

BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẪNG

• CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

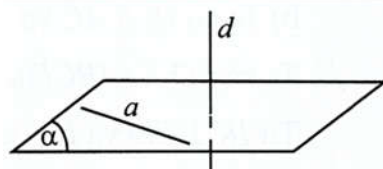
PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (α) , kí hiệu $d \perp (\alpha)$.



Hình 2

Ví dụ 1. Cho biết cột của trụ gôn của một sân bóng đá là đường thẳng d vuông góc với mặt sân (Hình 3). Tìm góc giữa d và một đường thẳng a kẻ trên sân.

Giải

Do đường thẳng d vuông góc với mặt sân nên suy ra d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt sân. Vậy ta có góc giữa d và a bằng 90° .

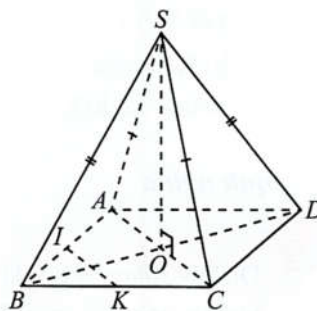
Định lý 1

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O và có $SA = SC, SB = SD$. Cho I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$;b) $IK \perp (SBD)$.

Giải



Hình 5

a) Ta có $ABCD$ là hình thoi, suy ra AC, BD vuông góc với nhau và có cùng trung điểm O .

Tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$. Tương tự, ta có $SO \perp BD$. Do SO vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AC và BD trong $(ABCD)$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $IK \parallel AC$ và $AC \perp BD$, do đó $IK \perp BD$.

Ta có $SO \perp (ABCD)$, do đó $SO \perp IK$.

Từ $IK \perp BD$ và $IK \perp SO$ suy ra $IK \perp (SBD)$.

Kiến thức trọng tâm

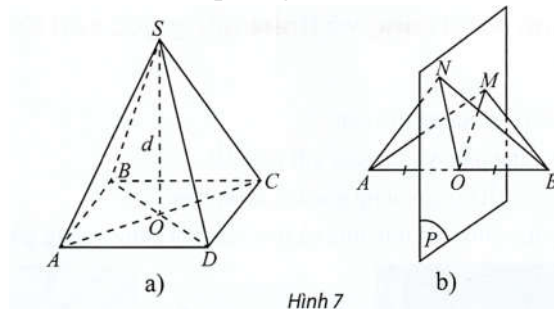
Định lý 2

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Ví dụ 3.

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O (Hình 7a). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh d đi qua O .

b) Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB ; M, N là hai điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB sao cho M, N, O không thẳng hàng (Hình 7b). Chứng minh M và N thuộc mặt phẳng (P) .



Hình 7

Giải

a) Ta có: $SA = SC$ suy ra $SO \perp AC$; $SB = SD$ suy ra $SO \perp BD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Theo giả thiết, ta có đường thẳng d đi qua S và vuông góc với $(ABCD)$. Do qua điểm S chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên d phải trùng với đường thẳng SO , suy ra d đi qua O .

b) Ta có: $MA = MB$ suy ra $OM \perp AB$; $NA = NB$ suy ra $ON \perp AB$. Suy ra $AB \perp (OMN)$.

Theo giả thiết, ta có (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB . Do qua điểm O chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB nên (P) phải trùng với (OMN) , suy ra M và N thuộc (P) .

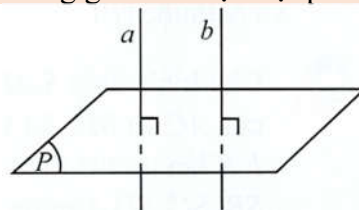
2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Kiến thức trọng tâm

Định lý 3

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



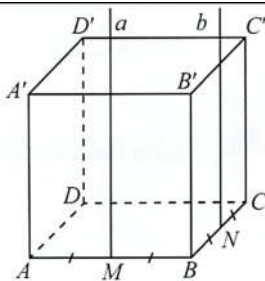
Hình 11

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC .

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với AA' . Chứng minh $a \perp (ABCD)$.

b) Qua N vẽ đường thẳng b vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $b \parallel AA'$.

Giải



Hình 12

a) Theo đề bài ta có $a // AA'$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $a \perp (ABCD)$.

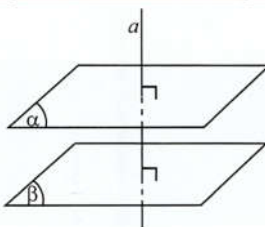
b) Theo đề bài ta có $b \perp (ABCD)$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $b // AA'$.

Kiến thức trọng tâm

Định lý 4

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



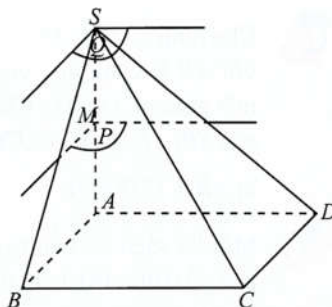
Hình 13

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$.

a) Vẽ mặt phẳng (Q) đi qua S và song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh $SA \perp (Q)$.

b) Cho M là trung điểm của SA . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với $(ABCD)$. Chứng minh $SA \perp (P)$.

Giải



Hình 14

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ (1) và $(Q) // (ABCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SA \perp (Q)$.

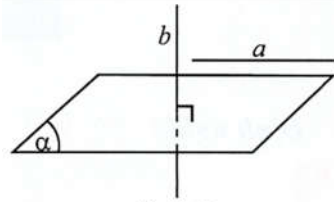
b) Ta có $(P) // (ABCD)$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $SA \perp (P)$.

Kiến thức trọng tâm

Định lý 5

a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .

b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.

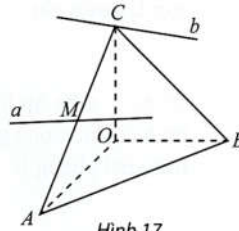


Hình 16

Ví dụ 6. Cho ba đoạn thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

- a) Cho M là trung điểm của CA và a là đường thẳng tùy ý đi qua M và song song với mặt phẳng (OAB) . Chứng minh $a \perp OC$.
- b) Gọi b là một đường thẳng tùy ý đi qua C và b vuông góc với OC . Chứng minh $b \parallel (OAB)$.

Giải



Hình 17

- a) Ta có $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$, suy ra $OC \perp (OAB)$. (1)

Ta có $a \parallel (OAB)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a \perp OC$.

- b) Ta có $b \perp OC$. (3)

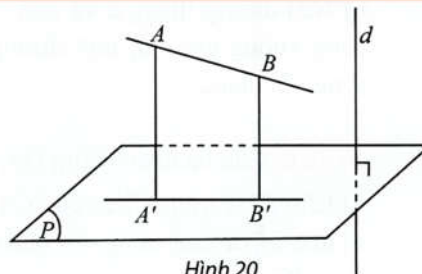
Từ (1) và (3), suy ra $b \parallel (OAB)$.

3. Phép chiếu vuông góc

Kiểm thức trọng tâm

Định nghĩa

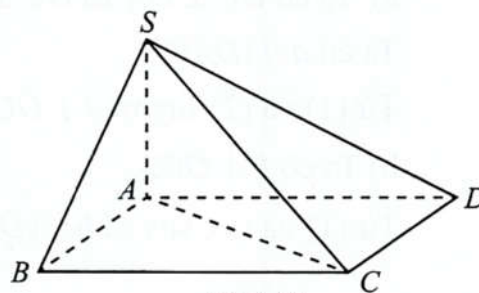
Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P) . Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (P) .



Hình 20

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và $SA \perp (ABCD)$. Tìm hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ và hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (SAB) .

Giải



Hình 21

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$.

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $SA \perp AD$. (1)

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, suy ra $AB \perp AD$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $AD \perp (SAB)$, suy ra A là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SAB) .

Định lý ba đường vuông góc

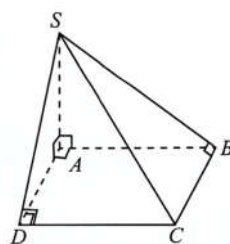
Kiến thức trọng tâm

Định lý 6

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh $CD \perp SD$ và $CB \perp SB$.

Giải



Hình 23

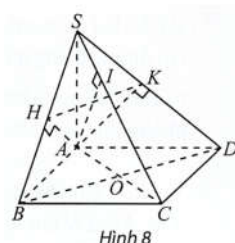
Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra DA là hình chiếu vuông góc của DS trên $(ABCD)$ và BA là hình chiếu vuông góc của BS trên $(ABCD)$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp DA$, suy ra theo định lý ba đường vuông góc ta có $CD \perp SD$.

Tương tự ta cũng có $CB \perp AB$, suy ra theo định lý ba đường vuông góc ta có $CB \perp SB$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Câu 1. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, O là giao điểm của AC và BD , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD .



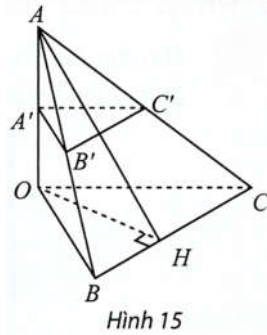
Hình 8

Chứng minh rằng:

a) $CB \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAD)$;

b) $HK \perp AI$.

Câu 2. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) và có A', B', C' lần lượt là trung điểm của OA, AB, AC . Vẽ OH là đường cao của tam giác OBC .



Chứng minh rằng:

- a) $OA \perp (A'B'C')$;
- b) $B'C' \perp (OAH)$.

Câu 3. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với AB là cạnh góc vuông và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cho M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SB, AB, CD, SC . Chứng minh rằng:

- a) $AB \perp (MNPQ)$;
- b) $MQ \perp (SAB)$.

Câu 4. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm C , đường thẳng CD và tam giác SCD trên mặt phẳng (SAB) .

Câu 5. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Vẽ đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H . Chứng minh $AH \perp BC$.

Câu 6. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$.

- a) Chứng minh $CD \perp (SAD)$.
- b) Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh $CM \perp (SAB)$.

Câu 7. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại H , lấy điểm S . Chứng minh rằng:

- a) $AC \perp (SHK)$;
- b) $CK \perp (SDH)$.

Câu 8. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, có các cạnh bên đều bằng $2a$.

- a) Tính góc giữa SC và AB .
- b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SAB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 9. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$ và $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC . Chứng minh $SI \perp (ABC)$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (SAB)$;
- b) $BD \perp (SAC)$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

- a) $AA' \perp (A'B'C'D')$;
- b) $BB' \perp (ABCD)$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Kẻ AM vuông góc với SB tại M và AN vuông góc với SC tại N . Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (SAB)$;
- b) $AM \perp (SBC)$;
- c) $SC \perp (AMN)$.

Câu 13. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (OAH)$;
- b) H là trực tâm của tam giác ABC ;
- c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Chứng minh rằng:

- a) $BB' \perp (A'B'C')$;
- b) $B'C' \perp (ABB'A')$.

Câu 16. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:

- a) $SO \perp (ABCD)$;
- b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (SAH)$ và các đường thẳng AH, BC, SK đồng quy;
- b) $SB \perp (CHK)$ và $HK \perp (SBC)$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi I là trung điểm của AC . Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$. Chứng minh rằng:

- a) SA vuông góc với các cạnh đáy;
- b) $BC \perp (SAB)$;
- c) $BI \perp (SAC)$, từ đó suy ra $BI \perp SC$;
- d) $AH \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AH \perp SC$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và BCD là các tam giác cân tại A và D . Gọi I là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh rằng $BC \perp AD$.
- b) Kẻ AH là đường cao của tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Câu 20. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $SB = AB$ và $SB \perp (ABC)$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC, AB . Chứng minh rằng:

- a) $AC \perp (SAB)$;
- b) $BH \perp (SAC)$;
- c) $KI \perp SA$;
- d) $AB \perp IH$.

Câu 21. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng $SA = SB = SC = SD, SO = 2a\sqrt{2}$.

- a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
- b) Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác SAC .

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Vẽ $AH \perp MD$ tại H .

- a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
- b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC . Chứng minh rằng $GK \perp (ABC)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thoi, O là giao điểm của hai đường chéo, $SA = SC, SB = SD$.

- a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
- b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BA, BC . Chứng minh rằng $IJ \perp (SBD)$.
- c) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ (Hình 7). Chứng minh rằng:

- a) $BB' \perp (A'B'C')$;
- b) $AA' \perp (A'B'C')$.

Câu 25. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $BC \perp (SAB)$;
- a) Nếu $ABCD$ là hình thoi thì $SC \perp BD$.

Câu 26. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.

Câu 27. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC, SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi, $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

- a) $BB' \perp (A'B'C'D')$;
- b) $BD \perp A'C$.

Câu 29. Cho hình chóp $O \cdot ABC$ và điểm H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA sao cho $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = \widehat{OHC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng H thuộc mặt phẳng (ABC) .

Câu 30. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Chứng minh rằng $SO \perp (ABC)$.

Câu 31. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P đôi một phân biệt thoả mãn $MA = MB = MC, NA = NB = NC, PA = PB = PC$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Câu 32. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh $AB \perp CD$.

Câu 33. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD . Chứng minh rằng:

- a) $AD \perp CH$;
b*) $HK \perp (ACD)$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác SAB, SBC, SCA . Chứng minh rằng $SA \perp (MNP)$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD . Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.
b) $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK) .
c) $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD) . Chứng minh rằng H là trực tâm của $\triangle BCD$ và $AD \perp BC$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 37. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Làm thế nào để dựng cột chống một biển báo vuông góc với mặt đất?



Câu 38. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một kệ sách có bốn trụ chống và các ngăn làm bằng các tấm gỗ (Hình 18). Làm thế nào dùng một êke để kiểm tra xem các tấm gỗ có vuông góc với mỗi trụ chống và song song với nhau hay không? Giải thích cách làm.

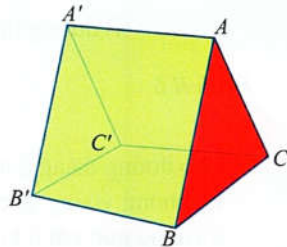


Hình 18

Câu 39. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Nêu cách tìm hình chiếu vuông góc của một đoạn thẳng AB trên trần nhà xuống nền nhà bằng hai dây dọi.

Câu 40. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình 24).

Cho biết $AB = AC = 2,4m$; $BC = 2m$; $AA' = 3m$.



Hình 24

- a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC ; $A'B'$ và AC .
b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.

Câu 41. Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột $40cm$. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B đều cách O là $30cm$ (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng $50cm$. Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

Câu 42. Một cây cột được dựng trên một sân phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sân hay không? Vì sao?

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, $BC \perp AB$. Lấy hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và điểm P nằm trên cạnh SA . Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác vuông.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD . Chứng minh rằng:

- a) $CD \perp (ABH)$ và $CD \perp (ABK)$;
b) Bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.
c) Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Câu 46. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B sao cho B thuộc (P) và A không thuộc (P) . Điểm C chuyển động trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng C chuyển động trên một đường tròn cố định trong (P) .

Câu 47. Cho đoạn thẳng AB và mặt phẳng (P) sao cho $(P) \perp AB$ và (P) cắt đoạn thẳng AB tại điểm H thỏa mãn $HA = 4cm, HB = 9cm$. Điểm C chuyển động trong mặt phẳng (P) thỏa mãn $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng điểm C thuộc đường tròn tâm H bán kính $6cm$ trong mặt phẳng (P) .

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình - khá

- Câu 1.** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai**.
- A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$. B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$. D. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
- Câu 2.** Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?
- A. Vô số. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 3.** Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì d vuông góc với hai đường thẳng trong mặt phẳng (α) .
B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với mặt phẳng (α) .
C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) .
D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.
- Câu 4.** Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
- Câu 5.** Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây?
- A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Q) .
B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song với đường thẳng b .
C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song hoặc trùng với đường thẳng b .
D. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.
- Câu 6.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:
- A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.
C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.
- Câu 7.** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) . Chọn khẳng định đúng?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $SC \perp (ABCD)$. D. $SB \perp (ABCD)$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$.

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CD \perp (SBC)$. B. $SA \perp (ABC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $CM \perp (ABD)$. B. $AB \perp (MCD)$.

C. $AB \perp (BCD)$. D. $DM \perp (ABC)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAB)$. B. $AC \perp (SBD)$. C. $BD \perp (SAC)$. D. $CD \perp (SAD)$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AH \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAC)$. C. $AK \perp (SCD)$. D. $BC \perp (SAC)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A trên SB . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AM \perp SD$. B. $AM \perp (SCD)$. C. $AM \perp CD$. D. $AM \perp (SBC)$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $BA \perp (SAD)$. B. $BA \perp (SAC)$. C. $BA \perp (SBC)$. D. $BA \perp (SCD)$.

Câu 15. Cho tứ diện $MNPQ$ có hai tam giác MNP và QNP là hai tam giác cân lần lượt tại M và Q . Góc giữa hai đường thẳng MQ và NP bằng

A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 16. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $BC \perp (SAH)$. B. $HK \perp (SBC)$.

C. $BC \perp (SAB)$. D. SH, AK và BC đồng quy.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2, DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp AD$. B. $AC \perp BD$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $DC \perp (ABC)$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $CM \perp SB$. B. $CM \perp AN$. C. $MN \perp MC$. D. $AN \perp BC$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $MN \perp AB$. B. $MN \perp BD$. C. $MN \perp CD$. D. $AB \perp CD$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 2, cạnh bên SA bằng 3 và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh bên SB và N là hình chiếu vuông góc của A trên SO . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $AC \perp (SDO)$. B. $AM \perp (SDO)$. C. $SA \perp (SDO)$. D. $AN \perp (SDO)$.

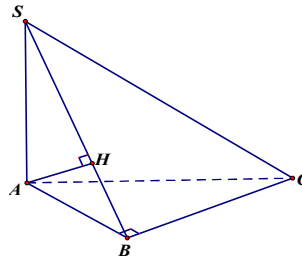
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định **đúng**.

- A. $BC \perp SC$. B. $BC \perp AH$. C. $BC \perp AB$. D. $BC \perp AC$.

Câu 22. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AM \perp SC$. B. $AM \perp MN$. C. $AN \perp SB$. D. $SA \perp BC$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ tam giác ABC vuông tại B cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Mệnh đề nào sau đây **SAI**?



- A. Các mặt bên của hình chóp các tam giác vuông.
 B. $\triangle SBC$ vuông.
 C. $AH \perp SC$
 D. Góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là góc \widehat{SCB}

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại C . Gọi H là hình chiếu vuông góc S lên mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. H là trung điểm của cạnh AB . B. H là trọng tâm tam giác ABC .
 C. H là trực tâm tam giác ABC . D. H là trung điểm của cạnh AC .

Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá – giỏi

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O ; Gọi I là trung điểm của SC ; Xét các khẳng định sau:

- $OI \perp (ABCD)$.
- $BD \perp SC$.
- (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
- $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a . Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD . Khi đó, tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . SA vuông góc với đáy, M là một điểm trên cạnh AB . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA, AD . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) là

- A. Hình bình hành. B. Hình vuông. C. Hình thang vuông. D. Hình chữ nhật.

Câu 28. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 3a$. Mặt phẳng qua A vuông góc với $A'C$ cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại I, J, K . Tính diện tích thiết diện $AIJK$

- A. $\frac{2a^2\sqrt{11}}{3}$. B. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{3}$. D. $\frac{3a^2\sqrt{11}}{2}$.

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S . Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, (α) là mặt phẳng qua G vuông góc với SC . Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

- A. $\frac{4}{9}a^2$. B. $\frac{2}{3}a^2$. C. $\frac{4}{3}a^2$. D. $\frac{2}{9}a^2$.

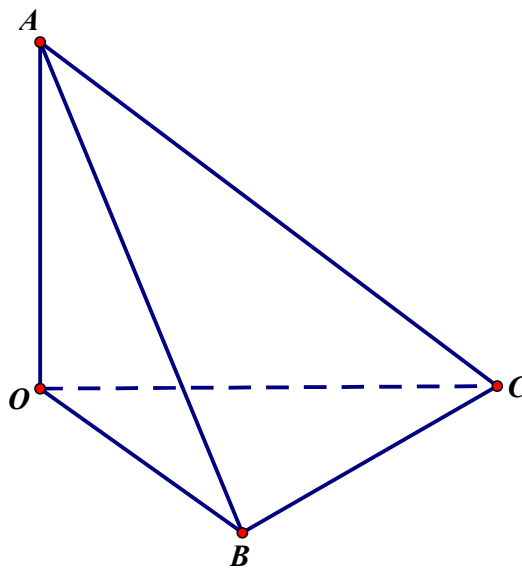
Câu 30. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Diện tích thiết diện cắt lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{16}a^2$. B. $\frac{3\sqrt{35}}{16}a^2$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. D. $\frac{9}{8}a^2$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$. SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm của AB . (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng:

- A. 20. B. 15. C. 30. D. 16.

Câu 32. Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là

- A. Số khác. B. $48\sqrt{3}$. C. 48. D. 125.

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ➡ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ➡ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ➡ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương
➡ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

➡ **Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <https://www.nbv.edu.vn/>

Nguyễn Bảo Vương