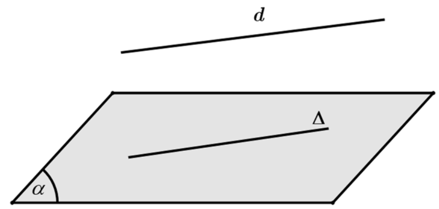
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

- CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1. BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

$$\begin{cases} d//\Delta \\ d \not\subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d//(\alpha).$$



Câu 1. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Làm thế nào để đặt cây thước ké a để nó song song với các trang của một cuốn sách?

Hình 18

Lời giải

Để cây thước a song song với các trang của một cuốn sách, ta đặt a song song với 1 dòng kẻ của cuốn sách hoặc với mép cuốn sách

Câu 2. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a,b,c,d,e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà (Hình 19).

Hình 19

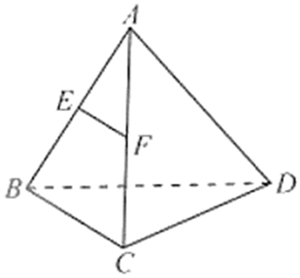
Lời giải

Đường thẳng a,e nằm trong mặt phẳng (P)

Đường thẳng b,c song song với mặt phẳng (P)

Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P)

Câu 3. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC của tứ diện $ABCD$. Xác định vị trí tương đối của các đường thẳng BC, AD và EF với mặt phẳng (BCD).



Hình 4

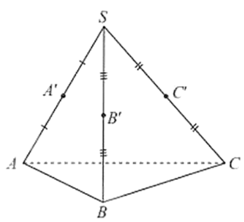
Lời giải

Đường thẳng BC thuộc mặt phẳng (BCD)

Đường thẳng AD cắt mặt phẳng (BCD)

Đường thẳng EF song song với mặt phẳng (BCD)

Câu 4. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B', C' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tìm các đường thẳng lần lượt nằm trong, cắt, song song với mặt phẳng (ABC).



Hình 8

Lời giải

Các đường thẳng SA, SB, SC cắt mặt phẳng (ABC)

Các đường thẳng AB, BC, CA nằm trong mặt phẳng (ABC)

Các đường thẳng $A'B', B'C', C'A'$ song song với mặt phẳng (ABC)

Câu 5. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Hãy chỉ ra trong Hình 9 các đường thẳng lần lượt nằm trong, song song, cắt mặt phẳng sàn nhà.

Hình 9

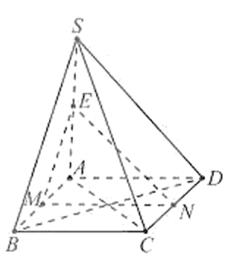
Lời giải

Các mép của tấm thảm nằm trong mặt phẳng sàn nhà

Các mép bàn, mép tủ song song với mặt phẳng sàn nhà

Các cạnh bàn, cạnh giường, cạnh tủ cắt mặt phẳng sàn nhà

Câu 6. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA (Hình 17). Chứng minh rằng:



Hình 17

a) MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD);

b) SB và SC song song với mặt phẳng (MNE).

Lời giải

a) Ta có hình bình hành $ABCD; M, N$ lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $MN / / BC / / AD$

Do $BC \subset (SBC)$ nên $MN / /(SBC)$

Do $AD \subset (SAD)$ nên $MN / /(SAD)$

b) Trong tam giác SAB có M, E lần lượt là trung điểm của AB và SA nên $ME / / SB$

Mà $ME \subset (MNE)$ nên $SB / /(MNE)$

Gọi O là giao của AC, BD và MN

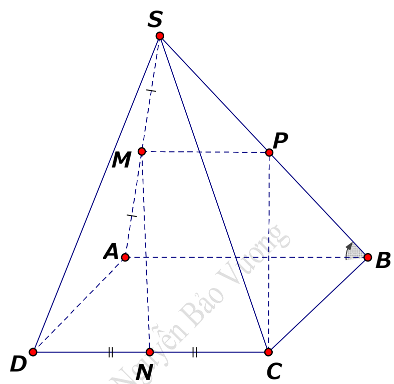
Do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC

Trong tam giác SAC có O, E lần lượt là trung điểm của AC và SA nên $OE / / SC$

Mà $OE \subset (MNE)$ nên $SC / /(MNE)$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình bình hành. M, N là trung điểm của SA, CD. Chứng minh $MN // (SBC)$.

Lời giải



*) Trong ΔSAB: Gọi P là trung điểm của SB khi đó

Ta có MP là đường trung bình $\Rightarrow MP // = \frac{1}{2} AB$ (1)

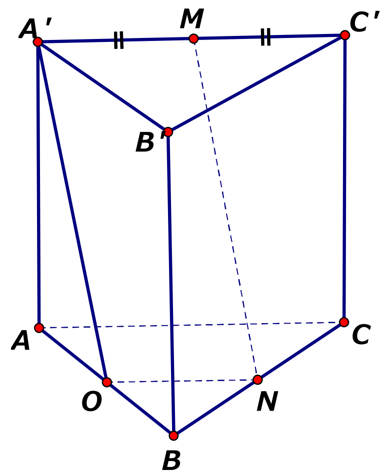
*) Lại có $AB // = CD \Rightarrow CN // = \frac{1}{2} AB$ (2) (Do N là trung điểm của CD)

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP // = CN \Rightarrow$ Tứ giác $MNCP$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN // CP \subset (SBC) \Rightarrow MN // (SBC)$. (Điều phải chứng minh).

Câu 8. Lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M, N là trung điểm của $A'C', BC$. Chứng minh $MN // (ABB'A')$

Lời giải



*) Trong ΔABC: Gọi O là trung điểm của AB;

Khi đó ON là đường trung bình $\Rightarrow ON \,//= \frac{1}{2}AC$ (1)

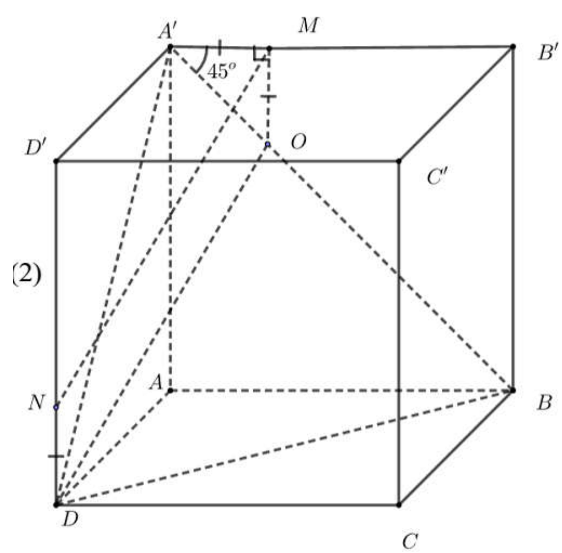
*) $ACC'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \,//= A'C' \Rightarrow A'M \,//= \frac{1}{2}AC$ (2)

*) $ON \,//= A'M \Rightarrow$ Từ giác $A'ONM$ là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} MN \,//\, A'O \\ A'O \subset (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, (ABB'A')$.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. M, N thuộc hai đoạn $A'B'$ và DD' để $A'M = DN$. Chứng minh song song với một mặt phẳng cố định.

Lời giải

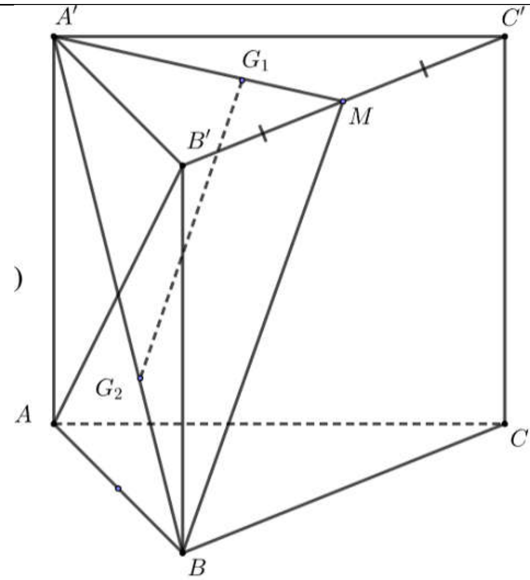


Gọi $O \in A'B$ sao cho $MO // BB'$. Khi đó $\frac{A'M}{A'B'} = \frac{MO}{BB'}$.

Mà theo giả thiết $A'M = DN$, $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có: $\begin{cases} MO = DN \\ MO // DN \end{cases}$ nên tứ giác $MODN$ là hình bình hành. Do đó $MN // DO$, $DO \subset (A'DB) \Rightarrow MN // (A'DB)$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $A'B'C'$ và ABB'. Chứng minh rằng $G_1G_2 // (BCC'B')$.

Lời giải



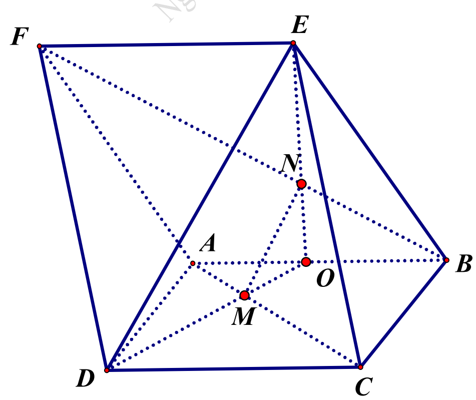
Gọi M là trung điểm của $B'C'$. G_1 là trọng tâm $\Delta A'B'C'$ nên ta có : $\frac{A'G_1}{A'M}=\frac{2}{3}$ (1).

G_2 là trọng tâm $\Delta ABB'$ nên $\frac{BG_2}{\frac{1}{2}A'B}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow \frac{BG_2}{A'B}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{A'G_2}{A'B}=\frac{2}{3}$ (2).

Từ (1), (2) ta có : $\frac{A'G_1}{A'M}=\frac{A'G_2}{A'B}\Rightarrow G_1G_2//BM$, $BM\subset (BCC'B')\Rightarrow G_1G_2//(BCC'B')$.

Câu 11. Cho hai hình bình hành $ABCD$, $ABEF$ không đồng phẳng. $M\in AC$, $N\in BF$ để $\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}=\frac{1}{3}$. Chứng minh $MN//(CDEF)$.

Lời giải



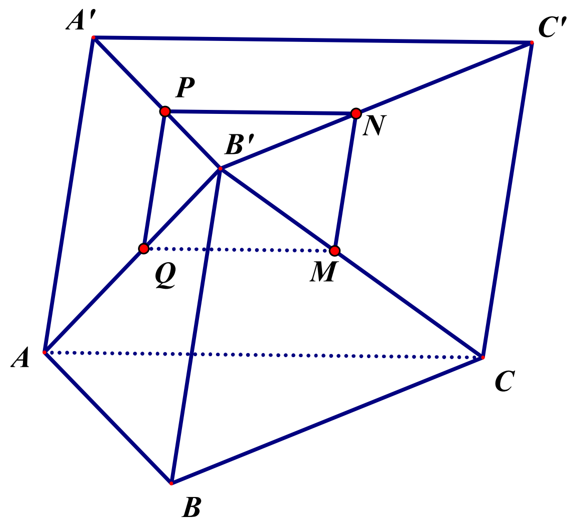
Dựng $O=DM\cap AB$, mà $AB//CD$ nên theo định lý Talet có $\frac{AO}{DC}=\frac{AM}{MC}=\frac{1}{2}\Rightarrow AO=\frac{1}{2}AB$, hay O là trung điểm của AB.

Dựng $O'=EN\cap AB$, mà $AB//EF$ nên theo định lý Talet có $\frac{BO}{EF}=\frac{BN}{NF}=\frac{1}{2}\Rightarrow BO'=\frac{1}{2}AB$, hay O' là trung điểm của AB.

Từ hai điều trên ta có $O\equiv O'$. Vậy suy ra $\frac{OM}{MD}=\frac{1}{2}=\frac{ON}{NE}\Rightarrow MN//DE\Rightarrow MN//(DCEF)$.

Câu 12. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, $M\in B'C$. Vẽ $MN//CC'$, $N\in B'C'$. Vẽ $NP//A'C'$, $P\in A'B'$. Vẽ $PQ//AA'$, $Q\in B'A$. Chứng minh $MQ//(ABC)$.

Lời giải



Xét hình chóp $B'.ACC'A'$ có $MN//CC'$, $NP//A'C'$, $PQ//AA'$ nên dễ dàng thấy ba đường MN, NP, PQ thuộc cùng một mặt phẳng $(MNPQ)$;

cũng dễ thấy ngay mặt phẳng $(MNPQ)//(ACC'A')$ (1).

Lại thấy $MQ = (MNPQ) \cap (B'AC)$ (2)

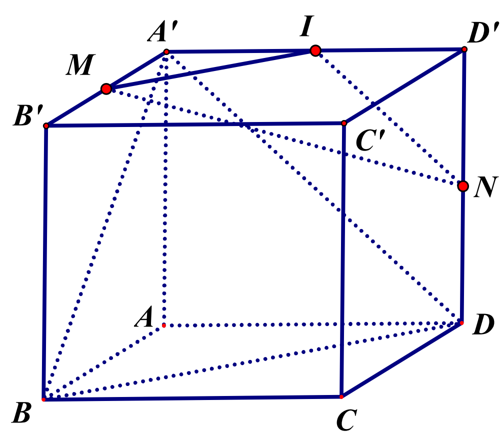
$AC = (ACC'A) \cap (B'AC)$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $MQ//AC$ (tính chất giao tuyến của một mặt với hai mặt song song)

$\Rightarrow MQ//(ABC)$.

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. M, N là trung điểm của $A'B'$, DD'. Chứng minh $MN//(A'BD)$.

Lời giải



Kẻ điểm I là trung điểm của $A'D'$, dễ dàng thấy $MI//B'D'//BD$ và $IN//A'D$

Mà MI, IN cắt nhau trong (MIN); $BD, A'D$ cắt nhau trong $(A'BD)$

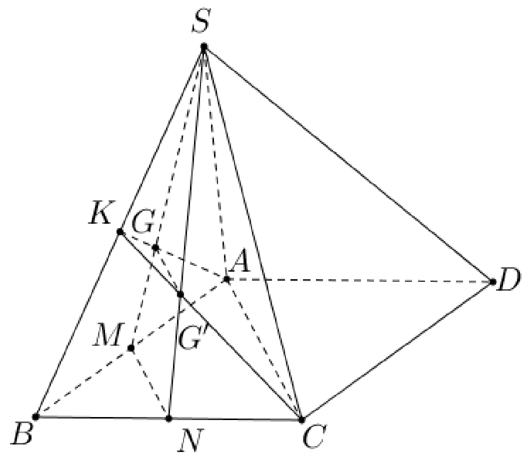
Vậy $(MIN)//(A'BD) \Rightarrow MN//(A'BD)$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC; G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SBC.

a) Chứng minh $MN//(SAC)$.

b) Chứng minh $GG'//(SAC)$.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} MN//AC \\ AC \subset (SAC) \\ MN \not\subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN//(SAC)$.

b) Gọi K là trung điểm của SB suy ra G, G' thuộc mặt phẳng (KAC).

Ta có: G là trọng tâm tam giác SAB nên $\frac{KG}{KA} = \frac{1}{3}$;

Và G' là trọng tâm tam giác SBC nên $\frac{KG'}{KC} = \frac{1}{3}$;

Khi đó $\frac{KG}{KA} = \frac{KG'}{KC}$, suy ra $GG'//AC$.

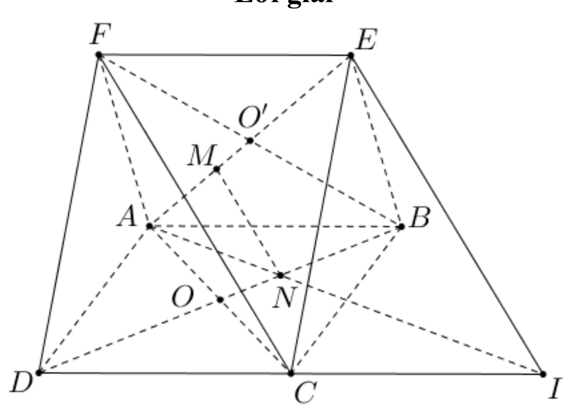
Vì $\begin{cases} GG'//AC \\ GG' \not\subset (SAC) \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow GG'//(SAC)$.

Câu 15. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O'.

a) Chứng minh rằng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$, $BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng $(CDEF)$.

Lời giải



a) Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BFD ứng với cạnh DF nên $OO'//DF$, do $DF \subset (ADF)$ và $OO' \not\subset (ADF)$ $\Rightarrow OO'//(ADF)$.

Tương tự, OO' là đường trung bình của tam giác ACE ứng với cạnh CE nên $OO'//CE$

$CE\subset(CBE)$ và $CE\not\subset(CBE)$ $\Rightarrow OO'//(BCE)$.

b) Trong $(ABCD)$, gọi $I=AN\cap CD$

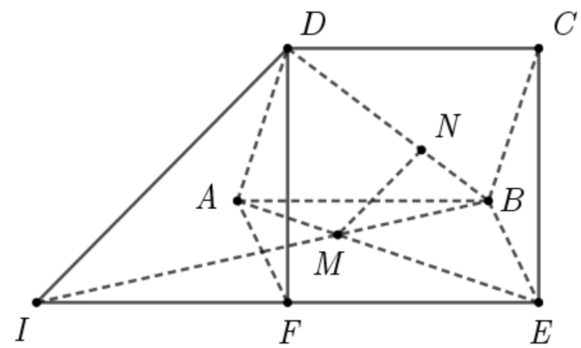
Do $AB//CD$ nên $\frac{AN}{AI}=\frac{BN}{BD}\Rightarrow\frac{AN}{AI}=\frac{1}{3}$.

Lại có $\frac{AM}{AE}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AN}{AI}=\frac{AM}{AE}\Rightarrow MN//IE$. Mà $I\in CD\Rightarrow IE\subset(CDEF)$ và

$MN\not\subset(CDEF)$ $\Rightarrow MN//(CDEF)$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên AE và BD sao cho $AM=\frac{1}{3}AE$, $BN=\frac{1}{x}BD,(x>0)$. Tìm x để $MN//(CDFE)$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của BM và EF.

Trong mặt phẳng $(ABEF)$ ta có $AB//EI$ và AE cắt BI tại M nên $\frac{AM}{AE}=\frac{BM}{BI}=\frac{1}{3}$ (định lí Ta – lét đảo).

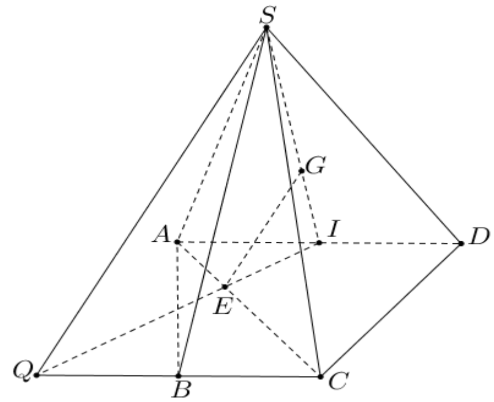
Ta lại có $\begin{cases}MN//(CDFE)\\MN\subset(BDI)\\(BDI)\cap(CDFE)=DI\end{cases}\Rightarrow MN//DI$.

Suy ra $\frac{BN}{BD}=\frac{BM}{BI}$ (định lí Ta – lét). Khi đó $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=3$.

Vậy $x=3$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AD//BC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD; E là điểm thuộc đoạn AC sao cho $EC=xEA,(x>0)$. Tìm x để $GE//(SBC)$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của cạnh AD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ giả sử IE và BC cắt nhau tại điểm Q.

Dễ thấy $SQ=(IGE)\cap(SBC)$.

Do đó : $GE//(SBC) \Leftrightarrow GE//SQ \Leftrightarrow \frac{IE}{IQ}=\frac{IG}{IS} \Rightarrow \frac{IE}{IQ}=\frac{1}{3}$ (1).

Mặt khác tam giác EIA đồng dạng với tam giác EQC nên $\frac{EI}{EQ}=\frac{EA}{EC}=\frac{EA}{xEA}=\frac{1}{x}$ suy ra $EQ=x.EI$.

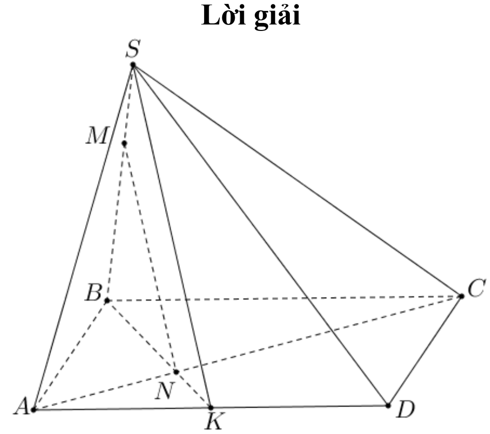
$\Rightarrow \frac{IE}{IQ}=\frac{IE}{IE+EQ}=\frac{IE}{IE+x.IE}=\frac{1}{1+x}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{1+x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=2$.

Vậy $GE//(SBC) \Leftrightarrow x=2$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh SB và đoạn AC sao cho $\frac{BM}{MS}=x$ và $\frac{NC}{NA}=y$, $(0<x,\ y\neq 1)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để $MN//(SAD)$.

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ giả sử BN và AD cắt nhau tại điểm K.

Dễ thấy $SK=(BMN)\cap(SAD)$.

Do đó : $MN//(SAD) \Leftrightarrow MN//SK \Leftrightarrow \frac{BM}{MS}=\frac{BN}{NK}$ (1)

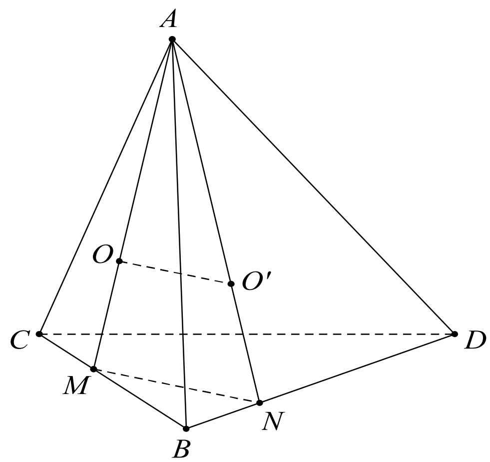
Mặt khác tam giác NCB đồng dạng với tam giác $NAK \Rightarrow \frac{BN}{NK}=\frac{CN}{NA}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{BM}{MS}=\dfrac{NC}{NA} \Leftrightarrow x=y$.

Vậy $MN//\left(SAD\right) \Leftrightarrow x=y$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=2AC=3AD$. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC và ABD. Tính tỉ số $k=\dfrac{BC}{BD}$ khi $OO'//\left(BCD\right)$.

Lời giải



Trong mặt phẳng $\left(ABC\right)$: Giả sử AO và BC cắt nhau tại điểm M.

Trong mặt phẳng $\left(ABD\right)$: Giả sử AO' và BD cắt nhau tại điểm N.

Ta có : $MN=\left(AOO'\right)\cap\left(BCD\right)$.

Do đó : $OO'//\left(BCD\right) \Leftrightarrow OO'//MN \Leftrightarrow \dfrac{AO}{OM}=\dfrac{AO'}{O'N}$ (1)

Mặt khác theo tính chất đường phân giác ta có :

$+\ \dfrac{AO}{OM}=\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{AC}{CM} \Rightarrow \dfrac{AO}{OM}=\dfrac{AB+AC}{BM+CM}=\dfrac{AB+AC}{BC}$.

$+\ \dfrac{AO'}{O'M}=\dfrac{AB}{BN}=\dfrac{AD}{DN} \Rightarrow \dfrac{AO'}{O'M}=\dfrac{AB+AD}{BN+DN}=\dfrac{AB+AD}{BD}$.

Vậy đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \dfrac{AB+AC}{BC}=\dfrac{AB+AD}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AB+AC}{AB+AD}$.

Theo giả thiết : $AB=2AC=3AD \Rightarrow \dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\frac{3}{2}AB}{\frac{4}{3}AB}=\dfrac{9}{8}$.

Kết luận : $OO'//\left(BCD\right) \Leftrightarrow k=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{9}{8}$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẲNG

Phương pháp:

Để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng, ngoài phương pháp "Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng", ta sử dụng định lí về giao tuyến như sau:

Bước 1: Chỉ ra rằng $\left(\alpha\right)$, $\left(\beta\right)$ lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.

Bước 2: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.

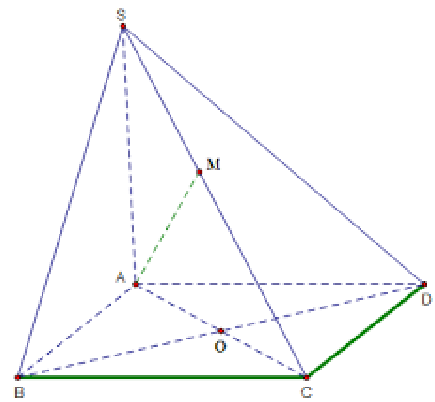
Bước 3: Khi đó $\left(\alpha\right)\cap\left(\beta\right)=Mx//a//b$.

Câu 20. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Lời giải



a) Trong tam giác SAC, O và M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên $OM // SA$

Mà $SA \subset (SAD); SA \subset (SBA)$

Nên $OM // (SAD), OM // (SBA)$

b) Hai mặt phẳng (SAD) và (OMD) có $SA // OM$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng đi qua D song song với SA và OM

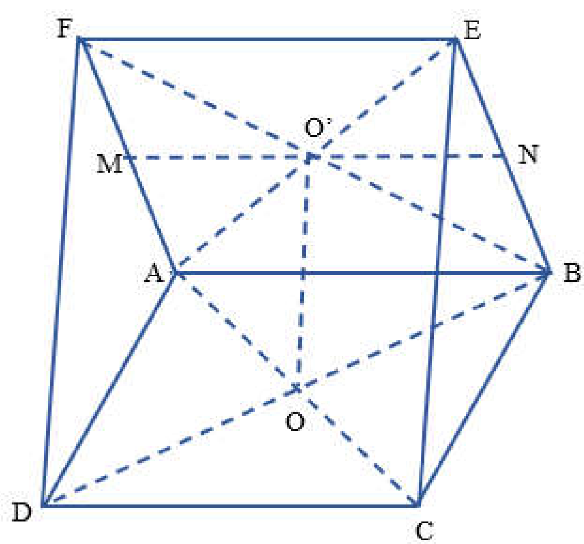
Câu 21. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

a) Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDEF), (ADF)$ và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE. Chứng minh $MN // (CDFE)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Lời giải



a) Trong tam giác FBD, O và O' lần lượt là trung điểm của BD và BF nên $OO' // FD$

Mà $FD \subset (EFDC), FD \subset (ADF)$ nên $OO' // (EFDC), OO' // (ADF)$

Trong tam giác AEC, O và O' lần lượt là trung điểm của AE và AC nên $OO' // EC$

Mà $EC \subset (BCE)$ nên $OO' // (BCE)$

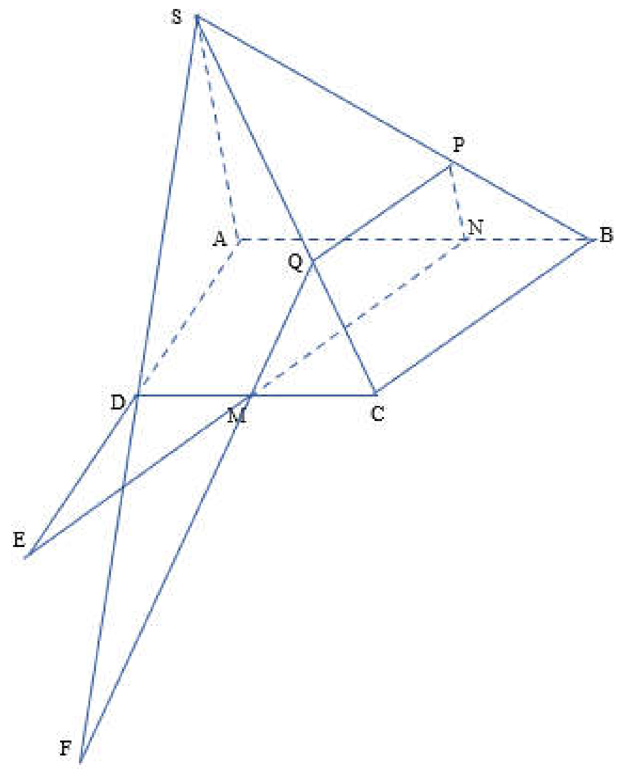
b) Trong hình bình hành $ABEF$ có M, N lần lượt là trung điểm của AE và BF nên $MN // EF // AB$

Mà $EF \subset (CDFE)$ nên $MN // (CDFE)$

c) Hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$ có điểm O chung, $MN//AB$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng đi qua O và song song với AB

Câu 22. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của $CD,(P)$ là mặt phẳng qua M song song với SA và BC. Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

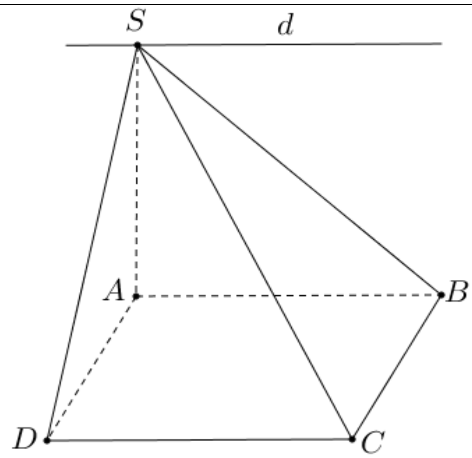
Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại N
Qua N kẻ đường thẳng song song với SA cắt AB tại P
Qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại Q
Mặt phẳng $(MNPQ)$ có $MN//SB, NP//SA$ nên mặt phẳng $(MNPQ)$ là mặt phẳng (P)
Giao tuyến của (P) với $(ABCD),(SAB),(SBC)$, (SCD) lần lượt là MN, NP, PQ và QM
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN và AD
Trong mặt phẳng (ACD), gọi F là giao điểm của MQ và SD
Ta có: E và F là hai điểm chung của mặt phẳng (P) và (SAD) nên giao tuyến của (P) với (SAD) là EF

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải



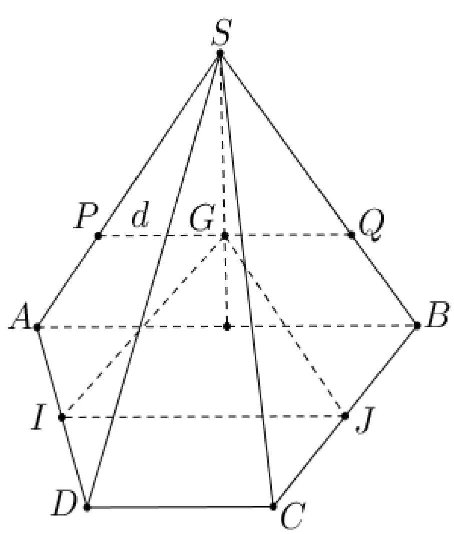
Ta có:

$$\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d$ thì $S \in d // AB // CD$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm của tam giác SAB. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

Lời giải



Ta có: I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC $\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow IJ // AB // CD$.

Gọi $d = (SAB) \cap (IJG)$.

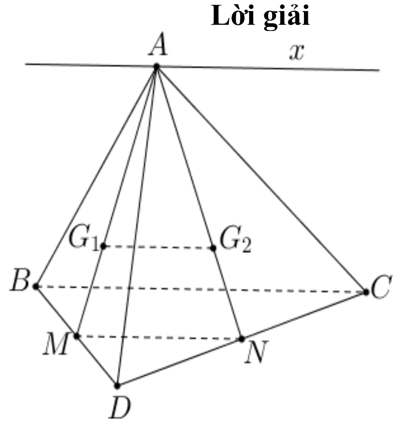
Ta có G là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

Mặt khác $\begin{cases} AB \subset (SAB); IJ \subset (IJG) \\ AB // IJ \end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với AB và IJ (đường thẳng PQ).

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm tam giác ABD và tam giác ACD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AG_1G_2) với mặt phẳng (ABC).

Lời giải



Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của BD và CD.

Trong tam giác ΔAMN, ta có:

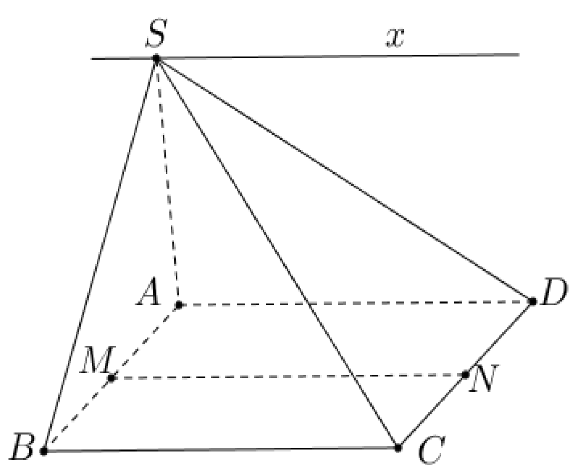
$$\frac{AG_1}{AM}=\frac{AG_2}{AN}=\frac{2}{3}\Rightarrow G_1G_2//MN.$$

Do $MN//BC \Rightarrow G_1G_2//BC$.

Mà: $\begin{cases} A\in(AG_1G_2)\cap(ABC) \\ G_1G_2//BC \end{cases} \Rightarrow (AG_1G_2)\cap(ABC)=Ax//G_1G_2//BC$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Sx là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBD). M, N lần lượt là trung điểm của AB và DC. Chứng minh MN song song với giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Lời giải



Dễ thấy S là điểm chung của mặt phẳng (SAD) và (SBC)

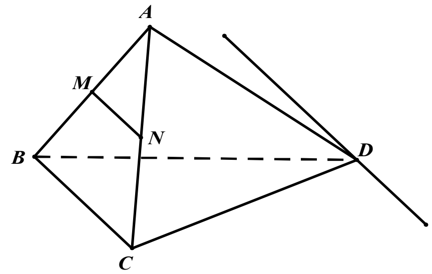
Ta có: $\begin{cases} AD\subset(SAD) \\ BC\subset(SBC) \\ AD//BC \end{cases} \Rightarrow (SAD)\cap(SBC)=Sx//AD//BC$

Do $\begin{cases} AD//MN//BC \\ MN\not\subset(SAD); MN\not\subset(SBC) \end{cases} \Rightarrow MN//(SAD)$ và $MN//(SBC)$.

Mặt khác $Sx=(SAD)\cap(SBC) \Rightarrow MN//Sx$.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ Gọi M,N tương ứng là AB,AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

Lời giải



MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN//BC$.

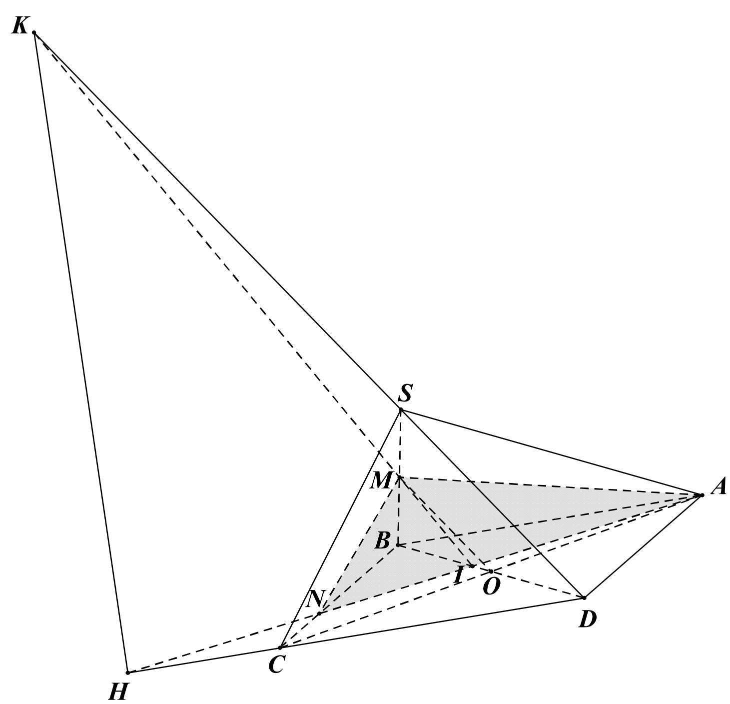
Ta có $\begin{cases} MN//BC \\ MN\subset(DMN) \\ BC\subset(BCD) \end{cases} \Rightarrow (DMN)\cap(BCD)=\Delta$, với Δ đi qua $D, \Delta//BC$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN=2CN$.

a/ Chứng minh rằng: $OM//(SCD)$

b/ Xác định giao tuyến của (SCD) và (AMN).

Lời giải:



a/ Chứng minh $OM//(SCD)$.

Ta có $\begin{cases} BM = \frac{1}{2}BS \\ BO = \frac{1}{2}BD \end{cases} \Rightarrow OM // SD$. Mà $SD \subset (SCD)$, suy ra $OM // (SCD)$ (đpcm).

b/ Gọi $H = AN \cap CD$ (cùng nằm trong $(ABCD)$).

Suy ra H là điểm chung thứ nhất của (AMN) và (SCD).

Ta có $I = AN \cap BD$, suy ra $IM \cap SD = K$ (cùng nằm trong (SBD)); nên K là điểm chung thứ hai của (AMN) và (SCD).

Do đó HK là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

DẠNG 3. THIẾT DIỆN ĐAI QUA MỘT ĐIỂM VÀ SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa thiết diện: Thiết diện (mặt cắt) là một đa giác phẳng thu được khi cắt một khối chóp bằng một mặt phẳng. (Các cạnh của đa giác thu được là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng với mặt bên hoặc mặt đáy của hình chóp).

Phương pháp: Tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng (P):

Bước 1: Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).

Bước 2: Cho giao tuyến vừa tìm được cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác. Từ đó xác định được giao tuyến với các mặt này.

Bước 3: Tiếp tục như trên tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

Chú ý:

+ Thiết diện của một khối chóp là một đa giác bao quanh viền ngoài khối chóp, không có đường thẳng nào đâm xuyên bên trong khối chóp đó.

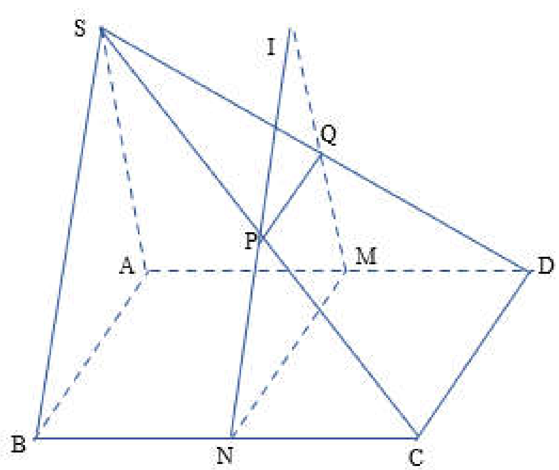
+ Có thể tìm thiết diện bằng phương pháp dựng giao điểm.

Câu 29. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD. Một mặt phẳng (α) qua M, song song với CD và SA, cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) $MNPQ$ là hình gì?

b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD.

Lời giải



a) $CD // (\alpha), (SCD)$ chứa CD cắt (α) tại PQ nên $PQ // CD$

$CD // (\alpha), (ABCD)$ chứa CD cắt (α) tại MN nên $MN // CD$

Suy ra: $MN // PQ$

b) Mặt phẳng (SBC) và (SAD) giao nhau tại đường thẳng đi qua S và song song với BC và AD

$I \in NP, NP \subset (SBC)$ nên $I \in (SBC)$

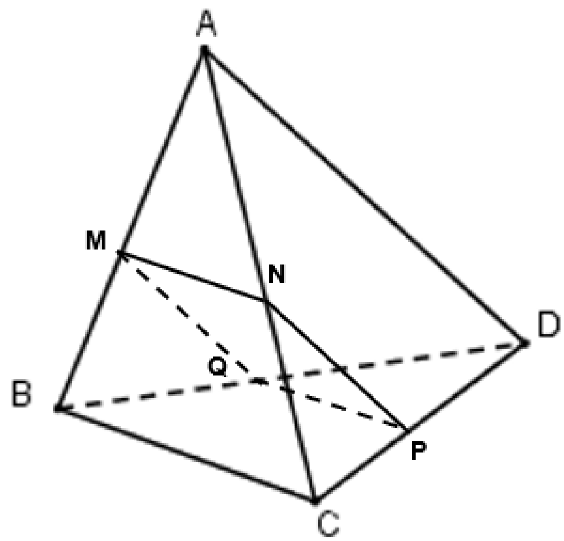
$I \in QM, QM \subset (SAD)$ nên $I \in (SAD)$
Do đó I là điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) nên I nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó
Suy ra I nằm trên đường thẳng đi qua S và song song với BC

Câu 30. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng BC và AD. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

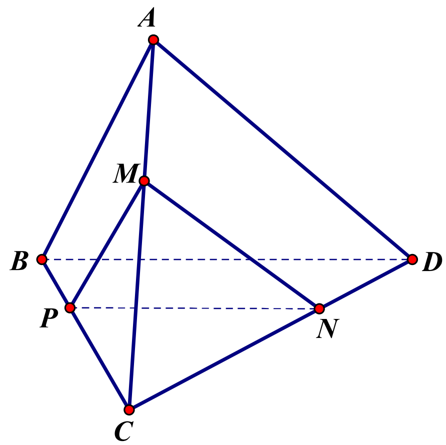
Lời giải



a) $(\alpha)//BC, BC \subset (ABC)$ và (α) cắt (ABC) tại MN nên $MN//BC$
$(\alpha)//BC, BC \subset (BCD)$ và (α) cắt (BCD) tại PQ nên $PQ//BC$
Suy ra: $MN//PQ$
$(\alpha)//AD, AD \subset (ABD)$ và (α) cắt (ABD) tại MQ nên $MQ//AD$
$(\alpha)//AD, AD \subset (ACD)$ và (α) cắt (ACD) tại NP nên $NP//BC$
Suy ra: $MQ//NP$
Do đó, $MNPQ$ là hình bình hành
b) $MNPQ$ là hình thoi khi $MN = NP$
Ta có: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AN}{AC}$
$\dfrac{NP}{AD} = \dfrac{CN}{AC}$ hay $\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{CN}{AC}$
Mà $\dfrac{AN}{AC} + \dfrac{CN}{AC} = 1$ nên $\dfrac{MN}{BC} + \dfrac{MN}{AD} = 1$
Suy ra: $MN = \dfrac{AD \cdot BC}{AD + BC}$

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$, điểm M thuộc AC. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD.

Lời giải



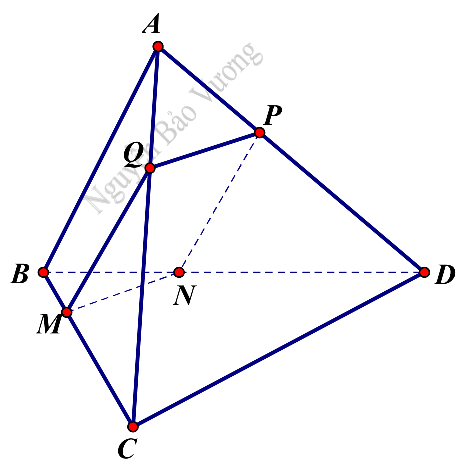
$(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua M, song song với AB, cắt BC tại P.

$(\alpha)//AD$ nên giao tuyến của (α) với (ADC) là đường thẳng qua M, song song với AD cắt DC tại N.

Vậy thiết diện là tam giác MNP.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD.

Lời giải



$(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB và cắt AC tại Q.

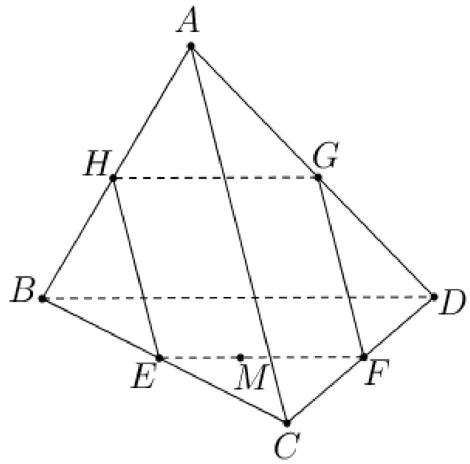
$(\alpha)//CD$ nên giao tuyến của (α) với (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD và cắt BD tại N.

$(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB và cắt AD tại P.

Ta có $MN//PQ//CD, MQ//PN//AB$. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$, lấy điểm M là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AC và BD. Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$. Thiết diện là hình gì ?

Lời giải



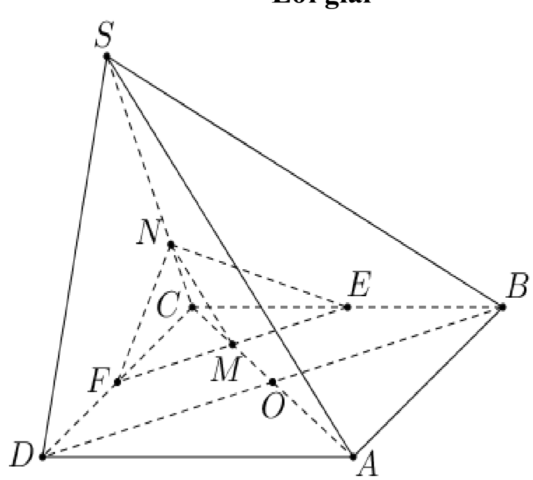
- M là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (BCD). Ta có $(\alpha)//BD$ nên giao tuyến của chúng qua M và song song với BD, giao tuyến này cắt BC tại E và cắt CD tại F.
- E là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABC). Ta có $(\alpha)//AC$ nên giao tuyến của chúng qua E và song song với AC, giao tuyến này cắt AB tại H.
- H là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABD). Ta có $(\alpha)//BD$ nên giao tuyến của chúng qua H và song song với BD, giao tuyến này cắt AD tại G.

G và F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ACD). Vậy giao tuyến của chúng là FG. Vì mặt phẳng $(\alpha)//AC$ nên giao tuyến $FG//AC$.

Kết luận: Thiết diện cần tìm là hình bình hành $EFGH$ vì $EF//BD//HG$ và $HE//FG//AC$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, M là trung điểm của OC. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Lời giải



Ta có:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha)//BD \subset (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = EF//BD, \ (M \in EF, \ E \in BC, \ F \in CD).$$

Lại có:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (\alpha)//SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = MN//SA, \ (N \in SC).$$

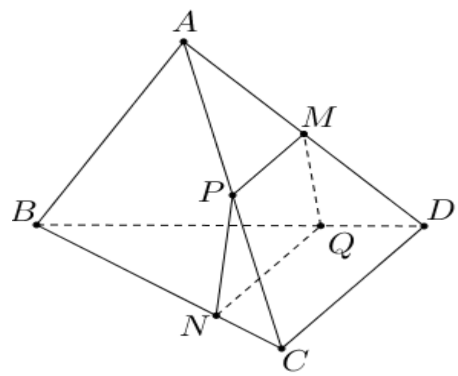
Vậy thiết diện cần tìm là tam giác NEF.
Nhận xét: Học sinh tìm thêm thiết diện khi điểm M di động trong đoạn AC.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy trung điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N bất kỳ. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD.

a) Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$.

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} (\alpha)//CD \\ CD \subset (ACD) \\ M \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = MP, \ (MP//CD, P \in AC) \ (1)$

Ta có $\begin{cases} (\alpha)//CD \\ CD \subset (BCD) \\ N \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = NQ, \ (NQ//CD, Q \in BD) \ (2)$

Và $(\alpha) \cap (ABD) = MQ \quad (3)$

$(\alpha) \cap (ABC) = PN \quad (4)$

Từ (1), (2) ta được : $MP//NQ$. Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

Ta có: $MP//NQ; \ MP = \frac{1}{2}CD$ (MP là đường trung bình của tam giác ACD)

$MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} MP//NQ \\ MP = NQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MP//NQ \\ MP = NQ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Do đó N là trung điểm BC.

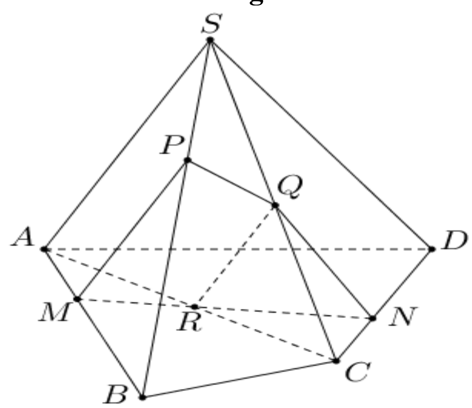
Vậy N là trung điểm BC thì $MPNQ$ là hình bình hành.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên đoạn AB, CD. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Ta có : $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) // SA, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$ (với $MP // SA, P \in SB$).

Gọi $R = MN \cap AC$ $\left(MN, AC \subset (ABCD)\right)$.

Ta có: $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (\alpha) // SA, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$ (với $RQ // SA, Q \in SC$)

Vậy thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tứ giác $MPQN$

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Ta có $MPQN$ là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MP // QN \ (1) \\ MN // PQ \ (2) \end{array} \right.$

Xét (1) ta có $\begin{cases} SA // MP \\ MP // QN \end{cases} \Rightarrow SA // QN$.

Do đó: $\begin{cases} SA // QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA // (SCD)$ (vô lí).

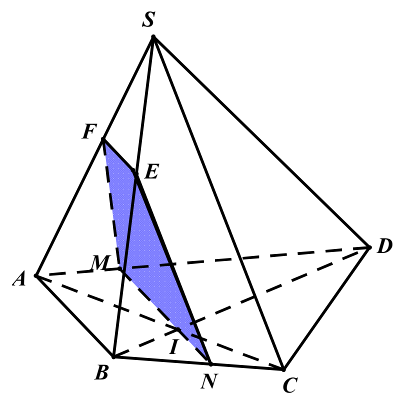
Xét (2) ta có $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD), PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // BC$.

Ngược lại, nếu $MN // BC$ thì $\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (SBC) \\ MB \subset (\alpha), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // PQ$.

Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN//BC$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua I và song song với AB, SC.

Lời giải



$AB//(P)$ khi đó $(P)\cap(ABCD)=d_1$ với d_1 đi qua I và $d_1//AB.$

Gọi $M=d_1\cap BC, N=d_1\cap AD.$

$SC//(P)$ khi đó $(P)\cap(SBC)=d_2$, với d_2 đi qua N và $d_2//SC.$

Gọi $E=d_2\cap SB.$

$AB//(P)$ khi đó $(P)\cap(SAB)=d_3$, với d_3 đi qua E và $d_3//AB.$

Gọi $F=d_3\cap SA.$

Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AMEF$

Câu 38. Chóp $S.ABCD$ có $SA=2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB=a$, $SA\perp CD$, $M\in AD$ để $AM=x$ $(0<x<a)$. Mặt phẳng (P) qua M và $//SA, CD$. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}.

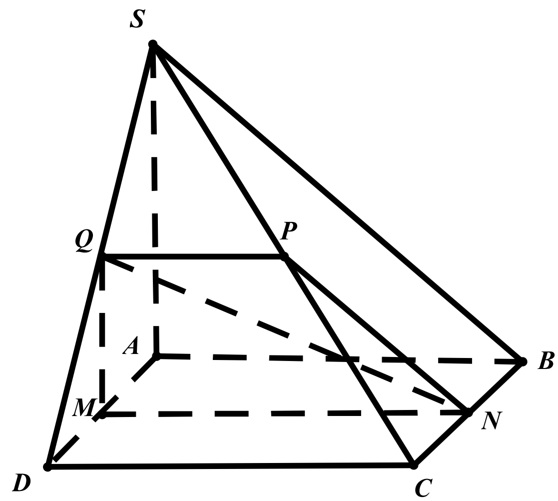
Lời giải

*) Dựng (P).

+) Qua M dựng $MN//CD$.

+) Qua M dựng $MQ//SA$.

$\Rightarrow (P)\equiv(QMN)$.



*) Tìm thiết diện; Trái, phải, trước, sau, đáy.

*) Ta có $\begin{cases}(QMN)\cap(Day)=MN\\(QMN)\cap(Trai)=MQ\end{cases}$.

*) Định lý: $\begin{cases}Q\in(QMN),Q\in(Truoc)\Rightarrow(QMN)\cap(Truoc)=QP\\MN//CD\Rightarrow(QMN)\cap(Phai)=PN\end{cases}$.

*) Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

*) Tính S_{TD}.

Ta có $\begin{cases}MN//CD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow MQ\perp MN$.

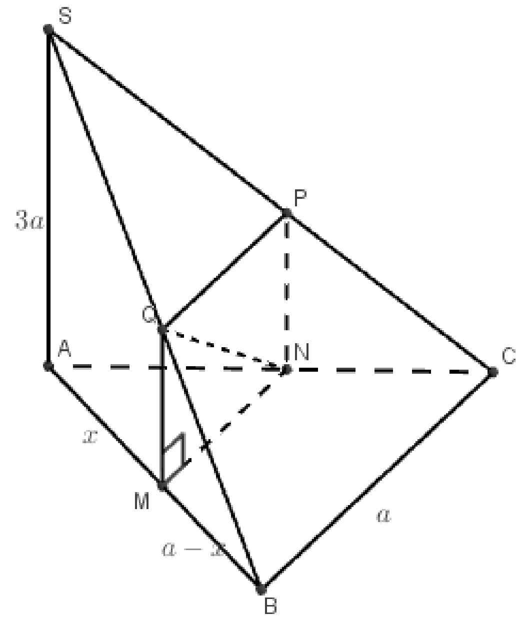
+) Tính QM : $QM//SA\Rightarrow\dfrac{QM}{SA}=\dfrac{DM}{DA}\Rightarrow QM=\dfrac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

+) Tính PQ: $PQ//CD\Rightarrow\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{AM}{AD}\Rightarrow PQ=\dfrac{a.x}{a}=x$.

$\Rightarrow S_{TD}=\dfrac{(MN+PQ).QM}{2}=\dfrac{(a+x).2.(a-x)}{2}=a^2-x^2$.

Câu 39. Chóp $S.ABC$, $SA\perp BC$, $SA=3a$, ΔABC đều, $AB=a$. $M\in AB$ để $AM=x(0<x<a)$. (P) qua M và song song SA,BC. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



Dựng (P):

- Qua M dựng $MN//BC$.

- Qua M dựng $MQ//A$

$\Rightarrow (P) \equiv (MNQ)$.

Tìm thiết diện:

- Ta có: $\begin{cases} (MNQ) \cap (ABCD) = MN \\ (MNQ) \cap (SAB) = MQ \end{cases}$.

$\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính diện tích thiết diện: $SA \perp BC \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

$MN//BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \frac{ax}{a} = x$.

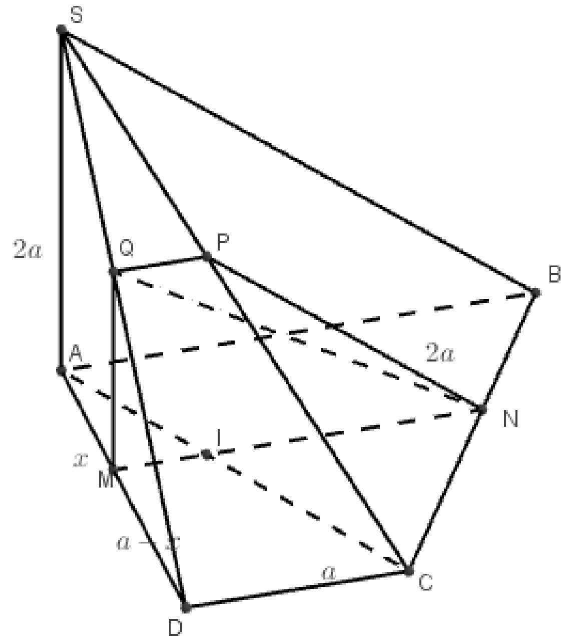
$MQ//SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MQ = \frac{3a(a-x)}{a} = 3(a-x)$.

$S_{TD} = MN.MQ = x3(a-x) = 3(-x^2 + ax), (0 < x < a)$.

$S_{TD} max \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{2(-1)} = \frac{a}{2}$.

Câu 40. Chóp $S.ABCD$, $SA \perp CD$, $SA = 2a$. $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D. $AD = DC = \frac{AB}{2} = a$, $M \in AD$ để $AM = x, (0 < x < a)$. (P) qua M và song song SA, CD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính diện tích thiết diện S_{TD}.

Lời giải



$(P)\equiv(QMN)\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính MN:

- $IN//AB\Rightarrow\dfrac{IN}{AB}=\dfrac{CI}{CA}=\dfrac{DM}{DA}\Rightarrow IN=\dfrac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

- $IM//CD\Rightarrow\dfrac{IM}{CD}=\dfrac{AM}{DA}\Rightarrow IM=\dfrac{ax}{a}=x$.

$\Rightarrow MN=IM+IN=x+2a-2x=2a-x$.

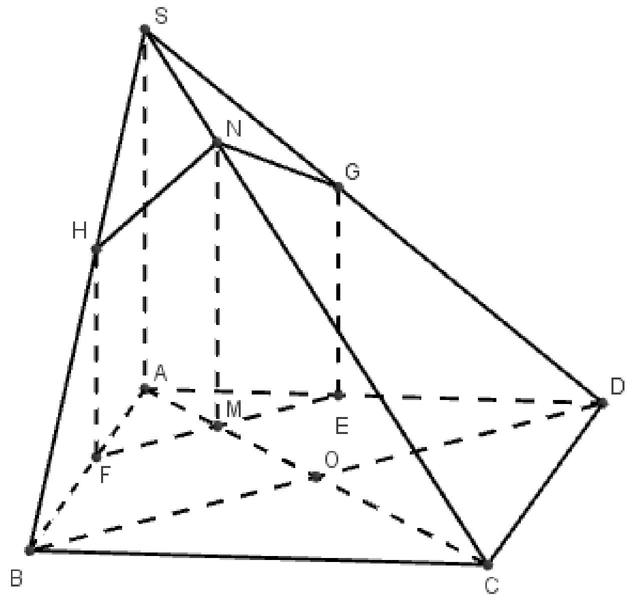
$\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{MD}{AD}\Rightarrow MQ=\dfrac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

$\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{AM}{AD}\Rightarrow QP=\dfrac{ax}{a}=x$.

$S_{TD}=\dfrac{(PQ+MN)MQ}{2}=2a(a-x)$.

Câu 41. Chóp $S.ABCD$, $SA\perp BD$, $SA=a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $M\in AO$ để $AM=x\left(0<x<\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. (P) qua M và song song với SA, BD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}

Lời giải



Qua M dựng EF song song BD.
Qua M dựng MN song song SA.
Qua E dựng EG song song SA.
Qua F dựng FH song song SA.
Vậy thiết diện là $EFHNG$.
Vì $SA \perp BD \Rightarrow MNHF, MNGE$ là hình thang vuông bằng nhau.

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{SA} \Rightarrow MN = \frac{SA.CM}{CA} = \frac{3a}{4}.$$

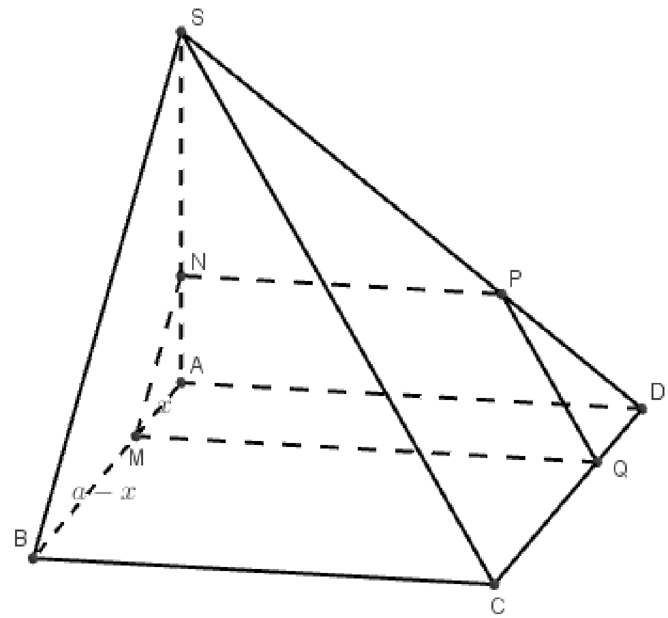
$$\frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AO} = \frac{AE}{AD} = \frac{FM}{BO} \Rightarrow AF = \frac{AM.AB}{AO} = x\sqrt{2}, FM = AM = x.$$

$$\frac{BF}{BA} = \frac{FH}{SA} \Rightarrow FH = \frac{SA(BA - AF)}{BA} = a - x\sqrt{2}.$$

$$S_{DT} = 2.\frac{1}{2}.(MN + HF)FM = x\left(\frac{7a}{4} - x\sqrt{2}\right).$$

Câu 42. Chóp $S.ABCD$, $SA = a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $AD \perp SB$. $M \in AB$ để $AM = x(0 < x < a)$. (P) qua M và song song với SB, AD.Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}.

Lời giải



Qua M dựng MN song song SB.
Qua M dựng MQ song song AD.
Vậy thiết diện là $MNPQ$.
Vì $AD \perp SB \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông.

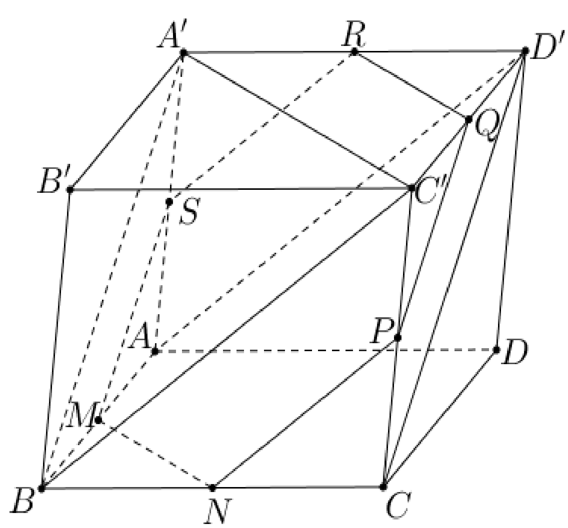
Ta có: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{MN}{SB} \Rightarrow AN = x, MN = \dfrac{AM.SB}{AB} = x\sqrt{2}$.

$\dfrac{SN}{SA} = \dfrac{NP}{AD} \Rightarrow NP = \dfrac{SN.AD}{SA} = a - x$.

$S_{TD} = \dfrac{1}{2}.MN.\left(NP + MQ\right) = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}\left(2a - x\right)$.

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm AB, mặt phẳng (α) qua M, song song với CD', $A'C'$ và cắt CC' tại P. Tính tỉ số $\dfrac{PC'}{CC'}$.

Lời giải

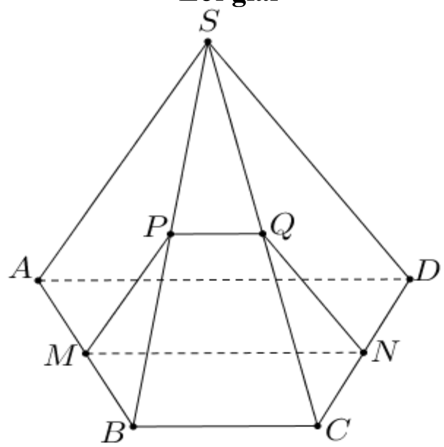


Hai mặt chéo tam giác $(A'BC')$, (ACD') song song với nhau nên $(A'BC')//(\alpha)//(ACD')$.

Suy ra (α) đi qua trung điểm M, N, P, Q, R, S của các cạnh bên AB, BC, CC', $C'D'$, $D'A'$, AA'. Vậy $\frac{PC'}{CC'}=\frac{1}{2}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. M, P lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SB. Biết $SA=SD=2a$, $AD=2a$, $BC=a$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) qua M, P và song song BC.

Lời giải



Xét hai mặt phẳng (α) và (SBC)

Ta có $P\in(\alpha)\cap(SBC)$.

Mặt khác $\begin{cases} BC//(\alpha) \\ BC\subset(SBC) \end{cases}$

Nên giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (SBC) là đường thẳng d qua P song song với BC cắt SC tại Q. Khi đó Q là trung điểm của SC.

Xét hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$

Ta có $M\in(\alpha)\cap(ABCD)$.

Mặt khác $\begin{cases} BC//(\alpha) \\ BC\subset(ABCD) \end{cases}$

Nên giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng d_1 qua M song song với BC cắt CD tại N. Khi đó N là trung điểm của CD.

Do đó thiết diện của mặt phẳng (PMN) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $MNPQ$.

Vì $MP=\frac{1}{2}SA=a$, $NQ=\frac{1}{2}SD=a$ nên $MP=NQ$ do đó hình thang $MNPQ$ là hình thang cân.

$MN=\frac{3a}{2}$, $PQ=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$.

Chiều cao của hình thang cân là $h=\sqrt{MP^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MN+PQ).h=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.