8) = 0$.

Lời giải

- a) $x = \frac{65}{16}$
 b) $x = -3$ hoặc $x = 1$.
 c) $x = -3$ hoặc $x = 3$.
 d) $x = -4$ hoặc $x = 5$.
 e) $x = 3$.
 g) $x = -2$ hoặc $x = 4$.

Câu 9. Giải các phương trình sau:

- a) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 3$;
 b) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$.

Lời giải

a) Ta có: $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{4^x}{2} + 4 \cdot 4^x = 3 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 4^x = 3 \Leftrightarrow 4^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{2}{3}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \log_4 \frac{2}{3}$.

b) Điều kiện: $x+6 > 0$ và $x+2 > 0$, tức là $x > -2$. Ta có:

$$\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_5[(x+6)(x+2)] = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này ta được hai nghiệm $x = -1, x = -7$. Chỉ có nghiệm $x = -1$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -1$.

Câu 10. Giải các phương trình mũ sau:

- a) $4^{2x-1} = 8^{x+3}$;
 b) $9^{2x} \cdot 27^{x^2} = \frac{1}{3}$;
 c) $(e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12}$;
 d) $5^{2x-1} = 20$.

Lời giải

a) $4^{2x-1} = 8^{x+3} \Leftrightarrow 2^{4x-2} = 2^{3x+9} \Leftrightarrow 4x-2 = 3x+9 \Leftrightarrow x = 11$.

$$b) 9^{2x} \cdot 27^{x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{4x} \cdot 3^{3x^2} = 3^{-1} \Leftrightarrow 3^{3x^2+4x+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$c) (e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12} \Leftrightarrow e^{4x} \cdot e^{x^2} = e^{12} \Leftrightarrow e^{x^2+4x-12} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$d) 5^{2x-1} = 20 \Leftrightarrow 2x-1 = \log_5 20 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \log_5 20).$$

Câu 11. Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3(4x-1) = 2$;

b) $\log_2(x^2-1) = \log_2(3x+3)$;

c) $\log_x 81 = 2$;

d) $\log_2 8^x = -3$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > \frac{1}{4}$.

Khi đó: $\log_3(4x-1) = 2 \Leftrightarrow 4x-1 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

b) Điều kiện: $x > 1$. Khi đó: $\log_2(x^2-1) = \log_2(3x+3) \Leftrightarrow x^2-1 = 3x+3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \end{cases}$$

c) Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Ta có: $\log_x 81 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \text{ (loại)} \\ x = 9 \end{cases}$

d) $\log_2 8^x = -3 \Leftrightarrow 8^x = 2^{-3} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 12. Giải các phương trình sau:

a) $5^{x+2} = \sqrt[3]{25}$

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 32^{x+3}$

Lời giải

a) Ta có: $5^{x+2} = \sqrt[3]{25} \Leftrightarrow 5^{x+2} = 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x+2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{4}{3}$.

b) Ta có: $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 32^{x+3} \Leftrightarrow (2^{-3})^{2x-1} = (2^5)^{x+3} \Leftrightarrow 2^{-6x+3} = 2^{5x+15}$

$$\Leftrightarrow -6x+3 = 5x+15 \Leftrightarrow 11x = -12 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{11}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{12}{11}$.

Câu 13. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{16}(3x-5) = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 x + \log_3(x+1) = \log_3(5x+12)$.

Lời giải

a) Ta có: $\log_{16}(3x-5) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-5 = 16^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3x-5 = 4 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3.$

b) Điều kiện: $x > 0.$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3[x(x+1)] = \log_3(5x+12) \Leftrightarrow x^2 + x = 5x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ (loại) hoặc } x = 6 \text{ (nhận).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6.$

Câu 14. Giải các phương trình sau:

a) $3^{2x+1} = \frac{1}{27};$

b) $5^{2x} = 10;$

c) $3^x = 18;$

d) $0,2^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{125}};$

e) $5^{3x} = 25^{x-2};$

g) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-1}.$

Lời giải

a) Đưa về phương trình $3^{2x+1} = 3^{-3}.$ Đáp số: $x = -2.$

b) $x = \frac{1}{2} \log_5 10.$

c) $x = \log_3 18.$

d) Đưa về phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.$ Đáp số: $x = \frac{5}{2}.$

e) Đưa về phương trình $5^{3x} = 5^{2x-4}.$ Đáp số: $x = -4.$

g) Đưa về phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-5}.$ Đáp số: $x = 4.$

Câu 15. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3(2x-1) = 3;$

b) $\log_{49} x = 0,25;$

c) $\log_2(3x+1) = \log_2(2x-4);$

d) $\log_5(x-1) + \log_5(x-3) = \log_5(2x+10);$

e) $\log x + \log(x-3) = 1;$

g) $\log_2(\log_{81} x) = -2.$

Lời giải

a) $x = 14;$

b) $x = \sqrt{7};$

c) Vô nghiệm;

d) $x = 7;$

e) $x = 5;$

g) $x = 3.$

Câu 16. Giải các phương trình sau:

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 27 = 0.$

Lời giải

a) Đặt $t = 2^x (t > 0)$, nhận được phương trình $t^2 - 5t + 4 = 0.$

Đáp số: $x = 0$ hoặc $x = 2.$

b) Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x (t > 0)$, nhận được phương trình $t^2 - 6t - 27 = 0$

$\Leftrightarrow t = 9$ (nhận) hoặc $t = -3$ (loại)

Đáp số: $x = -2.$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 x$. Biết rằng $f(b) - f(a) = 5 (a, b > 0)$, tìm giá trị của $\frac{b}{a}.$

Lời giải

$$\frac{b}{a} = 32.$$

Câu 18. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $125^a \cdot 25^b = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3a + 2b.$

Lời giải

$$P = 3a + 2b = \log_5 3.$$

Câu 19. Tính số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2^{x^2-2x} = m^2 - m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$.

Lời giải

Xét $u(x) = x^2 - 2x$ trên $[0; 2]$, có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$

$$\text{Suy ra } -1 \leq u(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2^{x^2-2x} \leq 1.$$

$$\text{Do đó, phương trình đã cho có nghiệm } \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m^2 - m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \rightarrow$ có 2 giá trị nguyên m cần tìm.

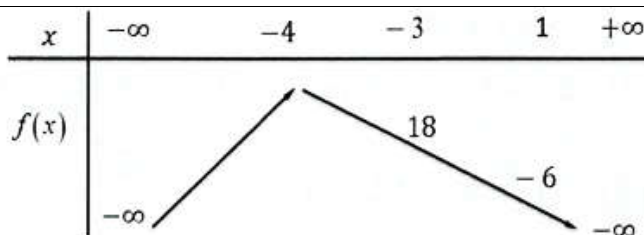
Câu 20. Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(m+6x) + \log_2(3-2x-x^2) = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}}(m+6x) + \log_2(3-2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(3-2x-x^2) = \log_2(m+6x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 > 0 \\ 3-2x-x^2 = m+6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 1 \\ m = -x^2 - 8x + 3 \rightarrow f(x) = -x^2 - 8x + 3 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - 8x + 3$ trên $(-3; 1)$, có bảng biến thiên



Dựa vào BBT, để $m = f(x)$ có nghiệm thuộc $(-3;1)$

$\Leftrightarrow f(-3) < m < f(1) \Leftrightarrow -6 < m < 18$. Kết hợp với m nguyên dương \rightarrow có 17 giá trị cần tìm.

Dạng 2. Giải bất phương trình mũ, logarit

Câu 21. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các bất phương trình sau:

a) $2^x > 16$;

b) $0,1^x \leq 0,001$;

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x$

Lời giải

a) $2^x > 16 \Leftrightarrow 2^x > 2^4 \Leftrightarrow x > 4$ (do $2 > 1$)

b) $0,1^x \leq 0,001 \Leftrightarrow 0,1^x \leq 0,1^3 \Leftrightarrow x \geq 3$ (do $0,1 < 1$)

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{25}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} > \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \Leftrightarrow x-2 < 2x \Leftrightarrow x > -2$ (do $\frac{1}{5} < 1$)

Câu 22. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$;

b) $\log_5(x+2) \leq 1$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Khi đó, do $\frac{1}{3} < 1$ nên $x+1 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x > \frac{-8}{9}$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-8}{9}$

b) Điều kiện xác định: $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Khi đó, do $5 > 1$ nên $x+2 \leq 5^1 \Leftrightarrow x \leq 3$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là $-2 < x \leq 3$

Câu 23. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9$

b) $4^x > 2^{x-2}$.

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2x+1 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2}$ (do $\frac{1}{3} < 1$)

b) $4^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow (2^2)^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x-2 \Leftrightarrow x > -2$ (do $2 > 1$)

Câu 24. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Giải các bất phương trình sau:

- a) $\log_2(x-2) < 2$;
b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1)$.

Lời giải

- a) $\log_2(x-2) < 2 \Leftrightarrow x-2 < 2^2 \Leftrightarrow x < 6$
b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1) \Leftrightarrow x+1 \geq 2x-1 \Leftrightarrow x \leq 2$

Câu 25. Giải mỗi bất phương trình sau:

- a) $3^x > \frac{1}{243}$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2}$
c) $4^{x+3} \geq 32^x$;
d) $\log(x-1) < 0$;
e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3)$;
g) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8)$.

Lời giải

- a) $3^x > \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-5} \Leftrightarrow x > -5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-5; +\infty)$.

- b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow 3x-7 \geq -1 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2; +\infty)$.

- c) $4^{x+3} \geq 32^x \Leftrightarrow 2^{2(x+3)} \geq 2^{5x} \Leftrightarrow 2(x+3) \geq 5x \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 2]$.

- d) $\log(x-1) < 0 \Leftrightarrow \log(x-1) < \log 1 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1; 2)$.

- e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq x+3 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{2}; 4\right]$.

- g) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 2x-8 \\ 2x-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 11$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(4; 11]$.

Câu 26. Giải mỗi bất phương trình sau:

- a) $(0, 2)^{2x+1} > 1$;
b) $27^{2x} \leq \frac{1}{9}$;
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} \geq 4$
d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} < 125^{2x}$;

e) $(\sqrt{2}-1)^{3x-2} < (\sqrt{2}+1)^{4-x}$

g) $(0,5)^{2x^2-x} > (\sqrt{2})^{4x-12}$.

Lời giải

a) $x < -\frac{1}{2}$.

b) $x \leq -\frac{1}{3}$

c) $2 \leq x \leq 3$.

d) $x > -\frac{1}{4}$.

e) $x > -1$.

g) $-2 < x < \frac{3}{2}$

Câu 27. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6) < -3$;

b) $\log_3(x^2-2x+2) > 0$;

c) $\log_4(2x^2+3x) \geq \frac{1}{2}$

d) $\log_{0,5}(x-1) \geq \log_{0,5}(5-2x)$;

e) $\log(x^2+1) \leq \log(x+3)$;

g) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+8) + \log_5(x-4) > 0$.

Lời giải

a) $x > 7$.

b) $x \neq 1$.

c) $x \leq -2$ hoặc $x \geq \frac{1}{2}$.

d) $1 < x \leq 2$.

e) $-1 \leq x \leq 2$.

g) Vô nghiệm.

Câu 28. Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{x^2-x} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

b) $\log_{0,5}(x-3) + \log_{0,5}(x-2) \geq -1$.

Lời giải

a) $3^{x^2-x} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Bất phương trình đã cho có thể viết ở dạng: $3^{x^2-x} \leq 3^{2-x}$.Vì cơ số $3 > 1$ nên bất phương trình trở thành $x^2 - x \leq 2 - x$, hay $x^2 \leq 2$.Giải bất phương trình này, ta được $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

b) $\log_{0,5}(x-3) + \log_{0,5}(x-2) \geq -1$.

Điều kiện: $x > 3$.

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{0,5}[(x-3)(x-2)] \geq \log_{0,5} 2$$

Vì cơ số $0,5 < 1$ nên bất phương trình trở thành $(x-3)(x-2) \leq 2$, hay $x^2 - 5x + 4 \leq 0$.

Giải bất phương trình bậc hai này, ta được $1 \leq x \leq 4$. Kết hợp với điều kiện, ta được $3 < x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(3; 4]$.

Câu 29. Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $2^{2x-3} > \frac{1}{4}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-6}$;

c) $25^x \leq 5^{4x-3}$;

d) $9^x - 3^x - 6 \leq 0$.

Lời giải

a) $2^{2x-3} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{2x-3} > 2^{-2} \Leftrightarrow 2x-3 > -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-6} \Leftrightarrow x^2 \leq 5x-6 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$.

c) $25^x \leq 5^{4x-3} \Leftrightarrow 5^{2x} \leq 5^{4x-3} \Leftrightarrow 2x \leq 4x-3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

d) $9^x - 3^x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3^x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Câu 30. Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3(2x+1) \geq 2$;

b) $\log_2(3x-1) < \log_2(9-2x)$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x-5)$;

d) $\log_2(2x-1) \leq \log_4(x+1)^2$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_3(2x+1) \geq 2 \Leftrightarrow 2x+1 \geq 3^2 \Leftrightarrow x \geq 4$ (thỏa mãn).

b) Điều kiện: $\frac{1}{3} < x < \frac{9}{2}$.

Ta có: $\log_2(3x-1) < \log_2(9-2x) \Leftrightarrow 3x-1 < 9-2x \Leftrightarrow 5x < 10 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\frac{1}{3} < x < 2$.

c) Điều kiện: $x > \frac{5}{4}$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x-5) \Leftrightarrow x+1 \geq 4x-5 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\frac{5}{4} < x \leq 2$.

d) Điều kiện: $x > \frac{1}{2}$. Ta có: $\log_2(2x-1) \leq \log_4(x+1)^2$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x-1) \leq \frac{\log_2(x+1)^2}{\log_2 4} \Leftrightarrow \log_2(2x-1) \leq \frac{\log_2(x+1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x-1)^2 \leq \log_2(x+1)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

Câu 31. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3^x - 9}$;

b) $y = \ln(4-x^2)$;

c) $y = \log \frac{1}{5-x}$

d) $y = \frac{2}{\log_4(x-1)}$.

Lời giải

- a) $y = \frac{1}{3^x - 9}$. Hàm số xác định khi $3^x \neq 9$, tức là $x \neq 2$.
- b) $y = \ln(4 - x^2)$. Hàm số xác định khi $4 - x^2 > 0$, tức là $-2 < x < 2$.
- c) $y = \log \frac{1}{5-x}$. Hàm số xác định khi $\frac{1}{5-x} > 0$, tức là $x < 5$.
- d) $y = \frac{2}{\log_4(x-1)}$. Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_4(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1, x \neq 2$.

Câu 32. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{81}$
- b) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x} < 25^{1-x}$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow 2x+1 \leq 4 \left(\text{do } 0 < \frac{1}{3} < 1 \right)$
 $\Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \leq \frac{3}{2}$.

b) Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x} < 25^{1-x} \Leftrightarrow \left(5^{-\frac{1}{2}}\right)^{3x} < (5^2)^{1-x} \Leftrightarrow 5^{-\frac{3x}{2}} < 5^{2-2x}$
 $\Leftrightarrow -\frac{3x}{2} < 2-2x \left(\text{do } 5 > 1 \right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow x < 4$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x < 4$.

Câu 33. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 4) < 2$;
- b) $\log_{0,5}(2x+1) \geq \log_{0,5}(3x-4)$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$.

Do $\sqrt{5} > 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 4 < (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là $-3 < x < -2$ hoặc $2 < x < 3$.

b) Do $0 < 0,5 < 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \leq 3x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 5$.

Câu 34. Giải các bất phương trình sau:

- a) $4^x < 2\sqrt{2}$;
- b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{9}$

- c) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 40$;
d) $4^{2x} < 8^{x-1}$;
e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x$
g) $0,25^{x-2} > 0,5^{x+1}$.

Lời giải

- a) Đưa về bất phương trình $2^{2x} < 2^{\frac{3}{2}}$. Đáp số: $x < \frac{3}{4}$.
b) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{2}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Đáp số: $x \leq 5$.
c) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. Đáp số: $x > -3$.
d) Đưa về bất phương trình $2^{4x} < 2^{3x-3}$. Đáp số: $x < -3$.
e) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$. Đáp số: $x \leq \frac{2}{3}$.
g) Đưa về bất phương trình $0,5^{2x-4} > 0,5^{x+1}$. Đáp số: $x < 5$.

Câu 35. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\log_3(x+4) < 2$;
b) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 4$;
c) $\log_{0,25}(x-1) \leq -1$;
d) $\log_5(x^2 - 24x) \geq 2$;
e) $2\log_{\frac{1}{4}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$;
g) $2\log_3(x+1) \leq 1 + \log_3(x+7)$

Lời giải

- a) $-4 < x < 5$;
b) $0 < x \leq \frac{1}{16}$
c) $x \geq 5$;
d) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 25$.
e) Điều kiện: $x > -1$.
Đưa về bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2 \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$, rồi đưa về bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Đáp số: $-1 < x \leq 3$.

- g) Điều kiện: $x > -1$.

Đưa về bất phương trình $\log_3(x+1)^2 \leq \log_3[3(x+7)]$, rồi đưa về bất phương trình $x^2 - x - 20 \leq 0$. Đáp số: $-1 < x \leq 5$.

Câu 36. Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $\log_3(x-2) \cdot \log_3(x-1) < 0$.

Lời giải

Từ giả thiết, nhận được $1 < \log_3 x < 2$ hay $3 < x < 9$. Từ đó, các số nguyên x cần tìm là 4; 5; 6; 7; 8

Câu 37. Tìm tập xác định của các hàm số

$$a) y = f(x) = \sqrt{4-2^x} + \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}$$

$$b) y = f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$$

Lời giải

$$a) (1; 2];$$

$$b) (2; 3].$$

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} &\leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{3m-2x} \Leftrightarrow x^2+2mx+1 \geq 3m-2x \\ \Leftrightarrow x^2+2(m+1)x-3m+1 &\geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (1-3m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 0. \end{aligned}$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \rightarrow$ có 6 giá trị nguyên m cần tìm.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để bất phương trình $\ln(2x^2+3) > \ln(x^2+ax+1)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

Yêu cầu bài toán

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 > 0 \\ 2x^2+3 > x^2+ax+1 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2+ax+1 > 0 \\ g(x) = x^2-ax+2 > 0 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{f(x)} < 0 \\ \Delta_{g(x)} < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4 < 0 \\ a^2-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2-4 < 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2. \end{aligned}$$

Kết hợp với $a \in \mathbb{Z} \rightarrow a = \{-1; 0; 1\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2}-9^x)[\log_2(x+30)-5] \leq 0$?

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > -30$. Đặt $f(x) = (3^{x^2}-9^x)[\log_2(x+30)-5]$

$$\text{Xét phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 9^x \\ \log_2(x+30) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x \\ x+30 = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \text{ (kép)} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	-30	0	2	$+\infty$
$f(x)$		-	0	+

Suy ra bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm là: $S = (-30; 0] \cup \{2\}$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-29; -28; \dots; -2; -1; 0; 2\}$.

Vậy có 31 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 5 số nguyên x thỏa mãn $(2^{x+2}-\sqrt[3]{2})(5^x-y) < 0$?

Lời giải

$$\text{Ta có } (2^{x+2} - \sqrt[3]{2})(5^x - y) < 0 \Leftrightarrow \left(2^{x+2} - 2^{\frac{1}{3}}\right)(5^x - 5^{\log_5 y}) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + 2 - \frac{1}{3}\right)(x - \log_5 y) < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < x < \log_5 y.$$

Khi đó để với mỗi y có không quá 5 số nguyên x thì $\log_5 y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 625$.

Vậy có 625 số nguyên dương y thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 3. Ứng dụng

Câu 42. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối

lượng ban đầu M_0 là $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu

kì bán rã của chất. Đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã là 9 giờ.

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium/#section=AtomicMass-Half-Life-and-Decay>)

Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là:

- a) 100 g ?
- b) 50 g ?
- c) 20 g ?

Lời giải

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{M(t)}{M_0}$$

a) Khi $M(t) = 100$ thì $t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{100}{200} = 9$ (giờ)

b) Khi $M(t) = 50$ thì $t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{50}{200} = 18$ (giờ)

c) Khi $M(t) = 20$ thì $t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{20}{200} = 30$ (giờ)

Câu 43. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Nước uống đạt tiêu chuẩn phải có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01:2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng nào?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 6,5 \leq pH \leq 8,5 \Leftrightarrow 6,5 \leq -\log x \leq 8,5 \Leftrightarrow 3,2 \cdot 10^{-9} \leq x \leq 3,2 \cdot 10^{-7}$$

Vậy nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng từ $3,2 \cdot 10^{-9}$ tới $3,2 \cdot 10^{-7}$

Câu 44. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Chất phóng xạ polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức

$$M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} \text{ (g)}.$$

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium/#section=AtomicMass-Half-Life-and-Decay>)

a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?

b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

Lời giải

a) Khối lượng polonium-210 còn lại sau 2 năm (730 ngày) là: $M(2) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{730}{138}} = 2,56(g)$

b) $M(t) = 40$ khi $100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} = 40 \Leftrightarrow t = 182,4$.

Vậy sau 182,4 ngày còn lại 40 g polonium-210

Câu 45. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức

$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) (dB)$, trong đó I là cường độ của âm tính bằng W / m^2 và $I_0 = 10^{-12} W / m^2$.

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là $50 dB$. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?

b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ $75 dB$ đến $90 dB$. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Lời giải

a) Khi $L = 50$ thì $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 50 \Leftrightarrow I = 10^{-7}$

Vậy cường độ âm của giọng nói giáo viên là $10^{-7} W / m^2$

b) Khi $L = 75$ thì $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 75 \Leftrightarrow I = 3,2 \cdot 10^{-5}$

Khi $L = 90$ thì $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 90 \Leftrightarrow I = 10^{-3}$

Vậy cường độ âm trong nhà xưởng thay đổi từ $3,2 \cdot 10^{-5}$ đến 10^{-3}

Câu 46. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là $6\% /$ năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

Gọi x là số năm người đó gửi tiền trong ngân hàng.

Số tiền cả gốc và lãi người đó có được sau x năm được tính bởi công thức:

$S = 100 \cdot 1,06^x$. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì

$100 \cdot 1,06^x > 130 \Leftrightarrow 1,06^x > 1,3 \Leftrightarrow x > \log_{1,06} 1,3$. Suy ra $x > 4,503$. Do kì hạn gửi là 12 tháng nên để rút được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất 5 năm.

Câu 47. Độ pH của đất thích hợp cho trồng hoa hồng là từ 6,5 đến 7. Tính nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất để thích hợp cho trồng hoa hồng.

Lời giải

Ta có: $6,5 < -\log [H^+] < 7 \Leftrightarrow -7 < \log [H^+] < -6,5 \Leftrightarrow 10^{-7} < [H^+] < 10^{-6,5}$.

Vậy nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất trong khoảng $(10^{-7}; 10^{-6,5})$ thì thích hợp để trồng hoa hồng.

Câu 48. Người ta nuôi cấy vi khuẩn Bacillus subtilis trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào /ml dịch nuôi là $2 \cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào / ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn

Bacillus subtilis sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi T (phút) là thời gian để vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần. Theo giả thiết, ta có:

$$3,33 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^2 \cdot 2^{\frac{13 \cdot 60}{T}} \Leftrightarrow \frac{13 \cdot 60}{T} = \log_2(1,665 \cdot 10^7).$$

Suy ra $T \approx 33$ phút.

Câu 49. Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức:

$S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó di chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã di chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

6,4 dặm.

Câu 50. Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng, sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

Lời giải

Ta có: $8,4e^{0,0104t} > 10 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 10 - \ln 8,4}{0,0104}$. Suy ra $t > 16,764$. Vậy sau khoảng 17 năm tính từ mốc năm

2022, tức là từ năm 2039 thì dân số Hà Nội vượt quá 10 triệu người.

Câu 51. Mức cường độ âm L (dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (W / m^2) là cường độ âm. Để đảm bảo sức khỏe cho công nhân, mức cường độ âm trong một nhà máy phải giữ sao cho không vượt quá 85 dB. Hỏi cường độ âm của nhà máy đó phải thỏa mãn điều kiện nào để đảm bảo sức khỏe cho công nhân?

Lời giải

Cường độ âm của nhà máy đó không vượt quá $10^{-3,5} (W / m^2)$.

Câu 52. Dân số thế giới năm 2020 là khoảng 7,79 tỉ người và tăng với tốc độ khoảng 1,05% mỗi năm (theo danso.org). Giả sử tốc độ tăng này không đổi. Khi đó mô hình $P(t) = 7,79 \cdot (1,0105)^{t-2020}$ có thể dùng để ước tính dân số thế giới (theo đơn vị tỉ người) vào năm t .

a) Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người?

b) Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 10 tỉ người?

Lời giải

a) Dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người khi t thỏa mãn phương trình:

$$\begin{aligned} 7,79 \cdot (1,0105)^{t-2020} &= 8,5 \\ \Leftrightarrow 1,0105^{t-2020} &= \frac{8,5}{7,79} \\ \Leftrightarrow t - 2020 &= \log_{1,0105} \frac{8,5}{7,79} \\ \Leftrightarrow t &= 2020 + \log_{1,0105} \frac{8,5}{7,79} \approx 2028,35. \end{aligned}$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2029 dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người.

b) Dân số thế giới là 10 tỉ người khi t thỏa mãn phương trình:

$$7,79 \cdot (1,0105)^{t-2020} = 10$$

$$\Leftrightarrow (1,0105)^{t-2020} = \frac{10}{7,79}$$

$$\Leftrightarrow t - 2020 = \log_{1,0105} \frac{10}{7,79}$$

$$\Leftrightarrow t = 2020 + \log_{1,0105} \frac{10}{7,79} \approx 2043,91.$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2044 dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

Câu 53. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thuỷ ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

a) Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển $320mmHg$. Tìm độ cao của máy bay đó.

b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển $667mmHg$. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

Lời giải

a) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 320$, ta tìm được $h \approx 5,965 km$.

Vậy độ cao của máy bay là khoảng $5,965 km$.

b) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 667$, ta tìm được $h \approx 0,9 km$.

Vậy chiều cao của ngọn núi là khoảng $0,9 km$.

Câu 54. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?

b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng?

(Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

Lời giải

a) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 500$, ta được $t \approx 1,91$ năm.

Vậy chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng sau khoảng 2 năm.

b) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 200$, ta được $t \approx 6,52$ năm.

Vậy chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng sau khoảng 7 năm.

Câu 55. Giả sử tổng chi phí hoạt động (đơn vị tỉ đồng) trong một năm của một công ty được tính bằng công thức $C(t) = 90 - 50e^{-t}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi công ty được thành lập. Tính chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập là:

$$C(10) = 90 - 50e^{-10} \approx 89,998 \text{ (tỉ đồng)}$$

Câu 56. Nhắc lại rằng độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log[H^+]$, ở đó

$[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen của dung dịch tính bằng mol/lít. Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45. Hỏi nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn nào?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 7,30 \leq -\log[H^+] \leq 7,45$$

$$\Leftrightarrow -7,30 \geq \log[H^+] \geq -7,45$$

$$\Leftrightarrow 10^{-7,30} \geq [H^+] \geq 10^{-7,45}.$$

Vậy nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn $[5,01 \cdot 10^{-8}; 3,55 \cdot 10^{-8}]$.

Câu 57. Nhắc lại rằng mức cường độ âm (đo bằng dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I

là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

a) Tính cường độ âm của âm thanh tàu điện ngầm có mức cường độ âm là 100 dB.

b) Âm thanh trên một tuyến đường giao thông có mức cường độ âm thay đổi từ 70 dB đến 85 dB. Hỏi cường độ âm thay đổi trong đoạn nào?

Lời giải

a) Giải phương trình $100 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, ta tìm được $I = 0,01$.

b) Ta có: $70 \leq 10 \log \frac{1}{10^{-12}} \leq 85$.

Giải bất phương trình này, ta được $10^{-5} \leq I \leq 10^{-3,5}$.

Vậy cường độ âm thay đổi trong đoạn $[10^{-5}; 10^{-3,5}]$.

Câu 58. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kỳ bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng

Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-

235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Lời giải

Khi $M = 90$ g, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 90 &= 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 0,9 \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} 0,9 \\ &\Leftrightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0,9 \approx 106979777 \text{ (năm)}. \end{aligned}$$

Câu 59. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Lời giải

$$6000 = 9000 \cdot 10^{-2\alpha} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \log \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$$

$$9000 \cdot 10^{-\alpha t} \leq 1000 \Leftrightarrow 10^{-\alpha t} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\alpha t \leq \log \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow t \geq -\frac{2}{\alpha} \log \frac{1}{3} = -\frac{2}{\frac{1}{2} \log \frac{3}{2}} \cdot \log \frac{1}{3} = \frac{4 \log 3}{\log \frac{3}{2}} \approx 10,8 \text{ (giờ)}.$$

Câu 60. Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L . Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A ?

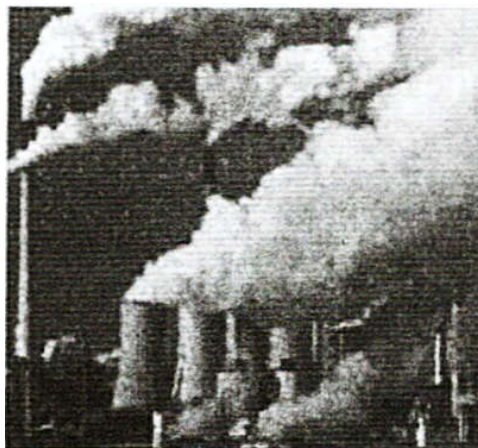
Lời giải

Ta có: $pH_A = -\log x_A$; $pH_B = -\log x_B$

$$\Rightarrow pH_A - pH_B = -\log x_A + \log x_B = \log \frac{x_B}{x_A}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \log \frac{x_B}{x_A} = 0,7 \Rightarrow \frac{x_B}{x_A} = 10^{0,7} \approx 5 \text{ (lần)}.$$

Câu 61. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái Đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế Thế giới), khi nhiệt độ Trái Đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái Đất tăng thêm $t^\circ\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k \cdot a^t$, trong đó k, a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm bao nhiêu $^\circ\text{C}$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?



Lời giải

Theo bài ta có $\begin{cases} k \cdot a^2 = 3\% \\ k \cdot a^5 = 10\% \end{cases}$ (1). Ta cần tìm t sao cho $k \cdot a^t = 20\%$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow k = \frac{3\%}{a^2} \text{ và } a^3 = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\%}{a^2} \cdot a^t = 20\% \Rightarrow a^{t-2} = \frac{20}{3} \Rightarrow t-2 = \log_a \frac{20}{3} \Rightarrow t = 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3} \approx 6,7.$$

Câu 62. Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau ba năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm, tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

Lời giải

Số tiền ông An kiếm được trong 3 năm đầu là: $3 \cdot 12 = 36$ triệu đồng.

Số tiền ông An có được sau 18 năm đi làm là:

$$S_1 = 36 + 36 \cdot (1 + 40\%)^1 + \dots + 36 \cdot (1 + 40\%)^5 + 36 \cdot (1 + 4\%)^6$$

Số tiền ông An nhận sau 2 năm cuối (năm thứ 19 và 20) là $S_2 = 2 \cdot 12 \cdot (1 + 4\%)^6$

Do đó tổng số tiền ông An thu được là:

$$S = 36 \cdot \frac{1 - (1,4)^6}{1 - 1,4} + 24 \cdot (1,4)^6 \approx 768,37 \text{ (triệu đồng)}.$$