

BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

• CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG

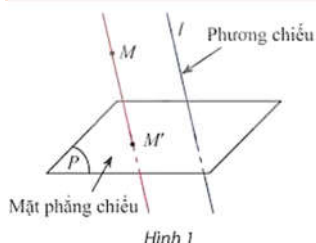
• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Khái niệm phép chiếu song song

Phép chiếu song song thường được dùng để biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng.

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P) . Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l .



Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng chiếu và đường thẳng l được gọi là phương chiếu của phép chiếu song song nói trên.

Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là phép chiếu theo phương l .

Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép chiếu theo phương l .

Cho hình \mathcal{H} trong không gian. Ta gọi tập hợp \mathcal{H}' các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc \mathcal{H} qua phép chiếu song song theo phương l là hình chiếu song song của \mathcal{H} lên mặt phẳng (P) .

Ví dụ 1. Tìm phương chiếu, mặt phẳng chiếu của phép chiếu song song được mô tả trong **Hoạt động khởi động**: Trong

- Các tia sáng AA' , BB' , DD' có song song với nhau hay không?
- Nêu cách xác định bóng C' của điểm C trên mặt đường.

Giải

Trong **Hoạt động khởi động**, ta có phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) của mặt đường theo phương l của tia nắng.

2. Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Dưới đây ta chỉ xét ảnh của các đường thẳng, tia, đoạn thẳng không song song với phương chiếu.

Tính chất 1

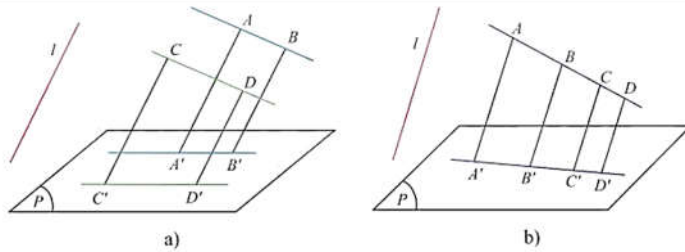
Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.

Tính chất 2

Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 3

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



Hình 6

Ví dụ 2.

- Tìm hình chiếu song song của đoạn thẳng AC , tia AB và đường thẳng AD trong Hình 6b.
- Quan sát Hình 6a và so sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}, \frac{A'B'}{C'D'}$.
- Quan sát Hình 6b và so sánh hai tỉ số $\frac{DA}{DB}, \frac{D'A'}{D'B'}$.

Giải

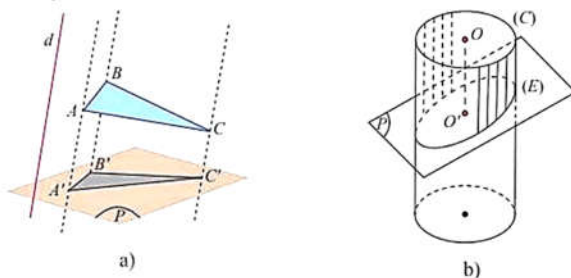
- Trong Hình 6b, hình chiếu song song của đoạn thẳng AC , tia AB và đường thẳng AD lần lượt là đoạn thẳng $A'C'$, tia $A'B'$ và đường thẳng $A'D'$.
- Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song nên trong Hình 6a, ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.
- Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng thuộc một đường thẳng nên trong Hình 6b, ta có: $\frac{DA}{DB} = \frac{D'A'}{D'B'}$.

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Chú ý: Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta phải tuân theo một số quy tắc khi vẽ hình biểu diễn, chẳng hạn như:

- Nếu trên hình \mathcal{H} có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) và tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình \mathcal{H} .
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì
 - Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
 - Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
 - Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

Ví dụ 3. Quan sát Hình 8 và tìm hình biểu diễn của:



Hình 8

- đoạn thẳng AB ;
- tam giác ABC ;
- đường tròn (C) tâm O .

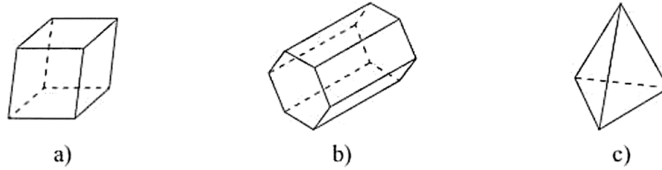
Giải

- Hình biểu diễn của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng $A'B'$ với A' và B' lần lượt là ảnh của A và B .
- Hình biểu diễn của tam giác ABC là tam giác $A'B'C'$ với A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C .
- Hình biểu diễn của đường tròn (C) là elip (E) với tâm O' là ảnh của O .

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau:

- a) Hình hộp;
- b) Lăng trụ có đáy là lục giác đều;
- c) Tứ diện.

Giải

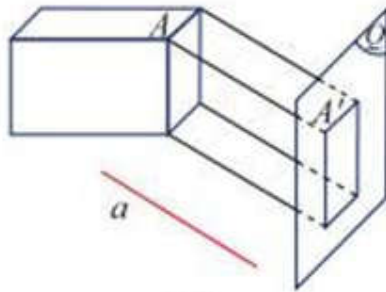


Hình 9

- a) Hình biểu diễn của các mặt là các hình bình hành.
- b) Hình biểu diễn của mặt đáy là lục giác có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau, đồng thời song song với đường chéo nối hai đỉnh còn lại. Hình biểu diễn của mặt bên là hình bình hành.
- c) Hình biểu diễn của bốn mặt là bốn tam giác.
- d) Hình biểu diễn của mặt đáy là elip, hình biểu diễn của các đường sinh là các đoạn thẳng song song và bằng nhau.

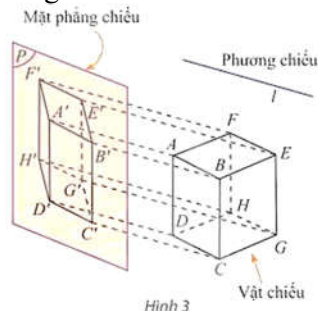
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Câu 1. (SGK-CTST 11-Tập 1) Tìm phương chiếu, mặt phẳng chiếu của phép chiếu song song được mô tả trong Hình 2.



Hình 2

Câu 2. (SGK-CTST 11-Tập 1) Tìm ảnh của hình hộp $ABEF.DCGH$ qua phép chiếu song song được mô tả trong Hình 3.

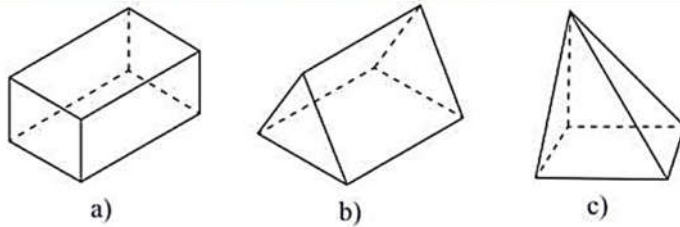


Hình 3

Câu 3. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AB và $AB = 2CD$, hình chiếu song song của $ABCD$ là tứ giác $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ cũng là một hình thang và $A'B' = 2C'D'$.

Câu 4. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho G là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm BC và hình chiếu song song của tam giác ABC là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng hình chiếu M' của M là trung điểm của $B'C'$ và hình chiếu G' của G cũng là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Câu 5. (SGK-CTST 11-Tập 1) Gọi tên các hình khối có hình biểu diễn là các hình trong Hình 10.



Hình 10

Câu 6. (SGK-CTST 11-Tập 1) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó;
- b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó;
- c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau;
- d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

Câu 7. (SGK-CTST 11-Tập 1) Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

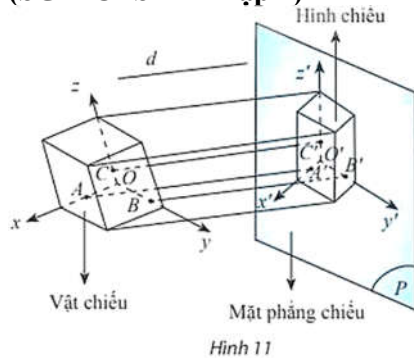
Câu 8. (SGK-CTST 11-Tập 1) Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

Câu 9. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α) .

Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O . Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d . Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho:

- a) $A'B' = AB$
- b) $A'B' = 2AB$.

Câu 10. (SGK-CTST 11-Tập 1) Vẽ hình biểu diễn của:



Hình 11

- a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều;
- b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều;
- c) Hình hộp.

Câu 11. Cho đoạn thẳng AB song song (P) . Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (P) theo phương của đường thẳng d cho trước. Chứng minh rằng $A'B' = AB$. Hỏi rằng nếu ngược lại thì có đúng không?

Câu 12. Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại A . Gọi a' là hình chiếu song song của a lên (P) theo phương d cho trước.

- a. Chứng minh a' qua A ?
- b. Lấy hai điểm B và C trên a và gọi B', C' lần lượt là hình chiếu song song của B và C trên (P) theo phương d . Chọn d sao cho $B'C' = BC$.

Câu 13. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (P) chứa tam giác ABC . G là trọng tâm của tam giác SAB .

- a. Tìm ảnh của G trong phép chiếu song song trên mặt phẳng (P) theo phương SC .
- b. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Tìm ảnh của MN và của tam giác MNE trong phép chiếu song song trên mặt phẳng (P) theo phương SC .

- c. Tìm ảnh của tam giác MNE trong phép chiếu song song trên (P) theo phương trung tuyến SI của tam giác SAB .

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

- Câu 1.** Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?
 A. Chéo nhau. B. Đồng qui. C. Song song. D. Thẳng hàng.
- Câu 2.** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?
 A. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
 B. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.
 C. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
 D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.
- Câu 3.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M' . Trong đó M là trung điểm của BC . Chọn mệnh đề **đúng**?
 A. M' là trung điểm của $A'B'$. B. M' là trung điểm của $B'C'$.
 C. M' là trung điểm của $A'C'$. D. Cả ba đáp án trên đều sai.
- Câu 4.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành?
 A. A' . B. B' . C. C' . D. I' .
- Câu 5.** Cho tam giác ABC ở trong mặt phẳng (α) và phương l . Biết hình chiếu (theo phương l) của tam giác ABC lên mặt phẳng (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?
 A. $(\alpha) // (P)$. B. $(\alpha) \equiv (P)$.
 C. $(\alpha) // l$ hoặc $(\alpha) \supset l$. D. A, B, C đều sai.
- Câu 6.** Khẳng định nào sau đây đúng?
 A. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình tam giác.
 B. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một đoạn thẳng.
 C. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình chóp cụt.
 D. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một điểm.
- Câu 7.** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?
 A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
 B. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
 C. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

D. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

Câu 8. Qua phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song thành.

A. Ba đường thẳng đôi một song song với nhau.

B. Một đường thẳng.

C. Thành hai đường thẳng song song.

D. Cả ba trường hợp trên.

Câu 9. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình bình hành.

B. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông.

C. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình thoi.

D. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là một tam giác.

Câu 10. Hình chiếu của hình vuông không thể là hình nào trong các hình sau?

A. Hình vuông.

B. Hình bình hành.

C. Hình thang.

D. Hình thoi.

Câu 11. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

A. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.

B. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

C. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.

D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

Câu 12. Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là:

A. Điểm A .

B. Trùng với phương chiếu.

C. Đường thẳng đi qua A .

D. Đường thẳng đi qua A hoặc chính A .

Câu 13. Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là:

A. Giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác ABC .

B. Giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC .

C. Giao điểm của hai đường đường cao của tam giác ABC .

D. Giao điểm của hai đường phân giác của tam giác ABC .

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC . Hình chiếu song song của điểm M theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?

A. S .B. Trung điểm của SD .C. A .D. D .

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm nào sau đây?

A. S .B. Trung điểm của BC .C. B .D. C .

Câu 16. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC . Khi đó hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là

A. Trung điểm BC .B. Trung điểm AB .C. Điểm A .D. Điểm B .

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 17. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$ thì hình chiếu của tam giác CMN là

A. Đoạn thẳng MN .B. Điểm O .C. Tam giác CMN .D. Đoạn thẳng BD .

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn $AC', B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 1

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC' .

a) Xác định đường thẳng Δ đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 1

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUBT3nwJfA?view_as=subscriber

Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>