

BÀI 2. PHÉP TÍNH LOGARIT

• CHƯƠNG 6. LOGARIT

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Thực hiện các phép tính lôgarit

Câu 1. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính: a) $\log_3 \sqrt[3]{3}$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 4}$.

Lời giải

$$\text{a) } \log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{-3}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 4} = (5^{-2})^{\log_5 4} = (5^{\log_5 4})^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

Câu 2. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu):

a) $\log_5 0,5$;

b) $\log 25$;

c) $\ln \frac{3}{2}$

Lời giải

a) $\log_5 0,5 = -0,430676$

b) $\log 25 = 1,397940$

c) $\ln \frac{3}{2} = 0,405465$

Câu 3. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính: a) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4}$; b) $\log_2 28 - \log_2 7$; c) $\log \sqrt{1000}$.

Lời giải

$$\text{a) } \log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4} = \log_5 \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) = \log_5 1 = 0$$

$$\text{b) } \log_2 28 - \log_2 7 = \log_2 (28 : 7) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$\text{c) } \log \sqrt{1000} = \log 1000^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 1000 = \frac{1}{2} \log 10^3 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Câu 4. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_{\frac{1}{4}} 8$

b) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8$.

Lời giải

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{4}} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^{-2}} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$b) \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 6} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$$

Câu 5. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Đặt $\log_3 2 = a, \log_3 7 = b$. Biểu thị $\log_{12} 21$ theo a và b .

Lời giải

$$\log_{12} 21 = \frac{\log_3 21}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (7 \cdot 3)}{\log_3 (2^2 \cdot 3)} = \frac{\log_3 3 + \log_3 7}{2 \log_3 2 + \log_3 3} = \frac{1 + b}{2a + 1}$$

Câu 6. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 16$

b) $\log_3 \frac{1}{27}$

c) $\log 1000$;

d) $9^{\log_3 12}$.

Lời giải

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$

c) $\log 1000 = \log 10^3 = 3$

d) $(3^{\log_3 12})^2 = 12^2 = 144$

Câu 7. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

a) $\log_3 (1 - 2x)$;

b) $\log_{x+1} 5$.

Lời giải

a) Để $\log_3 (1 - 2x)$ có nghĩa thì $1 - 2x > 0$. Hay $x < \frac{1}{2}$

b) Để $\log_{x+1} 5$ có nghĩa thì $x + 1 > 0$. Hay $x > -1$

Câu 8. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\log_3 15$

b) $\log 8 - \log 3$;

c) $3 \ln 2$.

Lời giải

a) $\log_3 15 = 2,4650$

b) $\log 8 - \log 3 = 0,4260$

c) $3 \ln 2 = 2,0794$

Câu 9. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_6 9 + \log_6 4$

b) $\log_5 2 - \log_5 50$;

c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15$.

Lời giải

a) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

$$b) \log_5 2 - \log_5 50 = \log_5 \frac{2}{50} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$c) \log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15 = \log_3 5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \log_3 15 = \frac{1}{2} \log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 15 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{5}{15} = \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

Câu 10. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4$;

b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$;

c) $\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$.

Lời giải

$$a) \log_2 9 \cdot \log_3 4 = \log_2 3^2 \cdot \log_3 2^2 = 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 4 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 4 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 3} = 4$$

$$b) \log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_{25} 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log_{25} 5 = -\frac{1}{2} \log_{25} 25^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_{25} 25 = -\frac{1}{4}$$

$$c) \log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4 = \frac{\log_2 3}{\log_2 2} \cdot \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 9} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3}{1} \cdot \frac{\log_2 5^{\frac{1}{2}}}{\log_2 3^2} \cdot \frac{\log_2 2^2}{\log_2 5} = \log_2 3 \cdot \frac{\frac{1}{2} \log_2 5}{2 \cdot \log_2 3} \cdot \frac{2 \log_2 2}{\log_2 5} = \frac{1}{2}$$

Câu 11. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Đặt $\log 2 = a, \log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log_4 9$

b) $\log_6 12$;

c) $\log_5 6$.

Lời giải

$$a) \log_4 9 = \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{\log 3^2}{\log 2^2} = \frac{2 \cdot \log 3}{2 \cdot \log 2} = \frac{b}{a}$$

$$b) \log_6 12 = \frac{\log 12}{\log 6} = \frac{\log 2^2 \cdot 3}{\log 2 \cdot 3} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = \frac{2a + b}{a + b}$$

c) Vì $\log 2 = a$ nên $a^{10} = 2$; $\log 3 = b$ nên $b^{10} = 3$

$$\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log(2 \cdot 3)}{\log(2 + 3)} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log(a^{10} + b^{10})} = \frac{a + b}{\log(a^{10} + b^{10})}$$

Câu 12. Cho a là một số thực dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{3}} a^2 + \log_9 \frac{1}{a}.$$

Lời giải

Áp dụng công thức đổi cơ số, ta đưa các biểu thức lôgarit về lôgarit cơ số 3 như sau:

$$\log_{\frac{1}{3}} a = \frac{\log_3 a}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{-1}} = \frac{\log_3 a}{-1} = -\log_3 a;$$

$$\log_{\sqrt{3}} a^2 = 2 \log_{\sqrt{3}} a = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 \sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\frac{1}{2}} = 4 \log_3 a;$$

$$\log_9 \frac{1}{a} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 3^2} = -\frac{\log_3 a}{2}.$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức A , ta được:

$$A = -\log_3 a - 4\log_3 a - \frac{\log_3 a}{2} = -\frac{11}{2}\log_3 a.$$

Vậy $A = -\frac{11}{2}\log_3 a.$

Câu 13. Tính $\log_{25} 32$ theo $a = \log_2 5.$

Lời giải

Ta thực hiện biến đổi như sau:

$$\log_{25} 32 = \log_{25} 2^5 = 5 \cdot \log_{25} 2 = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{\log_5 25} = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{2} = \frac{5}{2}\log_5 2$$

Mặt khác ta lại có: $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$, do đó $\log_{25} 32 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 5} = \frac{5}{2a}.$

Vậy $\log_{25} 32 = \frac{5}{2a}.$

Câu 14. Tính:

a) $\log_2 \frac{1}{64};$ b) $\log 1000;$ c) $\log_5 1250 - \log_5 10;$ d) $4^{\log_2 3}.$

Lời giải

a) $\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6.$

b) $\log 1000 = \log 10^3 = 3.$

c) $\log_5 1250 - \log_5 10 = \log_5 \frac{1250}{10} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3.$

d) $4^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9.$

Câu 15. Chứng minh rằng:

a) $\log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0;$

b) $\ln(1 + e^{2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-2x}).$

Lời giải

a) $\log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a [(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})]$
 $= \log_a 1 = 0$

b) $\ln(1 + e^{2x}) = \ln[e^{2x}(1 + e^{-2x})] = \ln e^{2x} + \ln(1 + e^{-2x})$
 $= 2x + \ln(1 + e^{-2x}).$

Câu 16. Biết $\log_2 3 \approx 1,585.$ Hãy tính:

a) $\log_2 48;$ b) $\log_4 27.$

Lời giải

a) $\log_2 48 = \log_2 (3 \cdot 2^4) = \log_2 3 + \log_2 2^4 \approx 1,585 + 4 = 5,585.$

b) $\log_4 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} = \frac{3\log_2 3}{2} \approx \frac{3}{2} \cdot 1,585 = 2,3775.$

Câu 17. Đặt $a = \log_3 5, b = \log_4 5.$ Hãy biểu diễn $\log_{15} 10$ theo a và $b.$

Lời giải

Ta có: $\log_{15} 10 = \frac{\log_5 10}{\log_5 15} = \frac{\log_5 (2 \cdot 5)}{\log_5 (3 \cdot 5)} = \frac{\log_5 2 + 1}{\log_5 3 + 1}.$

$$c) \log_2 \frac{16}{3} + 2 \log_2 \sqrt{6} = \log_2 \frac{16}{3} + \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{16}{3} \cdot 6 \right) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5;$$

$$d) \frac{1}{3} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} (\log_3 9 - \log_3 7) + \log_3 7^{\frac{1}{3}} \\ = \frac{1}{3} \log_3 3^2 - \frac{1}{3} \log_3 7 + \frac{1}{3} \log_3 7 = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3}.$$

Câu 22. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_9 \frac{1}{27};$

b) $\log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16};$

c) $\log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8.$

Lời giải

$$a) \log_9 \frac{1}{27} = \frac{\log_3 \frac{1}{27}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^2} = -\frac{3}{2};$$

$$b) \log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16} = \frac{\log_2 9}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 27} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3} \cdot \frac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 3^3} \\ = \frac{2 \log_2 3}{3 \log_2 2} \cdot \frac{-4 \log_2 2}{3 \log_2 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-4}{3} = -\frac{8}{9}$$

$$\log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8 = \frac{\log_2 27}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 25} \\ c) = \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2} \\ = \frac{3 \log_2 3}{2 \log_2 2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{3 \log_2 2}{2 \log_2 5} = \frac{9}{4}.$$

Câu 23. Biết rằng $2 \log 2 = a, \log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log 18;$

b) $\log_2 12;$

c) $\log 75.$

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\log 2 = \frac{a}{2}.$

$$a) \log 18 = \log (2 \cdot 3^2) = \log 2 + 2 \log 3 = \frac{a}{2} + 2b.$$

$$b) \log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{\log (2^2 \cdot 3)}{\log 2} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{a + b}{\frac{a}{2}} = \frac{2(a + b)}{a}.$$

$$c) \text{Ta có } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \frac{a}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \log 75 = \log (3 \cdot 5^2) = \log 3 + 2 \log 5 = b + 2 \left(1 - \frac{a}{2} \right) = 2 - a + b.$$

Câu 24. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_9 \frac{1}{81}$;
 b) $\log 10000$;
 c) $\log 0,001$;
 d) $\log_{0,7} 1$;
 e) $\log_5 \sqrt[4]{5}$;
 g) $\log_{0,5} 0,125$.

Lời giải

- a) $\log_9 \frac{1}{81} = \log_9 9^{-2} = -2$;
 b) $\log 10000 = \log 10^4 = 4$;
 c) $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$;
 d) $\log_{0,7} 1 = 0$;
 e) $\log_5 \sqrt[4]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$;
 g) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5} 0,5^3 = 3$.

Câu 25. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $3^{\log_3 5}$;
 b) $e^{\ln 3}$;
 c) $7^{2\log_7 8}$;
 d) $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$;
 e) $4^{\log_2 \frac{1}{5}}$;
 g) $0,001^{\log 2}$.

Lời giải

- a) 5;
 b) 3;
 c) $7^{2\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$
 d) $2^{\log_2 3 + \log_2 5} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$;
 e) $4^{\log_2 \frac{1}{5}} = 2^{2\log_2 \frac{1}{5}} = \left(2^{\log_2 \frac{1}{5}}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$
 g) $0,001^{\log 2} = (10^{-3})^{\log 2} = (10^{\log 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Câu 26. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$;
 b) $\log_5 75 - \log_5 3$;
 c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5}$;
 d) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3$;
 e) $2\log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$;
 g) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2\log_3 \sqrt[4]{27}$

Lời giải

- a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30 = \log_3 \left(\frac{9}{10} \cdot 30\right) = \log_3 3^3 = 3$;

$$b) \log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2;$$

$$c) \log_3 \frac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5} = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 (\sqrt{5})^2 = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 5 = \log_3 \left(\frac{5}{9} : 5 \right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2;$$

$$d) 4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3 = \log_{12} 2^4 + \log_{12} 3^2 = \log_{12} (2^4 \cdot 3^2) = \log_{12} (4 \cdot 3)^2 = \log_{12} 12^2 = 2$$

$$e) 2\log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2} = \log_5 2^2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2} \\ = \log_5 4 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2} = \log_5 \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{10}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2};$$

$$g) \log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2\log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} - \log_3 3^{\frac{2}{3}} + 2\log_3 3^{\frac{3}{4}} \\ = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{3}.$$

Câu 27. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \log_8 \frac{1}{32};$$

$$b) \log_5 3 \cdot \log_3 5;$$

$$c) 2^{\frac{1}{\log_5 2}};$$

$$d) \log_{27} 25 \cdot \log_5 81.$$

Lời giải

$$a) \log_8 \frac{1}{32} = \frac{\log_2 \frac{1}{32}}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^{-5}}{\log_2 2^3} = -\frac{5}{3};$$

$$b) \log_5 3 \cdot \log_3 5 = \log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 1;$$

$$c) 2^{\frac{1}{\log_5 2}} = 2^{\log_2 5} = 5$$

$$d) \log_{27} 25 \cdot \log_5 81 = \frac{\log_3 25}{\log_3 27} \cdot \frac{\log_3 81}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^2}{\log_3 3^3} \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 5} = \frac{2\log_3 5}{3} \cdot \frac{4}{\log_3 5} = \frac{8}{3}.$$

Câu 28. Tính:

$$a) \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9;$$

$$b) \log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{32} \cdot \log_5 \frac{1}{27}.$$

Lời giải

$$a) \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \log_3 3^2 = 2;$$

b)

$$\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{32} \cdot \log_5 \frac{1}{27} = \log_2 5^{-2} \cdot \log_3 2^{-5} \cdot \log_5 3^{-3} \\ = (-2)\log_2 5 \cdot (-5)\log_3 2 \cdot (-3)\log_5 3 \\ = -30\log_2 5 \cdot \log_3 2 \cdot \log_5 3 \\ = -30\log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = -30$$

Câu 29. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

- a) $\log_7 21$;
 b) $\log 2,25$;
 c) $\ln \sqrt{14}$
 d) $\log_{0,5} 3 + \log_5 0,3$.

Lời giải

- a) 1,5646 ;
 b) 0,3522 ;
 c) 1,3195 ;
 d) -2,333.

Câu 30. Đặt $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Hãy biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

- a) $\log_2 45$;
 b) $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6}$
 c) $\log_3 20$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 45 &= \log_2 3^2 \cdot 5 = 2\log_2 3 + \log_2 5 = 2a + b; \\ \text{b) } \log_2 \frac{\sqrt{15}}{6} &= \log_2 \sqrt{15} - \log_2 6 = \frac{1}{2}\log_2 15 - \log_2 (2 \cdot 3) \\ &= \frac{1}{2}\log_2 (3 \cdot 5) - (\log_2 2 + \log_2 3) = \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 5) - (1 + \log_2 3) \\ &= \frac{1}{2}(a + b) - (1 + a) = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 1 \\ \text{c) } \log_3 20 &= \frac{\log_2 20}{\log_2 3} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 5)}{\log_2 3} = \frac{2\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2 + b}{a}. \end{aligned}$$

Câu 31. Đặt $\log x = a, \log y = b, \log z = c (x, y, z > 0)$. Biểu thị các biểu thức sau theo a, b, c .

- a) $\log(xyz)$;
 b) $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}}$
 c) $\log_z (xy^2) (z \neq 1)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \log(xyz) &= \log x + \log y + \log z = a + b + c; \\ \text{b) } \log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}} &= \log(x^3 \sqrt[3]{y}) - \log(100\sqrt{z}) = \log\left(x^3 y^{\frac{1}{3}}\right) - \log\left(10^2 z^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\log x + \frac{1}{3}\log y - 2 - \frac{1}{2}\log z = 3a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c - 2; \\ \text{c) } \log_z (xy^2) &= \frac{\log(xy^2)}{\log z} = \frac{\log x + 2\log y}{\log z} = \frac{a + 2b}{c}. \end{aligned}$$

Câu 32. Đặt $\log_2 3 = a, \log_3 15 = b$. Biểu thị $\log_{30} 18$ theo a và b .

Lời giải

$$a = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1}{a};$$

$$b = \log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$$

$$\Rightarrow \log_3 5 = b - 1.$$

$$\begin{aligned}\log_{30} 18 &= \frac{\log_3 18}{\log_3 30} = \frac{\log_3 (2 \cdot 3^2)}{\log_3 (2 \cdot 3 \cdot 5)} = \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5} \\ &= \frac{\log_3 2 + 2}{\log_3 2 + 1 + \log_3 5} = \frac{\frac{1}{a} + 2}{\frac{1}{a} + 1 + b - 1} = \frac{2a + 1}{ab + 1}\end{aligned}$$

Câu 33. Tính:

a) $\log_{0,5} 0,25$;

b) $8^{\log_2 5}$;

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$;

d) $5^{\log_{25} 16}$.

Lời giải

a) $\log_{0,5} 0,25 = \log_{0,5} 0,5^2 = 2$.

b) $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$.

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81} = (10^{-1})^{\log 81} = (10^{\log 81})^{-1} = 81^{-1} = \frac{1}{81}$.

d) $5^{\log_{25} 16} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 16} = (25^{\log_{25} 16})^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$.

Câu 34. Cho $\log_a b = 2$. Tính:

a) $\log_a (a^2 b^3)$;

b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3 \sqrt[3]{b}}$;

c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right)$

Lời giải

a) $\log_a (a^2 b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3 \log_a b = 2 + 3 \cdot 2 = 8$.

b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3 \sqrt[3]{b}} = \log_a a^{\frac{3}{2}} - \log_a b^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \log_a b = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \cdot 2 = -\frac{7}{6}$.

c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a b^2 - \log_a 2 = 3 \log_a b = 3 \cdot 2 = 6$.

Câu 35. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

a) $\log_{\sqrt{2}} 8$;

b) $\log_3 \sqrt[3]{9}$;

c) $9^{\log_3 12}$;

d) $2^{\log_4 9}$.

Lời giải

a) 6.

b) $\frac{2}{3}$.

c) 144.

d) 3.

Câu 36. Tính:

a) $A = \frac{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}}$

b) $B = \frac{36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}}{\log_2 \left(\log_2 \sqrt[4]{2} \right)}$

c) $C = \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3);$

d) $D = \log_4 2 \cdot \log_6 4 \cdot \log_8 6.$

Lời giải

a) 9.

b) -8.

c) $-\frac{1}{2}.$

d) $\frac{1}{3}.$

Câu 37. Cho $\log_a b = 4$. Tính:

a) $\log_a \left(a^{\frac{1}{2}} b^5 \right);$

b) $\log_a \left(\frac{a\sqrt{b}}{b^3\sqrt{a}} \right);$

c) $\log_{a^3b^2} (a^2b^3);$

d) $\log_{a^3\sqrt{b}} (\sqrt[4]{a\sqrt{b}}).$

Lời giải

a) $\frac{41}{2}.$

b) $-\frac{4}{3}.$

c) $\log_{a^3b^2} (a^2b^3) = \frac{\log_a (a^2b^3)}{\log_a (a^3b^2)} = \frac{2+3\log_a b}{3+2\log_a b} = \frac{2+3 \cdot 4}{3+2 \cdot 4} = \frac{14}{11}.$

d) $\frac{9}{28}.$

Câu 38. a) Cho $\log_2 3 = a$. Tính $\log_{18} 72$ theo a .b*) Cho $\log 2 = a$. Tính $\log_{20} 50$ theo a .**Lời giải**

a) $\log_{18} 72 = \frac{2a+3}{2a+1}.$

b*) Ta có: $1 = \log 10 = \log 2 + \log 5$ nên $\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - a$.

Khi đó:

$$\log_{20} 50 = \frac{\log 50}{\log 20} = \frac{1 + \log 5}{1 + \log 2} = \frac{2 - a}{a + 1}.$$

Câu 39. Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 = 6xy$. Chứng minh rằng:
 $2 \log(x + 2y) = 1 + \log x + \log y$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + 4y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x + 2y)^2 = 10xy$.

Suy ra $2 \log(x + 2y) = \log(x + 2y)^2 = \log(10xy) = 1 + \log x + \log y$.

Câu 40. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương khác 1 và $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$\log_b y = \frac{2 \log_a x \cdot \log_c z}{\log_a x + \log_c z}$$

Lời giải

Vì $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có:

$$2 \log_y b = \log_x a + \log_z c \Leftrightarrow 2 \log_y b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c z}$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_y b = \frac{\log_a x + \log_c z}{\log_a x \cdot \log_c z} \Leftrightarrow \log_b y = \frac{2 \log_a x \cdot \log_c z}{\log_a x + \log_c z}.$$

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 41. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn (ở **Hoạt động khởi động** và **Hoạt động khám phá 1**, $A_0 = 1 \mu m$).

a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng

i) $10^{5,1} A_0$;

ii) $65000 A_0$.

b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P . So sánh độ lớn của hai trận động đất.

Lời giải

a)

i) Khi $A = 10^{5,1} A_0$. Ta có: $M = \log \frac{10^{5,1} A_0}{A_0} = \log 10^{5,1} = 5,1$ (Richter)

ii) Khi $A = 65000 A_0$. Ta có: $M = \log \frac{65000 A_0}{A_0} = \log 65000 = 4,8$ (Richter)

b) Trận động đất tại điểm P có biên độ lớn nhất là A thì trận động đất tại N có biên độ lớn nhất là $3A$

Ta có độ lớn của hai trận động đất là: $M_P = \log \frac{A}{A_0}; M_N = \log \frac{3A}{A_0}$

Độ lớn trận động đất tại N lớn hơn độ lớn trận động đất tại P là:

$$M_N - M_P = \log \frac{3A}{A_0} - \log \frac{A}{A_0} = \log \frac{\frac{3A}{A_0}}{\frac{A}{A_0}} = \log 3 = 0,5 \text{ (Richter)}$$

Câu 42. (SGK - CTST 11 - Tập 2) a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L . Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

a) độ pH của nước cất là: $-\log 10^{-7} = 7$

b) độ pH của dung dịch là: $-\log(20 \cdot 10^{-7}) = 5,7$

Câu 43. Trong Hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base và nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng $0,001 \text{ mol/l}$.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 8.

c) Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Thay $[H^+] = 0,001$ vào công thức, ta được $pH = -\log[H^+] = -\log 0,001 = 3$.

Vậy độ pH của dung dịch bằng 3.

b) Thay $pH = 8$ vào công thức, ta được $8 = -\log[H^+]$, do đó $[H^+] = 10^{-8} \text{ mol/l}$.

Vậy nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-8}$.

c) Thay vào công thức ta thấy khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen giảm đi 10 lần.

Câu 44. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[\log N] + 1$, ở đó $[\log N]$ là phần nguyên của số thực dương $\log N$. Tìm số các chữ số của 2^{2023} khi viết trong hệ thập phân.

Lời giải

Số chữ số của 2^{2023} là: $[\log 2^{2023}] + 1 = [2023 \cdot \log 2] + 1 = 609$.

Câu 45. Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lãi kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì gửi là $A = P(1+r)^t$ (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

Lời giải

Để số tiền ban đầu tăng gấp đôi thì $A = 2P$.

Thay $A = 2P$ vào công thức lãi kép ta có:

$2P = P(1+r)^t$, suy ra $(1+r)^t = 2$, là $t = \log_{1+r} 2$ (năm)

Câu 46. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

Lời giải

Lãi suất năm là 8% nên lãi suất kì hạn 6 tháng sẽ là $r = 4\% = 0,04$.

Thay $P = 100; r = 0,04$ và $A = 120$ vào công thức $A = P(1+r)^t$, ta được:

$120 = 100(1+0,04)^t$. Suy ra $1,2 = 1,04^t$, hay $t = \log_{1,04} 1,2 \approx 4,65$.

Vậy sau 5 kì gửi tiết kiệm kì hạn 6 tháng, tức là sau 30 tháng, người đó sẽ nhận được ít nhất 120 triệu đồng.

Câu 47. Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ số dùng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay $0,2mg/ml$, nghĩa là có 0,02g cồn trong 100ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 1,4 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02% là 1,4. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hoá bằng một phương trình có dạng

$$R = e^{kx},$$

trong đó $x(\%)$ là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số.

- a) Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số k trong phương trình.
b) Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17% ?
c) Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.
d) Giả sử nếu một người có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

Lời giải

a) Thay $R = 1,4$ và $x = 0,02\%$ vào công thức, ta được: $1,4 = e^{k \cdot \frac{0,02}{100}}$.
Suy ra $k \approx 1682,36$.

b) $R = e^{1682,36 \cdot \frac{0,17}{100}} \approx 17,46$.

c) Thay $R = 100$ vào công thức, ta được: $100 = e^{1682,36x}$. Suy ra $x \approx 0,27\%$.

d) Với $R \geq 5$ thì $x \geq 0,096\%$, tức là một người có nồng độ cồn trong máu từ khoảng 0,096% trở lên thì không được lái xe.

Câu 48. Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+](molL^{-1})$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $pH = -\log[H^+]$.

Lời giải

Độ pH của đầm đó là: $pH = -\log[H^+] = -\log(8 \cdot 10^{-8}) \approx 7,097$.

Do $7,097 < 7,2$ nên đầm đó không thích hợp cho tôm sú phát triển.

Câu 49. Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của $^{14}_6C$ có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$);

$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam,

2014). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi t là độ tuổi của mẫu gỗ cổ.

Ta có: $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với $H = 0,215$; $H_0 = 0,250$; $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$.

Từ đó, $\lambda t = \ln \frac{H_0}{H} = \ln \frac{0,250}{0,215} \approx 0,1508$. Vậy $t \approx \frac{0,1508}{\lambda} \approx 1247$.

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó xấp xỉ 1247 năm.

Nguyễn Bảo Vương