BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

- CHƯƠNG 3. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**.

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

C. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

Lời giải

Chọn C

Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$ là mệnh đề **sai** vì chưa rõ dấu của v_n là dương hay âm.

Câu 2. Tìm dạng hữu tỷ của số thập phân vô hạn tuần hoàn $P = 2{,}13131313\ldots$,

A. $P = \frac{212}{99}$ **B.** $P = \frac{213}{100}$. **C.** $P = \frac{211}{100}$. **D.** $P = \frac{211}{99}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy máy tính bấm từng phương án thì phần D ra kết quả đề bài

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a (hay u_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$.

B. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Lời giải

Chọn A

Câu 4. Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$ và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Dùng tính chất giới hạn: cho dãy số $(u_n),(v_n)$ và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ trong đó a hữu hạn thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Câu 5. Trong các khẳng định dưới đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương $\Rightarrow (I)$ là khẳng định đúng.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1 \Rightarrow (II)$ là khẳng định sai vì $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1 \Rightarrow (III)$ là khẳng định đúng.

Vậy số khẳng định đúng là 2.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) thỏa $|u_n - 2| < \dfrac{1}{n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

A. $\lim u_n$ không tồn tại. **B.** $\lim u_n = 1$. **C.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|u_n - 2| < \dfrac{1}{n^3} \Rightarrow \lim(u_n - 2) = \lim \dfrac{1}{n^3} = 0 \Rightarrow \lim u_n - 2 = 0 \Rightarrow \lim u_n = 2$.

Câu 7. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0 \left(|q| > 1\right)$.

C. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0 \; (k > 1)$.

Lời giải

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số (SGK ĐS11-Chương 4) thì $\lim q^n = 0 \left(|q| < 1\right)$.

Câu 8. Tính $L = \lim \dfrac{n-1}{n^3+3}$.

A. $L = 1.$ **B.** $L = 0.$ **C.** $L = 3.$ **D.** $L = 2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim \dfrac{n-1}{n^3+3} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}}{1 + \dfrac{3}{n^3}} = \dfrac{0}{1} = 0$.

Câu 9. $\lim \frac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \frac{1}{5n+3} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} = 0$.

Câu 10. $\lim \frac{1}{2n+7}$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim \frac{1}{2n+7} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n}} = 0$.

Câu 11. $\lim \frac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim \frac{1}{2n+5} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2+\frac{5}{n}} = 0$.

Câu 12. $\lim \frac{1}{5n+2}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim \frac{1}{5n+2} = \lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{5+\frac{2}{n}}\right) = 0.\frac{1}{5} = 0.$$

Câu 13. Tìm $I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\lim\frac{7n^2-2n^3+1}{3n^3+2n^2+1}=\lim\frac{\frac{7}{n}-2+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}=-\frac{2}{3}$.

Câu 14. $\lim\frac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** $\frac{-3}{5}$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{2n^2-3}{n^6+5n^5}=\lim\frac{\frac{2}{n^4}-\frac{3}{n^6}}{1+\frac{5}{n}}=0$.

Câu 15. $\lim\frac{2018}{n}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16. Tính giới hạn $L=\lim\frac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A. $L=-\infty$. **B.** $L=-2$. **C.** $L=1$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $L=\lim\frac{2n+1}{2+n-n^2}=\lim\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}-1}=0$.

Câu 17. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\frac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

Lời giải

Chọn C

➢ Xét đáp án **A.** $\lim\frac{n^2-2}{5n+3n^2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n}+3}=\frac{1}{3}$.

➢ Xét đáp án **B.** $\lim\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+3}=\frac{1}{3}$

➢ Xét đáp án **C.** $\lim\frac{1-2n}{5n+3n^2}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+3}=0$.

➢ Xét đáp án **D.** $\lim\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}-2}{\frac{5}{n}+3}=-\frac{2}{3}$.

Câu 18. Tính $I=\lim\frac{2n-3}{2n^2+3n+1}$

A. $I=-\infty$. **B.** $I=0$. **C.** $I=+\infty$. **D.** $I=1$.

Lời giải

$$I=\lim\frac{2n-3}{2n^2+3n+1}=\lim\frac{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=0.$$

Câu 19. Giá trị của $\lim\frac{2-n}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{2-n}{n+1}=\lim\frac{\frac{2}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0-1}{1+0}=-1$.

Câu 20. Kết quả của $\lim\frac{n-2}{3n+1}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{n-2}{3n+1}=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$.

Câu 21. Tìm giới hạn $I=\lim\frac{3n-2}{n+3}$.

A. $I=-\frac{2}{3}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=3$. **D.** $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\frac{3n-2}{n+3}=\lim\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}=3$.

Câu 22. Giới hạn $\lim\frac{1-2n}{3n+1}$ bằng?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{1-2n}{3n+1}=\lim\frac{\frac{1}{n}-2}{3+\frac{1}{n}}=-\frac{2}{3}$.

Câu 23. Tính giới hạn $I=\lim\frac{2n+2017}{3n+2018}$.

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{2017}{2018}$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\frac{2n+2017}{3n+2018}=\lim\frac{2+\frac{2017}{n}}{3+\frac{2018}{n}}=\frac{2}{3}$.

Câu 24. $\lim\frac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\frac{19}{18}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{19}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\frac{1+19n}{18n+19}=\lim\frac{\frac{1}{n}+19}{18+\frac{19}{n}}=\frac{19}{18}$.

Câu 25. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0 ?

A. $\frac{1}{n}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\frac{n+1}{n}$. **D.** $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Chọn C

Có $\lim\frac{n+1}{n}=\lim 1+\lim\frac{1}{n}=1$.

Câu 26. $\lim\frac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{1-n^2}{2n^2+1}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}-1}{2+\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{2}$.

Câu 27. Tính giới hạn $\lim\frac{4n+2018}{2n+1}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 2018.

Lời giải

Ta có $\lim \frac{4n+2018}{2n+1}=\lim \frac{4+\frac{2018}{n}}{2+\frac{1}{n}}=2$.

Câu 28. Tìm $\lim \frac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \frac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}=\lim \frac{n^5\left(8-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(4+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^5}\right)}=\lim \frac{8-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^5}}{4+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^5}}=\frac{8}{4}=2$.

Câu 29. Tính $\lim \frac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

A. 2. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim \frac{2n+1}{1+n}=\lim \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)}=\lim \frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{2+0}{0+1}=2$.

Câu 30. $\lim \frac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

A. $\frac{2}{11}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim \frac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}=\lim \frac{2-\frac{2}{n^3}+\frac{2}{n^4}}{4+\frac{2}{n^3}+\frac{5}{n^4}}=\frac{1}{2}$.

Câu 31. Giá trị của $\lim \frac{2n^2-3}{1-2n^2}$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$\lim \frac{2n^2-3}{1-2n^2}=\lim \frac{2-\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2}=-1$.

Câu 32. Giá trị $A=\lim \frac{n^2+n}{12n^2+1}$ bằng

A. $\frac{1}{12}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn A

$$A=\lim\frac{n^2+n}{12n^2+1}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{12+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{12}.$$

Vậy $A=\frac{1}{12}$.

Câu 33. Tính $\lim\frac{5n+3}{2n+1}$.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\frac{5n+3}{2n+1}=\lim\frac{5+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{5}{2}$.

Câu 34. $\lim\frac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\frac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}=\lim\frac{1+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^3}}=\frac{1}{3}$.

Câu 35. Tính giới hạn $\lim\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\frac{n^3\left(\frac{1}{n}-3\right)}{n^3\left(2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}=\lim\frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=-\frac{3}{2}$.

Câu 36. Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\frac{2n-1}{3-n},n\in\mathbb{N}^*$ là:

A. -2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim u_n = \lim \frac{2n-1}{3-n} = \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}-1} = -\frac{1}{3}$.

Câu 37. Tính giới hạn $I = \lim \frac{10n+3}{3n-15}$ ta được kết quả:

A. $I = -\frac{10}{3}$. **B.** $I = \frac{10}{3}$. **C.** $I = \frac{3}{10}$. **D.** $I = -\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \lim \frac{10n+3}{3n-15} = \lim \frac{10+\frac{3}{n}}{3-\frac{15}{n}} = \frac{10}{3}$.

Câu 38. $\lim \frac{2n+1}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim \frac{2n+1}{n+1} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$.

Câu 39. $\lim \frac{3n^2+1}{n^2-2}$ bằng:

A. 3. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$\lim \frac{3n^2+1}{n^2-2} = \lim \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} = 3$

Câu 40. Tính $\lim \frac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}$.

A. 2. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\frac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}=\lim\frac{8+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}+2}=4$.

Câu 41. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{1}{n+1}$; $v_n=\frac{3}{n+3}$. Tính $\lim\frac{u_n}{v_n}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\lim\frac{u_n}{v_n}=\lim\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{3}{n+3}}=\lim\frac{n+3}{3(n+1)}=\lim\frac{1+\frac{3}{n}}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{3}$.

Câu 42. $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n$ bằng.

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

ChỌn **B.**

Câu 43. Trong các giới hạn sau giới hạn nào bằng 0

A. $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **B.** $\lim\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **C.** $\lim\left(\frac{4}{3}\right)^n$. **D.** $\lim(2)^n$.

Lời giải

Chọn A

$\lim q^n=0$ $(|q|<1)$.

Câu 44. $\lim\left(\frac{2018}{2019}\right)^n$ bằng.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng $\lim q^n=0$, $|q|<1$

Câu 45. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $(0,999)^n$. **B.** $(-1)^n$. **C.** $(-1,0001)^n$. **D.** $(1,2345)^n$.

Lời giải

Chọn A

Do $0,999<1$ nên $\lim(0,999)^n=0$.

Câu 46. $\lim\frac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}}$ là

A. $+\infty$. **B.** 100. **C.** $\frac{1}{100}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$$\lim\frac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}}=\lim\frac{100+3.\left(\frac{99}{100}\right)^n}{1-2.\left(\frac{98}{100}\right)^n}=100$$

Câu 47. $\lim\left(3^n-4^n\right)$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\left(3^n-4^n\right)=\lim 4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right)=-\infty$.

Câu 48. Tính giới hạn $\lim\frac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\frac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}=\lim\frac{6.\left(\frac{2}{3}\right)^n-6}{4.\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}=-6$.

Câu 49. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{1+2.2017^n}{2016^n+2018^n}$. **B.** $\lim\frac{1+2.2018^n}{2016^n+2017^{n+1}}$.

C. $\lim\frac{1+2.2018^n}{2017^n+2018^n}$. **D.** $\lim\frac{2.2018^{n+1}-2018}{2016^n+2018^n}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\frac{1+2.2017^n}{2016^n+2018^n}=\lim\frac{\left(\frac{1}{2018}\right)^n+2.\left(\frac{2017}{2018}\right)^n}{\left(\frac{2016}{2018}\right)^n+1}=0$.

Câu 50. Tính $\lim\frac{2^n+1}{2.2^n+3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\dfrac{2^n+1}{2.2^n+3}=\lim\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{2+3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1+0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 51. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2019)$ để $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}$?

A. 2018. **B.** 2012. **C.** 2019. **D.** 2011.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\lim\sqrt{\dfrac{1+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{5}{9}\right)^n+9^a}}=\dfrac{1}{3^a}\le\dfrac{1}{2187}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3^a}\le\dfrac{1}{3^7}\Leftrightarrow a\ge 7.$

Do a nguyên thuộc khoảng $(0;2019)$ nên $a\in\{7;8;...;2018\}$.

Câu 52. Tính giới hạn $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

A. $T=0$. **B.** $T=\dfrac{1}{4}$. **C.** $T=\dfrac{1}{8}$. **D.** $T=\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3}\right)=\lim\dfrac{4^n-3^n}{\sqrt{16^{n+1}+4^n}+\sqrt{16^{n+1}+3^n}}$

$=\lim\dfrac{4^n-3^n}{\sqrt{16.16^n+4^n}+\sqrt{16.16^n+3^n}}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{16+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}+\sqrt{16+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}}=\dfrac{1}{4+4}=\dfrac{1}{8}.$

Câu 53. Tính giá trị của $\lim\dfrac{\cos n+\sin n}{n^2+1}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $0<\left|\dfrac{\cos n+\sin n}{n^2+1}\right|\le\dfrac{|\cos n|+|\sin n|}{n^2+1}<\dfrac{2}{n^2+1}$ và $\lim\dfrac{2}{n^2+1}=0$.

Suy ra $\lim\dfrac{\cos n+\sin n}{n^2+1}=0.$

Câu 54. Giới hạn $\lim \dfrac{8n^5-2n^3+1}{2n^2-4n^5+2019}$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim \dfrac{8n^5-2n^3+1}{2n^2-4n^5+2019}=\lim\left(\dfrac{8-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^5}}{\dfrac{2}{n^3}-4+\dfrac{2019}{n^5}}\right)=-2$.

Câu 55. Giá trị của $B=\lim \dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$ bằng:

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 0. **D.** 4

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $B=\lim \dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}=\lim \dfrac{n^2\left(4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^2}=\lim \dfrac{\left(4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{4+0+0}{(3-0)^2}=\dfrac{4}{9}$

Câu 56. Tính $L=\lim \dfrac{n^3+n^2+1}{2018-3n^3}$.

A. $\dfrac{1}{2018}$. **B.** -3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

$L=\lim \dfrac{n^3+n^2+1}{2018-3n^3}=\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2018}{n^3}-3}=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 57. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)$

$=\lim\left(\dfrac{\left(a^2-4a+3\right)n+2+2a^2-8a}{n+2}\right)=\lim\left(\dfrac{a^2-4a+3+\dfrac{2+2a^2-8a}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)=a^2-4a+3$.

Theo giả thiết: $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0 \Leftrightarrow a^2-4a+3=0 \Leftrightarrow a=3 \vee a=1$.

Vậy $S=\{1;3\} \Rightarrow 1+3=4$.

Câu 58. Cho $a \in \mathbb{R}$ sao cho giới hạn $\lim \dfrac{an^2 + a^2 n + 1}{(n+1)^2} = a^2 - a + 1$.Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $0 < a < 2$. **B.** $0 < a < \dfrac{1}{2}$. **C.** $-1 < a < 0$. **D.** $1 < a < 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \dfrac{an^2 + a^2 n + 1}{(n+1)^2} = \lim \dfrac{an^2 + a^2 n + 1}{n^2 + 2n + 1} = \lim \dfrac{a + \dfrac{a^2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = a$.

$a^2 - a + 1 = a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

Câu 59. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có giới hạn bằng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $a.b$

A. 192 **B.** 68 **C.** 32 **D.** 128

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim \dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3} = \lim \dfrac{\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n} - 1\right)^2}{\left(4 - \dfrac{5}{n}\right)^3} = \dfrac{3}{64} = \dfrac{a}{b}$. Do đó: $a.b = 192$

Câu 60. Biết $\lim \dfrac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \dfrac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng

A. -12. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \dfrac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \lim \dfrac{n^3\left(2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(a + \dfrac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $a = 4$. Khi đó $a - a^2 = 4 - 4^2 = -12$.

Câu 61. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n = 0$.

B. $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

C. Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

D. $\lim u_n = 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n^2 + 1} = \lim \dfrac{n(n+1)}{2(n^2 + 1)} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 62. Giới hạn $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7}$ có giá trị bằng?

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có kết quả quen thuộc $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Do đó $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7}=\lim \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+2n+7)}=\lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{6\left(1+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}\right)}=\dfrac{1.2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 63. $\lim \dfrac{1+3+5+...+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có $1+3+5+...+(2n+1)=\dfrac{(1+2n+1)(n+1)}{2}=(n+1)^2$.

$\lim \dfrac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}=\lim \dfrac{(n+1)^2}{3n^2+4}=\lim \dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 64. $Lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$Lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)=lim\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}\right)=lim\left(\dfrac{n(n+1)}{2n^2}\right)=lim\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}$

Câu 65. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}$ với $n\in\mathbb{N}^*$ Giá trị của $\lim u_n$ bằng:

A. 0`. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $1+3+...+(2n-1)=n^2 \longrightarrow \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{2n-1}{n^2}=\dfrac{1+3+...+(2n-1)}{n^2}=\dfrac{n^2}{n^2}=1$

Suy ra $\lim u_n=1$.

Câu 66. Tìm $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{n}$. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{1+2+...+n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)=\lim\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Câu 67. Tính giới hạn: $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét dãy số (u_n), với $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$.

Ta có:

$u_2=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2.2}$;

$u_3=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{3}{4}.\frac{8}{9}=\frac{4}{6}=\frac{3+1}{2.3}$;

$u_4=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)=\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}=\frac{5}{8}=\frac{4+1}{2.4}$

……

$u_n=\frac{n+1}{2n}$.

Dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp để khẳng định $u_n=\frac{n+1}{2n},\forall n\ge 2$

Khi đó $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

Câu 68. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có : $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

Suy ra : $\lim u_n=\lim\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

Câu 69. Tính $\lim(-2n^{2019}+3n^{2018}+4)$?

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -2. **D.** 2019.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $\lim\left(-2n^{2019}+3n^{2018}+4\right)=\lim\left[n^{2019}.\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^{2019}}\right)\right]=-\infty$.

Câu 70. $\lim(2-3n)^4(n+1)^3$ là:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 81 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

$$\lim(2-3n)^4(n+1)^3=\lim\left[n^7\left(\frac{2}{n}-3\right)^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right]$$

Ta có $\lim n^7=+\infty$

$$\lim\left(\frac{2}{n}-3\right)^4=(-3)^4=3^4$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=1$$

$$\Rightarrow \lim(2-3n)^4(n+1)^3=+\infty$$

Câu 71. Tính giới hạn $L=\lim\frac{n^3-2n}{3n^2+n-2}$

A. $L=+\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=\frac{1}{3}$. **D.** $L=-\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $L=\lim\frac{n^3-2n}{3n^2+n-2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=+\infty$.

Câu 72. Tính giới hạn của dãy số $u_n=\frac{-2+3n-2n^3}{3n-2}$

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\frac{-2+3n-2n^3}{3n-2}=\lim\frac{\frac{-2}{n}+n-2n^2}{3-\frac{2}{n}}=-\infty$ do $\lim\left(\frac{-2}{n}+n-2n^2\right)=\lim\left[n^2\left(-2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\right]=-\infty$ và $\lim\left(3-\frac{2}{n}\right)=3>0$.

Câu 73. Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\frac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}=\lim\frac{\sqrt{1.\frac{1-4^n}{1-4}}}{2n-1}=\lim\frac{\sqrt{4^n-1}}{\sqrt{3}(2n-1)}=+\infty$.

Câu 74. $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{2-\frac{3}{n}}=\frac{2-0}{2}=1$.

Câu 75. Cho $I=\lim\frac{\sqrt{4n^2+5}+n}{4n-\sqrt{n^2+1}}$. Khi đó giá trị của I là:

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{5}{3}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\frac{\sqrt{4n^2+5}+n}{4n-\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{5}{n^2}}+1}{4-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

.

Câu 76. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}$

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3x+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{1}{3}.$$

Câu 77. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\lim u_n=\lim\frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}=\lim\frac{n\sqrt{n^2}}{2n^2+1}=\lim\frac{n^2}{2n^2+1}=\lim\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

Câu 78. Tính $\lim\sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^3+...+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Khi đó: $\lim\sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^3+...+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}=\lim\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}}=\lim\sqrt{\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{7}{n}\right)\left(6+\frac{5}{n}\right)}}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 79. $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{n^2-3n+1}-n=\dfrac{-3n+1}{\sqrt{n^2-3n+1}+n}=\dfrac{-3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$

Nên $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)=-\dfrac{3}{2}$

Câu 80. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim\dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **B.** $\lim\dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. **D.** $\lim\dfrac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}}==\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

Câu 81. Giới hạn $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\right)=\lim\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+3}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=\frac{1}{2}.$$

Câu 82. Tính giới hạn $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)=\lim\dfrac{\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-4n}\right)}{n+\sqrt{n^2-4n}}$

$$=\lim\frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}=\lim\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=2.$$

Câu 83. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$$\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=\lim\frac{-4n+7+2an-a^2}{\sqrt{n^2-4n+7}-(a-n)}=\lim\frac{2a-4+\frac{7-a^2}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}-\frac{a}{n}+1}=a-2$$

Để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$ thì $a-2=0\Leftrightarrow a=2$.

Câu 84. Tính $I=\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]$.

A. $I=+\infty$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=1,499$. **D.** $I=0$.

Lời giải

Ta có: $I=\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]=\lim\dfrac{3n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}}=\lim\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{3}{2}$

Câu 85. Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim n\left[\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right]$

$=\lim\left[n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right]$.

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=\lim\dfrac{3n}{\left(\sqrt{4n^2+3}+2n\right)}=\lim\dfrac{3}{\left(\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}+2\right)}=\dfrac{3}{4}$.

Ta có: $\lim n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim\dfrac{-n^2}{\left(4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+n}+\sqrt[3]{\left(8n^3+n\right)^2}\right)}$

$=\lim\dfrac{-1}{\left(4+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{n^2}\right)^2}\right)}=-\dfrac{1}{12}$.

Vậy $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 86. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)=\lim\dfrac{\left(9n^2+2n-1\right)-\left(4n^2+1\right)}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}}=\lim\dfrac{5n^2+2n-2}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}}$

$=\lim\dfrac{n^2\left(5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right)}=\lim n\cdot\left(\dfrac{5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}\right)=+\infty$.

Câu 87. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-9n\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-9n\right)=\lim\frac{4n^2+n+1-81n^2}{\sqrt{4n^2+n+1}+9n}=\lim\frac{-77n^2+n+1}{\sqrt{4n^2+n+1}+9n}$$

$$=\lim\frac{n^2\left(-77+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+9\right)}=\lim n\cdot\left(\frac{-77+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+9}\right)=-\infty$$

Vì : $\lim n=+\infty$ và $\lim\left(\dfrac{-77+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+9}\right)=-7<0$.

Câu 88. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2+2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

$$L=\lim\frac{\left(4n^2+n\right)-\left(4n^2+2\right)}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2+2}}=\lim\frac{n-2}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2+2}}=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}\right)}$$

$$=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0}}=\frac{1}{4}.$$

Câu 89. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n+25\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

$$L=\lim 25+\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)=25+\lim\frac{\left(n^2+3n+5\right)-n^2}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=25+\lim\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$$

$$=25+\lim\frac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1\right)}=25+\lim\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}=25+\frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{53}{2}.$$

Câu 90. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\frac{(2n+1)-(n+3)}{\sqrt{4n-5}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}\right)}=\lim\frac{n-2}{\sqrt{4n-5}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}\right)}$$

$$=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{4-\frac{5}{n}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{4-\frac{5}{n}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}$$

$$=\frac{1-0}{\sqrt{4-0}\left(\sqrt{2+0}+\sqrt{1+0}\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Câu 91. Tính giới hạn sau $L=\lim\left(\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n+1}\right)=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{(n+4)^2}+\sqrt[3]{(n+4).(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{n^2.\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{n^2.\left(1+\frac{4}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt[3]{n^2.\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right]}=0.$$

Câu 92. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$$

$$=\lim\frac{8n^2-2}{\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2-2\right)^2}-\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2-2\right).\left(5n^2-8n^3\right)}+\sqrt[3]{\left(5n^2-8n^3\right)^2}}$$

$$=\lim\frac{8-\frac{2}{8n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}\right).\left(\frac{5}{n}-8\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{5}{n}-8\right)^2}}=\frac{2}{3}.$$

Câu 93. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{25}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)=6+\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n\right)$$

$$=6+\lim\frac{3n^2+4}{\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2+4\right)^2}+2n.\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}+4n^2}=6+\lim\frac{3+\frac{4}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}\right)^2}+2.\sqrt[3]{8+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}+4}$$

$$=6+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}.$$

Câu 94. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)=-1+\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n\right)=-1+\lim\frac{2n}{\sqrt[3]{\left(2n-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{2n-2n^3}+n^2}$$

$$=-1+\lim\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{2}{n^2}-1}+1}=-1+0=-1.$$

Câu 95. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)=2+\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n\right)=2+\lim\frac{n}{\sqrt[3]{\left(n-n^3\right)^2}-n.\sqrt[3]{n-n^3}+n^2}$$

$$=2+\lim\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-1}+1}=2+0=2.$$

Câu 96. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n-1\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n-1\right)=-1+\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$$

$$=-1+\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{2n^3-2n^2}+n^2}=-1+\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Câu 97. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)-\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)\right]$$

$$=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)-\lim\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)=\lim\frac{\left(n^4+n^2-n^4\right)}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}-\lim\frac{\left(n^6+1\right)-n^6}{\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+n^4}$$

$$=\lim\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}-\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+n^4}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}+0=\frac{1}{2}$$

Câu 98. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)+\left(n-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}+\frac{n^3-\left(n^3+n^2\right)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}-\frac{n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}-\frac{n^2}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2\right)}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Câu 99. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\frac{4}{e}\right)^n$. **B.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **C.** $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.

Lời giải

Ta có $\lim q^n=0$ nếu $|q|<1$.

Mặt khác $\left|\frac{4}{e}\right|>1$; $\left|\frac{5}{3}\right|=\left|\frac{-5}{3}\right|>1$; $\left|\frac{1}{3}\right|<1$. Vậy $\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

Câu 100. Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$.

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Câu 101. Tổng vô hạn sau đây $S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...$ có giá trị bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2;\frac{2}{3};\frac{2}{3^2};...;\frac{2}{3^n};...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q=\frac{1}{3}<1$.

$$S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...=2.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3.$$

Câu 102. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,15555...=3,1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là

A. $\frac{63}{20}$. **B.** $\frac{142}{45}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$3,15555...=3,1(5)=3,1+5\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...\right)=3,1+5.\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{142}{45}$$

Câu 103. Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=1,\ q=\frac{1}{2}$.

Áp dụng công thức được $S=\frac{u_1}{1-q}$ kết quả $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...=2$.

Câu 104. Cho dãy số $(u_n), n\in\mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=-\frac{u_n}{5}\end{cases}$. Gọi $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{-\frac{u_n}{5}}{u_n}=-\frac{1}{5}$ do đó dãy $(u_n), n\in\mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=3$, $d=-\frac{1}{5}$.

Suy ra $\lim S_n=\frac{u_1}{1-q}=\frac{3}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}$.

Câu 105. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+4,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=4$. **C.** $\lim u_n=12$. **D.** $\lim u_n=3$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $v_n=u_n-12, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $v_{n+1}=u_{n+1}-12=\frac{2}{3}u_n+4-12=\frac{2}{3}(u_n-12)=\frac{2}{3}v_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra dãy số (v_n) là cấp số nhân với công bội $q=\frac{2}{3}$ và số hạng đầu $v_1=-11$.

Suy ra $v_n=-11\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó $u_n=-11\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+12, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy $\lim u_n=12$.

Câu 106. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tìm $\lim\frac{n}{u_n}$.

A. $L=\frac{1}{3}$. **B.** $L=\frac{1}{2}$. **C.** $L=3$. **D.** $L=2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n=u_1+(n-1)d=2+(n-1)3=3n-1$.

$\lim\frac{n}{u_n}=\lim\frac{n}{3n-1}=\lim\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$.

Câu 107. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n=\sqrt{n+2018}-\sqrt{n+2017}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Dãy số (u_n) là dãy tăng. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

C. $0<u_n<\frac{1}{2\sqrt{2018}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_n=\sqrt{n+2018}-\sqrt{n+2017}=\dfrac{1}{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}$.

Suy ra: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}{\sqrt{n+2019}+\sqrt{n+2018}}<1$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Do đó, dãy số (u_n) giảm.

Vậy Chọn A

Chú ý:

+ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}=0$.

+ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}{\sqrt{n+2019}+\sqrt{n+2018}}=1$.

+ $0<u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n+2017}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{2018}}$.

Câu 108. Đặt $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$, xét dãy số (u_n) sao cho $u_n=\dfrac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$. Tìm $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{3}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(n)=(n^2+n+1)^2+1=(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]$.

Do đó $u_n=\dfrac{(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)...\left[(2n-1)^2+1\right]\left[4n^2+1\right]}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)...\left[4n^2+1\right]\left[(2n+1)^2+1\right]}$

$\Rightarrow u_n=\dfrac{2}{(2n+1)^2+1}\Rightarrow n\sqrt{u(n)}=\sqrt{\dfrac{2n^2}{(2n+1)^2+1}}$.

$\lim n\sqrt{u(n)}=\lim\sqrt{\dfrac{2n^2}{(2n+1)^2+1}}=\lim\sqrt{\dfrac{2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 109. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=0$ và $u_{n+1}=u_n+4n+3$, $\forall n\ge 1$. Biết

$$\lim\dfrac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+...+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+...+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\dfrac{a^{2019}+b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b<2019$. Tính giá trị $S=a+b-c$.

A. $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2017$. **D.** $S=2018$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$u_2 = u_1 + 4.1 + 3$

$u_3 = u_2 + 4.2 + 3$

...

$u_n = u_{n-1} + 4.(n-1) + 3$

Cộng vế theo vế và rút gọn ta được

$u_n = u_1 + 4.(1+2+...+n-1) + 3(n-1) = 4\dfrac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) = 2n^2 + n - 3$, với mọi $n \geq 1$.

Suy ra

$u_{2n} = 2(2n)^2 + 2n - 3$

$u_{2^2 n} = 2(2^2 n)^2 + 2^2 n - 3$

...

$u_{2^{2018} n} = 2(2^{2018} n)^2 + 2^{2018} n - 3$

Và

$u_{4n} = 2(4n)^2 + 4n - 3$

$u_{4^2 n} = 2(4^2 n)^2 + 4^2 n - 3$

...

$u_{4^{2018} n} = 2(4^{2018} n)^2 + 4^{2018} n - 3$

Do đó $\lim \dfrac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2 n}} + ... + \sqrt{u_{4^{2018} n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2 n}} + ... + \sqrt{u_{2^{2018} n}}}$

$= \lim \dfrac{\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{2.4^2 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}} + ... + \sqrt{2(4^{2018})^2 + \frac{4^{2018}}{n} - \frac{3}{n^2}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{2.2^2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} + ... + \sqrt{2(2^{2018})^2 + \frac{2^{2018}}{n} - \frac{3}{n^2}}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}(1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{2018})}{\sqrt{2}(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2018})} = \dfrac{1\dfrac{1-4^{2019}}{1-4}}{\dfrac{1-2^{2019}}{1-2}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{4^{2019}-1}{2^{2019}-1} = \dfrac{2^{2019}+1}{3}$.

Vì $2^{2019} > 2019$ cho nên sự xác định ở trên là duy nhất nên $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy $S = a + b - c = 0$.

Câu 110. Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n = \dfrac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$. **B.** $u_n = n\left(\sqrt{n^2+2018} - \sqrt{n^2+2016}\right)$.

C. $\begin{cases} u_1 = 2017 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 1), \quad n = 1,2,3... \end{cases}$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính giới hạn của các dãy số trong từng đáp án:

+) Đáp án A: $\lim u_n = \lim \dfrac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}} = \lim \left[\dfrac{2017-n}{n} . \left(\dfrac{2017-n}{2018-n} \right)^{2017} \right]$

$= \lim \left[\left(\dfrac{2017}{n} - 1 \right) \left(\dfrac{\dfrac{2017}{n} - 1}{\dfrac{2018}{n} - 1} \right)^{2017} \right] = -1.$

+) Đáp án B: $\lim u_n = \lim n\left(\sqrt{n^2+2018} - \sqrt{n^2+2016} \right) = \lim \dfrac{n\left(n^2+2018-n^2-2016\right)}{\sqrt{n^2+2018}+\sqrt{n^2+2016}}$

$= \lim \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2018}+\sqrt{n^2+2016}} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2018}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2016}{n^2}}} = 1.$

+) Đáp án C:

Cách 1: Ta có $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - 1) \Rightarrow u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - 1) = ... = \dfrac{1}{2^{n-1}}(u_1 - 1)$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{2016}{2^{n-1}} + 1 \Leftrightarrow u_n = 4032.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1 \Rightarrow \lim u_n = 1.$

Cách 2:

Bước 1: Ta chứng minh (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1.

Thật vậy bằng quy nạp ta có $u_1 = 2017 > 1$.

Giả sử $u_n > 1 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 1) > \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$

Vậy $u_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hơn nữa $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(1 - u_n) < 0$ nên (u_n) là dãy giảm

Suy ra (u_n) có giới hạn $\lim u_n = a$

Bước 2: Ta có $a = \lim u_n = \lim u_{n+1} = \lim \dfrac{1}{2}(u_n + 1) = \dfrac{1}{2}\lim u_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a = 1.$

+) Đáp án D:

Ta có $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \lim u_n = \lim \dfrac{n}{n+1} = 1.$

Câu 111. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1 = 2016; u_{n-1} = n^2(u_{n-1} - u_n)$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 1011. **B.** 1010. **C.** 1008. **D.** 1009.

Lời giải

Ta có $u_{n-1} = n^2(u_{n-1} - u_n) \Leftrightarrow u_{n-1}(n^2 - 1) = n^2 u_n \Leftrightarrow u_n = \dfrac{n-1}{n}.\dfrac{n+1}{n}.u_{n-1}$. Khi đó ta có:

$u_2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}.u_1$

$u_3 = \frac{2}{3}.\frac{4}{3}.u_2$

…

$u_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}.u_{n-1}$

Nhân theo vế các đẳng thức trên ta có $u_n = \frac{n+1}{2n}.u_1 = \frac{n+1}{n}.1008$. Vậy $\lim u_n = 1008$.

Câu 112. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n = \frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n = 1, 2, ...$ Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_1+u_2+...+u_n)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{n}{(1+n^2)^2 - n^2} = \frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right)$

Ta có $u_1+u_2+...+u_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{21} + ... + \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}$

Suy ra $\lim(u_1+u_2+...+u_n) = \frac{1}{2}\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$.

Câu 113. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 3\sqrt{4u_{n+1}+1} = \sqrt{4u_n+1} + 4, \left(n \in \mathbb{N}^*\right) \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

- Chứng minh (u_n) là dãy giảm, tức là chứng minh: $u_{n+1} \le u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Với $n = 1$, ta có: $3\sqrt{4u_2+1} = \sqrt{4u_1+1} + 4 \Leftrightarrow u_2 = \frac{10}{9} \le u_1$.

- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là: $u_{k+1} \le u_k, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là chứng minh: $u_{k+2} \le u_{k+1}$. Ta có:

$3\sqrt{4u_{k+2}+1} = \sqrt{4u_{k+1}+1} + 4 \le \sqrt{4u_k+1} + 4 = 33\sqrt{4u_{k+1}+1} \Leftrightarrow u_{k+2} \le u_{k+1}$.

- Vậy theo nguyên lý quy nạp suy ra $u_{n+1} \le u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, tức (u_n) là dãy giảm.

- Tương tự, dùng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $\frac{3}{4} < u_n \le 2$, tức dãy (u_n) bị chặn. Từ đó suy ra dãy số có giới hạn.

- Đặt $x = \lim u_n$. Khi $n \to +\infty$ thì $u_{n+1} \to x$ và

$3\sqrt{4x+1}=\sqrt{4x+1}+4 \Leftrightarrow 36x+9=4x+1+16+8\sqrt{4x+1} \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}=4x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$.

Vậy $\lim u_n=\frac{3}{4}$.

Câu 114. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1=-2 \\ u_n=3u_{n-1}-1, \forall n\ge 2 \end{cases}$, khi đó $L=\lim\frac{u_n}{3^n}$

A. Không xác định. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=-\frac{5}{6}$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u_n=v_n+\frac{1}{2}$, thay vào biểu thức truy hồi ta có $v_n+\frac{1}{2}=3\left(v_{n-1}+\frac{1}{2}\right)-1 \Leftrightarrow v_n=3v_{n-1}, \forall n\ge 2$.

Dễ thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1=u_1-\frac{1}{2}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$, công bội $q=3$, suy ra $v_n=-\frac{5}{2}.3^{n-1}$.

Do đó $u_n=v_n+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}.3^{n-1}+\frac{1}{2}(n\ge 1)$.

Vậy $L=\lim\frac{u_n}{3^n}=\lim\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{2.3^n}\right)=-\frac{5}{6}$.

Câu 115. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC.

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n\ge 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...$?

A. $S=\frac{15\pi}{4}$. **B.** $S=4\pi$. **C.** $S=\frac{9\pi}{2}$. **D.** $S=5\pi$.

Lời giải

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh$\times\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n=1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1=3.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1=\pi\left(3.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n=2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2=3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2=\pi\left(3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n=3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_3=3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow S_3=\pi\left(3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

.

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n=3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow S_n=\pi\left(3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Khi đó ta được dãy S_1, S_2, $...S_n...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=S_1=3\pi$ và công bội $q=\frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...=\frac{u_1}{1-q}=4\pi$.

Câu 116. Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây, dãy số nào có giới hạn khác 1?

A. $u_n=\frac{n(n-2018)^{2017}}{(n-2017)^{2018}}$. **B.** $u_n=n\left(\sqrt{n^2+2020}-\sqrt{4n^2+2017}\right)$.

C. $u_n=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\ldots+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$. **D.** $\begin{cases}u_1=2018\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+1),\ n\ge 1\end{cases}$.

Lời giải

+ Với phương án A:

$$u_n=\frac{n(n-2018)^{2017}}{(n-2017)^{2018}}\to\frac{n.n^{2017}}{n^{2018}}\to 1.$$

+ Với phương án B:

$$u_n=n\left(\sqrt{n^2+2020}-\sqrt{4n^2+2017}\right)\to n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{4n^2}\right)\to n.(-n)\to-\infty.$$

+ Với phương án C:

$$u_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=1-\frac{1}{2n+3}\to\frac{1}{2}.$$

+ Với phương án D:

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+1)\Leftrightarrow u_{n+1}-1=\frac{1}{2}(u_n-1).$$

Đặt $v_n=u_n-1$, ta có $\begin{cases}v_1=2017\\ v_{n+1}=\frac{1}{2}.v_n,\ n\ge 1\end{cases}$.

Suy ra dãy (v_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 2017, công bội bằng $\frac{1}{2}$ nên

$$v_n = 2017.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n \geq 1).$$

Suy ra $u_n = 2017.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \ (n \geq 1)$, do đó $\lim u_n = 1$.

Chú ý:

Ở phương án D, ta có thể chứng minh $u_n > 1$ với mọi $n \geq 1$ và (u_n) là dãy giảm nên (u_n) sẽ có giới hạn. Gọi $\lim u_n = a$.

Khi đó từ $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1)$, $n \geq 1$ suy ra $a = \frac{1}{2}(a+1) \Leftrightarrow a = 1$, do đó $\lim u_n = 1$.

Câu 117. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim\left(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 - 2n\right) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a} \Rightarrow u_{n+1}^2 - 3a = \frac{2}{3}\left(u_n^2 - 3a\right).$$

Đặt $v_n = u_n^2 - 3a$ thì (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 1 - 3a$ và công bội $q = \frac{2}{3}$.

Do đó $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) \Rightarrow u_n^2 = v_n + 3a = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) + 3a$.

Suy ra $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 - 2n = (1-3a)\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - 2n + 3na = 3(1-3a)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a-2)$.

Vì $\lim\left(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 - 2n\right) = b$ nên

$$\lim\left(3(1-3a)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a-2)\right) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 = 0 \\ b = 3(1-3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -3 \end{cases},$$

suy ra $T = ab = -2$.

Câu 118. Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + ... + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = \dfrac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!\times 6} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{C_n^3} = \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Vậy ta có $S_n=\frac{6}{1.2.3}+\frac{6}{2.3.4}+\frac{6}{3.4.5}+...+\frac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Nhận xét $\frac{2}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}$; $\frac{2}{2.3.4}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}$;...; $\frac{2}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-1)n}$

$\Rightarrow S_n=3\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=3\left(\frac{n-2}{2n}\right)=\frac{3n-6}{2n}$

Vậy $\lim S_n=\lim\left(\frac{3n-6}{2n}\right)=\lim\left(\frac{3-\frac{6}{n}}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

Câu 119. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2018)$ để có $\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\frac{1}{2187}$?

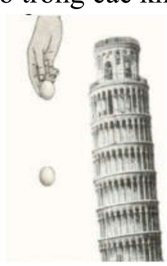
A. 2011. **B.** 2016. **C.** 2019. **D.** 2009.

Lời giải

Do $\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}>0$ với $\forall n$ nên $\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\sqrt{\lim\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\sqrt{\lim\frac{1+3.\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+9^a}}=\sqrt{\frac{1}{9^a}}=\frac{1}{3^a}$.

Theo đề bài ta có $\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\frac{1}{2187}\Leftrightarrow\frac{1}{3^a}\le\frac{1}{2187}\Leftrightarrow a\ge 7$. Do a là số nguyên thuộc khoảng $(0;2018)$ nên có $a\in\{7;8;9;...;2017\}\Rightarrow$ có 2011 giá trị của a.

Câu 120. Từ độ cao $55,8\text{m}$ của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(67\text{m};69\text{m})$. **B.** $(60\text{m};63\text{m})$. **C.** $(64\text{m};66\text{m})$. **D.** $(69\text{m};72\text{m})$.

Lời giải

Chọn A

Theo đề, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai. Do đó độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến:

◎ Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1=55,8\text{m}$.

◎ Thời điểm chạm đất lần thứ 2 là $d_2=55,8+2.\frac{55,8}{10}$.

◎ Thời điểm chạm đất lần thứ 3 là $d_3 = 55,8 + 2.\frac{55,8}{10} + 2.\frac{55,8}{10^2}$.

◎ Thời điểm chạm đất lần thứ 4 là $d_4 = 55,8 + 2.\frac{55,8}{10} + 2.\frac{55,8}{10^2} + 2.\frac{55,8}{10^3}$.

……………………………………

◎ Thời điểm chạm đất lần thứ $n, (n > 1)$ là $d_n = 55,8 + 2.\frac{55,8}{10} + 2.\frac{55,8}{10^2} + ... + 2.\frac{55,8}{10^{n-1}}$.

Do đó độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất là

$d = 55,8 + 2.\frac{55,8}{10} + 2.\frac{55,8}{10^2} + ... + 2.\frac{55,8}{10^{n-1}} + ...$ (mét).

Vì $2.\frac{55,8}{10}$, $2.\frac{55,8}{10^2}$, $2.\frac{55,8}{10^3}$, …, $2.\frac{55,8}{10^{n-1}}$,…, là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{10}$,

nên ta có $2.\frac{55,8}{10} + 2.\frac{55,8}{10^2} + ... + 2.\frac{55,8}{10^{n-1}} + ... = \dfrac{2.\frac{55,8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12,4$.

Vậy $d = 55,8 + 2.\frac{55,8}{10} + 2.\frac{55,8}{10^2} + ... + 2.\frac{55,8}{10^{n-1}} + ... = 55,8 + 12,4 = 68,2$.

Câu 121. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Biết rằng hai dãy số đồng thời thỏa mãn các hệ thức $u_{n+1} = 4v_n - 2, v_{n+1} = u_n + 1$ với mọi $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + 2v_n)$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $\begin{cases} \lim u_n = a \\ \lim v_n = b \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \lim u_{n+1} = \lim(4v_n - 2) \\ \lim v_{n+1} = \lim(u_n + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4b - 2 \\ b = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + 2v_n) = a + 2b = -\frac{2}{3} + 2.\frac{1}{3} = 0$.

Câu 122. Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Chiều cao mô hình không quá $1,5$ mét **B.** Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét

C. Chiều cao mô hình dưới 2 mét. **D.** Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính khối cầu dưới cùng là $R_1 = 50$ cm.

Gọi R_2, R_3,…, R_n lần lượt là bán kính của các khối cầu $R_2, R_3, ..., R_n$ nằm nằm ngay trên khối cầu dưới cùng.

Ta có $R_2 = \frac{R_1}{2}$, $R_3 = \frac{R_2}{2} = \frac{R_1}{4}, \ldots,\ R_n = \frac{R_{n-1}}{2} = \frac{R_1}{2^{n-1}}$

Gọi h_n là chiều cao của mô hình gồm có n khối cầu chồng lên nhau.

Ta có

$$h_n = 2R_1 + 2R_2 + 2R_3 + \ldots + 2R_n = 2\left(R_1 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{4}R_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}R_1\right) = 2R_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Suy ra chiều cao mô hình là $h = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[2R_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]$

Xét dãy số $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{2^{n-1}};\frac{1}{2^n};\ldots$ là một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên là dãy cấp số nhân lùi vô hạn. Do đó $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Suy ra $h = 2R_1.2 = 200$ cm. Vậy chiều cao mô hình nhỏ hơn 200 cm.

Câu 123. Trong một lần Đoàn trường Lê Văn Hưu tổ chức chơi bóng chuyền hơi, bạn Nam thả một quả bóng chuyền hơi từ tầng ba, độ cao $8m$ so với mặt đất và thấy rằng mỗi lần chạm đất thì quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết quả bóng chuyển động vuông góc với mặt đất. Khi đó tổng quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả bóng đến khi quả bóng không máy nữa gần bằng số nào dưới đây nhất?

A. $57m$. **B.** $54m$. **C.** $56m$. **D.** $58m$.

Lời giải

Chọn C

Lần đầu rơi xuống, quảng đường quả bóng đã bay đến lúc chạm đất là $8m$.

Sau đó quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ 2 thì quảng đường quả bóng đã bay là $8 + 2.8.\frac{3}{4}$.

Tương tự, khi quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ n thì quảng đường quả bóng đã bay là $8 + 2.8.\frac{3}{4} + \ldots\ldots + 2.8.(\frac{3}{4})^{n-1} = 8 + \frac{1 - (\frac{3}{4})^n}{1 - \frac{3}{4}} = 8 + 48(1 - (\frac{3}{4})^{n-1})$.

Quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả đến lúc không máy nữa bằng:

$\lim[8 + 48(1 - (\frac{3}{4})^{n-1})] = 8 + 48 = 56$.

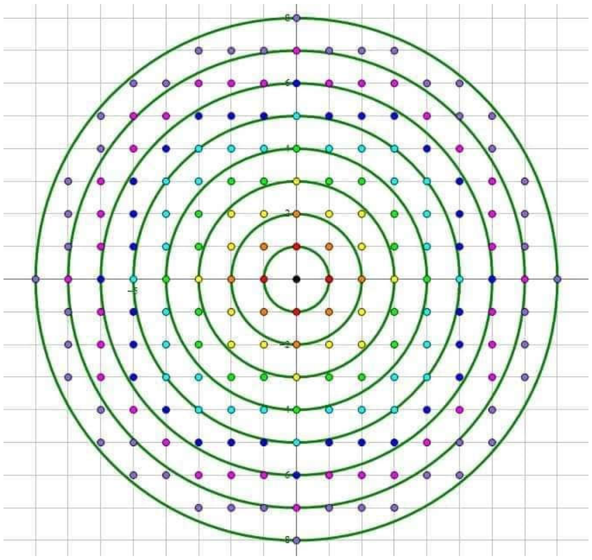
Câu 124. Với mỗi số nguyên dương n, gọi s_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \le n^2$. (nếu $a \ne b$ thì hai cặp số $(a;b)$ và $(b;a)$ khác nhau). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{2\pi}$. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n} = 2$. **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{\pi}$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n} = 4$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Xét điểm $M(x;y)$ bất kì nằm trong (tính cả biên) của hình tròn $(C_n):\ x^2+y^2\le n^2$.

Mỗi điểm M tương ứng với một và chỉ một hình vuông đơn vị $S(M)$ nhận M là đỉnh ở góc trái, phía dưới, có các cạnh lần lượt song song hoặc nằm trên các trục tọa độ.

Ta được s_n bằng số các hình vuông $S(M)$ và bằng tổng diện tích của $S(M)$, với $M\in(C_n)$.

Nhận xét: các hình vuông $S(M)$, $S(M)$ đều nằm trong hình tròn $\left(C_{n+\sqrt{2}}\right):\ x^2+y^2\le\left(n+\sqrt{2}\right)^2$.

Do đó $s_n\le\pi\left(n+\sqrt{2}\right)^2$. (1)

Mặt khác, các hình vuông $S(M)$ phủ kín hình tròn $\left(C_{n-\sqrt{2}}\right):\ x^2+y^2\le\left(n-\sqrt{2}\right)^2$.

Vì thế $s_n\ge\pi\left(n-\sqrt{2}\right)^2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\sqrt{\pi}\left(n-\sqrt{2}\right)\le\sqrt{s_n}\le\sqrt{\pi}\left(n+\sqrt{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$.

$$\Leftrightarrow\sqrt{\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\le\frac{\sqrt{s_n}}{n}\le\sqrt{\pi}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$$

Mà $\lim\sqrt{\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n}\right)=\lim\sqrt{\pi}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)=\sqrt{\pi}$, theo nguyên lí kẹp, ta được $\lim\frac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{\pi}$.

Cách 2: Gọi D_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ với $x\ne y$ và E_n là số cặp số nguyên $(x;x)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$. Ta có E_n là số các số nguyên k sao cho $2k^2\le n^2$, từ $k\le\frac{\sqrt{2}}{2}n$, ta có $n\in\mathbb{Z}$ và $-\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor\le k\le\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor$. Cho nên $E_n=2\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+1$.

Tiếp theo, ta đánh giá D_n.

Tổng số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ với $x\ne y$ là $4N_n$ với N_n là số các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ và $x\ne y$. Giả sử $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$, khi đó $0\le x\le n$, $0\le y\le\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Nên ta có đánh giá với D_n là $4\left(-n+\sum\limits_{0\le x\le n}\left\lfloor n^2-x^2\right\rfloor\right)\le 4N_n\le D_n\le 4\sum\limits_{0\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Vì thế cho nên từ $s_n = E_n + D_n$, có $-4n+1+T_n \le s_n \le 1+T_n$, trong đó $T_n = 2\left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor \sqrt{n^2-x^2} \right\rfloor$.

Suy ra $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(2\left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor \sqrt{n^2-x^2} \right\rfloor\right)$. Do đánh giá về phần nguyên

$$2\left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor \sqrt{n^2-x^2} \right\rfloor \le 2\left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right) + 4\sum_{1\le x\le n}\sqrt{n^2-x^2},$$

$$2\left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor \sqrt{n^2-x^2} \right\rfloor \ge 2\left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right) + 4\sum_{1\le x\le n}\left(\sqrt{n^2-x^2}-1\right)$$

Nên ta được $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{1\le x\le n}\sqrt{n^2-x^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\sum_{1\le x\le n}\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}$

Về bản chất, kết quả giới hạn này là giá trị của tích phân xác định $I = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$.

Vậy $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{\pi}$.

Câu 125. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \ldots + \frac{1}{n^2-1}$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_n = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \ldots + \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n+1)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)}$.

Suy ra: $\lim u_n = \lim\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)}\right] = \frac{3}{4}$.

Câu 126. Tính giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Câu 127. Tìm $L=\lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L=\frac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $1+2+3+...+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1=1$, $d=1$ nên $1+2+3+...+k=\frac{(1+k)k}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+2+...+k}=\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

$L=\lim\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+...+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=\lim\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}\right)=2$.

Câu 128. Với n là số nguyên dương, đặt $S_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Suy ra

$S_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+....\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Suy ra $\lim S_n=1$

Câu 129. Tổng $S=\frac{100}{10.15.20}+\frac{100}{15.20.25}+\frac{100}{20.25.30}+...+\frac{100}{110.115.120}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{93}{1380}$ **B.** $\frac{91}{13800}$ **C.** $\frac{9}{138}$ **D.** $\frac{91}{1380}$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\frac{100}{10.15.20}=10\left(\frac{1}{10.15}-\frac{1}{15.20}\right)$; $\frac{100}{15.20.25}=10\left(\frac{1}{15.20}-\frac{1}{20.25}\right)$;

$\frac{100}{20.25.30}=10\left(\frac{1}{20.25}-\frac{1}{25.30}\right)$; $\frac{100}{110.115.120}=10\left(\frac{1}{110.115}-\frac{1}{115.120}\right)$

Khi đó

$S=10\left(\frac{1}{10.15}-\frac{1}{15.20}\right)+10\left(\frac{1}{15.20}-\frac{1}{20.25}\right)+10\left(\frac{1}{20.25}-\frac{1}{25.30}\right)+...+10\left(\frac{1}{110.115}-\frac{1}{115.120}\right)$

$=\frac{1}{15}-\frac{1}{115.12}=\frac{91}{1380}$

Câu 130. Giá trị của tổng: $S=\frac{12}{4.16}+\frac{20}{16.36}+\frac{28}{36.64}+\ldots+\frac{84}{400.484}$ là:

A. $\frac{31}{121}$ **B.** $\frac{30}{121}$ **C.** $\frac{32}{121}$ **D.** $\frac{33}{121}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{12}{4.16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16};\frac{20}{16.36}=\frac{1}{16}-\frac{1}{36};\frac{28}{36.64}=\frac{1}{36}-\frac{1}{64};\frac{84}{400.484}=\frac{1}{400}-\frac{1}{484}$

Khi đó $S=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{64}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{400}-\frac{1}{484}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{484}=\frac{30}{121}$

Câu 131. Cho tổng: $S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Lựa chọn đáp án đúng.

A. $S_3=\frac{1}{12}$. **B.** $S_2=\frac{1}{6}$. **C.** $S_2=\frac{2}{3}$. **D.** $S_3=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$

Câu 132. Cho $M=5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\ldots+\frac{5}{729}$. Khi đó $729M$ bằng:

A. $\frac{5465}{729}$ **B.** 5460 **C.** 5465 **D.** $\frac{5460}{729}$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$M=5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\ldots+\frac{5}{729}=5\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^6}\right)$$

$$\Leftrightarrow M\left(1-\frac{1}{3}\right)=5\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}M=5\left(1-\frac{1}{3^7}\right)\Leftrightarrow M=\frac{5}{2}\left(\frac{3^7-1}{3^6}\right)\Rightarrow 729M=729.\frac{5}{2}.\left(\frac{3^7-1}{3^6}\right)=5465$$

Câu 133. Cho $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$. Công thức của S_n là:

A. $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ **B.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ **C.** $\frac{2^n-1}{2^n}$ **D.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{2}\right)S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}\Leftrightarrow S_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

Câu 134. Cho tổng: $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+...+\left(1-\frac{1}{2048}\right)$. Khi đó: $2^{11}.S$ bằng:

A. $5.2^{12}+1$ **B.** 5.2^{12} **C.** $5.2^{12}-1$ **D.** $5.2^{13}+1$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+...+\left(1-\frac{1}{2048}\right)=11-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{11}}\right)$$

$$S=12-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{11}}\right)\Leftrightarrow S=12-\frac{2^{12}-1}{2^{11}}=\frac{5.2^{12}+1}{2^{11}}\Rightarrow 2^{11}S=5.2^{12}+1$$