BÀI 1. ĐẠO HÀM

• CHƯƠNG 7. ĐẠO HÀM
• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Đạo hàm

Tổng quát, ta có định nghĩa đạo hàm của hàm số bất kì như sau:

Kiến thức trọng tâm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'\left(x_0\right)$ hoặc $y'\left(x_0\right)$. Vậy: $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=x^2$. Tính $f'\left(x_0\right)$ với $x_0\in\mathbb{R}$.

Giải

Ta có $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x+x_0\right)=2x_0$.

Chú ý:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x\in(a;b)$ thì ta nói nó có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=C(C$ là hằng số);

b) $f(x)=\frac{1}{x}$ với $x\neq 0$.

Giải

a) Với bất kì x_0, ta có:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{C-C}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0.$$

Vậy $f'(x)=(C)'=0$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với bất kì $x_0\neq 0$, ta có:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{xx_0\left(x-x_0\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{xx_0}=-\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- Nếu hàm số $s=f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'\left(t_0\right)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.
- Nếu hàm số $T=f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'\left(t_0\right)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Kiến thức trọng tâm

Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$.

Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)=x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2;4)\in(C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình của tiếp tuyến đó.

Giải

Ta có $\left(x^2\right)'=2x$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(2)=2\cdot2=4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y-4=4(x-2)\Leftrightarrow y=4x-4$.

3. Số e

Người ta chứng minh được rằng có giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Hơn nữa, người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e=2,718281828\ldots$ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

Từ kết quả trên suy ra, khi kì hạn trở nên rất ngắn (m dần đến $+\infty$) thì $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ dần đến e, và do đó $T=A\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mr}$ dần đến $A\cdot e^r$.

Số e xuất hiện trong nhiều bài toán ở những lĩnh vực khác nhau như Toán học, Vật lí, Sinh học, Kinh tế, ...

Ví dụ 4. Công thức $T=A.e^{rt}$ được dùng để tính tổng số tiền vốn và lãi mà người gửi nhận được sau thời gian t kể từ thời điểm người đó gửi tiết kiệm A đồng theo thể thức "lãi kép liên tục" với lãi suất r/năm. Trong đó, A và T tính theo đồng, t tính theo năm và t có thể nhận giá trị thực bất kì. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của T (làm tròn đến hàng đơn vị) khi $A=2000000, r=0,05$ và

a) $t=\frac{1}{4}$

b) $t=\frac{1}{365}$.

Giải

a) $T=2000000\cdot e^{0,05\cdot\frac{1}{4}}=2000000\cdot e^{0,0125}\approx2025157$ (đồng).

b) $T=2000000\cdot e^{0,05\cdot\frac{1}{365}}\approx2000274$ (đồng).

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Câu 1. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x^3$.

Lời giải

a) Với bất kì x_0 ta có:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(x-x_0\right)\left(x^2+x\cdot x_0+x_0^2\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x^2+x.x_0+x_0^2\right)=x_0^2+x_0\cdot x_0+x_0^2=3x_0^2$$

Câu 2. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=-x^2$

b) $f(x)=x^3-2x$;

c) $f(x)=\frac{4}{x}$.

Lời giải

a) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{-x^2-(-x_0^2)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{-(x^2-x_0^2)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{-(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}[-(x+x_0)]=-(x_0+x_0)=-2x_0$

b) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^3-2x-x_0^3+2x_0}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x^3-x_0^3)-(2x-2x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+x\cdot x_0+x_0^2)-2(x-x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\left[(x^2+x\cdot x_0+x_0^2)-2\right]$

$=(x_0^2+x_0\cdot x_0+x_0^2)-2=3x_0^2-2$

c) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{4}{x}-\frac{4}{x_0}}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{4x_0-4x}{x-x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{-4}{x\cdot x_0}$

$=\frac{-4}{x_0\cdot x_0}=\frac{-4}{x_0^2}$

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=x+\sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0=2$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $D=[1;+\infty)$.

Tại điểm $x_0=2, y_0=2+\sqrt{2-1}=3$. Với $1\le x\ne 2$, ta có:

$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{x+\sqrt{x-1}-3}{x-2}=\frac{(x-2)+(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}=1+\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

Do đó:

$y'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=1+\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=1+\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=1+\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$.

Vậy $y'(2)=\frac{3}{2}$.

Câu 4. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y=|x-1|x^2$ tại điểm $x_0=1$.

Giải

Đạo hàm $y'(1)$ (nếu có) là:

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{y-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|x^2}{x-1}$$

Ta cần tính riêng các giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1. Ta có:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(-x^2\right)=-1$$

Giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1 khác nhau nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|x^2}{x-1}$. Do đó, đạo hàm $y'(1)$ không tồn tại.

Chú ý. $|x-1|x^2=(x-1)x^2$ khi $x\ge 1$ và $|x-1|x^2=-(x-1)x^2$ khi $x<1$ nên để khử vô định trong giới hạn trên ta phải xét riêng các giới hạn một phía.

Câu 5. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số $y=2x^2+3x-1$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

$y'(1)=7$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=x(2x-1)^2$. Tính $f'(0)$ và $f'(1)$.

Lời giải

$f'(0)=\lim_{x\to 0}(2x-1)^2=(-1)^2=1$. Để tính $f'(1)$, ta phân tích:

$$\begin{aligned} f(x)-f(1) &= x(2x-1)^2-1=(x-1)(2x-1)^2+(2x-1)^2-1 \\ &= (x-1)(2x-1)^2+4x(x-1) \end{aligned}$$

Khi đó, $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left((2x-1)^2+4x\right)=5$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{nếu } x\ge 0\\ 1-2x & \text{nếu } x<0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Tìm giới hạn bên phải và bên trái tại điểm $x=0$. Ta có $f(0)=1$ và

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1-1)(x-1+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-2x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-2)=-2$$

Vậy $f'(0)=-2$

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y=ax^2$ (a là hằng số) tại điểm x_0 bất kì.

b) $y=\frac{1}{x-1}$ tại điểm x_0 bất kì, $x_0\ne 1$.

Lời giải

a) $y'\left(x_0\right)=2ax_0$;

b) $y'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}, x_0\neq 1$

Câu 9. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ với $x>0$;

b) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ với $x\neq 1$.

Giải

a) Với bất kì $x_0>0$, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+\sqrt{x}-\left(x_0^2+\sqrt{x_0}\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)+\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x+x_0+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right)=2x_0+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Vậy $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Với $x_0\neq 1$, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x_0}{x_0-1}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x+x_0}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{(x-1)(x_0-1)}=-\frac{1}{(x_0-1)^2}.$$

Vậy $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x\neq 0)$.

Lời giải

Với $x_0\neq 0$, ta có:

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0}\right)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

V?y $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}(x\neq 0)$

Câu 11. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm (nếu có) của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & \text{khi } x\le 2\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{khi } x>2\end{cases}$$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{khi } x\le 1 \\ \dfrac{2}{x}+1 & \text{khi } x>1 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{1}{3}\ne \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$ nên f gián đoạn tại 2 , do đó f không có đạo hàm tại 2.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ nên f liên tục tại 1 .

Ta lại có $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=4, \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\ne \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Vậy f không có đạo hàm tại 1.

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=3x^3-1$ tại điểm $x_0=1$ bằng định nghĩa.

Giải

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=1$.

Ta có: $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=3(1+\Delta x)^3-1-\left(3.1^3-1\right)=9\Delta x+9(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{9\Delta x+9(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3}{\Delta x}=9+9\Delta x+3(\Delta x)^2$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[9+9\Delta x+3(\Delta x)^2\right]=9$.

Vậy $f'(1)=9$.

Câu 13. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau bằng định nghĩa:

a) $f(x)=x+2$;

b) $g(x)=4x^2-1$;

c) $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$

Lời giải

a) $f'(x)=1$.

b) $g'(x)=8x$.

c) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x.

Ta có: $\Delta h=h(x+\Delta x)-h(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x-1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta h}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x}=\dfrac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Vậy $h'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Câu 14. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=|x-2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0=2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x\ne 2$.

Lời giải

Với $x>2$, ta có: $f(x)=|x-2|=x-2$. Đạo hàm của hàm số $f(x)=|x-2|$ tại điểm $x>2$ là 1.

- Với $x<2$, ta có: $f(x)=|x-2|=2-x$. Đạo hàm của hàm số $f(x)=|x-2|$ tại điểm $x<2$ là -1.

- Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có: $\Delta f = f(2+\Delta x) - f(2) = |2+\Delta x - 2| - |2-2| = |\Delta x|$.

Suy ra: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Ta thấy: $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$;

$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Do đó, không tồn tại $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Vậy hàm số $f(x) = |x-2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 2$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 15. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ và điểm $M(1;1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là: $y - 1 = -1.(x-1) \leftrightarrow y = -x + 2$

Câu 16. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $6\%/$ năm và theo thể thức lãi kép liên tục. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau

a) 1 ngày;

b) 30 ngày.

(Luôn coi một năm có 365 ngày.)

Lời giải

a) Tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau 1 ngày là: $5000000 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{1}{365}} = 5000822$ (đồng)

b) Tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau 30 ngày là: $5000000 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{30}{365}} = 5024718$ (đồng)

Câu 17. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1;-2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A.

Lời giải

Ta có $f'(x_0) = -4x$

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A là $-4.1 = -4$

Câu 18. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$

a) Tại điểm $(-1;1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải

Ta có: $y'(x_0) = 3x^2$

a) Ta có điểm $(-1;1)$ không thuộc hàm số $y = x^3$ nên không có phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-1;1)$

b) Khi $x = 2$ thì $y = 2^3 = 8$

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $3.2^2=12$
Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(2;8)$ là: $y-8=12.(x-2)$. Hay $y=12x-16$

Câu 19. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t)=4t^3+6t+2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t=2$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=12t^2+6$. Khi $t=2; v(2)=12.2^2+6=54$

Câu 20. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức
a) lãi kép với kì hạn 6 tháng;
b) lãi kép liên tục.

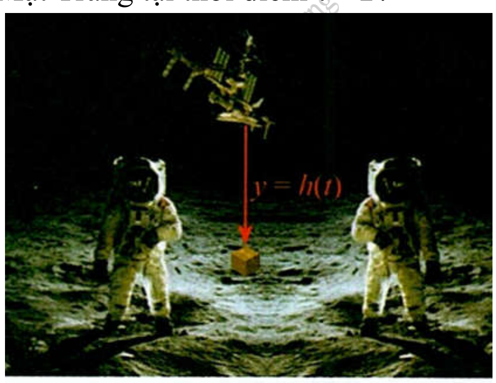
Lời giải

a) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm

là: $T=10000000\left(1+\dfrac{0,05}{2}\right)^2=10506250$ (đồng)

b) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là: $T=10000000e^{0,05}=10512711$ (đồng)

Câu 21. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t)=0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t=2$.



Hình 4

(Nguồn: https://www.britannica.com/place/Moon)

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật là: $v(t)=h'(t)=1,62t$. Tại thời điểm $t=2$ thì $v(2)=1,62.2=3,24$

Câu 22. Cho hàm số $y=(2x+1)^2$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=-1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$.

Giải

a) Tại điểm $x_0=-1, y_0=(-2+1)^2=1$. Với $x\neq -1$, ta có:

$$\frac{y-1}{x-(-1)}=\frac{(2x+1)^2-1}{x+1}=\frac{(2x+1-1)(2x+1+1)}{x+1}=2\cdot 2x$$

Do đó: $y'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{y-1}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}2\cdot 2x=-4$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$ là:

$y-1=y'(-1)(x-(-1))=-4(x+1)$ hay $y=-4x-3$

Câu 23. Cho hàm số $y=\frac{8}{x}, x\neq 0$.

a) Tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 bất kì, $x_0\neq 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y=-2x+8$.

Giải

a) Với $x_0\neq 0$ bất kì, ta có:

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{8}{x}-\frac{8}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{8(x_0-x)}{(x-x_0)x_0\cdot x}=\lim_{x\to x_0}\frac{-8}{x_0\cdot x}=-\frac{8}{x_0^2}.$$

b) Với $x_0=2$ ta có $y_0=4$ và $y'(2)=-2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$ là:

$y-4=-2(x-2)=-2x+4$ hay $y=-2x+8$c

Hệ số góc tiếp tuyến có dạng $k=y'(x_0)=-\frac{8}{x_0^2}$($x=x_0$ là hoành độ tiếp điểm). Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-2x+8$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-2$.

Ta có: $-\frac{8}{x_0^2}=-2\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Với $x_0=2$, phương trình tiếp tuyến là: $y-4=-2(x-2)$, hay $y=-2x+8$ (loại, do tiếp tuyến trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0=-2$, phương trình tiếp tuyến là:

$y-(-4)=-2(x-(-2))$, hay $y=-2x-8$

Vậy $y=-2x-8$ là tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý. Đối với bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng cho trước, ta cần kiểm tra lại kết quả và loại trường hợp hai đường thẳng trùng nhau do điều kiện hệ số góc bằng nhau chỉ là điều kiện cần.

Câu 24. Tìm toạ độ điểm M trên đồ thị hàm số $y=x^3+1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3 .

Lời giải

Gọi $M(a;a^3+1)$ là toạ độ điểm cần tìm. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $k=y'(a)=3a^2$.

Theo giả thiết: $k=3a^2=3\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$. Vậy $M(1;2)$ và $M(-1;0)$ là toạ độ các điểm cần tìm.

Câu 25. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-3x^2$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y=6x+5$.

Lời giải

$y=6x+3$.

Câu 26. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s=t^3-4t^2+4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t=3$ giây và $t=5$ giây.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm $t=3$ giây là $v(3)=s'(3)=7\,m/s$. Tương tự, $v(5)=39\,m/s$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H).

a) Viết tiếp tuyến của (H) tại điểm $M\in(H)$ có $x_M=2$.

b) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-x$.

c) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(1;-1)$.

Giải

Ta có $y'=f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

a) Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M có hệ số góc $f'(2)=-1$ là:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$\Leftrightarrow y-2=-1(x-2)$ 37

$\Leftrightarrow y=-x+4.$

b) Gọi d_1 là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là tiếp điểm của (H) và d_1.

Vì $d_1//d$ nên $f'\left(x_0\right)=-1$.

Suy ra $-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}=-1\Leftrightarrow\left(x_0-1\right)^2=1\Leftrightarrow x_0-1=1$ hoặc $x_0-1=-1\ \Leftrightarrow x_0=2$ hoặc $x_0=1$.

- Với $x_0=2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;2)$ có hệ số góc $f'(2)=-1$ là:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$\Leftrightarrow y-2=-1(x-2)$

$\Leftrightarrow y=-x+4.$

- Với $x_0=0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(0;0)$ có hệ số góc $f'(0)=-1$ là:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$\Leftrightarrow y-0=-1(x-0)$

$\Leftrightarrow y=-x$ (loại vì trùng với đường thẳng d).

Vậy tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng d là $d_1: y=-x+4$.

c) Gọi a là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ là tiếp điểm của H và a. Phương trình tiếp tuyến a là:

$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

Vì a qua điểm $N(1;-1)$ nên $-1-\dfrac{x_0}{x_0-1}=-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\left(1-x_0\right)$

$\Leftrightarrow 2x_0\left(x_0-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x_0=0$ (nhận) hoặc $x_0=1$ (loại).

Vậy phương trình tiếp tuyến $a: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow a: y=-x$.

Câu 28. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t)=-2t^2+16t+15$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t=3$.

Giải

Ta có $s'(t)=\left(-2t^2+16t+15\right)'=(-2.2t+16)=-4t+16$.

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t=3$ là $s'(3)=-4.3+16=4(m/s)$.

Câu 29. Cho parabol (P) có phương trình $y=x^2$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol (P)

a) Tại điểm $(-1;1)$;

b) Tại giao điểm của (P) với đường thẳng $y=-3x+2$.

Lời giải

a) Ta có $y'(-1)=-2$.

b) Giao điểm của (P) với đường thẳng $y=-3x+2$ là $x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ và $x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, hệ số góc là $k=-3+\sqrt{17}$ và $k=-3-\sqrt{17}$.

Câu 30. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^3-2x^2+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó

a) Song song với đường thẳng $y=-x+2$;

b) Vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{4}x-4$;

c) Đi qua điểm $A(0;1)$.

Lời giải

a) Hai tiếp tuyến: $y=-x+1, y=-x+\dfrac{31}{27}$;

b) Hai tiếp tuyến: $y=4x-7, y=4x+\dfrac{67}{3}$;

c) Hai tiếp tuyến: $y=1, y=-x+1$.

Câu 31. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t)=2t^2+5t+2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t=4$.

Lời giải

Ta có $s'(t)=4t+5, s'(4)=21m/s$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)=x^2$ có đồ thị (P).

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$.

Giải

a) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\Delta y=f\left(\dfrac{1}{2}+\Delta x\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}+\Delta x\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\Delta x+(\Delta x)^2$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=1+\Delta x$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)=1$. Suy ra $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. Vậy $k=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

b) Ta có: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$ là:

$y=1.\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ hay $y=x-\dfrac{1}{4}$

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)=2+\frac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3 .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Giải

a) Gọi M là điểm có tung độ bằng 3 nằm trên (C). Khi đó, hoành độ điểm M bằng 1 . Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=1$.

Ta có: $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\left(2+\frac{1}{1+\Delta x}\right)-\left(2+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{1+\Delta x}-1=\frac{-\Delta x}{1+\Delta x}$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{-1}{1+\Delta x}$. Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x}=-1$.

Suy ra $f'(1)=-1$. Vậy $k=f'(1)=-1$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;3)$ là:

$y=-1(x-1)+3$ hay $y=-x+4$.

Câu 34. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là

$C(Q)=Q^2+80Q+3500$.

a) Tính $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Giải

a) Xét ΔQ là số gia của biến số tại điểm Q. Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta C&=C(Q+\Delta Q)-C(Q)=(Q+\Delta Q)^2+80(Q+\Delta Q)+3500-Q^2-80Q-3500\\&=2Q\cdot\Delta Q+(\Delta Q)^2+80\Delta Q.\end{aligned}$$

Suy ra: $\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{2Q\cdot\Delta Q+(\Delta Q)^2+80\Delta Q}{\Delta Q}=2Q+\Delta Q+80$.

b) Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}(2Q+\Delta Q+80)=2Q+80$.

Vậy hàm chi phí biên là: $C'(Q)=2Q+80$.

c) Ta có: $C'(90)=2\cdot 90+80=260$. Dựa vào kết quả đó, ta thấy chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 90 sản phẩm lên 91 sản phẩm là 260 USD.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=x^3$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8 .

Lời giải

Ta có: $f'(x)=3x^2$.

a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 là: $y=3x+2$.

b) Ta có: $f(x)=x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8 là: $y=12x-16$.

Câu 36. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g=9{,}8m/s^2$.

a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=3(s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng $39,2(m/s)$.

Lời giải

Xét Δt là số gia của biến số tại điểm t.

Ta có:

$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)=\frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot t^2=4,9\left[2t\Delta t+(\Delta t)^2\right]$. Suy ra:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4,9\left[2t\Delta t+(\Delta t)^2\right]}{\Delta t}=9,8t+4,9\Delta t.$$

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(9,8t+4,9\Delta t)=9,8t$.

Vậy $v(t)=s'(t)=9,8t$.

a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=3$ (s) là:

$v(3)=9,8.3=29,4(m/s)$.

b) Theo đề bài, ta có: $v(t)=9,8t=39,2\Leftrightarrow t=4$.

Vậy vận tốc tức thời của vật đạt $39,2m/s$ tại thời điểm $t=4$ (s).