BÀI 3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT

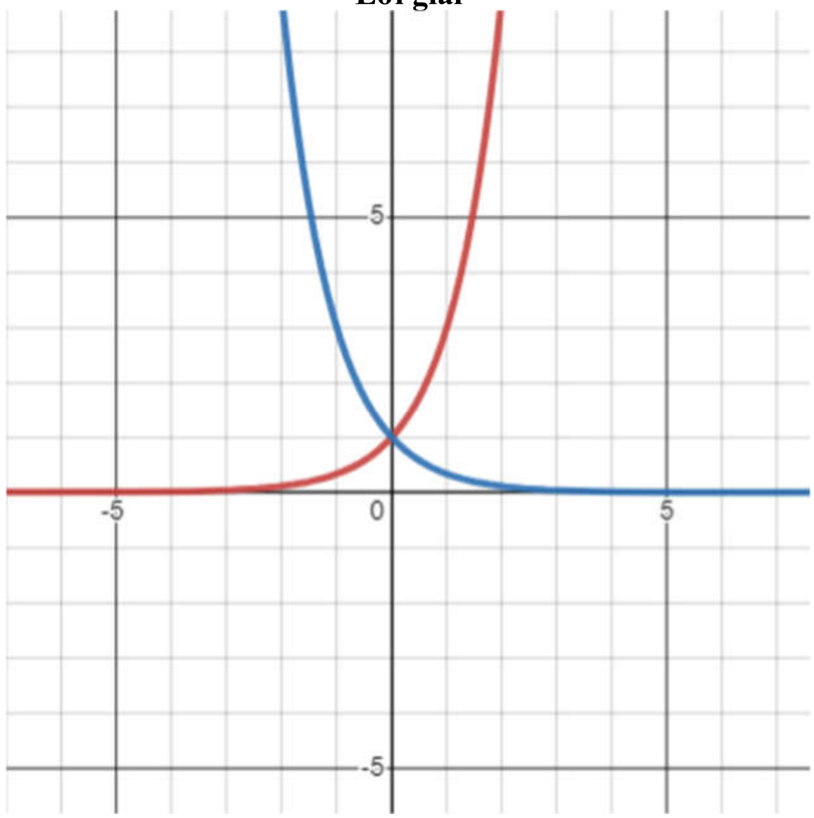
- CHƯƠNG 6. LOGARIT
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính chất và đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit

Câu 1. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Trên cùng một hệ trục toạ độ, vẽ đồ thị các hàm số $y=3^x$ và $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Lời giải



Câu 2. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** So sánh các cặp số sau:

a) $0,85^{0,1}$ và $0,85^{-0,1}$;

b) $\pi^{-1,4}$ và $\pi^{-0,5}$;

c) $\sqrt[4]{3}$ và $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Lời giải

a) Do $0,85<1$ nên hàm số $y=0,85^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $0,1>-0,1$

Suy ra $0,85^{0,1}<0,85^{-0,1}$

b) Vì $\pi>1$ nên hàm số $y=\pi^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-1,4<-0,5$

Suy ra $\pi^{-1,4}<\pi^{-0,5}$

c) Ta có: $\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=3^{\frac{-1}{3}}$

Vì $3>1$ nên hàm số $y=3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $\frac{1}{4}>\frac{-1}{3}$

Suy ra $3^{\frac{1}{4}} > \pi^{\frac{-1}{3}}$. Hay $\sqrt[4]{3} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Câu 3. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Trên cùng một hệ trục toạ độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = \log_3 x$ và $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Lời giải

a) Vì $\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Mà $4,8 < 5,2$ nên $\log_{\frac{1}{2}} 4,8 > \log_{\frac{1}{2}} 5,2$

b) Ta có: $\log_{\sqrt{5}} 2 = \frac{\log 2}{\log \sqrt{5}} = \frac{\log 2}{\log 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2} \cdot \log 5} = 2 \cdot \frac{\log 2}{\log 5}$

$\log_5 2\sqrt{2} = \frac{\log 2\sqrt{2}}{\log 5} = \frac{\log\left(2.2^{\frac{1}{2}}\right)}{\log 5} = \frac{\log 2^{\frac{3}{2}}}{\log 5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5}$

Suy ra: $\log_{\sqrt{5}} 2 > \log_5 2\sqrt{2}$

c) Ta có: $-\log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{4}} = -\frac{\log 2}{\log \frac{1^2}{2}} = -\frac{\log 2}{2 \cdot \log \frac{1}{2}} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log 2^{\frac{-1}{2}}}{\log \frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-1}{2}}$

Vì $\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Mà $2^{\frac{-1}{2}} > 0,4$ nên $\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-1}{2}} < \log_{\frac{1}{2}} 0,4$

Hay $-\log_{\frac{1}{4}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} 0,4$

Câu 4. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4,8$ và $\log_{\frac{1}{2}} 5,2$;

b) $\log_{\sqrt{5}} 2$ và $\log_5 2\sqrt{2}$;

c) $-\log_{\frac{1}{4}} 2$ và $\log_{\frac{1}{2}} 0,4$.

Lời giải

a) Mức cường độ âm của tiếng thì thầm là $L = 10\log\frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 20(dB)$

b) Để âm thanh không gây hại cho tai khi nghe thời gian dài thì cường độ âm là:
$I = 100000.10^{-10} = 10^{-5}\left(W/m^2\right)$

Mức cường độ âm giới hạn đó là: $L = 10\log\frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70(dB)$

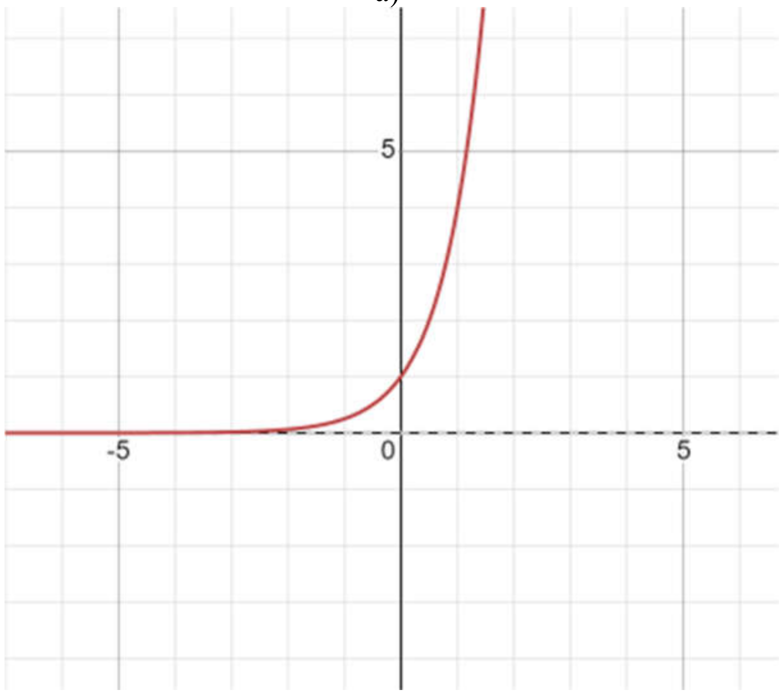
Câu 5. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$;

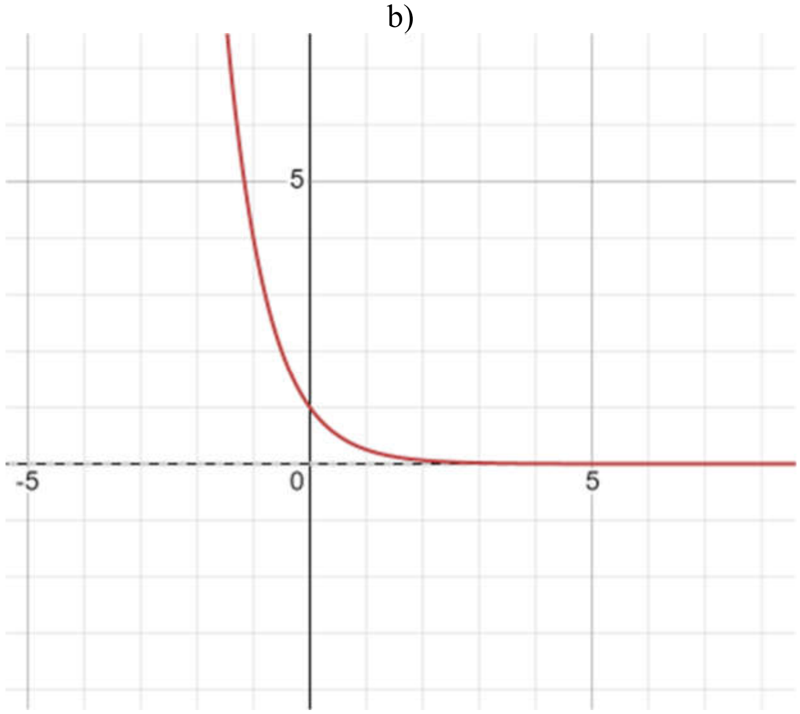
b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Lời giải

a)



b)



Câu 6. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$;

b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

Lời giải

a) Vì 1,3 > 1 nên hàm số $y=1,3^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mà $0,7>0,6$ nên $1,3^{0,7}>1,3^{0,6}$

b) Vì $0,75<1$ nên hàm số $y=0,75^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mà $-2,3>-2,4$ nên $0,75^{-2,3}>0,75^{-2,4}$

Câu 7. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\log_2(3-2x)$;

b) $y=\log_3\left(x^2+4x\right)$.

Lời giải

a) $\log_2(3-2x)$ xác định khi $3-2x>0$. Hay $x<\dfrac{3}{2}$

b) $\log_3\left(x^2+4x\right)$ xác định khi $x^2+4x>0$ hay $x>0$ hoặc $x<-4$

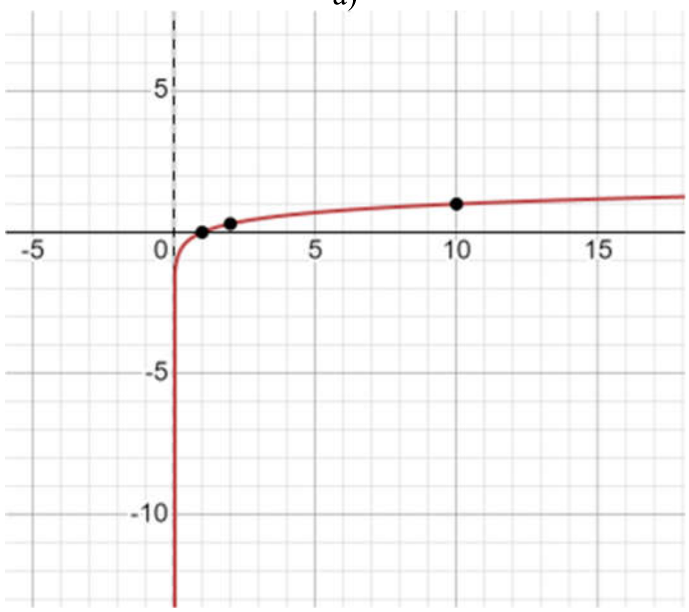
Câu 8. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y=\log x$;

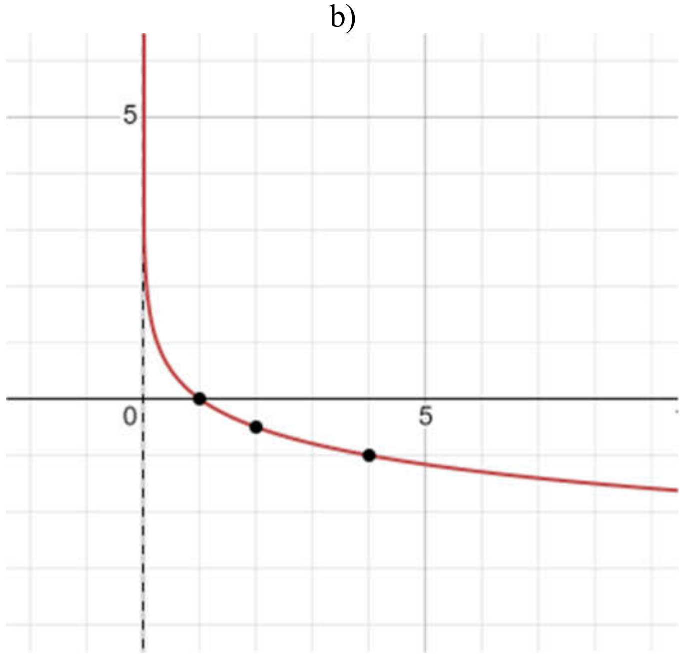
b) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải

a)



b)



Câu 9. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** So sánh các cặp số sau:

a) $\log_\pi 0,8$ và $\log_\pi 1,2$;

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

Lời giải

a) Vì $\pi > 1$ nên hàm số $\log_{\pi} x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà $0,8 < 1,2$ nên $\log_{\pi} 0,8 < \log_{\pi} 1,2$

b) Vì $0,3 > 1$ nên hàm số $\log_{0,3} x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$

Mà $2 < 2,1$ nên $\log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 2,1$

Câu 10. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = 4^x$;

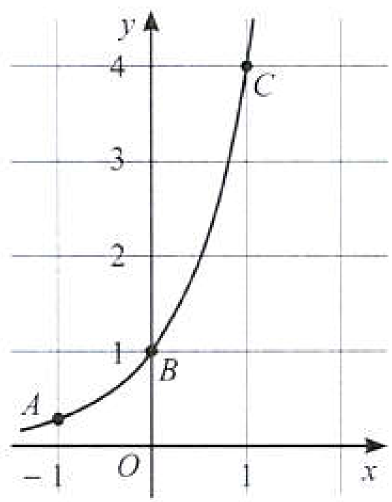
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải

a) Vì hàm số $y = 4^x$ có cơ số $4 > 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 4^x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = 4^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1;\frac{1}{4}\right), B(0;1)$, $C(1;4)$(Hình 1).

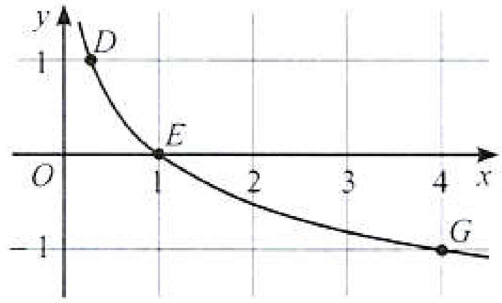


Hình 1

b) Vì hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ có cơ số $\frac{1}{4} < 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	$+\infty$
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $D\left(\frac{1}{4};1\right)$, $E(1;0), G(4;-1)(Hinh2)$.



Hình 2

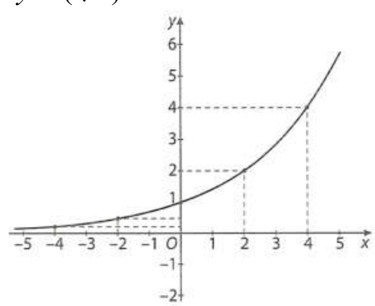
Câu 11. (Vẽ đồ thị hàm số mũ) Vẽ đồ thị của hàm số mũ $y=(\sqrt{2})^x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y=(\sqrt{2})^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=(\sqrt{2})^x$ như hình sau:



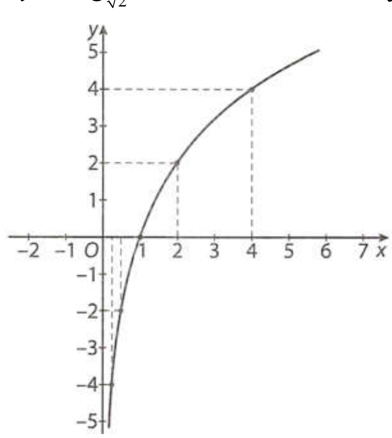
Câu 12. (Vẽ đồ thị hàm số lôgarit) Vẽ đồ thị của hàm số lôgarit $y=\log_{\sqrt{2}} x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\log_{\sqrt{2}} x$	-4	-2	0	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\log_{\sqrt{2}} x$ như hình dưới đây.



Câu 13. Vẽ đồ thị của các hàm số mũ sau:

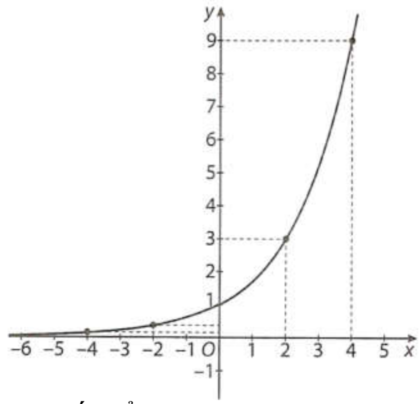
a) $y=(\sqrt{3})^x$; b) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Lời giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y=(\sqrt{3})^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

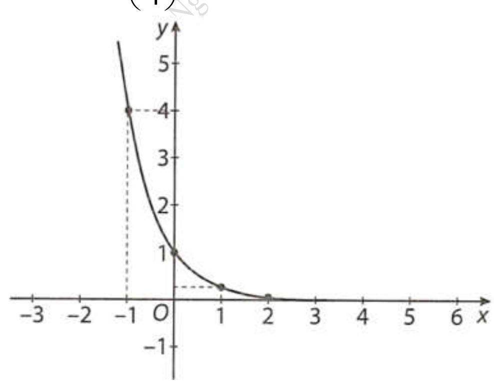
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=(\sqrt{3})^x$ như hình sau:



b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ như hình sau:



Câu 14. Vẽ đồ thị của các hàm số lôgarit sau:

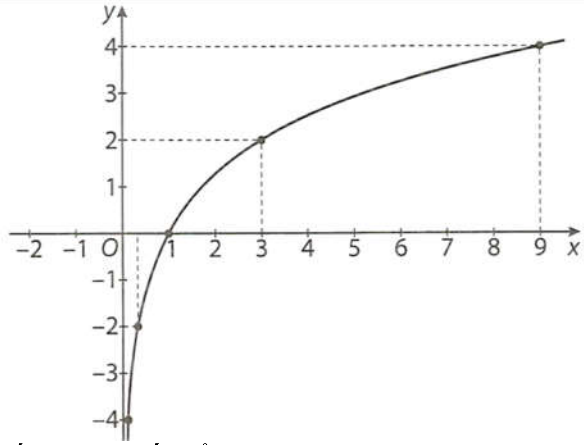
a) $\log_{\sqrt{3}} x$; b) $y=\log_{\frac{2}{3}} x$.

Lời giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y=\log_{\sqrt{3}} x$	-4	-2	0	2	4

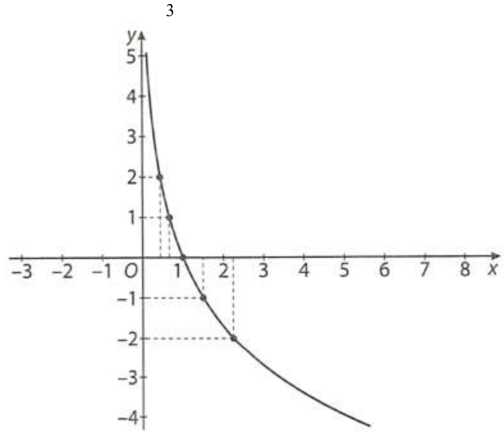
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\log_{\sqrt{3}} x$ như hình sau:



b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
$y=\log_{\frac{2}{3}} x$	-2	-1	0	1	2

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\log_{\frac{2}{3}} x$ như hình sau:



Câu 15. Vẽ đồ thị hàm số $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Lời giải

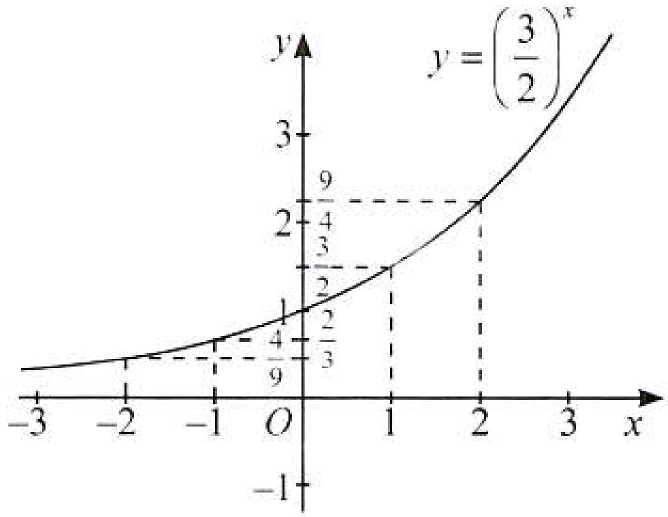
Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Do $\frac{3}{2}>1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có toạ độ theo bảng giá trị và nằm phía trên trục hoành.
Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.



Hình 3

Câu 16. Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$.

Lời giải

Tập xác định: $(0;+\infty)$.

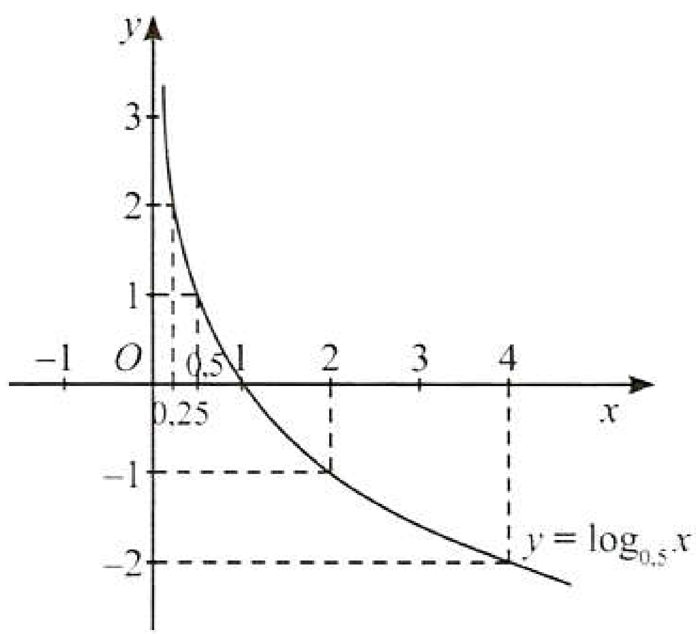
Do $0 < 0,5 < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Bảng giá trị:

x	0,25	0,5	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có toạ độ theo bảng giá trị và nằm bên phải trục tung.

Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.



Hình 4

Câu 17. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tìm tập xác định của các hàm số sau: a) $y=\log|x+3|$; b) $y=\ln\left(4-x^2\right)$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $|x+3|>0 \Leftrightarrow x\neq -3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

b) Điều kiện xác định: $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-2;2)$.

Câu 18. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=12^x$;

b) $y=\log_5(2x-3)$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $y=12^x$ là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y=\log_5(2x-3)$ xác định khi $2x-3>0$ hay $x>\frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\log_5(2x-3)$ là $D=\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 19. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5}$

b) $y=3^{\frac{x-1}{x+1}}$

c) $y=1,5^{\sqrt{x+2}}$;

d) $y=\log_5(1-5x)$;

e) $y=\log\left(4x^2-9\right)$;

g) $y=\ln\left(x^2-4x+4\right)$.

Lời giải

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c) $[-2;+\infty)$.

d) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)$.

e) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

g) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 20. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\log_3(x+1)$; b) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x-1|$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $(-1;+\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ do $|x-1|>0\,\forall x\neq 1$.

Câu 21. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\log_2(x-4)$;

b) $y=\log_{0,2}\left(x^2+2x+1\right)$;

c) $y=\log_5\frac{x}{x-1}$.

Lời giải

a) $(4;+\infty)$;

b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

c) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

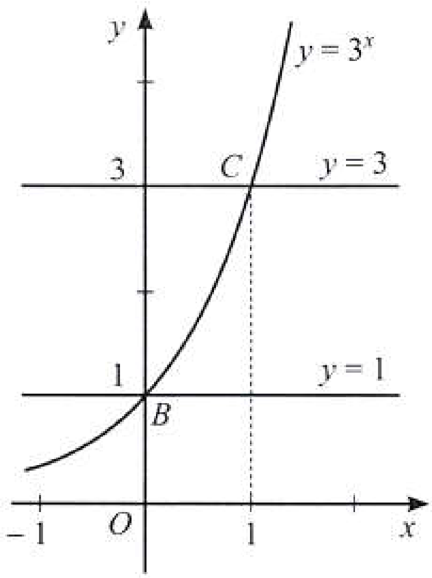
Câu 22. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y=3^x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y=3$;

b) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y=1$.

Lời giải

Quan sát Hình 3.



Hình 3

a) Đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=3^x$ tại điểm $C(1;3)$.

Dựa vào Hình 3, ta thấy đồ thị hàm số $y=3^x$ nằm ở phía trên đường thẳng $y=3$ khi $x>1$.

b) Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=3^x$ tại điểm $B(0;1)$.

Dựa vào Hinh 3 , ta thấy đồ thị hàm số $y=3^x$ nằm ở phía dưới đường thẳng $y=1$ khi $x<0$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log_3\left(4x^2-4x+m\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y=\log_3\left(4x^2-4x+m\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$4x^2-4x+m>0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow m>1$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y=\log_{a^2-2a+1}x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Lời giải

Hàm số $y=\log_{a^2-2a+1}x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$0<a^2-2a+1<1\Leftrightarrow 0<a<2$ và $a\neq 1$.

Câu 25. Cho hàm số mũ $f(x)=a^x(a>0)$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=a$;

b) $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$;

c) $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)$.

Lời giải

a) $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\dfrac{a^{x+1}}{a^x}=a$;

b) $f(-x)=a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=\dfrac{1}{f(x)}$

c) $f\left(x_1+x_2\right)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)$.

Câu 26. Cho hàm số lôgarit $f(x)=\log_a x(0<a\neq 1)$. Chứng minh rằng:

a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$;

b) $f\left(x^\alpha\right)=\alpha f(x)$.

Lời giải

a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_a\dfrac{1}{x}=-\log_a x=-f(x)$.

b) $f\left(x^\alpha\right)=\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x=\alpha f(x)$.

Câu 27. So sánh các cặp số sau:

a) $0,75^{-0,1}$ và $0,75^{-0,2}$;

b) $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[5]{8}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}$ và $\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$

Lời giải

a) Do $0,75<1$ nên hàm số $y=0,75^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $-0,1>-0,2$ nên $0,75^{-0,1}<0,75^{-0,2}$.

b) Ta có: $\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}};\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$.

Do $2>1$ nên hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\dfrac{2}{3}>\dfrac{3}{5}$ nên

$2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$ hay $\sqrt[3]{4}>\sqrt[5]{8}$

c) Ta có: $\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}};\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Do $\dfrac{1}{3}<1$ nên hàm số $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}$ nên

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ hay $\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$.

Câu 28. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{0,2}\pi$ và $\log_{0,2}3$;

b) $4\log_3 2$ và $3\log_3\sqrt[3]{15}$.

Lời giải

a) Hàm số $y=\log_{0,2}x$ có cơ số $0,2<1$ nên nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $\pi>3$ nên $\log_{0,2}\pi<\log_{0,2}3$.

b) Ta có $4\log_3 2=\log_3 2^4=\log_3 16;3\log_3\sqrt[3]{15}=\log_3(\sqrt[3]{15})^3=\log_3 15$.

Hàm số $y=\log_3 x$ có cơ số $3>1$ nên đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $16>15$ nên $\log_3 16>\log_3 15$ hay $4\log_3 2>3\log_3 \sqrt[3]{15}$.

Câu 29. So sánh các cặp số sau:

a) $1,04^{1,7}$ và $1,04^{2}$;

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

c) $1,2^{0,3}$ và $0,9^{1,8}$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}$ và $3^{-0,2}$.

Lời giải

a) $1,04^{1,7}<1,04^{2}$;

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$

c) $1,2^{0,3}>1>0,9^{1,8}$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}>1>3^{-0.2}$.

Câu 30. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt[5]{27}$;

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{4}$ và $\left(\frac{1}{27}\right)^{3}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ và $\sqrt[5]{25}$

d) $\sqrt[9]{0,7^{10}}$ và $\sqrt[10]{0,7^{9}}$.

Lời giải

a) $3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{3}{5}}$ hay $\sqrt{3}<\sqrt[5]{27}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{8}>\left(\frac{1}{3}\right)^{9}$ hay $\left(\frac{1}{9}\right)^{4}>\left(\frac{1}{27}\right)^{3}$;

c) $5^{-\frac{1}{3}}<5^{\frac{2}{5}}$ hay $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}<\sqrt[5]{25}$

d) $0,7^{\frac{10}{9}}<0,7^{\frac{9}{10}}$ hay $\sqrt[9]{0,7^{10}}<\sqrt[10]{0,7^{9}}$.

Câu 31. So sánh các cặp số sau:

a) $\log 4,9$ và $\log 5,2$;

b) $\log_{0,3} 0,7$ và $\log_{0,3} 0,8$;

c) $\log_{\pi} 3$ và $\log_3 \pi$.

Lời giải

a) $\log 4,9<\log 5,2$;

b) $\log_{0,3} 0,7>\log_{0,3} 0,8$;

c) $\log_{\pi} 3<1<\log_3 \pi$.

Câu 32. So sánh các cặp số sau:

a) $2\log_{0,6} 5$ và $3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$;

b) $6\log_5 2$ và $2\log_5 6$;

c) $\frac{1}{2}\log_2 121$ và $2\log_2 2\sqrt{3}$;

d) $2\log_3 7$ và $6\log_9 4$.

Lời giải

a) $\log_{0,6} 25 < \log_{0,6} 24$ hay $2\log_{0,6} 5 < 3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$;

b) $\log_5 64 > \log_5 36$ hay $6\log_5 2 > 2\log_5 6$;

c) $\log_2 11 < \log_2 12$ hay $\frac{1}{2}\log_2 121 < 2\log_2 2\sqrt{3}$;

d) $\log_3 49 < \log_3 64$ hay $2\log_3 7 < 6\log_9 4$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

a) Với a, b là hai số thực thoả mãn $a + b = 1$. Tính $f(a) + f(b)$.

b) Tính tổng: $S = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \ldots + f\left(\frac{2022}{2023}\right)$.

Lời giải

a) Ta có:

$$f(a) + f(b) = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^b}{9^b + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{3}{3 + 9^a} = 1.$$

b) Ta thấy: $\frac{1}{2023} + \frac{2022}{2023} = 1, \frac{2}{2023} + \frac{2021}{2023} = 1, \ldots$

Theo câu a, ta có: $f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) = 1, f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right) = 1, \ldots$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \ldots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2022}{2023}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right)\right] + \ldots \\ &+ \left[f\left(\frac{1011}{2023}\right) + f\left(\frac{1012}{2023}\right)\right] \\ &= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{1011 \text{ s? } 1} = 1011. \end{aligned}$$

Câu 34. Ta định nghĩa các hàm sin hyperbolic và hàm côsin hyperbolic như sau:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right); \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Chứng minh rằng:

a) $\sinh x$ là hàm số lẻ;

b) $\cosh x$ là hàm số chẵn;

c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ với mọi x.

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^x\right) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, sinh x là hàm số lẻ.

b) Ta có: $g(x) = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^x\right) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\cosh x$ là hàm số chẵn.

c) Ta có: $(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\frac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot 2e^{-x}\cdot 2e^x=1$.

Câu 35. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y=f(x)=2^x$ trên đoạn $[-2;3]$;

b) $y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải

a) Hàm số $y=f(x)=2^x$ có cơ số $2>1$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$\max_{x\in[-2;3]} y=f(3)=2^3=8$ và $\min_{x\in[-2;3]} y=f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$.

b) Với $-1\le x\le 2$, ta có $-3\le 2x-1\le 3$.

Hàm số $y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ có cơ số $\frac{1}{3}<1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ hay $27\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\ge\frac{1}{27}$. Từ đó, ta có: $\max_{x\in[-1;2]} y=27$ và $\min_{x\in[-1;2]} y=\frac{1}{27}$.

Câu 36. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y=f(x)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$ trên đoạn $[-1;4]$;

b) $y=f(x)=\frac{1}{3^x}$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

a) $\max_{x\in[-1;4]} y=f(4)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^4=\frac{25}{16}$; $\min_{x\in[-1;4]} y=f(-1)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3^x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ có cơ số $\frac{1}{3}<1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\max_{x\in[-2;2]} y=f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$ và $\min_{x\in[-2;2]} y=f(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

Câu 37. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y=f(x)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3};3\right]$;

b) $y=f(x)=\log_2(x+1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

Lời giải

a) $\max_{x\in\left[\frac{1}{3};3\right]} y=f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{3}=2$ và $\min_{x\in\left[\frac{1}{3};3\right]} y=f(3)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}3=-2$.

b) $\max_{x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]} y=f(3)=\log_2 4=2$ và $\min_{x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]} y=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 38. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Khối lượng vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy sau t giờ kể từ thời điểm ban đầu được cho bởi công thức $M(t)=50.1,06^t\,(g)$.

(Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 101)

a) Tìm khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuôi cấy (gọi là khối lương ban đầu).
b) Tính khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ và sau 10 giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
c) Khối lượng vi khuẩn tăng dần hay giảm dần theo thời gian? Tại sao?

Lời giải

a) Khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuối cấy là: $M(0)=50.1,06^0=50$

b) Khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ là: $M(2)=50.1,06^2=56,18$

Khối lượng vi khuẩn sau 10 giờ là: $M(10)=50.1,06^{10}=89,54$

c) Do 1,06 > 1 nên hàm số $M(t)$ đồng biến

Do đó, khối lượng vi khuẩn tăng dần theo thời gian

Câu 39. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Mức cường độ âm được tính theo công thức như ở Ví dụ 6.

a) Tiếng thì thầm có cường độ âm $I=10^{-10}W/m^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
b) Để nghe trong thời gian dài mà không gây hại cho tai, âm thanh phải có cường độ không vượt quá 100000 lần cường độ của tiếng thì thầm. Âm thanh không gây hại cho tai khi nghe trong thời gian dài phải ở mức cường độ âm như thế nào?

Lời giải

a) Vì 1,3 > 1 nên hàm số $y=1,3^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $0,7>0,6$ nên $1,3^{0,7}>1,3^{0,6}$

b) Vì $0,75<1$ nên hàm số $y=0,75^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-2,3>-2,4$ nên $0,75^{-2,3}>0,75^{-2,4}$

Câu 40. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I=I_0\cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số $(a>0)$ và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: https://www.britannica.com/science/seawer/Optical-properties)

a) Có thể khẳng định rằng $0<a<1$ không? Giải thích.
b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a.
c) Tại độ sâu $20m$, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải

a) Vì cường độ ánh sáng giảm dần theo độ sâu, tức là hàm số $I=I_0a^d$ nghịch biến

Do đó, $0<a<1$

b) Khi $d=1$, ta có $0,95I_0=I_0\cdot a^1$

Suy ra a $=0,95$

c) Khi $d=20$. Ta có $I=I_0\cdot 0,95^{20}=0,36I_0$

Vậy tại độ sâu $20m$ thì $I=36$

Câu 41. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Công thức $h=-19,4\cdot\log\frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6)

a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?

b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

a) Khi $P=\frac{1}{2}P_0$ thì $h=-19,4.\log\frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0}=5,84(km)$

b) Ta có $P_A=\frac{4}{5}P_B$

Ta có:

$h_A-h_B=-19,4.\log\frac{P_A}{P_0}+19,4.\log\frac{P_B}{P_0}=-19,4\left(\log\frac{P_A}{P_0}-\log\frac{P_B}{P_0}\right)$

$=-19,4\log\frac{\frac{P_A}{P_0}}{\frac{P_B}{P_0}}=-19,4.\log\frac{P_A}{P_B}=-19,4.\log\frac{4}{5}=1,88$

Vậy ngọn núi A cao hơn ngon núi B $1,88$ km

Câu 42. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t)=c\left(1-e^{-kt}\right)$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k=0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Sau 2 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$f(2)=25\cdot\left(1-e^{-0,2\cdot 2}\right)\approx 8$ (đơn vị kiến thức).

Sau 8 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$f(8)=25\cdot\left(1-e^{-0,2\cdot 8}\right)\approx 20$ (đơn vị kiến thức).

Câu 43. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $6\%/$ năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức $y=\log_{1,06}\left(\frac{x}{10}\right)$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng sau ít nhất số năm là:

$y=\log_{1,06}\left(\frac{15}{10}\right)\approx 7$ (nam).

Câu 44. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ${}_{6}^{14}C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ${}_{6}^{14}C$ giảm đi một nửa.

a) Gọi m_0 là khối lượng của ${}_{6}^{14}C$ tại thời điểm $t=0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của ${}_{6}^{14}C$ tại thời điểm t (năm).

b) Một cây còn sống có lượng ${}_{6}^{14}C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}_{6}^{14}C$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng ${}_{6}^{14}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

a) $m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$

b) Tỉ lệ phần trăm lượng ${}_{6}^{14}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là:

$\frac{m(2000)}{m_0}\cdot 100\%=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}}\cdot 100\%\approx 78,5\%.$

Câu 45. Mức cường độ âm $L(dB)$ được tính bởi công thức $L=10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó $I\left(W/m^2\right)$ là cường độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ âm từ $10^{-12}\,W/m^2$ đến $10W/m^2$. Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

Lời giải

Mức cường độ âm tai người có thể nghe được từ $0\,dB$ đến $130\,dB$.

Câu 46. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức:

$$m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

trong đó m_0 là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm ban đầu $t=0, m(t)$ là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (là thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết rằng đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã khoảng 9 giờ. Từ khối lượng plutonium-234 ban đầu là $100\,g$, hãy tính khối lượng plutonium-234 còn lại sau:

a) 9 giờ; b) 1 ngày.

(Kết quả tính theo gam và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thay $t=9, T=9, m_0=100$ vào công thức, ta được:

$$m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}=100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{9}}=100\cdot\frac{1}{2}=50(g).$$

b) Do 1 ngày $=24$ giờ nên thay $t=24, T=9, m_0=100$ vào công thức, ta được:

$$m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}=100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{9}}\approx 15,75(g).$$

Câu 47. Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng p truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số sau:

$$p(n)=100\cdot(0,97)^n.$$

a) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?

b) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính?

(Kết quả ở câu a và câu b được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) $p(10)=100\cdot(0,97)^{10}\approx 74\%$.

b) $p(25)=100\cdot(0,97)^{25}\approx 47\%$.

Câu 48. Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:

a) hằng quý;

b) hằng tháng;

c) liên tục.

(Kết quả được tính theo đơn vị triệu đồng và làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Để giải câu a và câu b, ta sử dụng công thức lãi kép theo định kì để tính tổng số tiền thu được $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{t}$, trong đó P là số tiền vốn ban đầu, r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân), n là số kì tính lãi trong một năm và t là số kì gửi.

a) Ta có: $P=120, r=6\%=0,06, n=4, t=20$. Thay vào công thức trên, ta được:

$A=120\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{20}=120\cdot 1,015^{20}\approx 161,623$ (triệu đồng).

b) Ta có: $P=120, r=6\%=0,06, n=12, t=60$. Thay vào công thức trên, ta được:

$A=120\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{60}=120\cdot 1,005^{60}\approx 161,862$ (triệu đồng).

c) Ta sử dụng công thức lãi kép liên tục $A=Pe^{rt}$, ở đây r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân) và t là số năm gửi tiết kiệm.

Ta có: $P=120, r=6\%=0,06, t=5$ nên

$A=120\cdot e^{0,06\cdot 5}=120\cdot e^{0,3}\approx 161,983$ (triệu đồng).

Câu 49. Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t=0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

Lời giải

a) $m(0)=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=25(g)$.

b) $m(2500)=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2500}{1600}}\approx 8,46(g)$.

Câu 50. Trong Vật lí, mức cường độ âm (tính bằng deciben, kí hiệu là dB) được tính bởi công thức $L=10\log\frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0=10^{-12}W/m^2$ là cường độ âm chuẩn, tức là cường độ âm thấp nhất mà tai người có thể nghe được.

a) Tính mức cường độ âm của một cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm là $10^{-7}W/m^2$.

b) Khi cường độ âm tăng lên 1000 lần thì mức cường độ âm (đại lượng đặc trưng cho độ to nhỏ của âm) thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm $10^{-7}W/m^2$ là

$L=10\log\frac{10^{-7}}{10^{-12}}=50(dB)$.

b) Ta có: $10\log\frac{1000I}{I_0}=10\cdot\left(\log 1000+\log\frac{I}{I_0}\right)=30+10\log\frac{I}{I_0}$.

Vậy mức cường độ âm tăng lên $30dB$.

Câu 51. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t)=D_0\cdot a^t(mg)$, trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0<a<1$?

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống $100mg$ thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn $80mg$. Hãy xác định giá trị của D_0 và a.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

Lời giải

a) Do lượng thuốc trong cơ thể giảm dần, nên hàm số $D(t)$ nghịch biến, do đó $0<a<1$.

b) $D_0=100, a=\frac{80}{100}=0,8$.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn $D(5)=100\cdot 0,8^5$. Tỉ lệ lượng thuốc đã giảm so với lượng thuốc ban đầu là $\frac{D_0-D(5)}{D_0}=\frac{100-100\cdot 0,8^5}{100}\approx 0,6723\approx 67,23\%$.