CHỦ ĐỀ 4. GIỚI HẠN HÀM SỐ

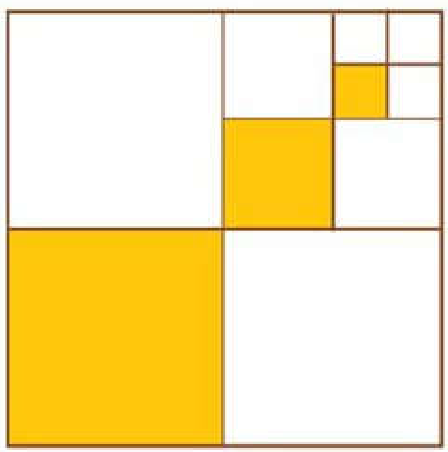
- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

NỘI DUNG CÂU HỎI

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Câu 1. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

Câu 2. Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái $(H.5.2)$.



Hình 5.2

Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

Câu 3. Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc $100\,km/h$, vận tốc của rùa là $1\,km/h$ và khoảng cách ban đầu $a = 100(km)$.

a) Tính thời gian $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2, từ A_2 đến $A_3, \ldots$, từ A_n đến $A_{n+1}, \ldots$

b) Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}, \ldots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.

c) Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

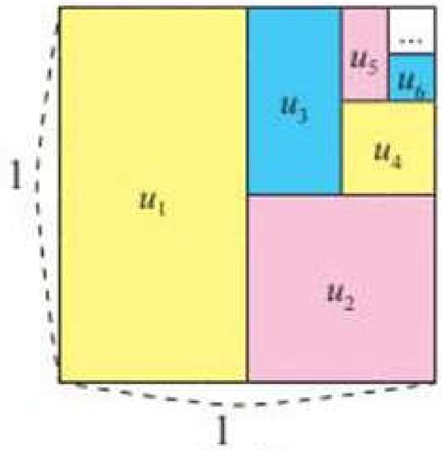
Câu 4. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy với số lượng ban đầu là 50. Sau mỗi chu kì 4 giờ, số lượng của chúng sẽ tăng gấp đôi.

a) Dự đoán công thức tính số vi khuẩn u_n sau chu kì thứ n.

b) Sau bao lâu, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10000 ?

Câu 5. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc $150mg$. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Câu 6. Từ một hình vuông có cạnh bằng 1, tô màu một nửa hình vuông, rồi tô màu một nửa hình còn lại, và cứ tiếp tục như vậy (xem Hình 2).



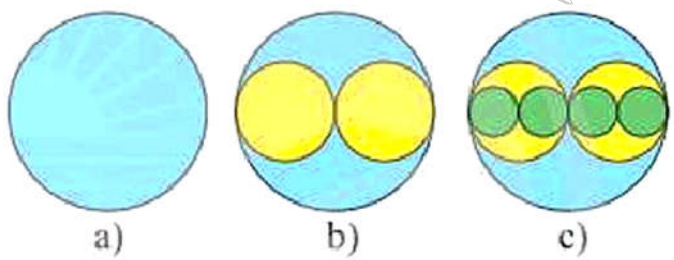
Hình 2

a) Xác định diện tích u_k của phần hình được tô màu lần thứ $k(k=1,2,3,\ldots)$.

b) Tính tổng diện tích S_n của phần hình được tô màu sau lần tô thứ $n(n=1,2,3,\ldots)$.

c) Tìm giới hạn $\lim S_n$ và so sánh giới hạn này với diện tích hình vuông ban đầu.

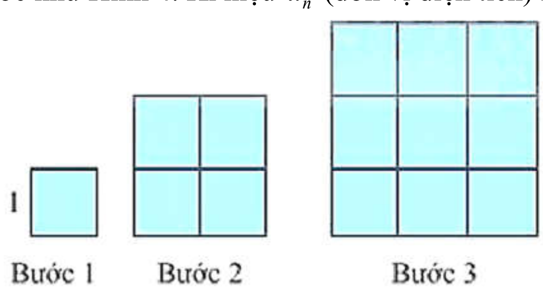
Câu 7. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính $R(cm)$ như Hình $3a$.



Hình 3

Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình $3c$. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.

Câu 8. Dựng một dãy hình vuông bằng cách ghép từ các hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1 đơn vị độ dài) theo các bước như Hình 4. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình vuông dựng được ở bước thứ n.

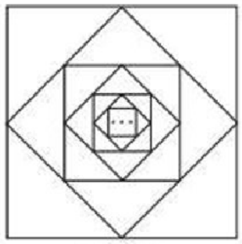


Hình 4

a) Với n như thế nào thì u_n vượt quá $10000;1000000$?

b) Cho hình có diện tích S. Với n như thế nào thì u_n vượt quá S?

Câu 9. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



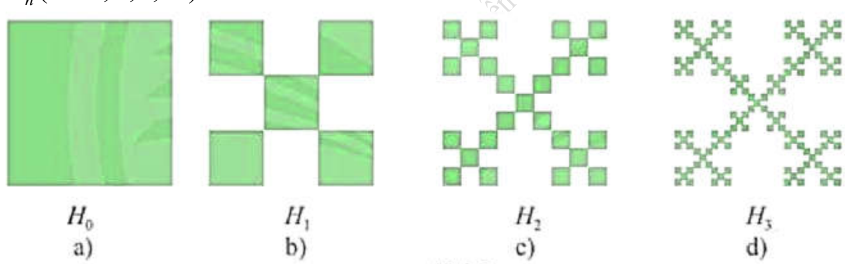
Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính $a_n, S_n (n=1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và $Q_n (n=1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Câu 10. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình $6a$). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình $6b$). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình $6c$). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình $H_n (n=1,2,3,\ldots)$.



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5.5=5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3^2};\ldots$

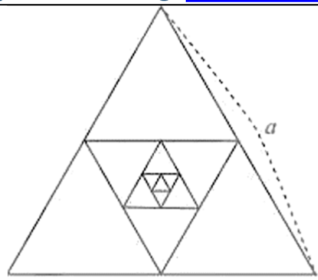
Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ chu vi $\lim p_n$).

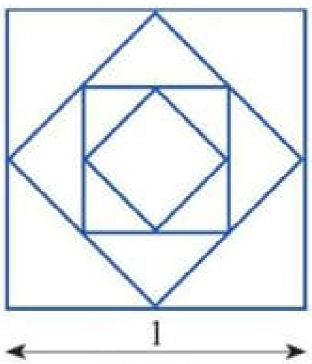
Câu 11. Cho tam giác đều có cạnh bằng a, gọi là tam giác H_1. Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2. Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình 1). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \ldots$.



Hình 1

Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.

Câu 12. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như Hình 3.



Hình 3

Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n;

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Câu 13. Có $1kg$ chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (T được gọi là chu kì bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn $10^{-6}\ g$.

Câu 14. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18).

Hình 18

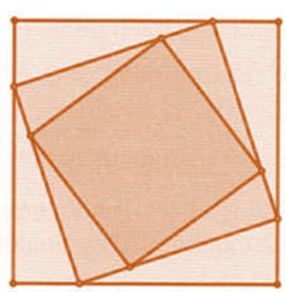
Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

Câu 15. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$ Kí hiệu s_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

a) Tính s_n.

b) Tính tổng $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$

Câu 16. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a. Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2. Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3.

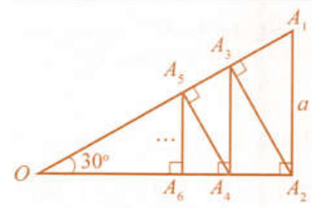


Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$ Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n.

a) Tính s_n.

b) Tính tổng $T = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$

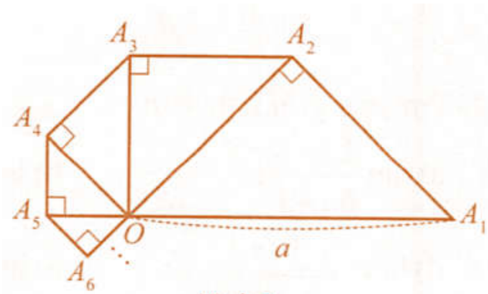
Câu 17. Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại $A_2, A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1; A_3A_4 \perp OA_2; A_4A_5 \perp OA_1; \ldots$ Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo a.



Hình 1

Câu 18. Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với $100m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

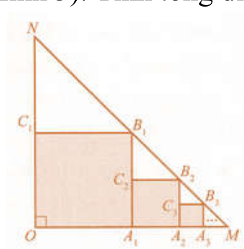
Câu 19. Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a. Bên ngoài tam giác OA_1A_2, vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3. Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3, vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).



Hình 2

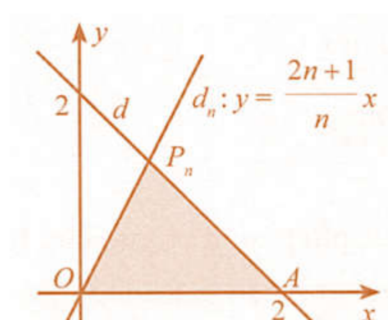
Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\cdots$

Câu 20. Cho tam giác OMN vuông cân tại O, $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN, vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON. Trong tam giác A_1MB_1, vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

Câu 21. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng $d: x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y = \dfrac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n. Tìm $\lim S_n$.



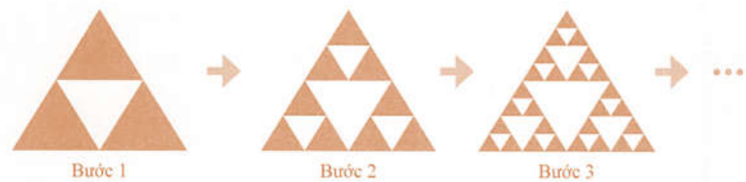
Hình 4

Câu 22. Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1 , ta thực hiện lần lượt các bước như sau:

Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).

Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n, bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$). Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Hình 1

Câu 23. Biết rằng, từ vị trí A, một mũi tên bay với tốc độ $10 m/s$ hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng $10m$ (Hình 2). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B, trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB. Tiếp theo, nó phải đến trung điểm A_2 của A_1B. Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B. Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B".

Hình 2

Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Câu 24. Một mẫu chất phóng xạ $_{84}^{210}Po$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42(mg)$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T = 138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kì bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kì bán rã.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Câu 25. Từ độ cao $100 m$, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n).

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n. Tính S_n, nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

Câu 26. Cho tam giác T_1 có diện tích bằng 1 . Giả sử có tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1, tam giác T_3 đồng dạng với tam giác $T_2, \ldots$, tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}(k > 1)$.

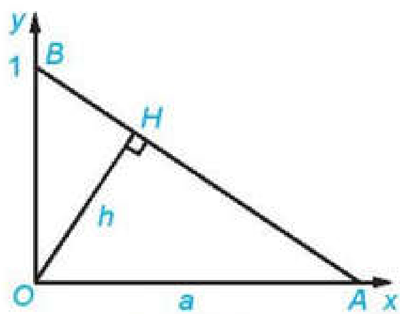
Khi n tiến tới vô cùng, tính tổng diện tích của tất cả các tam giác theo k.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 27. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$,

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi Albert Einstein $(1879-1955)$ vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Câu 28. Cho tam giác vuông OAB với $A=(a;0)$ và $B=(0;1)$ như Hình 5.5. Đường cao OH có độ dài là h.



Hình 5.5

a) Tính h theo a.

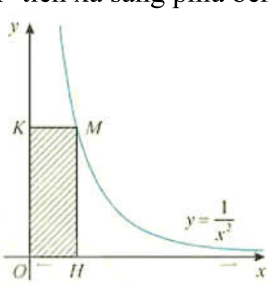
b) Khi điểm A dịch chuyển về O, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

Câu 29. Cho hàm số $H(t)=\begin{cases}0 \text{ nếu } t<0\\ 1 \text{ nếu } t\ge 0\end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$).

Tính $\lim\limits_{t\to 0^+} H(t)$ và $\lim\limits_{t\to 0^-} H(t)$.

Câu 30. Quan sát hình bên, cho biết hình chữ nhật $OHMK$ thay đổi nhưng điểm M luôn nằm trên đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{x^2}(x>0)$. Diện tích hình chữ nhật sẽ thay đổi như thế nào khi điểm H tiến gần đến gốc toạ độ? Khi H tiến xa sang phía bên phải thì sao?

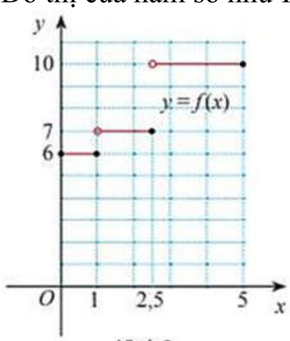


Câu 31. Giá cước vận chuyển bưu kiện giữa hai thành phố do một đơn vị cung cấp được cho bởi bảng sau:

Khối lượng bưu kiện (100 gam)	Giá cước cận vùng (nghìn đồng)
đến 1	6
trên 1 đến 2,5	7
từ 2,5 đến 5	10
...	...

Nếu chỉ xét trên khoảng từ 0 đến 5 (tính theo 100 gam) thì hàm số giá cước (tính theo nghìn đồng) xác định như sau: $f(x)=\begin{cases}6 & \text{khi } x\in(0;1]\\ 7 & \text{khi } x\in(1;2,5]\\ 10 & \text{khi } x\in(2,5;5].\end{cases}$

Đồ thị của hàm số như Hình 2.



Hình 2

a) Giả sử $\left(x_n\right)$ là dãy số bất kì sao cho $x_n\in(1;2,5)$ và $\lim x_n=1$. Tìm $\lim f\left(x_n\right)$.

b) Giả sử $\left(x_n'\right)$ là dãy số bất kì sao cho $\left(x_n'\right)\in(0;1)$ và $\lim x_n'=1$. Tìm $\lim f\left(x_n'\right)$.

c) Nhận xét về kết quả ở a) và b).

Câu 32. Một cái hồ đang chứa $200m^3$ nước mặn với nồng độ muối $10kg/m^3$. Người ta ngọt hoá nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $2m^3$ / phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

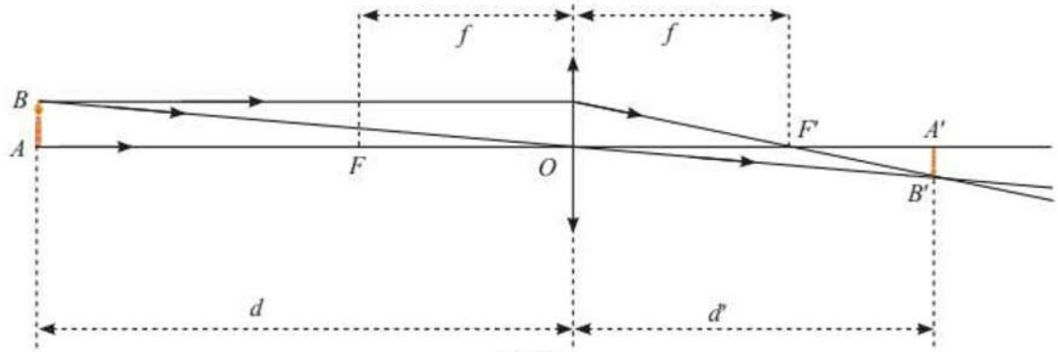
b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Câu 33. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t\to+\infty$.

Câu 34. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f>0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (Hình 5).



Hình 5

Ta có công thức: $\frac{1}{d}+\frac{1}{d^{'}}=\frac{1}{f}$ hay $d^{'}=\frac{df}{d-f}$.

Xét hàm số $g(d)=\frac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim\limits_{d\to f^{+}} g(d)$;

b) $\lim\limits_{d\to+\infty} g(d)$.

Câu 35. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\frac{50t}{t+4}(t\geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 36. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x)=50000+105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

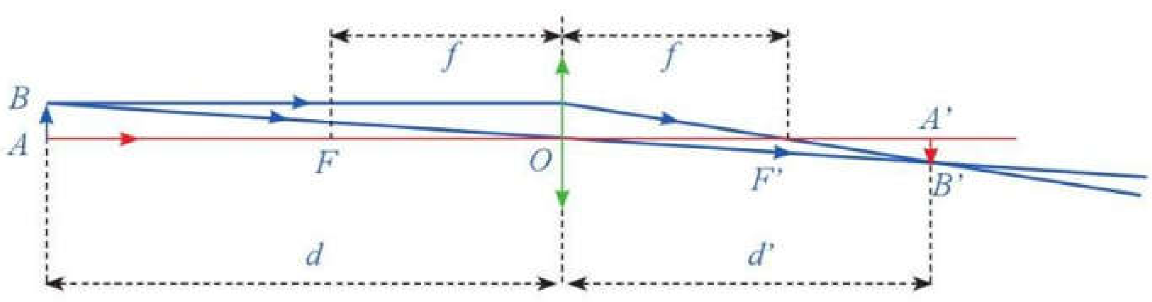
b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 37. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1,\ldots,$ tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n,\ldots$ Gọi $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$ và $S_1,S_2,\ldots,S_n,\ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1,A_2B_2C_2,\ldots,A_nB_nC_n,\ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots$ và $S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots$

Câu 38. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A^{'}B^{'}$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f}$.



Hình 19

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

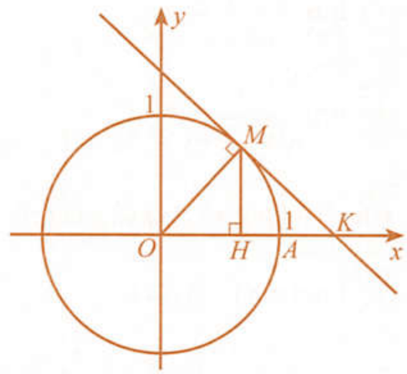
b) Tìm $\lim_{d\to f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d\to f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d\to f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Câu 39. Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

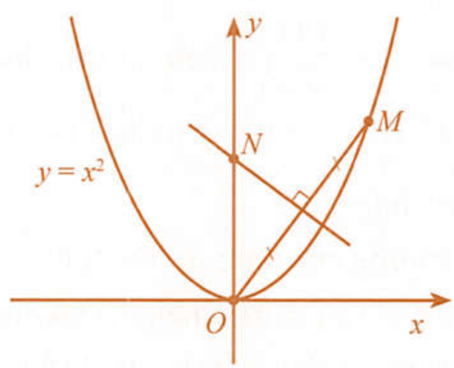
b) Tính $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Câu 40. Cho điểm $M\left(t;\sqrt{1-t^2}\right), 0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



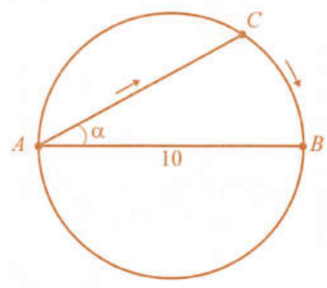
Hình 1

Câu 41. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M\left(t;t^2\right), t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N. Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O?



Hình 2

Câu 42. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10m$, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình 4).



Hình 4

Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y=S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim_{\alpha\to 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

Câu 43. Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v)=\frac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$, trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v\to 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 44. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t)=45t^2-t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $V_{tb}=\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$. Tính $\lim_{t\to 10}\frac{g(t)-g(10)}{t-10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Câu 45. Một bể chứa $5000l$ nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ $25l$ / phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị: g/l) là $C(t)=\frac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Câu 46. Hàm Heaviside có dạng $H(t)=\begin{cases}0 \text{ nếu } t<0\\ 1 \text{ nếu } t\ge 0\end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$.

Tính $\lim_{t\to 0^-} H(t), \lim_{t\to 0^+} H(t)$.

Câu 47. Một cái hồ chứa $600l$ nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối $30\,g/l$ vào hồ với tốc độ $15l$ / phút.

a) Tính nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Nồng độ muối trong hồ sẽ thế nào khi t dần về dương vô cùng?

HÀM SỐ LIÊN TỤC

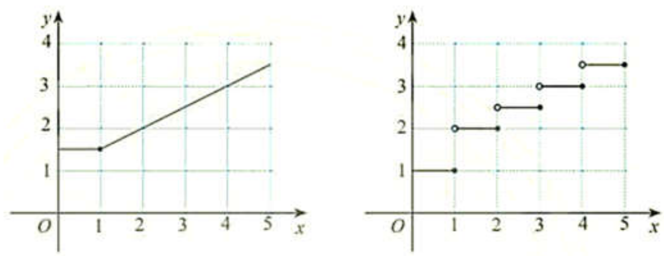
Câu 48. Một người lái xe từ địa điểm A đến địa điểm B trong thời gian 3 giờ. Biết quãng đường từ A đến B dài $180\,km$. Chứng tỏ rằng có ít nhất một thời điểm trên hành trình, xe chạy với vận tốc $60\,km/h$.

Câu 49. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.
b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Câu 50. Hai đồ thị ở hai hình dưới đây cho biết phí gửi xe y của ô tô con (tính theo 10 nghìn đồng) theo thời gian gửi x (tính theo giờ) của hai bãi xe. Có nhận xét gì về sự thay đổi của số tiền phí phải trả theo thời gian gửi ở mỗi bãi xe?



a) Bãi xe A b) Bãi xe B

Câu 51. Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau: $P(x)=\begin{cases}4,5x & \text{khi } 0<x\le 400\\ 4x+k & \text{khi } x>400\end{cases}$ (k là một hằng số)

a) Với $k=0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0;+\infty)$.
b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$?

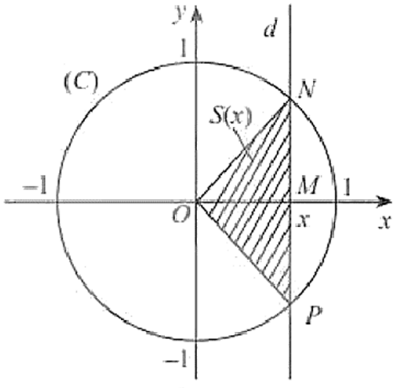
Câu 52. Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường $x(km)$ cho loại xe 4 chỗ như sau:

Hình 5

$$T(x)=\begin{cases}10000 & \text{khi } 0<x\le 0,7\\ 10000+(x-0,7).14000 & \text{khi } 0,7<x\le 20\\ 280200+(x-20).12000 & \text{khi } x>20.\end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Câu 53. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ $x(-1<x<1)$ và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem Hình 6).



Hình 6

a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP.

b) Hàm số $y=S(x)$ có liên tục trên $(-1;1)$ không? Giải thich.

c) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} S(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1^+} S(x)$.

Câu 54. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x)=\begin{cases} 60000 \text{ khi } 0<x\le 2 \\ 100000 \text{ khi } 2<x\le 4 \\ 200000 \text{ khi } 4<x\le 24 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

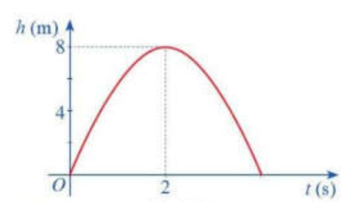
Câu 55. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r)=\begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0<r<R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r\ge R, \end{cases}$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0;+\infty)$ không?

Câu 56. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ $10^\circ C$, mỗi phút tăng $2^\circ C$ trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút $3^\circ C$ trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ C$) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng $T(t)=\begin{cases} 10+2t & \text{khi } 0\le t\le 60 \\ k-3t & \text{khi } 60<t\le 100 \end{cases}$ (k là hằng số).

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k.

Câu 57. Hình 16 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t)=-2t^2+8t$.



Hình 16

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim\limits_{t\to 2}\left(-2t^2+8t\right)$.

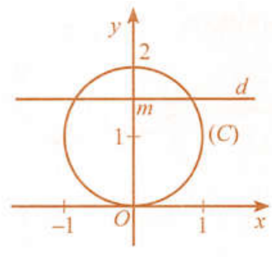
Câu 58. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

Câu 59. Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0<t\le 4$). Viết công thức xác định hàm số $y=P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0;4]$.

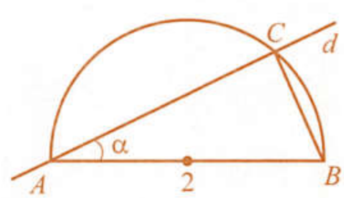
Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=1$. Với mỗi số thực m, gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y=m$ với đường tròn (C). Viết công thức xác định hàm số $y=Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Hình 2

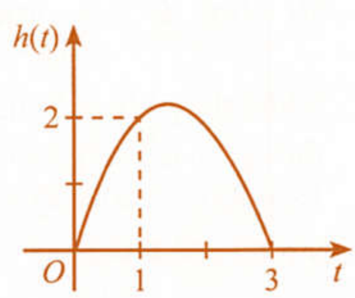
Câu 61. Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A, cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} S(\alpha), \lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Hình 3

Câu 62. Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t)=at^2+bt$.



Hình 5

a) Dựa vào đồ thị, tìm a,b.

b) Chứng minh rằng hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0;3)$.

c) Với m thuộc $(0;3)$, tính $\lim\limits_{t\to m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 63. Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

a) Vẽ đồ thị hàm số $C=C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số đó có liên tục trên $[0;+\infty)$ không?

c) Giá trị $\lim_{t\to 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?

Câu 64. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến $250g$ như trong bảng sau:

Khối lượng đến $250g$	Mức cước (đồng)
Đến $20g$	4000
Trên $20g$ đến $100g$	6000
Trên $100g$ đến $250g$	8000

a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.

b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Câu 65. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x)=\begin{cases}60000 \text{ khi } 0<x\le 2\\ 100000 \text{ khi } 2<x\le 4\\ 200000 \text{ khi } 4<x<24\end{cases}$$. Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Câu 66. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t)=\begin{cases}10 & \text{khi } 0\le t\le 5\\ t^2-5t+10 & \text{khi } t>5\end{cases}$, trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Hỏi hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t=5$ hay không?

LỜI GIẢI THAM KHẢO

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Câu 1. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

Lời giải

Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống mặt sàn, sau lần chạm sàn đầu tiên, quả bỏng nảy lên một độ cao là $u_1=\frac{2}{3}\cdot 5$.

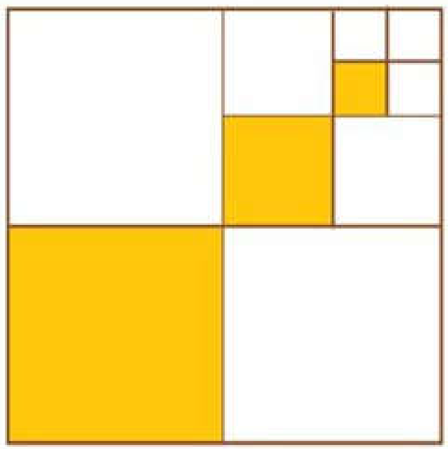
Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao u_1 xuống mặt sàn và nảy lên độ cao là $u_2=\frac{2}{3}u_1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 5\right)=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao u_2 xuống mặt sàn và nảy lên độ cao là $u_3=\frac{2}{3}u_2=\frac{2}{3}\cdot\left(5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$ và cứ tiếp tục như vậy.

Sau lần chạm sàn thứ n, quả bóng nảy lên độ cao là $u_n=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2. Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái $(H.5.2)$.



Hình 5.2

Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

a) Tính tổng $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

b) Tìm $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Lời giải

a) Ta có: u_1 là độ dài cạnh của hình vuông được tô màu tạo từ việc chia hình vuông cạnh 1 thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau, do đó $u_1=\frac{1}{2}$.

Cứ tiếp tục như thế, ta được: $u_2=\frac{1}{2}u_1,u_3=\frac{1}{2}u_2,\ldots,u_n=\frac{1}{2}u_{n-1},\ldots$

Do vậy, độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1=\frac{1}{2}$ và công bội $q=\frac{1}{2}$.

Do đó, tổng của n số hạng đầu là $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Ta có: $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-0=1$.

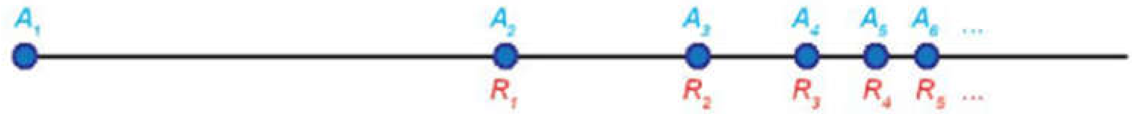
Câu 3. Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc $100\,km/h$, vận tốc của rùa là $1\,km/h$ và khoảng cách ban đầu $a=100(km)$.

a) Tính thời gian $t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2, từ A_2 đến $A_3,\ldots$, từ A_n đến $A_{n+1},\ldots$

b) Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}, \ldots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.

c) Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

Lời giải



Ta có: Achilles chạy với vận tốc $100\,km/h$, vận tốc của rùa là $1\,km/h$.

a) Để chạy hết quãng đường từ A_1 đến A_2 với $A_1A_2 = a = 100(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_1 = \frac{100}{100} = 1(h)$. Với thời gian t_1 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_2A_3 = 1(km)$.

Để chạy hết quãng đường từ A_2 đến A_3 với $A_2A_3 = 1(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_2 = \frac{1}{100}(h)$. Với thời gian t_2 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_3A_4 = \frac{1}{100}(km)$.

Tiếp tục như vậy, để chạy hết quãng đường từ A_n đến A_n+1 với $A_nA_n+1 = \frac{1}{100^{n-2}}(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_n = \frac{1}{100^{n-1}}(h)\ldots$

b) Tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_n+1, \ldots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa là

$$T = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^{n-1}} + \frac{1}{100^n} + \ldots(h)$$

Đó là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, công bội, nên ta có

$$T = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}(h)$$

Như vậy, Achilles đuổi kịp rùa sau $1\frac{1}{99}$ giờ.

c) Nghịch lý Zeno chỉ đúng với điều kiện là tổng thời gian Achilles chạy hết các quãng đường để đuổi kịp rùa phải là vô hạn, còn nếu nó hữu hạn thì đó chính là khoảng thời gian mà anh bắt kịp được rùa.

Câu 4. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy với số lượng ban đầu là 50. Sau mỗi chu kì 4 giờ, số lượng của chúng sẽ tăng gấp đôi.

a) Dự đoán công thức tính số vi khuẩn u_n sau chu kì thứ n.

b) Sau bao lâu, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10000 ?

Lời giải

a) Ta có số lượng ban đầu của vi khuẩn là $u_0 = 50$.

Sau chu kì thứ nhất, số lượng vi khuẩn là $u_1 = 2u_0 = 2.50$.

Sau chu kì thứ hai, số lượng vi khuẩn là $u_2 = 2u_1 = 2 \cdot 2 \cdot 50 = 2^2 \cdot 50$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta dự đoán được sau chu kì thứ n, số lượng vi khuẩn là $u_n = 2^n.50$.

b) Giả sử sau chu kì thứ k, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10000.

Khi đó ta có $u_k = 2^k.50 > 10000 \Leftrightarrow 2^k > 200$.

Câu 5. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc $150mg$. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày đầu tiên là $150mg$.

Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%.

Do đó, lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ hai là $150+150\cdot 5\%=150(1+0,05)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ ba là $150+150(1+0,05)\cdot 5\%=150+150\left(0,05+0,05^2\right)=150\left(1+0,05+0,05^2\right)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ tư là $150+150\left(1+0,05+0,05^2\right)\cdot 5\%=150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3\right)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ năm là $150+150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3\right)\cdot 5\%=150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4\right)$

$=157,8946875(mg)$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài là

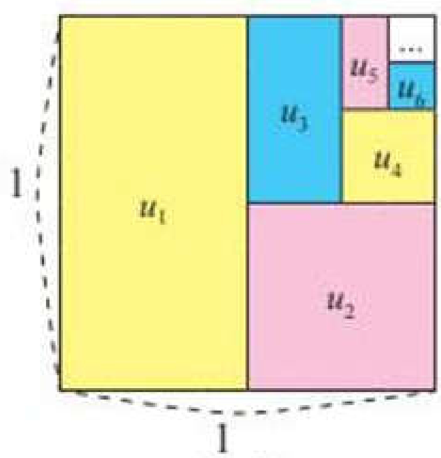
$S=150\left(1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4+\ldots\right)$

Lại có $1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=0,05$.

Do đó, $1+0,05+0,05^2+0,05^3+0,05^4+\ldots=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-0,05}=\frac{20}{19}$.

Suy ra $S=150\cdot\frac{20}{19}=\frac{400}{361}$.

Câu 6. Từ một hình vuông có cạnh bằng 1, tô màu một nửa hình vuông, rồi tô màu một nửa hình còn lại, và cứ tiếp tục như vậy (xem Hình 2).



Hình 2

a) Xác định diện tích u_k của phần hình được tô màu lần thứ $k(k=1,2,3,\ldots)$.

b) Tính tổng diện tích S_n của phần hình được tô màu sau lần tô thứ $n(n=1,2,3,\ldots)$.

c) Tìm giới hạn $\lim S_n$ và so sánh giới hạn này với diện tích hình vuông ban đầu.

Lời giải:

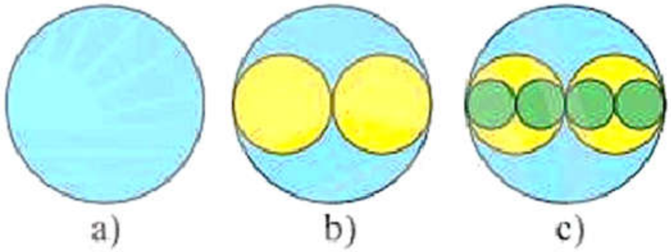
a) $u_k=\frac{1}{2^k}$

b) $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$

c) $\lim S_n = \lim\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \lim 1 - \lim\frac{1}{2^n} = 1-0=1$

Ta thấy $\lim S_n$ bằng diện tích hình vuông ban đầu

Câu 7. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính $R(cm)$ như Hình $3a$.



Hình 3

Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình $3c$. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.

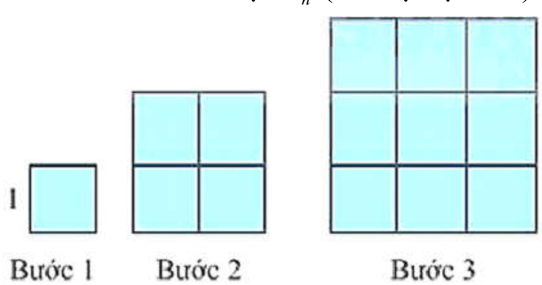
Lời giải:

Tổng diện tích các hình tròn là: $S = R^2 + 2\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \ldots = R^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$

Ta có: $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Vậy $S = 2R^2$

Câu 8. Dựng một dãy hình vuông bằng cách ghép từ các hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1 đơn vị độ dài) theo các bước như Hình 4. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình vuông dựng được ở bước thứ n.



Hình 4

a) Với n như thế nào thì u_n vượt quá $10000;1000000$?

b) Cho hình có diện tích S. Với n như thế nào thì u_n vượt quá S?

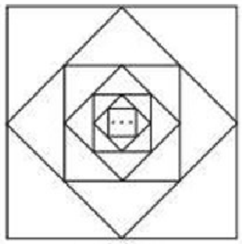
Lời giải:

Ta có: $u_n = n^2$

a) $u_n > 10000$ khi $n > 100$, $u_n > 1000000$ khi $n > 1000$

b) $u_n > S$ khi $n > \sqrt{S}$

Câu 9. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính $a_n, S_n (n=1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và $Q_n (n=1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

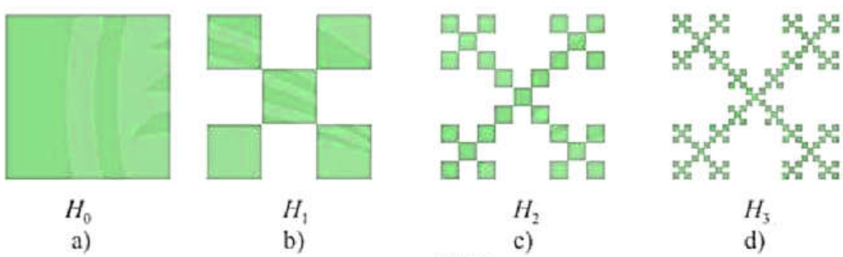
Lời giải:

a) $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$; $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

b) $p_n=4\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$; $Q_n=4+4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+4\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+4\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}=4\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\approx 13,66$

Câu 10. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình $6a$). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình $6b$). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình $6c$). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình $H_n (n=1,2,3,\ldots)$.



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5.5=5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3^2};\ldots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

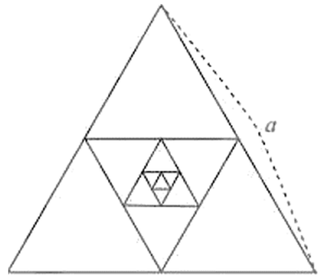
(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ chu vi $\lim p_n$).

Lời giải:

a) $S_n=5^n\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)^2=\frac{5^n}{9^n}=\left(\frac{5}{9}\right)^n$; $\lim S_n=\lim\left(\frac{5}{9}\right)^n=0$

b) $p_n = 5^n \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^n} = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$; $\lim p_n = \lim 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$

Câu 11. Cho tam giác đều có cạnh bằng a, gọi là tam giác H_1. Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2. Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình 1). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \ldots$.



Hình 1

Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.

Lời giải:

Cạnh của các tam giác $H_1, H_2, H_3, \ldots$ lần lượt là: $a; \frac{1}{2}a, \frac{1}{2^2}a; \ldots$.

Tổng chu vi của các tam giác là:

$$C = 3 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{2}a + 3 \cdot \frac{1}{2^2}a + \ldots = 3a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = 3a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

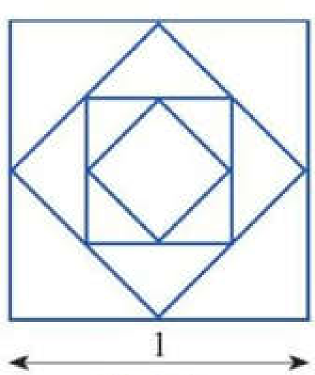
Diện tích tam giác H_1 là $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Diện tích tam giác H_2 bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác H_1; Diện tích tam giác H_3 bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác H_2;...

Tổng diện tích các tam giác là:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

Câu 12. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như Hình 3.



Hình 3

Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n;

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Lời giải

a) Gọi S_n là diện tích của hình vuông thứ n.

Ta có: $S_1=1; S_2=\frac{1}{2}; S_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2; \ldots$

Dãy $\left(S_n\right)$ lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $S_1=1$ và công bội $q=\frac{1}{2}$ có công thức tổng quát là:

$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Ta có: $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|<1$ nên dãy $\left(S_n\right)$ trên lập thành một cấp số nhân lùi hạn nên ta có:

$S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Vậy tổng diện tích của các hình vuông là 2 (đvdt).

Câu 13. Có $1kg$ chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T=24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (T được gọi là chu kì bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số $\left(u_n\right)$.

b) Chứng minh rằng $\left(u_n\right)$ có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn $10^{-6}g$.

Lời giải

a) Ta có: $u_1=1; u_2=\frac{1}{2}; u_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2; \ldots$

Suy ra $\left(u_n\right)$ lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=1$ và $q=\frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là: $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Ta có: $\lim u_n=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$.

c) Đổi $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} kg=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 10^3 g$

Để chất phóng xạ bé hơn $10^{-6}(g)$ thì $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 10^3<10^{-6} \Leftrightarrow n>31$.

Vậy cần ít nhất 30 chu kì tương ứng với 720000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Câu 14. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18).

Hình 18

Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

Lời giải:

Gọi (u_n) là dãy số thể hiện quãng đường di chuyển của quả bóng sau mỗi lần chạm đất.

Ta có: $u_1 = 55,8, u_2 = \frac{1}{10} \cdot u_1; u_3 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot u_1; \ldots; u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \cdot u_1$.

Khi đó dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 55,8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$ thỏa mãn $|q| < 1$.

Suy ra $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{55,8}{1 - \frac{1}{10}} = 62(m)$.

Vậy tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần là $62\,m$.

Câu 15. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$ Kí hiệu s_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

a) Tính s_n.

b) Tính tổng $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$

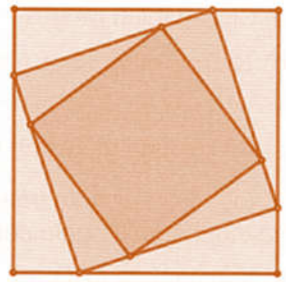
Lời giải

Theo cách xác định tam giác $A_2B_2C_2$, ta có $s_2 = \frac{1}{4}s_1$. Tương tự, $s_3 = \frac{1}{4}s_2, \ldots,$

$s_n = \frac{1}{4}s_{n-1} \Rightarrow s_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} s_1 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Từ đó $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$.

Câu 16. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a. Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2. Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3.



Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$ Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n.

a) Tính s_n.

b) Tính tổng $T = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$

Lời giải

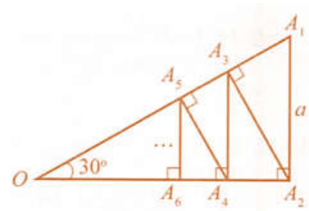
Cạnh của hình vuông H_2 là $a_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{8}}a$.

Khi đó $s_2 = \frac{5}{8}a^2 = \frac{5}{8}s_1$.

Lí luận tương tự, ta có $s_3 = \frac{5}{8}s_2, \ldots, s_n = \frac{5}{8}s_{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} a^2$. Từ đó

$$T = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots = a^2\left[1 + \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} + \cdots\right] = \frac{8a^2}{3}.$$

Câu 17. Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại $A_2, A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1; A_3A_4 \perp OA_2; A_4A_5 \perp OA_1; \ldots$ Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo a.



Hình 1

Giải

Các góc $\widehat{A_1A_2A_3}, \widehat{A_2A_3A_4}, \widehat{A_3A_4A_5}, \ldots$ đều bằng góc $\widehat{A_1OA_2}$ nên đều có số đo 30°.

$$A_2A_3 = A_1A_2 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_3A_4 = A_2A_3 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

$$A_4A_5 = A_3A_4 \cdot \cos 30^\circ = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; \ldots$$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

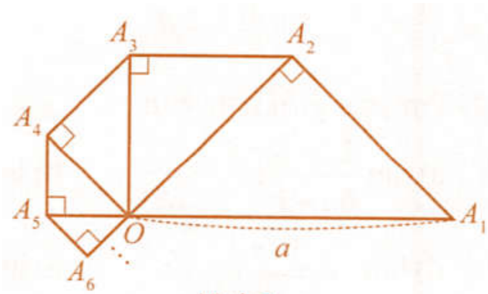
Từ đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\ldots$ là $l=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2}=a(3+2\sqrt{3})$

Câu 18. Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với $100m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải

$100+100\cdot 0,8+100\cdot(0,8)^2+100\cdot(0,8)^3+\ldots=100\cdot\frac{1}{1-0,8}=500\left(m^3\right)$.

Câu 19. Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a. Bên ngoài tam giác OA_1A_2, vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3. Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3, vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).



Hình 2

Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\cdots$

Lời giải

Ta có các góc $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \widehat{A_3OA_4}, \ldots$ đều bằng 45°. Ta có:

$A_1A_2=OA_2=OA_1\cdot\cos 45^\circ=a\frac{\sqrt{2}}{2}$

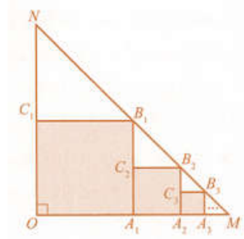
$A_2A_3=OA_3=OA_2\cdot\cos 45^\circ=a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

$A_3A_4=OA_4=OA_3\cdot\cos 45^\circ=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3;\ldots$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\ldots$ là

$l=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot(2+\sqrt{2})=a(1+\sqrt{2})$.

Câu 20. Cho tam giác OMN vuông cân tại O, $OM=ON=1$. Trong tam giác OMN, vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON. Trong tam giác A_1MB_1, vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

Lời giải

Độ dài cạnh của các hình vuông lần lượt là $a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2; a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3; \ldots$

Diện tích của các hình vuông lần lượt là

$S_1 = a_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

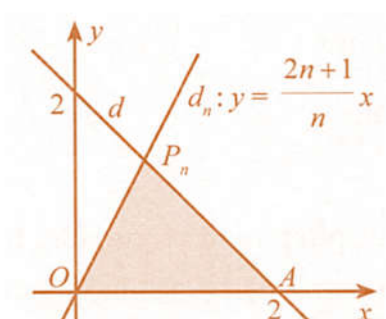
$S_2 = a_2^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$

$S_3 = a_3^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \ldots$

Các diện tích $S_1, S_2, S_3, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = \frac{1}{4}$ và công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Do đó, tổng diện tích các hình vuông là $S = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Câu 21. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng $d: x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y = \frac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n. Tìm $\lim S_n$.



Hình 4

Lời giải

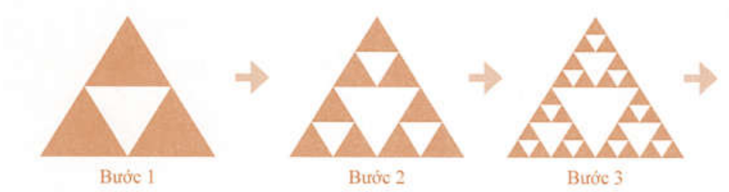
$A(2;0); P_n\left(\frac{2n}{3n+1}; \frac{4n+2}{3n+1}\right); OA = 2; AP_n = \frac{4n+2}{3n+1}\cdot\sqrt{2}; \widehat{OAP_n} = 45^\circ$.

$S_n = \frac{1}{2}OA\cdot AP_n\cdot\sin\widehat{OAP} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4n+2}{3n+1}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4n+2}{3n+1}$

$\lim S_n = \lim\frac{4n+2}{3n+1} = \lim\frac{4+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{4}{3}$

Câu 22. Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1 , ta thực hiện lần lượt các bước như sau:
Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).
Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n, bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$). Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Hình 1

Lời giải

$$S=\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+3^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+3^n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+\ldots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\ldots.$$

Đây là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=\frac{1}{4}$, công bội $q=\frac{3}{4}$, nên $S=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=1$.

Câu 23. Biết rằng, từ vị trí A, một mũi tên bay với tốc độ $10\,m/s$ hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng $10\,m$ (Hình 2). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B, trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB. Tiếp theo, nó phải đến trung điểm A_2 của A_1B. Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B. Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B".

Hình 2

Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Lời giải

Thời gian để mũi tên bay từ A đến A_1 là $\frac{1}{2}$ giây, từ A_1 đến A_2 là $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ giây, từ A_2 đến A_3 là $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3},\ldots$.

Tổng thời gian bay của mũi tên là $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots(*)$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công bội bằng $\frac{1}{2}$.

Do đó, tổng này bằng $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$ (giây).

Như vậy, mũi tên đến bia mục tiêu sau 1 giây.
Lập luận của nhà thông thái không đúng, sai lầm ở chỗ cho rằng tổng ở (*) không phải là một số hữu hạn.

Câu 24. Một mẫu chất phóng xạ ${}^{210}_{84}Po$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42(mg)$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T = 138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kì bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kì bán rã.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Lời giải

a) Vì cứ sau 1 chu kì bán rã thì khối lượng mẫu chất phóng xạ giảm một nửa nên (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = 21$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Khi đó, số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là: $u_n = \frac{42}{2^n}$.

b) Ta có: $\lim u_n = \lim \frac{42}{2^n} = \lim 42 \cdot \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 42 \cdot 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ càng dần về 0, nghĩa là sau một khoảng thời gian đủ dài thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ là rất nhỏ (đến mức không đáng kể).

Câu 25. Từ độ cao $100\,m$, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n).

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n. Tính S_n, nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo đề bài, $h_n = \frac{1}{4}h_{n-1}$ nên (h_n) là một cấp số nhân với $h_1 = 25$, công bội $q = \frac{1}{4}$. Suy ra số hạng tổng quát của dãy số $(h_n): h_n = \frac{100}{4^n}$.

b) Ta có: $\lim h_n = \lim \frac{100}{4^n} = \lim 100 \cdot \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 100 \cdot 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì độ cao của quả bóng đạt được sau khi nảy ngày càng nhỏ và độ cao đó dần tới 0.

c) Ta có: $S_n = 100 + 2 \cdot \left(\frac{100}{4} + \frac{100}{4^2} + \frac{100}{4^3} + \ldots + \frac{100}{4^n}\right)$

Nếu quá trình bóng nảy cứ tiếp tục diễn ra mãi, tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là:

$\lim S_n = 100 + 2 \cdot \left(\frac{100}{4} + \frac{100}{4^2} + \frac{100}{4^3} + \ldots + \frac{100}{4^n} + \ldots\right)$

Vì $\frac{100}{4}; \frac{100}{4^2}; \frac{100}{4^3}; \ldots; \frac{100}{4^n}; \ldots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{100}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{4} < 1$ nên ta có $\lim S_n = 100 + 2 \cdot \frac{\frac{100}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{500}{3}$. Vậy tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là $\frac{500}{3}m$. đường quả bóng di chuyển được là $\frac{500}{3}m$.

Câu 26. Cho tam giác T_1 có diện tích bằng 1 . Giả sử có tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1, tam giác T_3 đồng dạng với tam giác $T_2,\ldots$, tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}(k>1)$. Khi n tiến tới vô cùng, tính tổng diện tích của tất cả các tam giác theo k.

Lời giải

Kí hiệu diện tích tam giác T_n là S_n.

Vì tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$ nên diện tích tam giác T_n bằng $\frac{1}{k^2}$ diện tích tam giác T_{n-1} hay $S_n=\frac{1}{k^2}S_{n-1}$.

Vì $k>1$ nên $\frac{1}{k^2}<1$. Vậy $S_1;S_2;\ldots;S_{n-1};\ldots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $S_1=1$ và công bội $q=\frac{1}{k^2}$.

Khi đó, tổng diện tích của tất cả các tam giác nếu n tiến tới vô cùng là:

$$S=S_1+S_2+\ldots+S_{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{k^2}}=\frac{k^2}{k^2-1}$$

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 27. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,

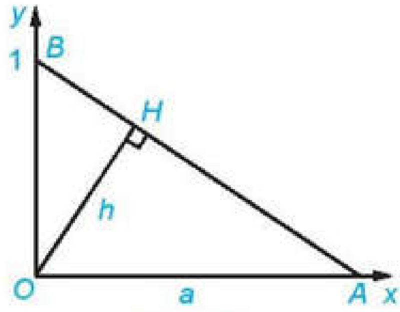
trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi Albert Einstein $(1879-1955)$ vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Lời giải

Sau bài học này ta sẽ giải quyết được bài toán trên như sau:

Từ công thức khối lượng $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, ta thấy m là một hàm số của v, với tập xác định là nửa khoảng $[0;c)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v\to c$, ta có $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\to 0$. Do đó $\lim\limits_{v\to c^-} m(v)=+\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần tới vận tốc ánh sáng.

Câu 28. Cho tam giác vuông OAB với $A=(a;0)$ và $B=(0;1)$ như Hình 5.5. Đường cao OH có độ dài là h.



Hình 5.5

a) Tính h theo a.
b) Khi điểm A dịch chuyển về O, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?
c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

Lời giải

a) Ta có: $A=(a;0)\Rightarrow OA=a; B=(0;1)\Rightarrow OB=1$

Tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$

Do đó, $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{1^2}\Rightarrow h=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}}$.

b) Khi điểm A dịch chuyển về O, ta có $OA=a=0$, suy $rah=0$, do đó điểm H dịch chuyển về điểm O.

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox, ta có $OA=a\to+\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{a\to+\infty}h=\lim\limits_{a\to+\infty}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}}=\lim\limits_{a\to+\infty}\sqrt{\frac{a^2}{a^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)}}=\lim\limits_{a\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{a^2}}}=1$.

Do đó, điểm H dịch chuyển về điểm B.

Câu 29. Cho hàm số $H(t)=\begin{cases}0 \text{ nếu } t<0\\ 1 \text{ nếu } t\ge 0\end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$).

Tính $\lim\limits_{t\to0^+}H(t)$ và $\lim\limits_{t\to0^-}H(t)$.

Lời giải

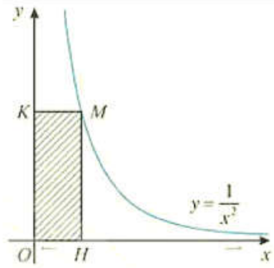
Với dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n<0$ và $t_n\to0$, ta có $H(t_n)=0$.

Do đó $\lim\limits_{t\to0^-}H(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}H(t_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$.

Tương tự, với dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n>0$ và $t_n\to0$, ta có $H(t_n)=1$.

Do đó $\lim\limits_{t\to0^+}H(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}H(t_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$.

Câu 30. Quan sát hình bên, cho biết hình chữ nhật $OHMK$ thay đổi nhưng điểm M luôn nằm trên đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{x^2}(x>0)$. Diện tích hình chữ nhật sẽ thay đổi như thế nào khi điểm H tiến gần đến gốc toạ độ? Khi H tiến xa sang phía bên phải thì sao?



Lời giải:

$S_{OMHK} = OH.OK = x_H \cdot y_H = x_H \cdot \frac{1}{x_H^2} = \frac{1}{x_H}$

Khi H tiến đến gần gốc toạ độ, tức là x_H càng nhỏ. Vậy điện tích $OMHK$ càng lớn

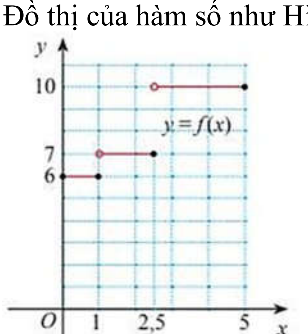
Khi H tiến xa sang phía bên phải, tức là x_H càng lớn. Vậy điện tích $OMHK$ càng nhỏ

Câu 31. Giá cước vận chuyển bưu kiện giữa hai thành phố do một đơn vị cung cấp được cho bởi bảng sau:

Khối lượng bưu kiện (100 gam)	Giá cước cận vùng (nghìn đồng)
đến 1	6
trên 1 đến 2,5	7
từ 2,5 đến 5	10
...	...

Nếu chỉ xét trên khoảng từ 0 đến 5 (tính theo 100 gam) thì hàm số giá cước (tính theo nghìn đồng) xác định như sau: $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{khi } x \in (0;1] \\ 7 & \text{khi } x \in (1;2,5] \\ 10 & \text{khi } x \in (2,5;5]. \end{cases}$

Đồ thị của hàm số như Hình 2.



Hình 2

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì sao cho $x_n \in (1;2,5)$ và $\lim x_n = 1$. Tìm $\lim f(x_n)$.

b) Giả sử (x_n') là dãy số bất kì sao cho $(x_n') \in (0;1)$ và $\lim x_n' = 1$. Tìm $\lim f(x_n')$.

c) Nhận xét về kết quả ở a) và b).

Lời giải:

a) Với $x_n \in (1;2,5)$ thì $\lim f(x_n) = 7$

b) Với $x_n' \in (0;1)$ thì $\lim f(x_n') = 6$

c) Với $x_n \in (1;2,5)$ thì $\lim f(x_n) = f(x)$ khi $x \in (1;2,5)$

Với $x_n' \in (0;1)$ thì $\lim f(x_n') = f(x)$ khi $x \in (0;1)$

Câu 32. Một cái hồ đang chứa $200m^3$ nước mặn với nồng độ muối $10kg/m^3$. Người ta ngọt hoá nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $2m^3$ / phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Lời giải:

a) $C(t)=\dfrac{10.200}{200+2t}=\dfrac{1000}{100+t}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} C(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2000}{100+2t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1000}{t}}{\frac{100}{t}+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1000}{t}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{100}{t}+1\right)}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1000}{t}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{100}{t}+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$

Vậy khi t càng lớn và tiến tới $+\infty$ thì nồng độ muối tiến tới 0

Câu 33. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t\to+\infty$.

Lời giải:

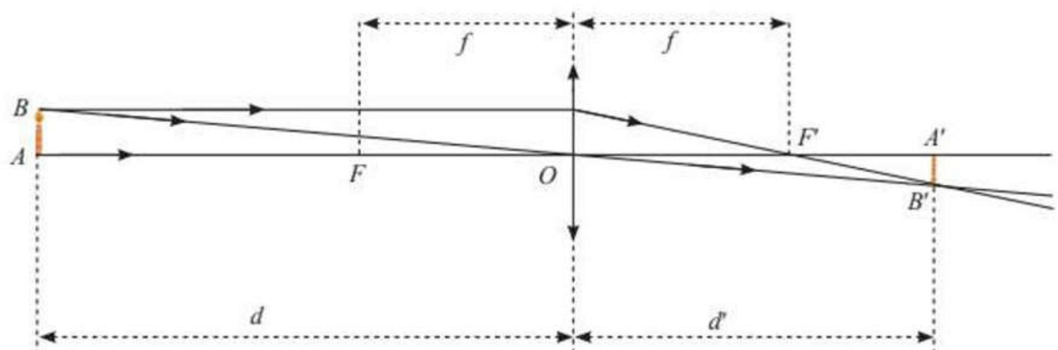
a) Sau thời gian t, số lít nước bơm vào hồ là: $15t$ (lít)

Trong $15t$ lít nước biển có lượng muối: $30.15t=450t$ (gam)

Nồng độ muối trong hồ sau thời gian t phút: $C(t)=\dfrac{450t}{6000+15t}=\dfrac{30t}{400+t}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} C(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{30t}{400+t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{30}{\frac{400}{t}+1}=\dfrac{30}{0+1}=30$

Câu 34. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f>0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (Hình 5).



Hình 5

Ta có công thức: $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}$ hay $d'=\dfrac{df}{d-f}$.

Xét hàm số $g(d)=\dfrac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim\limits_{d\to f^+} g(d)$;

b) $\lim\limits_{d\to+\infty} g(d)$.

Lời giải:

a) Ta có: $\lim\limits_{d\to f^+} df = f^2 > 0$; $\lim\limits_{d\to f^+} \dfrac{1}{d-f} = +\infty$

Suy ra: $\lim\limits_{d\to f^+} g(d) = \lim\limits_{d\to f^+} \dfrac{df}{d-f} = \lim\limits_{d\to f^+}\left[df\cdot\dfrac{1}{d-f}\right] = +\infty$

Vậy khi vật tiến gần tới tiêu điểm thì ảnh càng lớn và tiến tới $+\infty$

b) $\lim\limits_{d\to+\infty} g(d) = \lim\limits_{d\to+\infty} \dfrac{df}{d-f} = \lim\limits_{d\to+\infty} \dfrac{f}{1-\dfrac{f}{d}} = \dfrac{f}{1-0} = f$

Vậy khi vật ở rất xa, tiến tới $+\infty$ thì ảnh của vật nằm trên tiêu điểm

Câu 35. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \dfrac{50t}{t+4}(t \ge 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải:

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{50t}{t+4} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{50t}{t\left(1+\dfrac{4}{t}\right)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{50}{1+\dfrac{4}{t}} = 50$.

Ý nghĩa: Tối đa một nhân viên chỉ có thể lắp được 50 bộ phận mỗi ngày.

Câu 36. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải:

a) Chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm là:

$\bar{C}(x) = \dfrac{50000+105x}{x}$ (sản phẩm).

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \bar{C}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{50000+105x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\dfrac{50000}{x}+105\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{50000}{x}+105\right) = 105$.

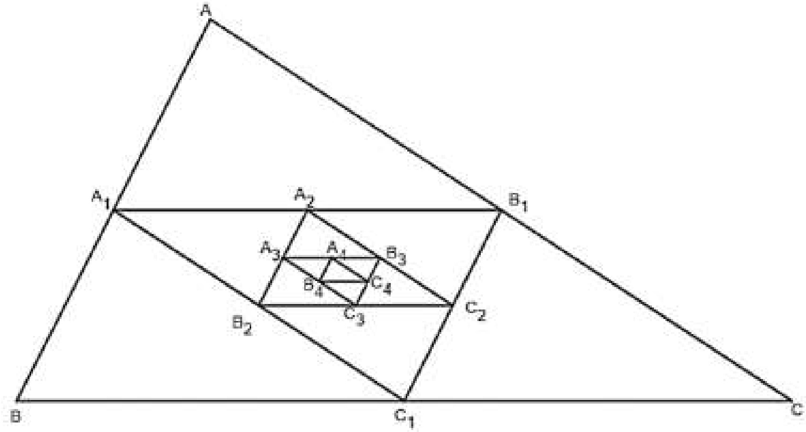
Ý nghĩa: Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là 105 nghìn đồng.

Câu 37. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \ldots,$ tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$

Lời giải



a)

+) (p_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \ldots$

Ta có: $p_1 = p_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a$;

$$p_2 = p_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\cdot(3a) = \frac{1}{2}\cdot p_1$$

$$p_3 = p_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(3a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot p_1;\ldots; p_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot p_1;\ldots$$

Suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(3a)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}(3a) = 0.3a = 0$$

+) (S_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \ldots$

Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah; S_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{4}\cdot S_1$;

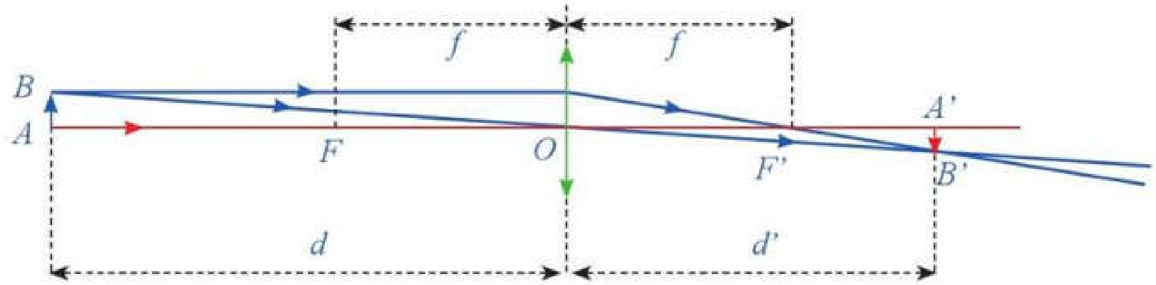
$$S_3 = S_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{h}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}ah\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot S_1;\ldots; S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot S_1;\ldots$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot S_1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}ah\right) = 0\cdot\frac{1}{2}ah = 0$

b) +) Ta có (p_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3$ a và công bội $q = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng: $P_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \dfrac{3a}{1-\frac{1}{2}} = 6a$

+) Ta cũng có (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = \frac{1}{2}ah$ và công bội $q = \frac{1}{4}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng: $S_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = \dfrac{\frac{1}{2}ah}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}ah$

Câu 38. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{f}$.



Hình 19

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d'=\varphi(d)$.

b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d), \lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to f}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{1}{d'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{d}\Leftrightarrow\frac{1}{d'}=\frac{d-f}{df}\Leftrightarrow d'=\frac{df}{d-f}$.

b) Ta có:

$$\lim_{d\to f^+}\varphi(d)=\lim_{d\to f^+}\frac{df}{d-f}=+\infty;\ \lim_{d\to f^-}\varphi(d)=\lim_{d\to f^-}\frac{df}{d-f}=-\infty;$$

$$\lim_{d\to f}\varphi(d)=\lim_{d\to f}\frac{df}{d-f}=\infty.$$

Giải thích ý nghĩa: Khi khoảng cách của vật tới thấu kính mà gần với tiêu cự thì khoảng cách ảnh của vật đến thấu kính ra xa vô tận nên lúc đó bằng mắt thường mình không nhìn thấy.

Câu 39. Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x)=2x+55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

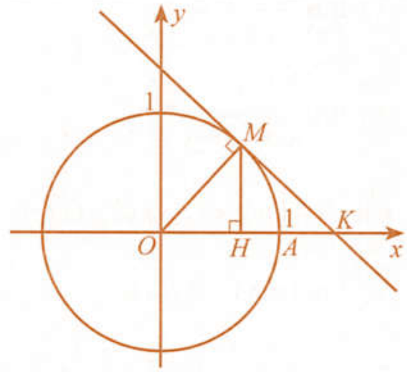
b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Lời giải

a) $f(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{2x+55}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Khi số lượng sản phẩm sản xuất được càng lớn thì chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm càng gần với 2 (triệu đồng).

Câu 40. Cho điểm $M\left(t;\sqrt{1-t^2}\right), 0<t<1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2+y^2=1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Hình 1

Lời giải

Điểm M dần đến điểm A khi $t \to 1^-$. Do đó, ta cần tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{HK}{HA}$.

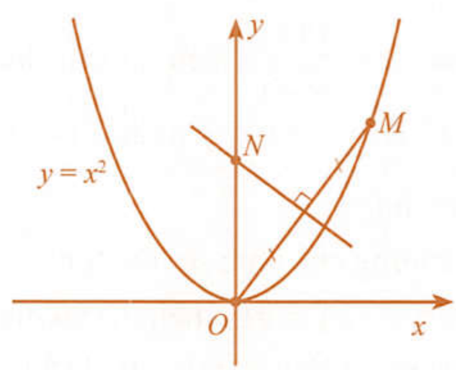
Ta có $H(t;0)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M nhận $\overrightarrow{OM}=\left(t;\sqrt{1-t^2}\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $d: t(x-t)+\sqrt{1-t^2}\left(y-\sqrt{1-t^2}\right)=0$.

Thay $y=0$ vào phương trình của d ta nhận được $x=\frac{1}{t}$. Suy ra $K\left(\frac{1}{t};0\right)$.

Ta có: $HA=1-t; HK=\frac{1}{t}-t=\frac{1-t^2}{t}; \frac{HK}{HA}=\frac{1-t^2}{t(1-t)}=\frac{1+t}{t}$; $\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{HK}{HA}=\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{1+t}{t}=\frac{1+1}{1}=2$.

Vậy khi điểm M dần đến điểm A thì giá trị của tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến 2.

Câu 41. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M\left(t;t^2\right), t>0$, nằm trên đường parabol $y=x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N. Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O ?



Hình 2

Lời giải

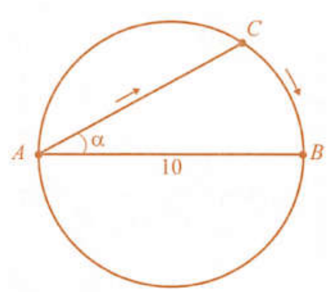
Trung điểm của đoạn thẳng OM là $I\left(\frac{t}{2};\frac{t^2}{2}\right)$.

Đường trung trực của OM nhận vectơ $\overrightarrow{OM}=\left(t;t^2\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $d: t\left(x-\frac{t}{2}\right)+t^2\left(y-\frac{t^2}{2}\right)=0$. Thay $x=0$ vào phương trình của d, ta nhận được $y=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)$. Suy ra $N\left(0;\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\right)$.

Điểm M dần đến điểm O khi t dần đến 0^+. Ta có $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)=\frac{1}{2}$.

Suy ra khi điểm M dần đến điểm O thì điểm N dần đến điểm $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 42. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB=10\,m$, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình 4).



Hình 4

Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

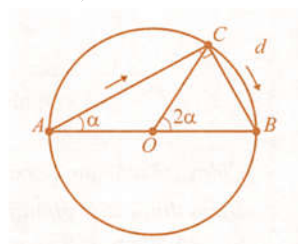
a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y=S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} S(\alpha)$ và $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

Lời giải

Kí hiệu O là tâm hình tròn.



a) Do tam giác ABC vuông tại C nên $AC=AB\cos\alpha=10\cos\alpha(m)$.

Ta có $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=2\alpha$. Suy ra độ dài cung CB là $l=OB\cdot\widehat{BOC}=5\cdot 2\alpha=10\alpha(m)$.

Quãng đường di chuyển (tính theo m) của người đó là

$S(\alpha)=AC+l=10\cos\alpha+10\alpha=10(\alpha+\cos\alpha)\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Do các hàm số $y=\alpha$ và $y=\cos\alpha$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y=S(\alpha)$ liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha \to 0^+} 10(\alpha+\cos\alpha)=10\left(\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \alpha+\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \cos\alpha\right)$

$=10(0+1)=10.\ \lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^+} 10(\alpha+\cos\alpha)=10\left(\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^+} \alpha+\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^+} \cos\alpha\right)$

$=10\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=5\pi$

Câu 43. Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v)=\frac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$, trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v\to 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $\lim_{v\to 20}\frac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}=\frac{\lim_{v\to 20}290,4v}{\lim_{v\to 20}0,36v^2+\lim_{v\to 20}13,2v+\lim_{v\to 20}264}=\frac{290,4\cdot 20}{0,36\cdot 20^2+13,2\cdot 20+264}\approx 9$.

Từ kết quả đó, ta thấy lưu lượng xe vào hầm ở thời điểm vận tốc trung bình của các xe đạt $20\,m/s$ là khoảng 9 xe ô tô trong $1s$.

Câu 44. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t)=45t^2-t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $V_{tb}=\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$. Tính

$\lim_{t\to 10}\frac{g(t)-g(10)}{t-10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Lời giải

Ta có: $\lim_{t\to 10}\frac{g(t)-g(10)}{t-10}=\lim_{t\to 10}\frac{45t^2-t^3-45\cdot 10^2+10^3}{t-10}$

$=\lim_{t\to 10}\frac{45(t-10)(t+10)-(t-10)\left(t^2+10t+100\right)}{t-10}$

$=\lim_{t\to 10}\left(-t^2+35t+350\right)=600$

Từ kết quả trên, ta thấy tốc độ gia tăng người bệnh ngay tại thời điểm $t=10$ (ngày) là 600 người/ngày.

Câu 45. Một bể chứa $5000l$ nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ $25l$/phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị: g/l) là $C(t)=\frac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

a) Sau t phút thì lượng muối trong bể là $30.25.t=750t(g)$ và thể tích nước trong bể là $5000+25t(l)$. Vậy nồng độ muối của nước trong bể sau t phút là:

$C(t)=\frac{750t}{5000+25t}=\frac{30t}{200+t}(g/l)$.

b) Ta có: $\lim_{t\to+\infty}C(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{200+t}=30$. Theo kết quả đó, ta thấy khi lượng nước trong bể tăng theo thời gian đến vô hạn thì nồng độ muối của nước sẽ tăng dần đến giá trị $30\,g/l$, tức là xấp xỉ nồng độ muối của loại nước muối cho thêm vào bể.

Câu 46. Hàm Heaviside có dạng $H(t)=\begin{cases}0 \text{ nếu } t<0\\ 1 \text{ nếu } t\ge 0\end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$.

Tính $\lim_{t\to 0^-}H(t), \lim_{t\to 0^+}H(t)$.

Lời giải

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n<0$ và $t_n\to 0$, ta có $H(t_n)=0$.

Khi đó: $\lim_{t\to 0^-} H(x)=\lim H\left(t_n\right)=0$.

Xét dãy số $\left(t_n\right)$ bất kì sao cho $t_n>0$ và $t_n\to 0$, ta có $H\left(t_n\right)=1$.

Khi đó: $\lim_{t\to 0^+} H(t)=\lim H\left(t_n\right)=1$.

Câu 47. Một cái hồ chứa $600l$ nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối $30\,g/l$ vào hồ với tốc độ $15l$ / phút.

a) Tính nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Nồng độ muối trong hồ sẽ thế nào khi t dần về dương vô cùng?

Lời giải

a) Sau t phút bơm nước vào hồ thì lượng nước là $600+15t$ (l) và lượng muối có được là $30.15t(g)$.

Nồng độ muối của nước là: $C(t)=\dfrac{30.15t}{600+15t}=\dfrac{30t}{40+t}(g/l)$.

b) Khi t dần về dương vô cùng, ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} C(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{40+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{t\left(\frac{40}{t}+1\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30}{\frac{40}{t}+1}=30(g/l)$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 48. Một người lái xe từ địa điểm A đến địa điểm B trong thời gian 3 giờ. Biết quãng đường từ A đến B dài $180\,km$. Chứng tỏ rằng có ít nhất một thời điểm trên hành trình, xe chạy với vận tốc $60\,km/h$.

Lời giải

Áp dụng định lí: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f\left(c\right)=0$.

Câu 49. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Lời giải

a) Gọi $x\left(km, x>0\right)$ là quãng đường khách di chuyển và y (đồng) là số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển x.

Với $x\le 0,5$, ta có $y=10000$.

Với $0,5<x\le 30$, ta có: $y=10000+13500(x-0,5)$ hay $y=13500x+3250$.

Với $x>30$, ta có: $y=10000+13500.29,5+11000(x-30)$ hay $y=11000x+78250$.

Vậy công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển là

$$y=\begin{cases}10000, & 0<x\le 0,5\\ 13500x+3250, & 0,5<x\le 30\\ 11000x+78250, & x>30\end{cases}$$

b) +) Với $0<x<0,5$ thì $y=10000$ là hàm hằng nên nó liên tục trên $(0;0,5)$.

+) Với $0,5<x<30$ thì $y=13500x+3250$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(0,5;30)$.

+) Với $x>30$ thì $y=11000x+78250$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(30;+\infty)$.

+) Ta xét tính liên tục của hàm số tại $x=0,5$ và $x=30$.

- Tại $x=0,5$, ta có $y(0,5)=10000$;

$\lim_{x\to 0,5^-} y=\lim_{x\to 0,5^-} 10000=10000$;

$\lim\limits_{x\to 0,5^+} y = \lim\limits_{x\to 0,5^+}(13500x+3250) = 13500\cdot 0,5+3250 = 10000$

Do đó, $\lim\limits_{x\to 0,5^-} y = \lim\limits_{x\to 0,5^+} y = \lim\limits_{x\to 0,5} y = y(0,5)$ nên hàm số liên tục tại $x=0,5$.

- Tại $x=30$, ta có: $y(30)=13500.30+3250=408250$;

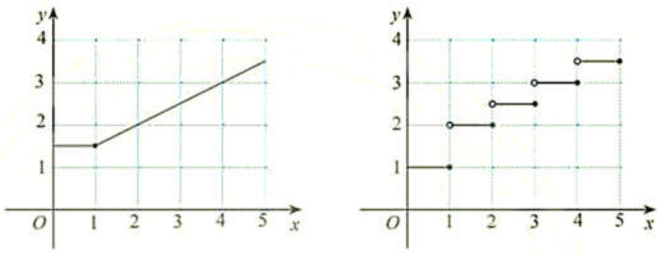
$\lim\limits_{x\to 30^-} y = \lim\limits_{x\to 30^-}(13500x+3250) = 13500.30+3250 = 408250$;

$\lim\limits_{x\to 30^+} y = \lim\limits_{x\to 30^+}(11000x+78250) = 11000.30+78250 = 408250$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to 30^-} y = \lim\limits_{x\to 30^+} y = \lim\limits_{x\to 30} y = y(30)$ nên hàm số liên tục tại $x=30$.

Vậy hàm số ở câu a liên tục trên $(0;+\infty)$.

Câu 50. Hai đồ thị ở hai hình dưới đây cho biết phí gửi xe y của ô tô con (tính theo 10 nghìn đồng) theo thời gian gửi x (tính theo giờ) của hai bãi xe. Có nhận xét gì về sự thay đổi của số tiền phí phải trả theo thời gian gửi ở mỗi bãi xe?



a) Bãi xe A b) Bãi xe B

Lời giải

Tại bãi xe A: trong 1 giờ đầu số tiền phí gửi giữ nguyên, sau đó tăng dần đều theo thời gian.

Tại bãi xe B: Cứ sau 1 giờ, tiền gửi lại tăng thêm 1 số không cố định

Câu 51. Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau: $P(x)=\begin{cases} 4,5x & \text{khi } 0<x\le 400 \\ 4x+k & \text{khi } x>400 \end{cases}$ (k là một hằng số)

a) Với $k=0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0;+\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$?

Lời giải:

a) Với $k=0$. Xét:

$\lim\limits_{x\to 400^-} P(x) = \lim\limits_{x\to 400^-} 4,5x = 4,5.400 = 1800$

$\lim\limits_{x\to 400^+} P(x) = \lim\limits_{x\to 400^-} 4x = 4.400 = 1600$

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 400} P(x)$ và hàm số $P(x)$ không liên tục tại $x_0=400$

Vậy hàm số $P(x)$ không liên tục trên $(0;+\infty)$

b) Để hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0=400$ hay $\lim\limits_{x\to 400} P(x) = P(400)$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 400^-} P(x) = \lim\limits_{x\to 400^-} 4,5x = 4,5.400 = 1800$

$\lim\limits_{x\to 400^+} P(x) = \lim\limits_{x\to 400^-} (4x+k) = 4.400+k = 1600+k$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 400} P(x)$ thì $1800=1600+k$. Suy ra $k=200$

Câu 52. Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường $x(km)$ cho loại xe 4 chỗ như sau:

Hình 5

$$T(x)=\begin{cases}10000 & \text{khi } 0<x\le 0,7\\ 10000+(x-0,7).14000 & \text{khi } 0,7<x\le 20\\ 280200+(x-20).12000 & \text{khi } x>20.\end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Lời giải:

$T(x)=10000$ với $0<x\le 0,7$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên $(0;0,7)$

$T(x)=10000+(x-0,7)\cdot 14000$ với $0,7<x\le 20$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(0,7;20)$

$T(x)=280200+(x-20).12000$ với $x>20$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(20;+\infty)$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 0,7^-} T(x)=\lim\limits_{x\to 0,7^-} 10000=10000$

$\lim\limits_{x\to 0,7^+} T(x)=\lim\limits_{x\to 0,7^+} [10000+(x-0,7)\cdot 14000]=10000$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 0,7} T(x)=T(0,7)$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại $0,7$

$\lim\limits_{x\to 20^-} T(x)=\lim\limits_{x\to 20^-} [10000+(x-0,7)\cdot 14000]=280200$

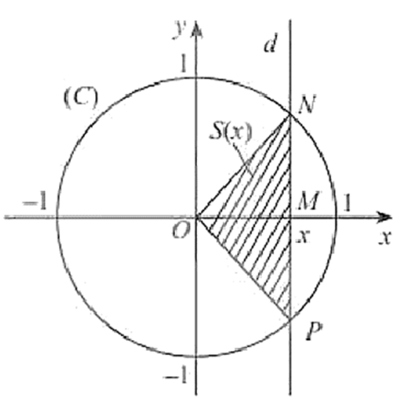
$\lim\limits_{x\to 20^+} T(x)=\lim\limits_{x\to 20^+} [280200+(x-20)\cdot 12000]=280200$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 20} T(x)=T(20)$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại 20

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$

Câu 53. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ $x(-1<x<1)$ và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem Hình 6).



Hình 6

a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP.

b) Hàm số $y=S(x)$ có liên tục trên $(-1;1)$ không? Giải thich.

c) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} S(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1^+} S(x)$.

Lời giải:

a) $S(x)=|x_m|\cdot|y_m|=|x|\cdot\sqrt{1-x^2}$

b) Hàm số $y=|x|$ liên tục tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$

Hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$

Vậy hàm số $S(x)=|x|\cdot\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} S(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\right)=0$

Câu 54. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x)=\begin{cases} 60000 \text{ khi } 0<x\le 2 \\ 100000 \text{ khi } 2<x\le 4 \\ 200000 \text{ khi } 4<x\le 24 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải:

$C(x)=60000$ khi $x\in(0;2)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(0;2)$

$C(x)=100000$ khi $x\in(2;4)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(2;4)$

$C(x)=200000$ khi $x\in(4;24)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(4;24)$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^-} C(x)=60000$

$\lim\limits_{x\to 2^+} C(x)=100000$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 2

$\lim\limits_{x\to 4^-} C(x)=100000$

$\lim\limits_{x\to 4^+} C(x)=200000$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 4}$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 4

Câu 55. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r)=\begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0<r<R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r\ge R, \end{cases}$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0;+\infty)$ không?

Lời giải:

$\lim\limits_{r\to R^-} F(r)=\lim\limits_{r\to R^-}\dfrac{GMr}{R^3}=\dfrac{GMR}{R^3}=\dfrac{GM}{R^2}$

$\lim\limits_{r\to R^+} F(r)=\lim\limits_{r\to R^+}\dfrac{GM}{r^2}=\dfrac{GM}{R^2}$

Suy ra: $\lim\limits_{r\to R} F(r)=F(R)$. Hay hàm số $F(r)$ liên tục tại $r_0=R$

$F(r)=\dfrac{GMr}{R^3}$ khi $0<r<R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(0;R)$

$F(r)=\dfrac{GM}{r^3}$ khi $r>R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(R;+\infty)$

Vậy hàm số $F(r)$ lên tục trên $(0;+\infty)$

Câu 56. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ $10^{\circ}C$, mỗi phút tăng $2^{\circ}C$ trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút $3^{\circ}C$ trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo ${}^{\circ}C$) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng $T(t)=\begin{cases}10+2t & \text{khi } 0\le t\le 60\\ k-3t & \text{khi } 60<t\le 100\end{cases}$ (k là hằng số).

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k.

Lời giải:

$T(t)$ liên tục trên tập xác định nên $T(t)$ liên tục tại $t=60$. Hay $\lim\limits_{t\to 60}T(t)=T(60)$

$\lim\limits_{t\to 60^-}T(t)=\lim\limits_{t\to 60^-}(10+2t)=130$

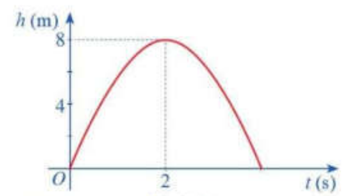
$\lim\limits_{t\to 60^+}T(t)=\lim\limits_{t\to 60^+}(k-3t)=k-180$

$T(60)=10+2.60=130$

Suy ra: $k-180=130$.

Do đó, $k=310$

Câu 57. Hình 16 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t)=-2t^2+8t$.



Hình 16

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim\limits_{t\to 2}\left(-2t^2+8t\right)$.

Lời giải

a) Hàm số $h(t)=-2t^2+8t$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hàm số khi t tiến dần đế 2 thì $h\left(t\right)$ dần đến 8.

Vậy $\lim\limits_{t\to 2}\left(-2t^2+8t\right)=8$.

Câu 58. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

Lời giải

a) $f(x)=\begin{cases}30 & \text{nếu } 0<x\le 1\\ 10+20x & \text{nếu } x>1\end{cases}$

b) Hàm số này liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

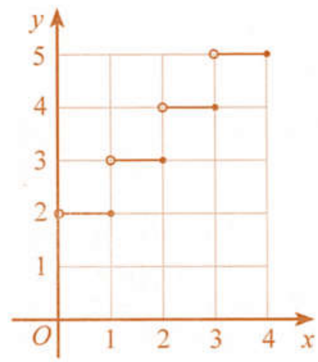
Câu 59. Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0<t\le 4$). Viết công thức xác định hàm số $y=P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0;4]$.

Lời giải

Hàm số $P(t)$ trên $(0;4]$ có công thức:

$$P(t)=\begin{cases}2 & \text{khi } 0<t\le 1\\ 3 & \text{khi } 1<t\le 2\\ 4 & \text{khi } 2<t\le 3\\ 5 & \text{khi } 3<t\le 4\end{cases}$$ (P tính theo chục nghìn đồng, t tính theo giờ).

Đồ thị của hàm số $P(t)$ như Hình 1.



Hình 1

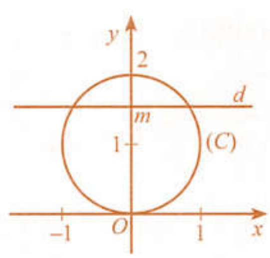
Trên mỗi nữa khoảng $(0;1],(1;2],(2;3]$ và $(3;4]$, hàm số đều có dạng $P(t)=c$ (c là hằng số) nên hàm số liên tục trên mỗi khoảng này.

Ta có $\lim\limits_{t\to 1^-}P(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}2=2;\lim\limits_{t\to 1^+}P(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}3=3$. Do $\lim\limits_{t\to 1^-}P(t)\ne\lim\limits_{t\to 1^+}P(t)$ nên hàm số không liên tục tại điểm $t=1$.

Tương tự, chỉ ra được hàm số không liên tục tại các điểm $t=2$ và $t=3$.

Vậy hàm số liên tục trên các nửa khoảng $(0;1],(1;2],(2;3]$ và $(3;4]$; gián đoạn tại các điểm $t=1,t=2$ và $t=3$.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+(y-1)^2=1$. Với mỗi số thực m, gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d:y=m$ với đường tròn (C). Viết công thức xác định hàm số $y=Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Hình 2

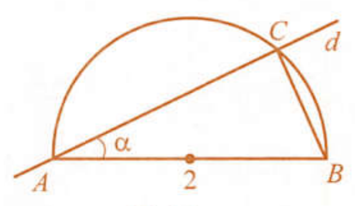
Lời giải

$$Q(m)=\begin{cases}0 & \text{khi } m<0 \text{ hay } m>2\\ 1 & \text{khi } m=0 \text{ hay } m=2\\ 2 & \text{khi } 0<m<2\end{cases}$$

Hàm số không liên tục tại các điểm $m=0$ và $m=2$.

Câu 61. Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A, cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim_{\alpha\to 0^+} S(\alpha), \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Hình 3

Lời giải

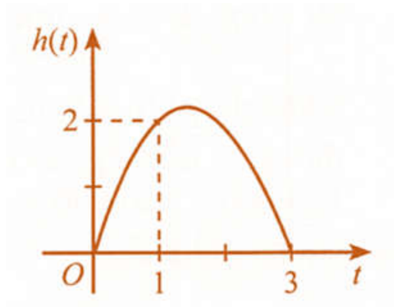
$S(\alpha)=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha=\sin 2\alpha, \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Do các hàm số $y=\sin 2\alpha$ đều liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số $y=S(\alpha)$ liên tục trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$\lim_{\alpha\to 0^+} S(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0^+}\sin 2\alpha=0$

$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-} S(\alpha)=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\sin 2\alpha=0.$

Câu 62. Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t)=at^2+bt$.



Hình 5

a) Dựa vào đồ thị, tìm a,b.

b) Chứng minh rằng hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0;3)$.

c) Với m thuộc $(0;3)$, tính $\lim_{t\to m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Dựa vào Hình 5 ta thấy quỹ đạo quả bóng đi qua điểm có toạ độ $(3;0)$ và $(1;2)$. Suy ra $a=-1, b=3$.

b) Từ câu a, ta có: $h(t)=-t^2+3t$. Vì $h(t)$ là hàm đa thức nên $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, mà $(0;3)\subset\mathbb{R}$ nên $h(t)$ liên tục trên $(0;3)$.

c) Với $m\in(0;3)$, ta có: $\lim_{t\to m} h(t)=\lim_{t\to m}\left(-t^2+3t\right)=-m^2+3m=h(m)$. Khi dần tới thời điểm m bất kì thuộc $(0;3)$ thì quả bóng dần đạt độ cao $h(m)$.

Câu 63. Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

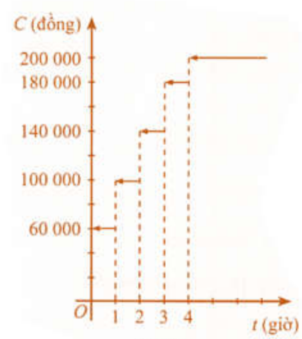
a) Vẽ đồ thị hàm số $C=C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số đó có liên tục trên $[0;+\infty)$ không?

c) Giá trị $\lim_{t\to 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?

Lời giải

a) Đồ thị hàm số $C=C(t)$ được thể hiện trong Hình 6.



Hình 6

b) Từ đồ thị ta thấy hàm số bị gián đoạn tại $t=1$ (giờ); $t=2$ (giờ); $t=3$ (giờ); $t=4$ (giờ) nên hàm số không liên tục trên $[0;+\infty)$.

c) Từ đồ thị ta có:

$\lim\limits_{t\to 3^+} C(t)=180000, \lim\limits_{t\to 3^-} C(t)=140000$. Vì $\lim\limits_{t\to 3^+} C(t)\neq \lim\limits_{t\to 3^-} C(t)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{t\to 3} C(t)$.

Nhận thấy khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là $180000-140000=40000$ (đồng), như vậy chênh lệch chi phí giữa hai người không giảm đi.

Câu 64. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến $250g$ như trong bảng sau:

Khối lượng đến $250g$	Mức cước (đồng)
Đến $20g$	4000
Trên $20g$ đến $100g$	6000
Trên $100g$ đến $250g$	8000

a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.

b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Lời giải

a) Ta có hàm số: $f(x)=\begin{cases} 4000 & \text{nếu} \quad 0<x\le 20 \\ 6000 & \text{nếu} \quad 20<x\le 100 \\ 8000 & \text{nếu} \quad 100<x\le 250 \end{cases}$

b) Tập xác định của hàm số trên là $(0;250]$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 20^-} f(x)=4000, \lim\limits_{x\to 20^+} f(x)=6000$. Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 20} f(x)$. Do đó, hàm số không liên tục tại $x=20$. Vậy hàm số không liên tục trên tập xác định $(0;250]$.

Câu 65. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$C(x)=\begin{cases} 60000 \text{ khi } 0<x\le 2 \\ 100000 \text{ khi } 2<x\le 4 \\ 200000 \text{ khi } 4<x<24 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải

Với x thuộc các khoảng $(0;2),(2;4),(4;24)$ thì hàm số $C(x)$ là hàm hằng nên hàm số liên tục.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=2$:

Vì $C(2)=60000$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} C(x)=60000, \lim\limits_{x\to 2^+} C(x)=100000$ nên hàm số không liên tục tại điểm $x=2$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=4$:

Vì $C(4)=100000$ và $\lim\limits_{x\to 4^-} C(x)=100000, \lim\limits_{x\to 4^+} C(x)=200000$ nên hàm số không liên tục tại điểm $x=4$.

Vậy hàm số $C(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;2),(2;4),(4;24)$ và nó gián đoạn tại hai điểm $x=2, x=4$.

Câu 66. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t)=\begin{cases}10 & \text{khi } 0\le t\le 5\\ t^2-5t+10 & \text{khi } t>5\end{cases}$,

trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Hỏi hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t=5$ hay không?

Lời giải

Ta có: $v(5)=10$ và $\lim\limits_{t\to 5^-} v(t)=\lim\limits_{t\to 5^-} 10=10; \lim\limits_{t\to 5^+} v(t)=\lim\limits_{t\to 5^+}\left(t^2-5t+10\right)=10$.

Suy ra $v(5)=\lim\limits_{t\to 5} v(t)$.

Vậy hàm số $v(t)$ liên tục tại điểm $t=5$.