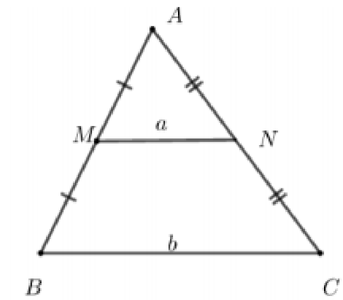
BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

- CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

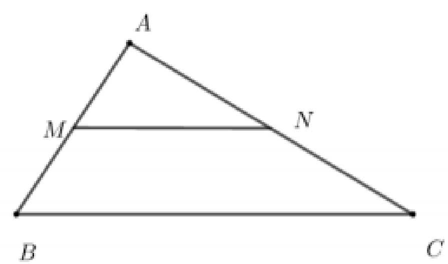
DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Tính chất đường trung bình



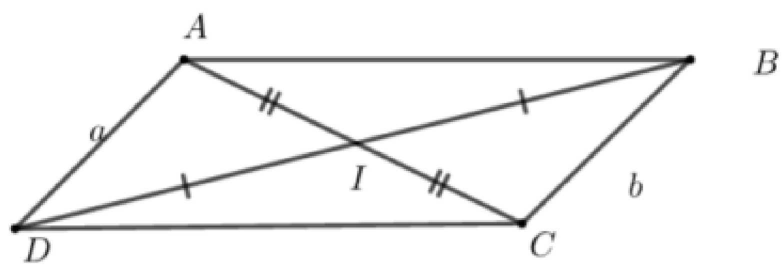
M, N là trung điểm của AB, AC. Khi đó $MN // = \frac{1}{2} BC$.

2. Định lý Ta-lét



$MN // BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

3. Tính chất cạnh đối của hình bình hành



Hai phương pháp để chứng minh tứ giác là hình bình hành:

*) Chứng minh: $\begin{cases} AB // CD \\ AB = CD \end{cases}$.

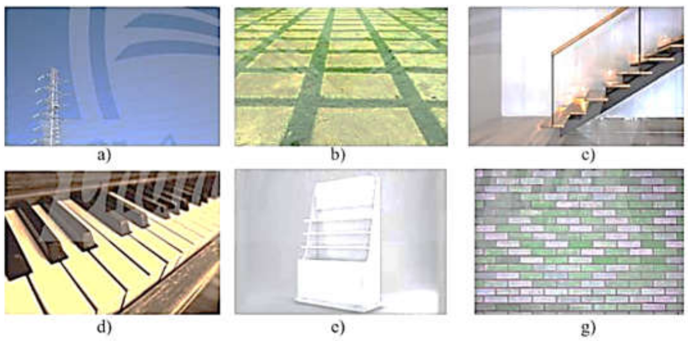
*) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Câu 1. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Mô tả vị trí giữa các cặp đường thẳng a và b, b và c, c và d có trong hình bên.

Lời giải

2 đường thẳng a và b nằm chéo nhau
2 đường thẳng b và c song song với nhau
2 đường thẳng c và d nằm chéo nhau

Câu 2. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



Hình 18

Lời giải

Hình a: Các dây điện song song với nhau
Hình b: Các mép của viên gạch lát song song với nhau
Hình c: Các mép của bậc thang song song với nhau
Hình d: Các mép của phím đàn song song với nhau
Hình e: Các mép của từng ngăn kệ song song với nhau
Hình g: Các mép của viên gạch song song với nhau
Một số ví dụ khác về đường thẳng song song: Các gáy của quyển sách trong chồng sách, Các mép của chân bàn thẳng đứng,...

Câu 3. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Hãy chỉ ra các ví dụ về hai đường thẳng song song, cắt nhau và chéo nhau trong hình cầu sắt ở Hình 6.

Hình 6

Lời giải

Hai thanh sắt đối diện nhau qua hai bên cầu song song với nhau
Thanh sắt nằm ở mái cầu và thanh sắt nằm ở thành cầu chéo nhau

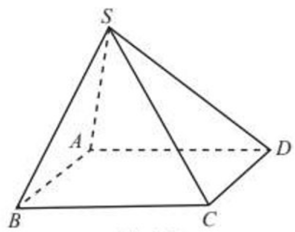
Câu 4. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho hai đường thẳng song song a và b. Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Một đường thẳng c cắt a thì cũng cắt b.
b) Một đường thẳng c chéo với a thì cũng chéo với b.

Lời giải

2 mệnh đề trên đều sai

Câu 5. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:



Hình 5

a) AB và CD;
b) SA và SC;
c) SA và BC.

Lời giải

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ ta có hình bình hành $ABCD$ nên $AB//CD$

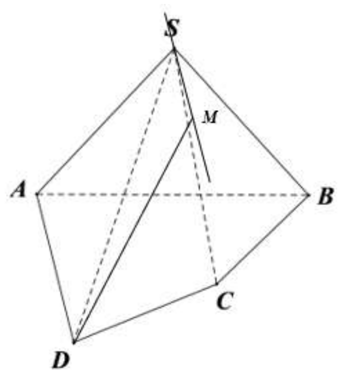
b) Trong mặt phẳng (SAC), ta có SA cắt SC tại điểm S.

c) Giả sử SA và BC cùng nằm trong một mặt phẳng (P). Suy ra đường thẳng AC nằm trong (P). Suy ra (P) chứa cả 4 điểm của tứ diện $SABC$. Điều này là vô lí.

Vậy SA và BC không nằm trong bất kì mặt phẳng nào, suy ra SA chéo với BC.

Câu 6. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS. Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD. Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD).

Lời giải



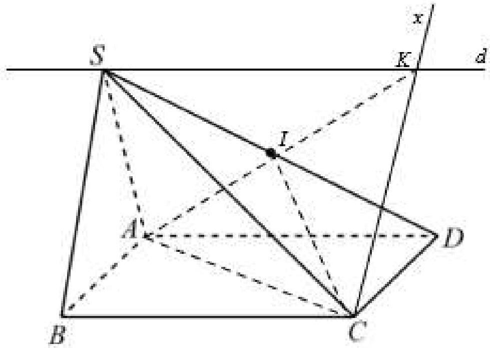
Ta có hình thang $ADMS$ có đáy là AD và MS nên $AD//MS$

Trong không gian, chỉ có duy nhất 1 mặt phẳng đi qua S và song song với AD nên d phải trùng SM

Mà $SM \subset (ADMS)$ nên $d \subset (ADMS)$. Hay $d \subset (SAD)$

Câu 7. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD. Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx. Chứng minh rằng $Cx//SB$.

Lời giải



Mặt phẳng (SBC) và (SAD) giao nhau tại đường thẳng d đi qua S và song song với BC Trong mặt phẳng (SAD), kéo dài AI cắt d tại K.

$AI \subset (AIC)$ nên $K \in (ACI)$

Ta có C và K là 2 điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (CIA) nên CK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (CIA)

Trong mặt phẳng $(SADK)$ ta có $AD//SK$, I là trung điểm của SD nên $AD = SK$. Mà $AB = BD$. Suy ra $SK = BC$.

Ta có $SK//BC, SK = BC$ nên $SBCK$ là hình bình hành.

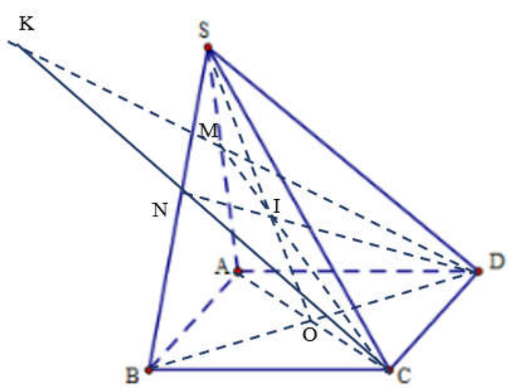
Suy ra $CK//SB$. Hay $Cx//SB$

Câu 8. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N.

a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N. Cho $AB = a$. Tính MN theo a.

b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Chứng minh $SK//BC//AD$.

Lời giải:



a) Trong mặt phẳng (SAC), gọi M là giao của CI và SA, $CI \subset (ICD)$ nên $M \in (ICD)$ Trong mặt phẳng (SBD), gọi N là giao của DI và SB, $DI \subset (ICD)$ nên $N \in (ICD)$

Ta có MN là giao của của (ICD) và (SAB). Mà $AB//CD$ nên $MN//CD$

Theo định lý Menelaus, trong tam giác SOA, ta có: $\frac{SM}{MA} \cdot \frac{AC}{CO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1$

Hay $\frac{SM}{MA} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Suy ra: $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$

Nên $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$. Ta có $MN//AB$ nên $\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB}$.

Vậy $MN = \frac{1}{3}a$

b) $K \in CN; CN \subset (SBC)$ nên $K \in (SBC)$

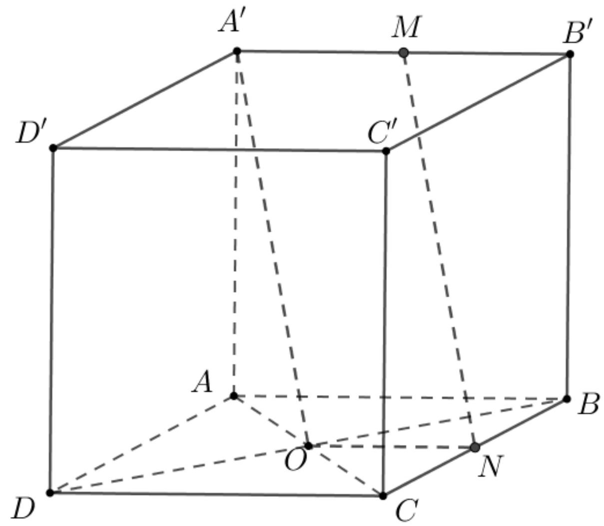
$K \in DM; DM \subset (SAD)$ nên $K \in (SAD)$

Ta có S và K là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Mà $AD//BC$ nên $SK//BC//AD$

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, $AC \cap BD = O$. M, N là trung điểm của $A'B'$, BC. Chứng minh $MN//A'O$.

Lời giải



*) ΔABC: ON là đường trung bình $\Rightarrow ON//AB$, $ON=\dfrac{1}{2}AB$ (1).

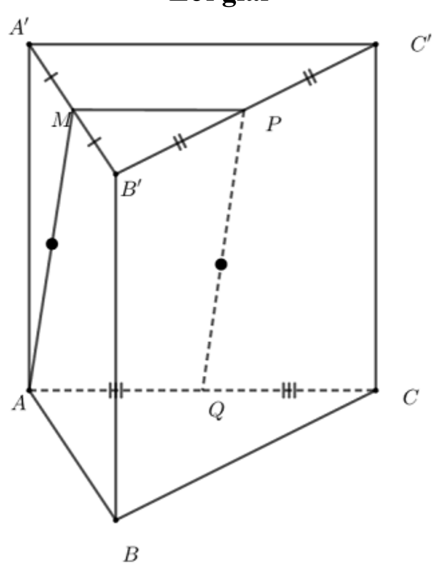
*) Tính chất hình lập phương: $AB//A'B'$, $AB=A'B' \Rightarrow A'M//AB$, $A'M=\dfrac{1}{2}AB$ (2).

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow ON//A'M$, $ON=A'M \Rightarrow$ Tứ giác AMNO là hình bình hành.

$\Rightarrow A'O//MN$. (đpcm)

Câu 10. Lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M,P,Q là trung điểm $A'B'$, $B'C'$, AC. Chứng minh $AM//PQ$.

Lời giải



*) $\Delta A'B'C'$ có MP là đường trung bình $\Rightarrow MP//A'C'$, $MP=\dfrac{1}{2}A'C'$ (1).

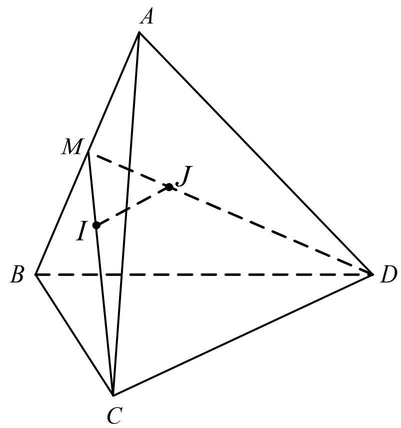
*) Ta có $A'C'//AC, A'C'=AC \Rightarrow AQ//A'C'; AQ=\dfrac{1}{2}A'C'(2)$.

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP//QA; MP=QA \Rightarrow MNPD$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AM//PQ$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có I; J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD. Chứng minh rằng: $IJ//CD$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB

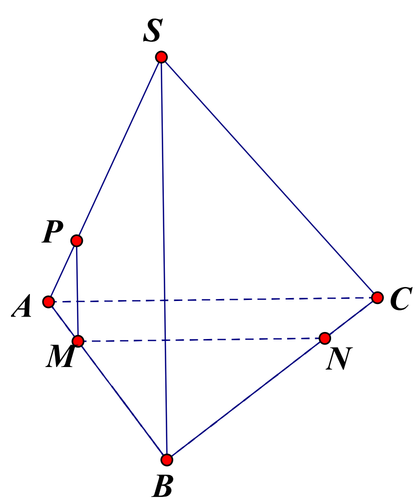
Xét tam giác ABC có: $\frac{MI}{MC}=\frac{1}{3}$ (do I là trọng tam của tam giác ABC)

Xét tam giác ABD có: $\frac{MJ}{MD}=\frac{1}{3}$ (do J là trọng tam của tam giác ABD)

Do $\frac{MI}{MC}=\frac{MJ}{MD}=\frac{1}{3} \Rightarrow IJ//CD$ (Định lí Ta-let)

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Trên SA, BC lấy điểm M, N sao cho: $\frac{SM}{SA}=\frac{BN}{BC}=\frac{3}{4}$. Qua N kẻ NP song song với CA (P thuộc AB). Chứng minh rằng $MP // SB$

Lời giải



Vìf $MN//AC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{CN}{CB}=\frac{1}{4}$

Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{AP}{AS}=\frac{1}{4}$

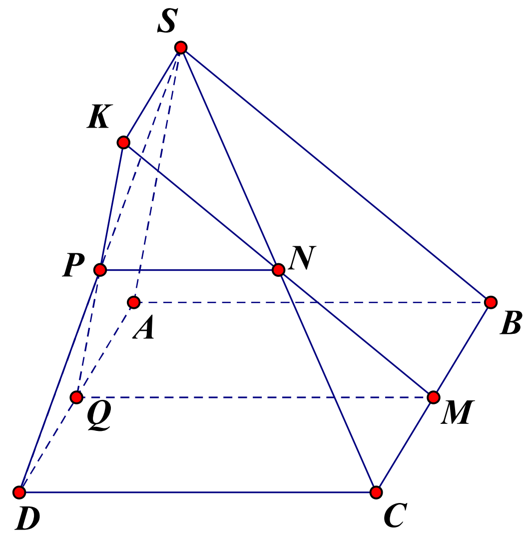
Vậy $MP//SB$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN // BS$, $NP // CD$, $MQ // CD$.

a) Chứng minh: $PQ // SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh $SK // AD // BC$.

Lời giải



a) Chứng minh: $PQ // SA$.

Xét tam giác SCD. Ta có: $NP//CD \Rightarrow \dfrac{NP}{DS} = \dfrac{CN}{CS}$ (1)

Tương tự: $MN//SB \Rightarrow \dfrac{CN}{CS} = \dfrac{CM}{CB}$ (2)

Tương tự: $MQ//CD \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{DQ}{DA}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $\dfrac{DP}{DS} = \dfrac{DQ}{DA}$

Vậy: $PQ//SA$.

b) Chứng minh $SK // AD // BC$.

Ta có: $\begin{cases} BC//AD \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{cases}$ $\Rightarrow$ giao tuyến là đường thẳng St qua S song song BC và AD

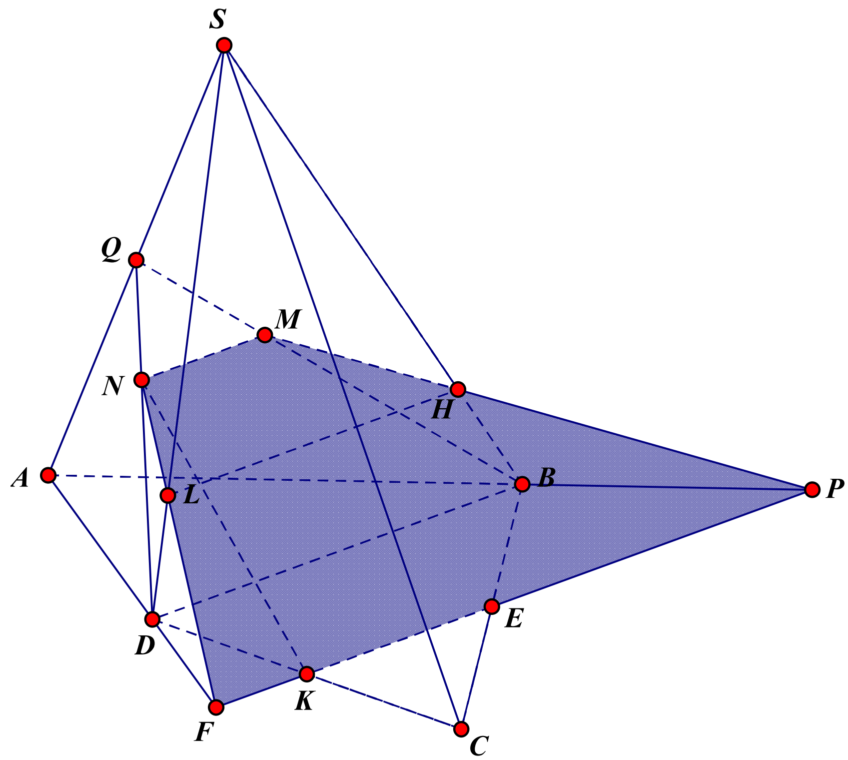
Mà $K \in (SBC) \cap (SAD) \Rightarrow K \in St \Rightarrow SK//AD//BC$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Gọi M, N là trọng tâm tam giác SAB và SAD. E là trung điểm CB.

a) Chứng minh rằng $MN // BD$

b) Gọi L, H là giao điểm của (MNE) với SD và SB. Chứng minh rằng $LH // BD$.

Lời giải



a) Gọi Q là trung điểm SA

Xét ΔQBD có $\frac{QN}{QD}=\frac{QM}{QB}=\frac{1}{3}$ (tính chất của trọng tâm tam giác)

Vậy $MN//BD$

b) Dựng $EK//MN \Rightarrow (MNE)\equiv(MNKE)$

Tìm $L=(MNE)\cap SD$, $SB\subset(SAD)$, gọi $F=AD\cap KE,(MNKE)\cap(SAD)=MP$

$\Rightarrow H=MP\cap SB$

Ta có: $MN\subset(MNE);BD\subset(SBD)$ và $MN//BD$ mà $(MNE)\cap(SBD)=LH\Rightarrow LH//BD//MN$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$, $I\in SA$ sao cho $IA=2IS$. M,N là trung điểm SB, SC. H là điểm đối xứng với I qua M, K là điểm đối xứng với I qua N.

a) Chứng minh $HK//BC$.

b) Chứng minh $BH//SA$.

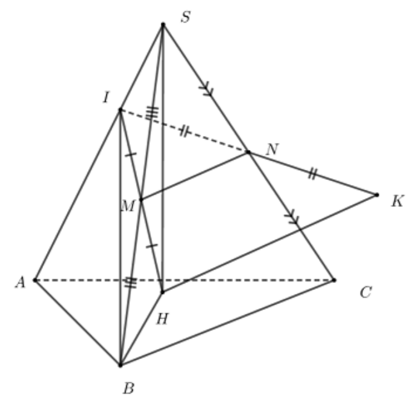
Lời giải

a) *) ΔIHK có MN là đường trung bình$\Rightarrow MN//BC$, (1).

*) ΔSBC có MN là đường trung bình$\Rightarrow MN//BC$ (2).

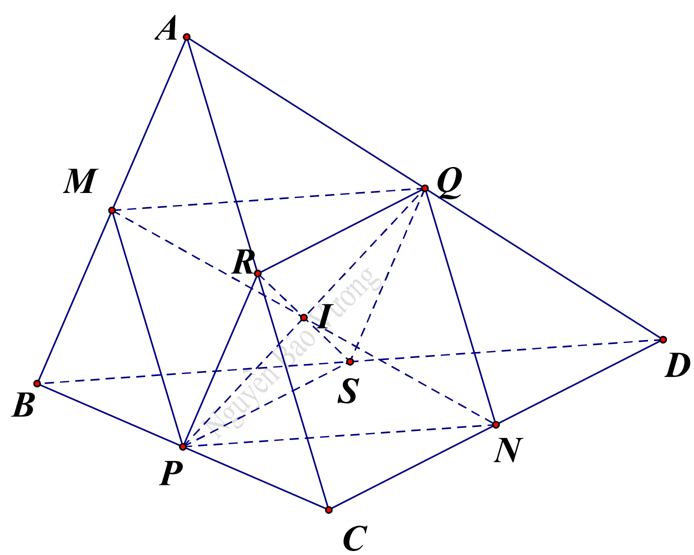
*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK//BC$ (đpcm).

b) Tứ giác $SIBH$ có hai đường chéo SB,IH cắt nhau tại M là trung điểm của mỗi đường$\Rightarrow SIBH$ là hình bình hành. $\Rightarrow SI//BH\Rightarrow SA//BH$ (đpcm).



Câu 16. Tứ diện $ABCD$. M,N,P,Q,R,S là trung điểm AB, CD,BC, AD, AC, BD. Chứng minh MN,PQ,RS đồng quy tại $\frac{1}{2}$ mỗi đường.

Lời giải



*) ΔABC: MP là đường trung bình $\Rightarrow MP//AC$, $MN=\frac{1}{2}AC$ (1).

*) ΔACD: NQ là đường trung bình $\Rightarrow NQ//AC$, $NQ=\frac{1}{2}AC$ (2).

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP//=NQ \Rightarrow MPNQ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN,PQ$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (3).

*) ΔABC: PR là đường trung bình $\Rightarrow PR//AB$, $PR=\frac{1}{2}AB$ (4).

*) ΔABD: QS là đường trung bình $\Rightarrow QS//AB$, $QS=\frac{1}{2}AB$ (5).

*) Từ (4) và (5) $\Rightarrow PR//=QS \Rightarrow PRQS$ là hình bình hành.

$\Rightarrow RS,PQ$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (6).

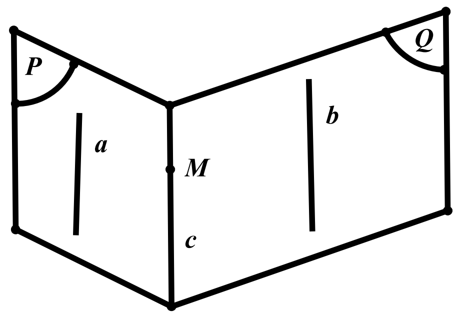
Từ (5) và (6) suy ra MN,PQ,RS đồng quy tại $\frac{1}{2}$ mỗi đường.

DẠNG 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

Có 2 phương pháp tìm giao tuyến (P) và (Q).

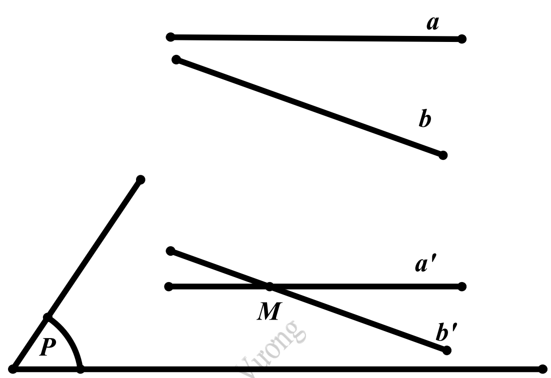
+ Tìm 2 điểm chung.

+ Tìm bằng định lý giao tuyến



$\begin{cases} a \subset (P), b \subset (Q) \\ a // b \\ (P) \cap (Q) = c \end{cases} \Rightarrow c // a // b.$

Bài toán tổng quát: Dựng (P) qua M và $// a, b$.

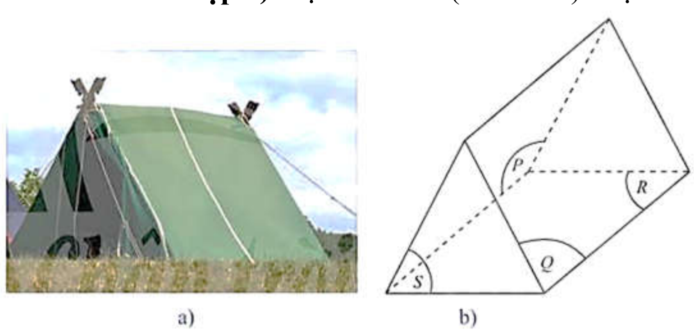


+ Qua M dựng $a' // a$ <Đúng + Đủ>

+ Qua M dựng $b' // b$ <Đúng + Đủ>

$\Rightarrow (P) \equiv (a', b')$.

Câu 17. (SGK-CTST 11- Tập 1) Một chiếc lều (Hình 16a) được minh họa như Hình $16b$.



Hình 16

a) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.

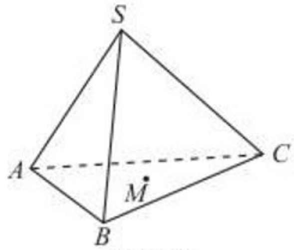
b) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.

Lời giải

a) Ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo giao tuyến song song là: (P), (Q), (R)

b) Ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo giao tuyến đồng quy là: (P), (R), (S)

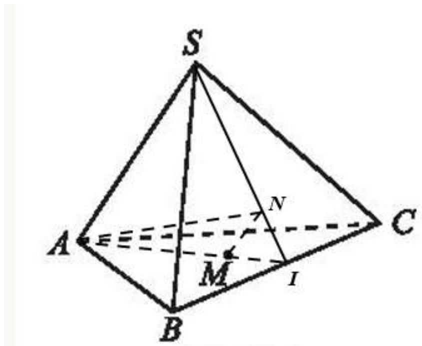
Câu 18. (SGK-CTST 11- Tập 1) Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC (Hình 17).



Hình 17

Qua M, vẽ đường thẳng d song song với SA, cắt (SBC) tại N. Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN).

Lời giải



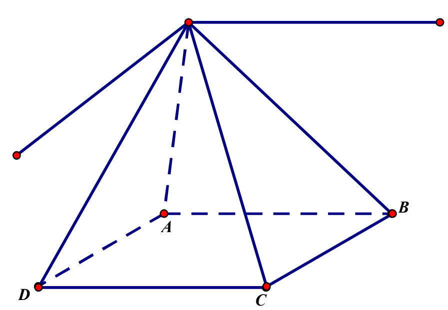
Gọi I là giao điểm của AM và BC. Trong mặt phẳng (SAI), kẻ đường thẳng d song sóng SA cắt SI tại N

Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) là đường thẳng đi qua C và song song với SA và MN

Câu 19. Chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của:

a) (SAB) và (SCD). b) (SAD) và (SBC).

Lời giải



a) $S\in(SAB), S\in(SCD)$ và $AB//CD$ suy ra $(SAB)\cap(SCD)=d//AB//CD$.

b) $S\in(SAD), S\in(SCB)$ và $AD//BC$ suy ra $(SAD)\cap(SCB)=d'//AD//BC$.

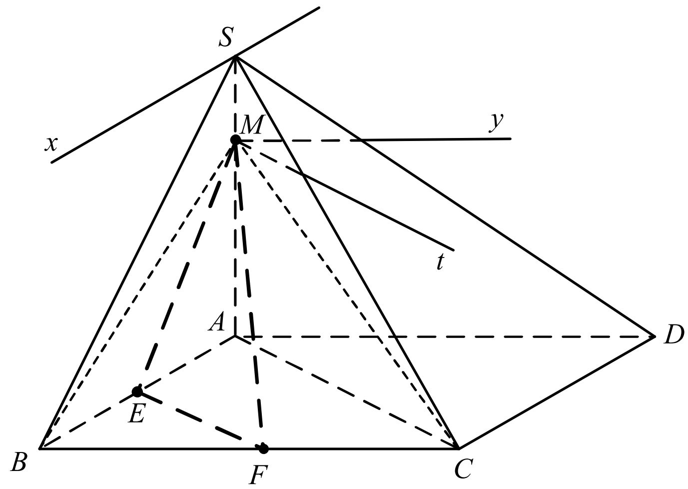
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA, điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD).

3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).

Lời giải



1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB)\,;\, CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow Sx = (SAB) \cap (SCD)$ với $Sx // AB // CD$

2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD)

Lại có : $\begin{cases} M \in SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC) \cap (SAD)$

Ta có : $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC)\,;\, AD \subset (SAD) \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow My = (MBC) \cap (SAD)$ với $My // BC // AD$

3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).

Ta có : $\begin{cases} M \in SA \subset (SAC) \\ M \in (MEF) \end{cases} \Rightarrow M \in (MEF) \cap (SAC)$

Xét tam giác ABC có: EF là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow EF // AC$

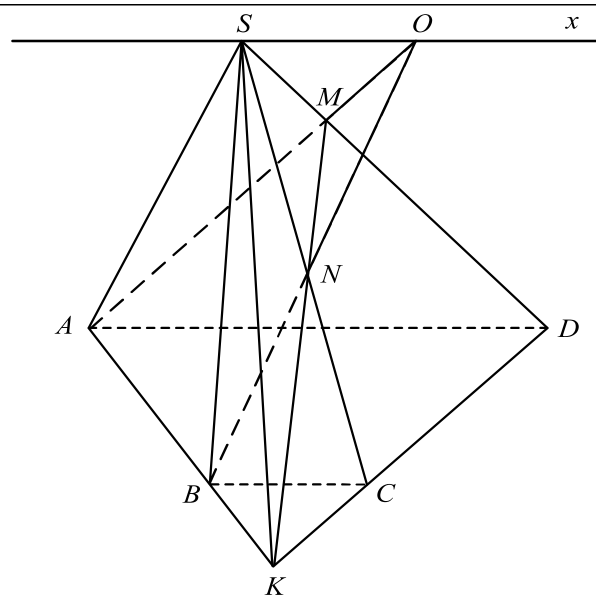
Do $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF)\,;\, AC \subset (SAC) \\ EF // AC \end{cases} \Rightarrow Mt = (MEF) \cap (SAC)$ với $EF // AC // Mt$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD, AB cắt CD tại K, điểm M thuộc cạnh SD.

1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC). Tìm giao điểm N của KM và (SBC).

2) Chứng minh rằng: AM, BN, (d) đồng quy.

Lời giải



1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC). Tìm giao điểm N của KM và (SBC)

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD)\,;\, BC \subset (SBC) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow Sx = (SAD) \cap (SBC)$ với $Sx // AD // BC$

$\Rightarrow (d) \equiv Sx$

Trong (SCD) gọi $N = KM \cap SC \Rightarrow \begin{cases} N \in KM \\ N \in SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N = KM \cap (SBC)$

2) Chứng minh rằng: AM, BN, (d) đồng quy

Ta có: $(d) = (SAD) \cap (SBC)$

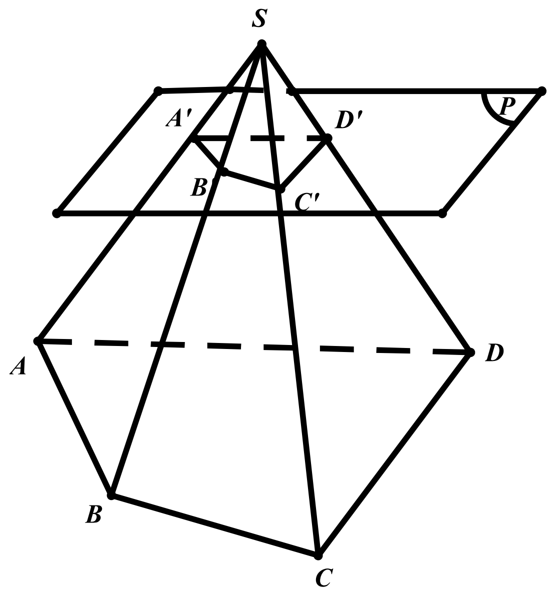
Trong (AMK) gọi O là giao điểm của AM và BN

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AM \subset (SAD) \\ O \in BN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow O \in (d)$

Vậy ba đường thẳng (d); BN; AM đồng quy tại O.

DẠNG 3. THIẾT DIỆN CHỨA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG KHÁC

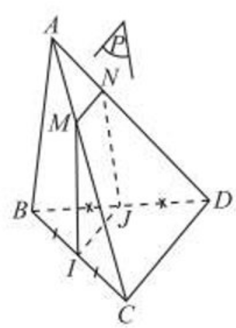
Thiết diện của mặt phẳng (P) với chóp



+ Thiết diện là một đa giác phẳng khép kín

Tìm thiết diện bằng cách tìm giao tuyến với mặt bên, mặt đáy

Câu 22. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N.



Hình 15

a) Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.

b) Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Mặt phẳng (P) đi qua IJ, mặt phẳng (ACD) đi qua CD

Mà I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD nên $IJ // BD$

Nên (P) giao với (ACD) tại $MN // IJ // CD$

Vậy $IJMN$ là hình thang có đáy là MN và IJ

b) Để $IJMN$ là hình bình hành thì $IJ = MN$

Mà $IJ = \frac{1}{2}CD$ nên $MN = \frac{1}{2}CD$

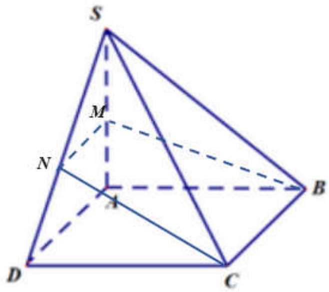
Vậy M là trung điểm của AC

Câu 23. **(SGK-CTST 11- Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB).

b) Lấy một điểm M trên đoạn $SA(M$ khác S và $A)$, mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Lời giải



a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) là đường thẳng đi qua S và song song với AB và CD

b) Giao tuyến của (BCM) với (SAD) là đường thẳng MN song song với BC

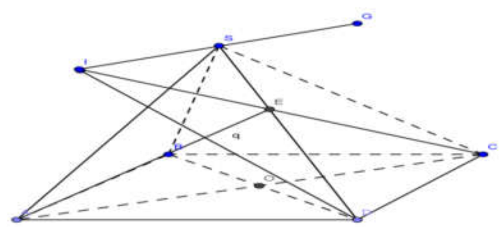
Do đó $CBMN$ là hình thang

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. Góc $\widehat{SAD}=90^{\circ}$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a) Tìm giao điểm $I=Dx\cap(SAB)$.CMR $AI//SB$.

b) Xác thiết diện của (IAC) với hình chóp. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải



a) $Dx\in(SDC)$, $S\in(SAB)\cap(SDC)$ $\left.\begin{array}{l}AB//DC\\ AB\in(SAB)\\ DC\in(SDC)\end{array}\right\}\Rightarrow(SAB)\cap(SDC)=Sy//AB//DC$

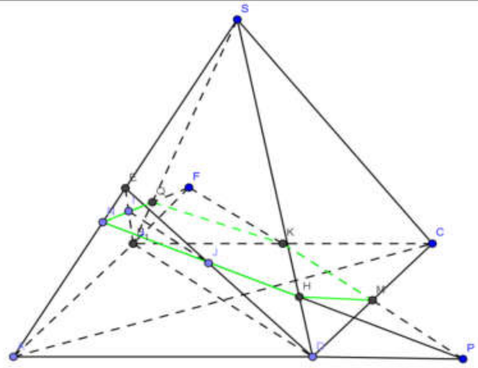
$I=Dx\cap Sy\Rightarrow I=(SAB)\cap Dx$

Rõ ràng $SI//AB//DC$ và $SI=AB=DC\Rightarrow ABSI$ là hình bình hành nên $\Rightarrow AI//SB$.

b) $E=IC\cap SD$ nên thiết diện của (IAC) với hình chóp là ΔAEC

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, lần lượt là trọng tâm của ΔSAB, ΔSAD. M là trung điểm của CD. Xác định thiết diện (IJM) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Vì I , J , lần lượt là trọng tâm của ΔSAB , ΔSAD nên IJ//BD .

Ta có $\left.\begin{array}{l} IJ//BD \\ IJ\subset(IJM) \\ BD\subset(ABCD) \end{array}\right\}\Rightarrow(IJM)\cap(ABCD)=KM, KM//IJ//BD$.

Gọi F và P là giao điểm của KM với AB và AD $IFIF=(\text{IJ}M)\cap(SAB)$ và $JP=(\text{IJ}M)\cap(SAD)$, $N=\text{IF}\cap\text{JP}$ thiết diện là NQKMH .

Câu 26. Chóp $S.ABCD$ có $SA=2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB=a$, $SA\perp CD$, $M\in AD$ để $AM=x$ $(0<x<a)$. Mặt phẳng (P) qua M và $//SA,CD$. Dựng (P). Tìm thiệt diện. Tính S_{TD} theo a,x .

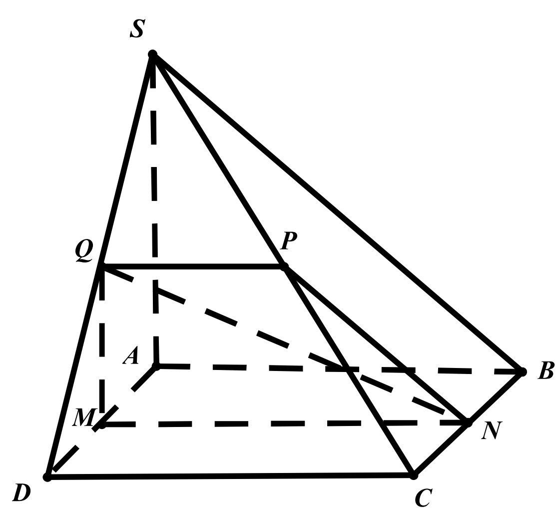
Lời giải

*) Dựng (P).

+) Qua M dựng $MN//CD$.

+) Qua M dựng $MQ//SA$.

$\Rightarrow(P)\equiv(QMN)$.



*) Tìm thiết diện; Trái, phải, trước, sau, đáy.

*) Ta có $\begin{cases}(QMN)\cap(Day)=MN \\ (QMN)\cap(Trai)=MQ\end{cases}$.

*) Định lý: $\begin{cases} Q\in(QMN), Q\in(Truoc)\Rightarrow(QMN)\cap(Truoc)=QP \\ MN//CD\Rightarrow(QMN)\cap(Phai)=PN \end{cases}$.

*) Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

*) Tính S_{TD}.

Ta có $\begin{cases} MN//CD \\ CD\perp SA \end{cases} \Rightarrow MQ\perp MN$.

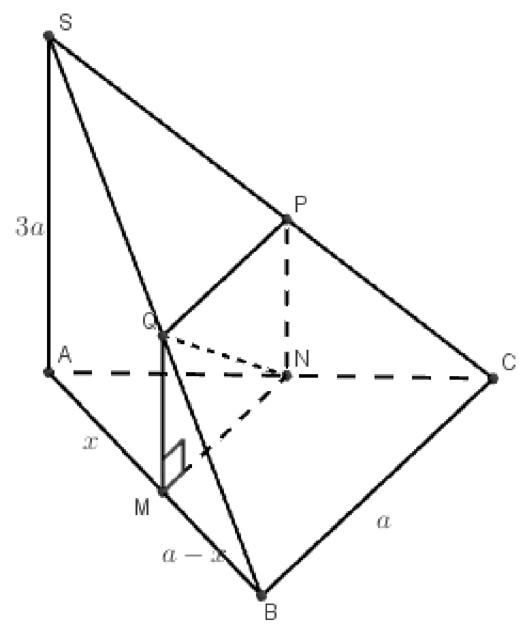
+) Tính QM : $QM//SA\Rightarrow \frac{QM}{SA}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow QM=\frac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

+) Tính PQ: $PQ//CD\Rightarrow \frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow PQ=\frac{a.x}{a}=x$.

$\Rightarrow S_{TD}=\frac{(MN+PQ).QM}{2}=\frac{(a+x).2.(a-x)}{2}=a^2-x^2$.

Câu 27. Chóp $S.ABC$, $SA\perp BC$, $SA=3a$, ΔABC đều, $AB=a$. $M\in AB$ để $AM=x(0<x<a)$. (P) qua M và song song SA, BC. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



Dựng (P):

- Qua M dựng $MN//BC$.
- Qua M dựng $MQ//A$

$\Rightarrow(P)\equiv(MNQ)$.

Tìm thiết diện:

- Ta có: $\begin{cases} (MNQ)\cap(ABCD)=MN \\ (MNQ)\cap(SAB)=MQ \end{cases}$.

$\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính diện tích thiết diện: $SA\perp BC\Rightarrow MN\perp MQ\Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

$MN//BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \frac{ax}{a} = x$.

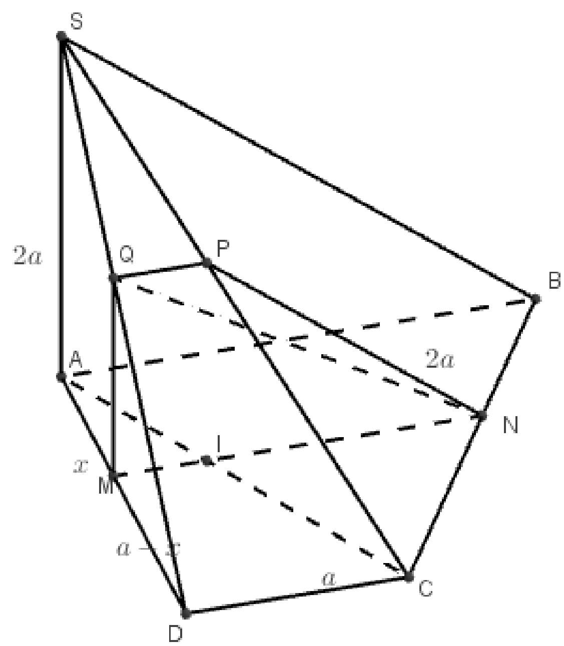
$MQ//SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MQ = \frac{3a(a-x)}{a} = 3(a-x)$.

$S_{TD} = MN.MQ = x3(a-x) = 3(-x^2 + ax), (0 < x < a)$.

$S_{TD} max \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{2(-1)} = \frac{a}{2}$.

Câu 28. Chóp $S.ABCD$, $SA \perp CD$, $SA = 2a$. $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D. $AD = DC = \frac{AB}{2} = a$, $M \in AD$ để $AM = x, (0 < x < a)$. (P) qua M và song song SA, CD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính diện tích thiết diện S_{TD}.

Lời giải



$(P) \equiv (QMN) \Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính MN:

- $IN//AB \Rightarrow \frac{IN}{AB} = \frac{CI}{CA} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow IN = \frac{2a(a-x)}{a} = 2a - 2x$.
- $IM//CD \Rightarrow \frac{IM}{CD} = \frac{AM}{DA} \Rightarrow IM = \frac{ax}{a} = x$.

$\Rightarrow MN = IM + IN = x + 2a - 2x = 2a - x$.

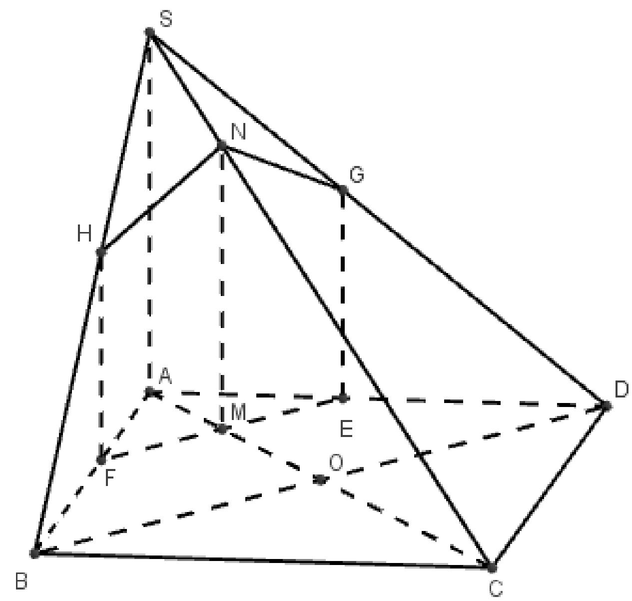
$\frac{MQ}{SA} = \frac{MD}{AD} \Rightarrow MQ = \frac{2a(a-x)}{a} = 2a - 2x$.

$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow QP = \frac{ax}{a} = x$.

$S_{TD} = \frac{(PQ + MN)MQ}{2} = 2a(a-x)$.

Câu 29. Chóp $S.ABCD$, $SA\perp BD$, $SA=a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $M\in AO$ để $AM=x\left(0<x<\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. (P) qua M và song song với SA, BD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}

Lời giải



Qua M dựng EF song song BD.

Qua M dựng MN song song SA.

Qua E dựng EG song song SA.

Qua F dựng FH song song SA.

Vậy thiết diện là $EFHNG$.

Vì $SA\perp BD\Rightarrow MNHF, MNGE$ là hình thang vuông bằng nhau.

$\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{MN}{SA}\Rightarrow MN=\dfrac{SA.CM}{CA}=\dfrac{3a}{4}$.

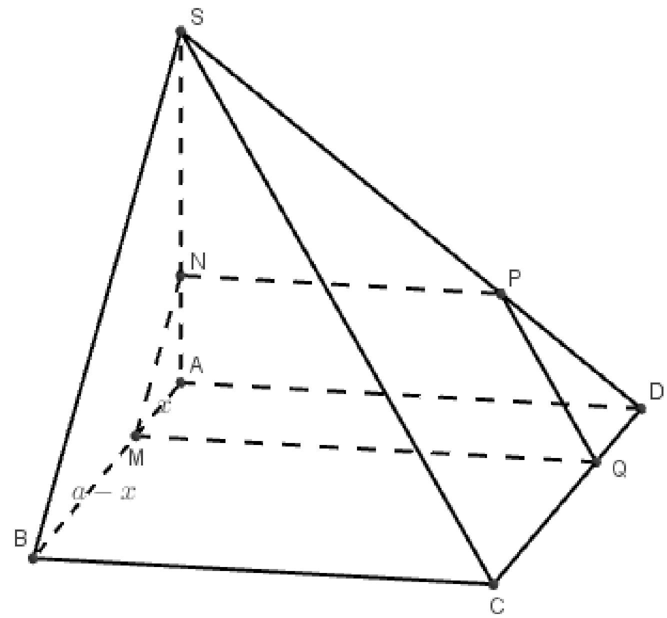
$\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AM}{AO}=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{FM}{BO}\Rightarrow AF=\dfrac{AM.AB}{AO}=x\sqrt{2}, FM=AM=x$.

$\dfrac{BF}{BA}=\dfrac{FH}{SA}\Rightarrow FH=\dfrac{SA(BA-AF)}{BA}=a-x\sqrt{2}$.

$S_{DT}=2.\dfrac{1}{2}.(MN+HF)FM=x\left(\dfrac{7a}{4}-x\sqrt{2}\right)$.

Câu 30. Chóp $S.ABCD$, $SA=a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $AD\perp SB$. $M\in AB$ để $AM=x(0<x<a)$. (P) qua M và song song với SB, AD.Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}.

Lời giải



Qua M dựng MN song song SB.

Qua M dựng MQ song song AD.

Vậy thiết diện là $MNPQ$.

Vì $AD \perp SB \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông.

Ta có: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{MN}{SB} \Rightarrow AN = x, MN = \dfrac{AM.SB}{AB} = x\sqrt{2}$.

$\dfrac{SN}{SA} = \dfrac{NP}{AD} \Rightarrow NP = \dfrac{SN.AD}{SA} = a - x$.

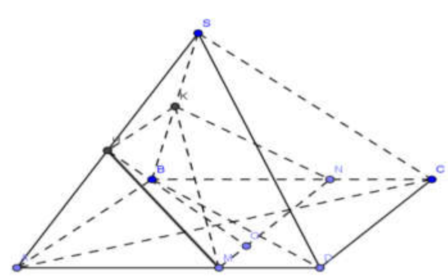
$S_{TD} = \dfrac{1}{2}.MN.\left(NP + MQ\right) = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}\left(2a - x\right)$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi M là trung điểm DA $\left(HKM\right) \cap BC = N$.

a) Chứng minh rằng $HKMN$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x\left(0 \le x \le a\right)$ tính diện tích $HKMN$ theo a và x. Tìm x để diện tích này nhỏ nhất.

Lời giải



a) Tìm $N = BC \cap \left(HKM\right)$,

$BC \subset (ABCD)$

$M \in (HKM) \cap (ABCD)$

$$\left.\begin{array}{l} HK // AB \\ HK \subset (HKM) \\ AB \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (HKM) \cap (ABCD) = Mx // AB; Mx \cap BC = N$$

Vì $MN // HK$ nên $HKMN$ là hình thang.

$\Delta AHM = \Delta BKN \Rightarrow HM = KN$ hay $HKMN$ là hình thang cân.

b) Dựng đường cao AO của là hình thang $HKMN$.

Diện tích hình thang $S = \dfrac{(KH + MN)HO}{2}$

$HK = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$; $MN = AD = a$; $HO = \sqrt{MH^2 - MO^2}, MO = \dfrac{a}{4}$

Tính HM

Xét ΔSAD: $Cos\widehat{SAD} = \dfrac{AD^2 + SA^2 - SD^2}{2AD.SA.} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{SAD} = 120^{\circ}$

$. MH = \sqrt{AH^2 + AM^2 - 2AH.AM.\cos\widehat{HAM}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + x^2 + \dfrac{ax}{4}}$,

$HO = \sqrt{MH^2 - MO^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{16} + x^2 + \dfrac{ax}{4}}$

$S = \dfrac{(KH + MN)HO}{2} = \dfrac{3a}{4}\sqrt{x^2 + \dfrac{xa}{2} + \dfrac{3a^2}{16}}$; $S_{\min}$ khi $x^2 + \dfrac{xa}{2} + \dfrac{3a^2}{16}$ min khi $x = 0$ hay $M \equiv A$