BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

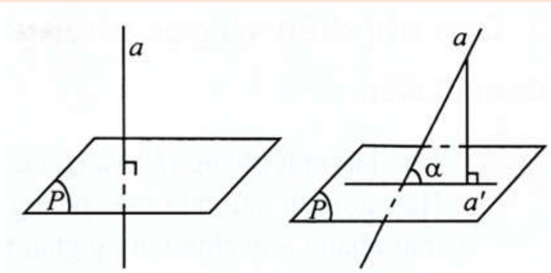
1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng 90°.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P).



Hình 1

Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu là $(a,(P))$.

Chú ý: a) Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thoả mãn $0^{\circ} \le \alpha \le 90^{\circ}$.

b) Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $(a,(P)) = 0^{\circ}$.

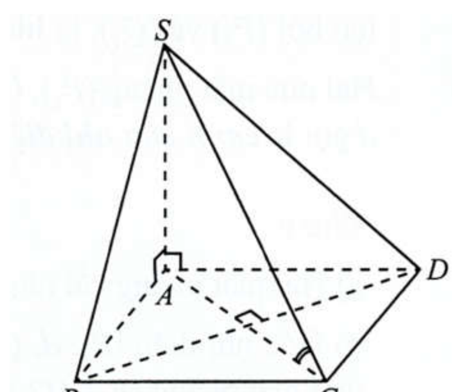
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Tính:

a) Góc giữa đường thẳng BC và (SAB);

b) Góc giữa đường thẳng BD và (SAD);

c) Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$.

Giải



Hình 2

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BC \perp SA$. Ta lại có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra góc giữa đường thẳng BC và (SAB) bằng 90°.

b) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BA \perp SA$. Ta lại có $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$. Vậy AD là hình chiếu của BD trên (SAD). Nếu gọi φ là góc giữa đường thẳng BD và (SAD) thì

$\varphi = (BD, AD) = \widehat{BDA} = 45^{\circ}$ (vì tam giác ABD vuông cân tại A).

c) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Nếu gọi φ' là góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ thì $\varphi' = (SC, CA) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác SCA vuông tại A, ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 60°.

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

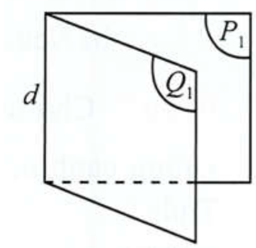
Góc nhị diện

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi $(P_1), (Q_1)$ và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$ gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện.



Hình 5

Chú ý:

a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$.

Góc phẳng nhị diện

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt $(P_1), (Q_1)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P_1), (Q_1)$.

c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.

e) Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180°.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a. Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

a) $[A, BD, A']$;

b) $[C, BD, A']$.

Giải

a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OA \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{AOA'}$ là góc phẳng nhị diện $\left[A, BD, A'\right]$. Trong tam giác AOA' vuông tại A, ta

có: $\tan \widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{AO} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{A'OA} \approx 54,7^{\circ}$.

b) Ta có $OC \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{A'OC}$ là góc phẳng nhị diện $\left[C, BD, A'\right]$.

Ta có $\widehat{A'OC} = 180^{\circ} - \widehat{A'OA} \approx 125,3^{\circ}$.

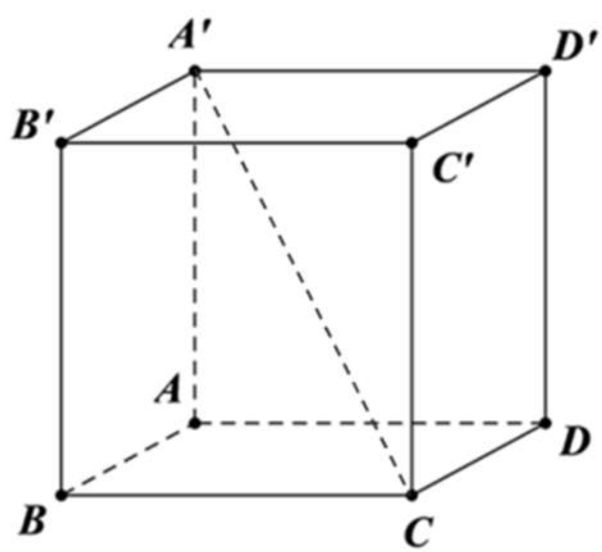
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Xác định góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

Câu 1. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa các đường thẳng sau đây với mặt phẳng $(ABCD)$:

a) AA';
b) BC';
c) $A'C$.

Lời giải



a) Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng AA' và $(ABCD)$ là 90°

b) $CC' \perp (ABCD)$ nên C là hình chiếu vuông góc của C' lên $(ABCD)$.

Suy ra góc giữa BC' và $(ABCD)$ là $\widehat{C'BC} = 45^{\circ}$ (Vì $BCC'C'$ là hình vuông)

c) Gọi cạnh của hình lập phương là a

Ta có: $AC = a\sqrt{2}, \tan \widehat{ACA'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\widehat{ACA'} = 35^{\circ}$

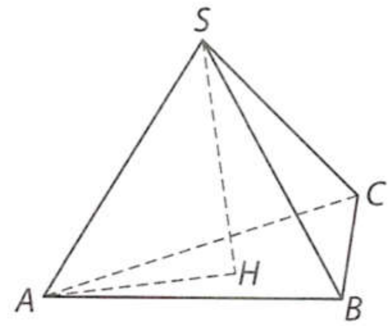
$AA' \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABCD)$

Suy ra góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$ là $\widehat{ACA'} = 35^{\circ}$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $3a$, các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau và bằng $2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

(H.7.7)



Hình 7.7

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó các tam giác SHA, SHB, SHC là những tam giác vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có: $HA = HB = HC$, do đó H là tâm của tam giác đều ABC. Ta tính được $AH = a\sqrt{3}$.

Vì AH là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa đường thẳng SA và đường thẳng AH.

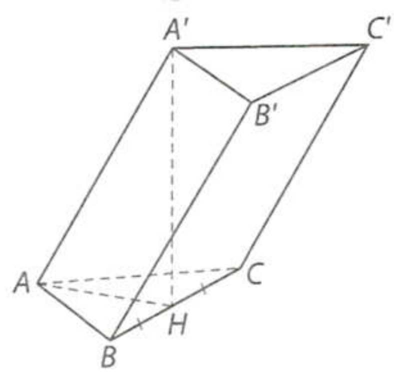
Xét tam giác SAH vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°.

Câu 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, góc BAC bằng 120° và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC, biết $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

(H.7.8)



Hình 7.8

Ta có: AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) và tam giác $AA'H$ vuông tại H. Do đó, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AA' và AH.

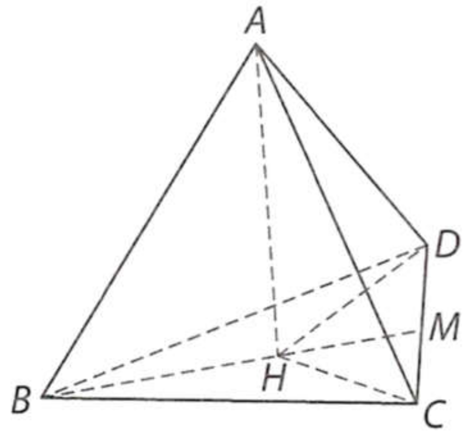
Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $\widehat{HAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ$, suy ra $AH = a.$

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H, có: $\cos\widehat{HAA'} = \frac{AH}{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, suy ra $\widehat{HAA'} = 45^\circ.$

Do đó $\left(AA', AH\right) = 45^\circ$, hay góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Tính côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD).

Lời giải



Hình 7.32

Kẻ $AH \perp (BCD)$ tại H, ta có BH là hình chiếu vuông góc của AB trên mặt phẳng (BCD) nên góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BH, mà $(AB, BH) = \widehat{ABH}$.

Vì $AB = AC = AD$ nên $HD = HB = HC$, hay H là tâm của tam giác BCD, suy ra $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó ta tính được: $\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

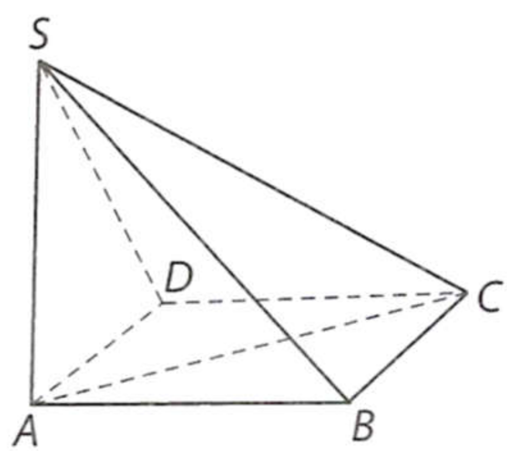
Vậy côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a, SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

Lời giải



Hình 7.33

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$, do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và AC, mà $(SC, AC) = \widehat{SCA}$. Vì tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.

b) Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng SC và SB.

Ta có: $(SB, SC) = \widehat{BSC}$. Xét tam giác SBC vuông tại B, có:

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}, BC = a.$

Do đó, $\tan \widehat{BSC} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

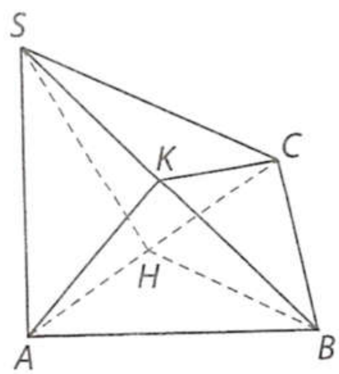
Vậy tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, biết $AB = a, SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính tang của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

b) Tính sin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Hình 7.34

a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H, mà $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BH$, suy ra $BH \perp (SAC)$. Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAC) nên góc giữa
đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SH, mà $(SB, SH) = \widehat{BSH}$.

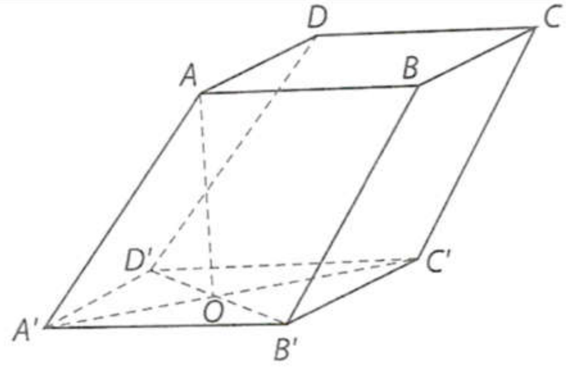
Ta tính được: $BH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SH = \dfrac{a\sqrt{26}}{2}$, suy ra $\tan \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SH} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

b) Kẻ $AK \perp SB$ tại K, mà $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AK$, suy ra $AK \perp (SBC)$. Do đó CK là hình chiếu vuông góc của AC trên (SBC), suy ra góc giữa đường thẳng AC và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AC và CK, mà $(AC, CK) = \widehat{ACK}$.

Ta có: $AK = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = a\sqrt{\dfrac{6}{7}}$, suy ra $\sin \widehat{ACK} = \dfrac{AK}{AC} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $\left(A'B'C'D'\right)$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $\left(A'B'C'D'\right)$.

Lời giải



Hình 7.35

Gọi O là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Ta có: $A'O$ là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng $\left(A'B'C'D'\right)$, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $\left(A'B'C'D'\right)$ bằng góc giữa AA' và $A'O$. Mà $\left(AA', A'O\right) = \widehat{AA'O}$, ta lại có $A'O = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\cos\widehat{AA'O} = \dfrac{OA'}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $\widehat{AA'O} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $\left(A'B'C'D'\right)$ bằng 60°.

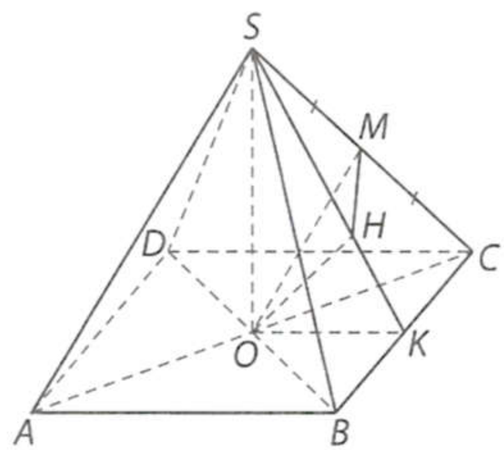
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

c) Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC). Tính $\sin\alpha$.

Lời giải



Hình 7.36

a) Ta có: $SO \perp AC$; $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

b) Vì $AO \perp (SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBD), do đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc giữa hai đường thẳng SA và SO. Mà $(SA, SO) = \widehat{ASO}$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc ASO. Xét tam giác SAC có $SA^2 + SC^2 = AC^2$ và $SA = SC$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{ASO} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng 45°.

c) Kẻ $OK \perp BC$ tại $K, OH \perp SK$ tại H thì ta chứng minh được $OH \perp (SBC)$, suy ra HM là hình chiếu vuông góc của OM trên mặt phẳng (SBC), do đó góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng OM và MH, mà $(OM, MH) = \widehat{OMH}$ nên góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc OMH hay $\widehat{OMH} = \alpha$.

Ta có: $OM=\frac{a}{2}, OK=\frac{a}{2}, SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SOK vuông tại O, đường cao OH nên $OH=\frac{SO\cdot OK}{SK}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vì tam giác OMH vuông tại H nên $\sin\alpha=\sin\widehat{OMH}=\frac{OH}{OM}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

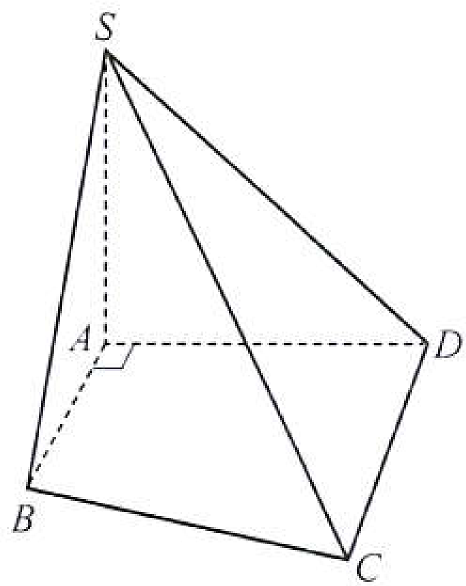
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), AB\perp AD, SA=AD=a\sqrt{3}$, $AB=a$. Tính số đo của:

a) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB).

Lời giải

(Hình 17)



Hình 17

a) Vì $SA\perp(ABCD)$ nên AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SB và AB, hay bằng $\widehat{SBA}$.

Trong tam giác vuông SAB có

$\tan\widehat{SBA}=\frac{SA}{AB}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$ nên $\widehat{SBA}=60^{\circ}$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

b) Vì $SA\perp(ABCD)$ và $AD\subset(ABCD)$ nên $SA\perp AD$. Mà $AD\perp AB$ và SA, AB cắt nhau trong mặt phẳng (SAB) nên $AD\perp(SAB)$. Suy ra SA là hình chiếu của SD trên (SAB), khi đó góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa SD và SA, hay bằng $\widehat{DSA}$. Vì tam giác DSA vuông cân tại A nên $\widehat{DSA}=45^{\circ}$. Vậy góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng 45°.

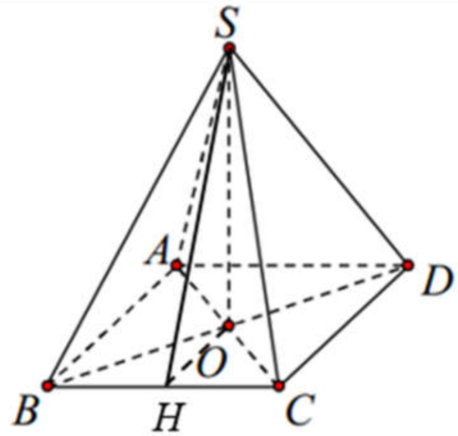
Dạng 2. Góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện

Câu 10. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

a) $[S,BC,O]$;

b) $[C,SO,B]$.

Lời giải



a) Kẻ $SH \perp BC$

Mà $BC \perp SO$ nên $BC \perp (SOH)$. Suy ra $OH \perp BC$.

Do đó $[S, BC, O] = \widehat{SHO}$

Ta có: $OH = \frac{a}{2}, OC = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\tan\widehat{SHO} = \frac{SH}{OH} = \sqrt{2}$. Suy ra $\widehat{SHO} = 54,7^\circ$

Vậy $[S, BC, O] = 54,7^o$

b) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp OB, SO \perp OC$

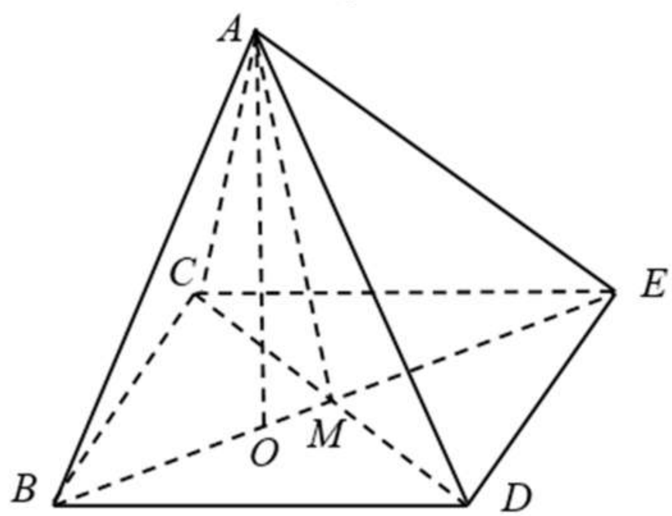
Suy ra $[C, SO, B] = \widehat{BOC} = 90^\circ$

Câu 11. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho tứ diện đều $ABCD$. Vẽ hình bình hành $BCED$.

a) Tìm góc giữa đường thẳng AB và (BCD).

b) Tìm góc phẳng nhị diện $[A, CD, B]; [A, CD, E]$.

Lời giải



a) Gọi O là tâm tam giác BCD. Do tứ diện $ABCD$ đều nên $AO \perp (BCD)$

Nên góc giữa đường thẳng AB và (BCD) là $\widehat{ABO}$

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$.

O là trọng tâm tam giác BCD nên $BO=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\cos\widehat{ABO}=\frac{BO}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\widehat{ABO}=54,7^{\circ}$

Suy ra góc giữa đường thẳng AB và (BCD) bằng $54,7^{\circ}$

b) Gọi M là trung điểm CD.

$BCED$ là hình bình hành nên $ED=BC=a, CE=BD=a$. Nên $BCED$ là hình thoi. Ta có $BM\perp CD, EM\perp CD$

Mà $CD\perp AO$ nên $CD\perp(ABM)$. Suy ra $CD\perp AM$

$[A,CD,B]=\widehat{AMB},[A,CD,E]=\widehat{AME}$. Ta có: $OM=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$AO=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\tan\widehat{AMO}=\frac{AO}{OM}=2\sqrt{2}$.

Nên $\widehat{AMO}=70,5^{\circ}, \widehat{AME}=180^{\circ}-70,5^{\circ}=109,5^{\circ}$

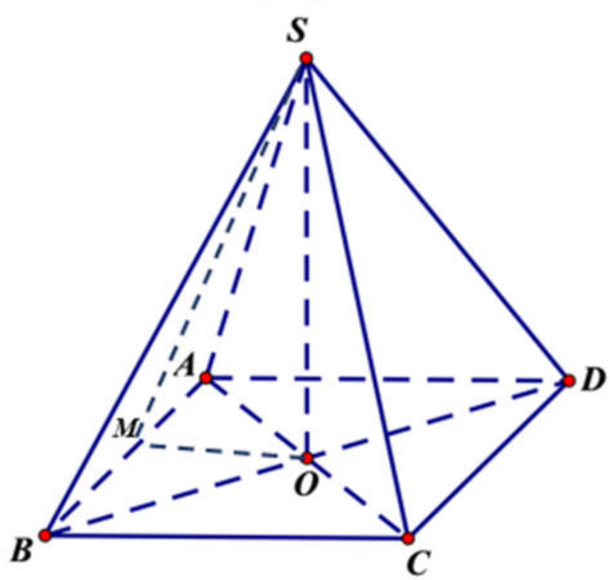
Vậy $[A,CD,B]=70,5^{\circ},[A,CD,E]=109,5^{\circ}$

Câu 12. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp tứ giác đều $S\cdot ABCD$ có O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh bằng nhau.

a) Tìm góc giữa đường thẳng SA và $(ABCD)$.

b) Tìm góc phẳng nhị diện $[A,SO,B],[S,AB,O]$.

Lời giải



a) Gọi a là độ dài các cạnh của $S.ABCD$

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có: $SO\perp(ABCD)$

Do đó, góc giữa SA và $(ABCD)$ là $\widehat{OSA}$.

Ta có: $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2},\cos\widehat{SOA}=\frac{AO}{SA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nên $\widehat{SOA}=45^{\circ}$

Vậy góc giữa SA và $(ABCD)$ là 45°.

b)Vì $SO\perp(ABCD)$ nên $SO\perp AO, SO\perp BO$

$[A,SO,B]=\widehat{AOB}=90^{\circ}$. Kẻ M là trung điểm của AB. Ta có: $SM\perp AB, OM\perp AB$

$[S,AB,O]=\widehat{SMO}$. Tam giác SAB đều có SM là trung tuyến nên $SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

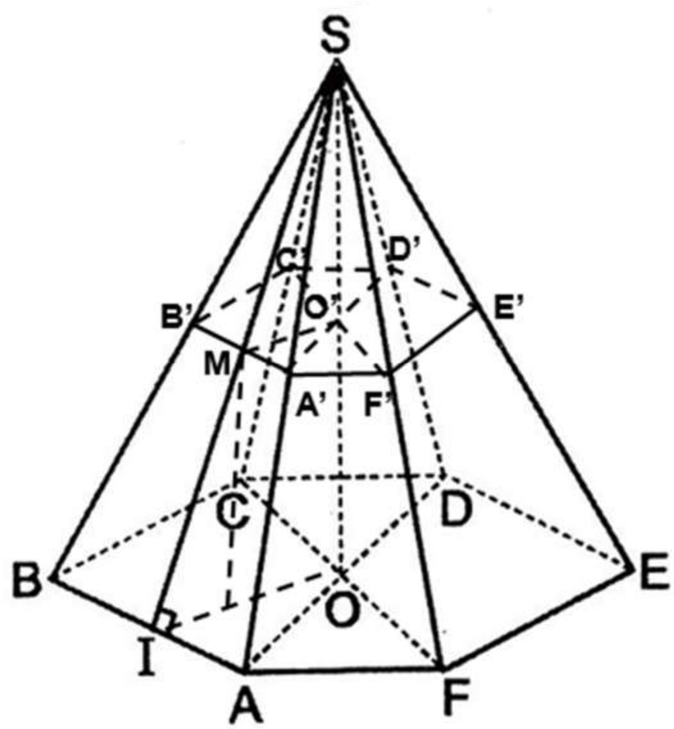
$\cos\widehat{SMO}=\dfrac{MO}{SM}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\widehat{SMO}=54,7^{o}$. Vậy $[S,AB,O]=54,7^{\circ}$

Câu 13. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp cụt lục giác đều $ABCDEF\cdot A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\dfrac{a}{2}, OO'=a$.

a) Tìm góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

b) Tìm góc phẳng nhị diện $\left[O,AB,A'\right],\left[O',A'B',A\right]$.

Lời giải



a) $OO'=a$ nên $SO=2a$, $SO\perp(ABCDEF)$ nên góc giữa cạnh bên và đáy là $\widehat{SAO}$

Ta có: $AO=BC=a; SO=2OO'=2a$, $\tan\widehat{SAO}=\dfrac{SO}{OA}=2$

Nên $\widehat{SAO}=63,4^{\circ}$

b) Kẻ $MH\perp(ABCDEF)$ nên $MH=OO'=a$

$MO'=HO=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; OI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$IH=OI-OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\tan\widehat{MIO}=\dfrac{MH}{IH}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ nên $\widehat{MIO}=73,9^{\circ}$

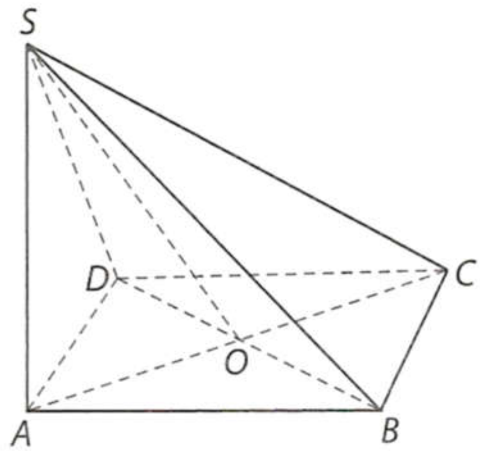
$\left[O,AB,A'\right]=\widehat{MIO}=73,9^{\circ}$

$\left[O',A'B',A\right]=\widehat{IMO}=180^{\circ}-73,9^{\circ}=106,1^{\circ}$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Lời giải

(H.7.12)



Hình 7.12

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $CO \perp BD, SO \perp BD$. Do đó, góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ bằng góc SOC.

Xét tam giác SAO, có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SA$ và góc SAO là góc vuông nên tam giác SAO là tam giác vuông cân tại A, suy ra $\widehat{SOA} = 45^\circ$; $\widehat{SOC} = 135^\circ$.

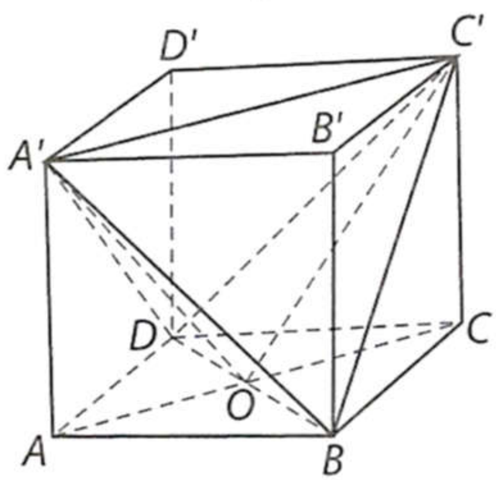
Vậy số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135°.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $(ABCD)$.

b) Tính côsin của số đo góc nhị diện $\left[A', BD, C'\right]$.

Lời giải



Hình 7.42

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: $AO \perp BD, A'O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng $AO, A'O$ mà

$\left(AO, A'O\right) = \widehat{AOA'}$ nên góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $(ABCD)$ bằng $\widehat{AOA'}$. Ta có:

$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OA' = \sqrt{OA^2 + AA'^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

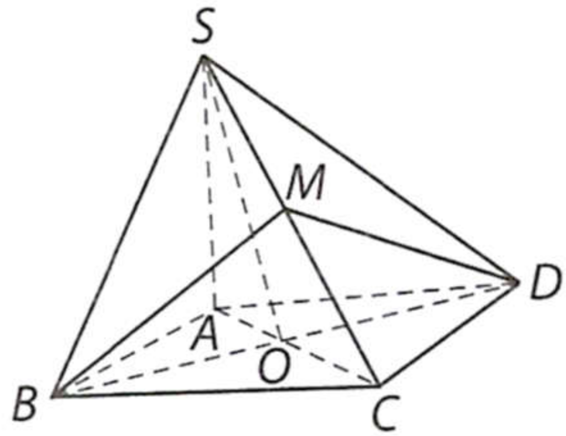
Suy ra $\cos\widehat{AOA'} = \frac{AO}{A'O} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Vì $A'O \perp BD, CO' \perp BD$ nên góc nhị diện $\left[A', BD, C'\right]$ bằng $\widehat{A'OC'}$.

Ta có $OA' = OC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}, A'C' = a\sqrt{2}$ nên $\cos\widehat{A'OC'} = \frac{OA'^2 + OC'^2 - A'C'^2}{2\cdot OA'\cdot OC'} = \frac{2}{9}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, biết $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính côsin của số đo góc nhị diện $[S, BD, C]$ và góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Lời giải



Hình 7.43

Ta có $SO \perp BD, CO \perp BD$ nên góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng $\widehat{SOC}$. Vì tam giác SAO vuông tại A nên $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và

$\cos\widehat{SOC} = -\cos\widehat{SOA} = -\frac{OA}{SO} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $BM \perp SC$ tại M thì $DM \perp SC$ nên $[B, SC, D] = \widehat{BMD}$.

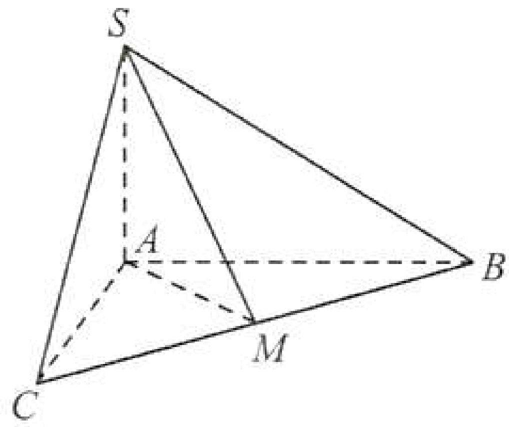
Ta có $BC \perp (SAB)$ nên tam giác SBC vuông tại B, tính được $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$ và

$DM = BM = \frac{SB\cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDM, ta có:

$\cos\widehat{BMD} = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2\cdot BM\cdot DM} = -\frac{3}{4}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$

Lời giải

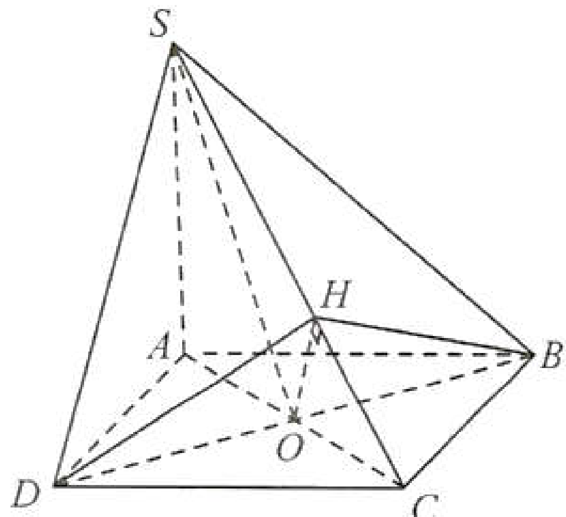


Hình 5

Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có $AB = AC \Rightarrow AM \perp BC$.
Mặc khác $SC = SB$ (do $\Delta SAC = \Delta SAB$) nên ΔSCB cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$.
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.
Ta có $\widehat{MAB} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 60^\circ, AM = \cos\widehat{MAB} \cdot AB = \dfrac{a}{2}$,
Trong tam giác SMA vuông tại A, ta có:
$\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SA}{MA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ$.

Câu 18. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a, SA = \dfrac{a}{2}$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC. Tính số đo các góc phẳng nhị diện:
a) $[B, SA, D]$;
b) $[S, BD, A]$;
c) $[S, BD, C]$;
d) $[D, SC, B]$.

Lời giải



Hình 6

a) Ta có $\begin{cases} SA \perp AD \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SA, B]$.

Tam giác DAC là tam giác đều $(AD = DC = AC = a)$, nên $\widehat{DAC} = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{DAB} = 2\widehat{DAC} = 2.60^\circ = 120^\circ$.

b) Ta có $\Delta SAD = \Delta SAB \Rightarrow SD = SB$.

Nên ΔSBD cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD($ do $OB = OD)$.(1)

Ta lại có $OA \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{SOA}$ là góc phẳng phẳng nhị diện $[S, BD, A]$.

Trong tam giác SOA vuông tại A, ta có:

$\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45^\circ$.

c) Ta có $\begin{cases} OS \perp BD \\ OC \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{SOC}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$.

Ta có $\widehat{SOC} = 180^\circ - \widehat{SOA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

d) Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ hay $OD \perp SC$

Ta có $\begin{cases} SC \perp OD \\ SC \perp OH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ODH)$ hay $SC \perp (DHB)$.

Nên $\begin{cases} SC \perp DH \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow \widehat{DHB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SC, B]$.

Trong tam giác SAC vuông tại A, ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $\dfrac{OH}{SA} = \dfrac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \dfrac{SA.OC}{SC} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$.

ADC là tam giác đều nên $DO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

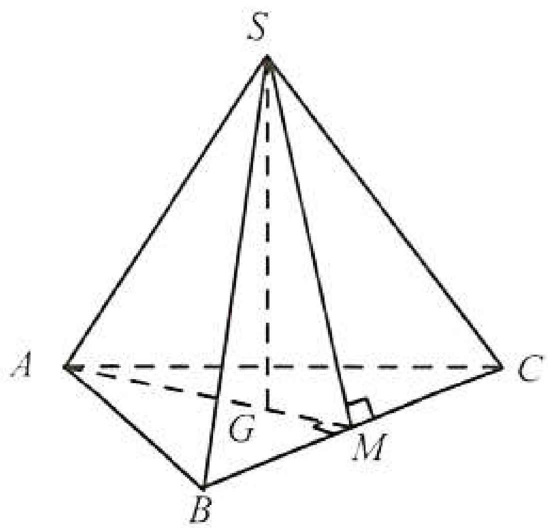
Trong tam giác OHD vuông tại O, ta có

$\tan\widehat{OHD}=\dfrac{OD}{OH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{a}=\sqrt{15}\Rightarrow\widehat{OHD}\approx 75,5^\circ$.

Vậy $\widehat{DHB}=2.\widehat{OHB}\approx 2.75,5^\circ=151^\circ$.

Câu 19. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải



Hình 3

Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $SG\perp(ABC), SM\perp BC, AM\perp BC$, suy ra $\widehat{SMG}$ là góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$

Ta tính được

$AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, GM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$,

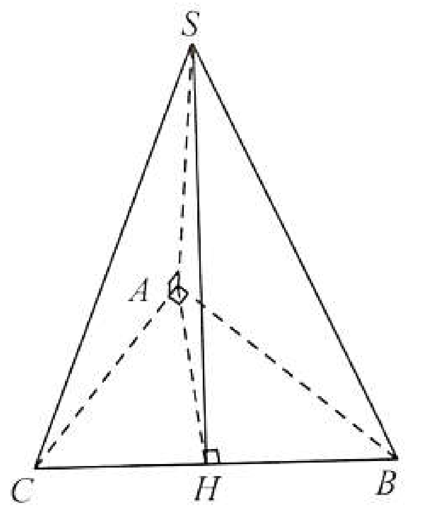
$SM=\sqrt{SB^2-BM^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$,

$SG=\sqrt{SM^2-GM^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có tam giác SMG vuông cân tại G, suy ra số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]=\widehat{SMG}=45^\circ$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ, AC=a, SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải



Hình 4

Vẽ $AH \perp BC (H \in BC)$, ta có $SH \perp BC$, suy ra $\widehat{SHA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Ta có $AH = AC \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = SA$, suy ra $\widehat{SHA} = 45^\circ$.

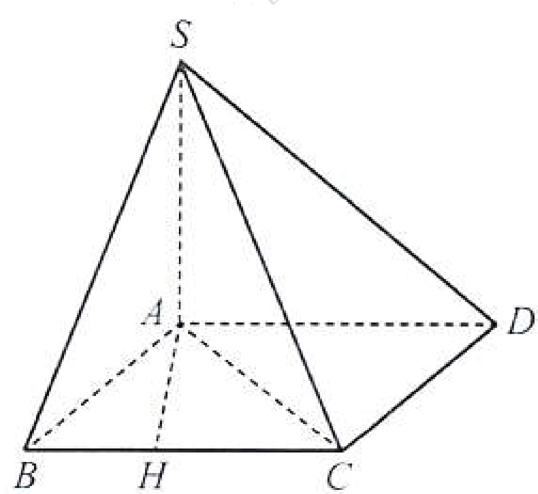
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$. Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$;

b) $[S, DA, B]$.

Lời giải

(Hình 18)



Hình 18

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC$, suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do $AC = AB = BC = a$ nên tam giác ABC đều, suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Vậy góc nhị diện $[B, SA, C]$ có số đo bằng 60°.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, lấy H thuộc BC sao cho $AH \perp AD$. Mà $SA \perp AD$ (vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$) nên góc SAH là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, DA, B]$. Mặt khác, $SA \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AH$, suy ra góc SAH bằng 90°.

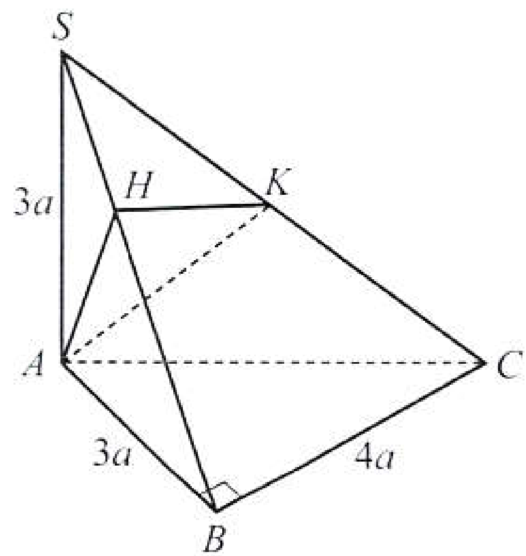
Vậy góc nhị diện $[S, DA, B]$ có số đo bằng 90°.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AB\perp BC, SA=AB=3a, BC=4a$. Gọi α,β,γ lần lượt là số đo của các góc nhị diện $[B,SA,C],[A,BC,S]$, $[A,SC,B]$. Tính:

a) $\cos\alpha,\cos\beta$;

b*) $\cos\gamma$.

Lời giải



Hình 66

a) Vì $SA\perp(ABC), AB\subset(ABC), AC\subset(ABC)$ nên $SA\perp AB, SA\perp AC$. Suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của $[B,SA,C]$, hay $\widehat{BAC}=\alpha$. Xét tam giác ABC vuông tại B có:

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$ và $\cos\alpha=\cos\widehat{BAC}=\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{3a}{5a}=\dfrac{3}{5}$.

Ta có $BC\perp(SAB)$ nên $BC\perp SB$ suy ra góc SBA là góc phẳng nhị diện của $[A,BC,S]$. Như vậy, ta có:

$SB=\sqrt{AB^2+SA^2}=\sqrt{(3a)^2+(3a)^2}=3\sqrt{2}a$ và $\cos\beta=\cos\widehat{SBA}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{3a}{3\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b*) Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A trên SB,SC. Ta có $BC\perp(SAB)$ nên $BC\perp AH$. Mà $AH\perp SB$ nên $AH\perp(SBC)$, suy ra $AH\perp SC$. Mà $SC\perp AK$ nên $SC\perp(AHK)$, suy ra $SC\perp HK$. Do đó góc AKH là góc phẳng nhị diện của $[A,SC,B]$, hay $\widehat{AKH}=\gamma$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $AH=\dfrac{SA\cdot AB}{SB}=\dfrac{3a\cdot 3a}{3a\sqrt{2}}=\dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Tam giác SAC vuông tại A có: $AK=\dfrac{SA\cdot AC}{SC}=\dfrac{3a\cdot 5a}{\sqrt{(3a)^2+(5a)^2}}=\dfrac{15a}{\sqrt{34}}$.

Tam giác AHK vuông tại H (vì $AH\perp(SBC)$ mà $HK\subset(SBC)$) có:

$HK=\sqrt{AK^2-AH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{15a}{\sqrt{34}}\right)^2-\left(\dfrac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{6a}{\sqrt{17}}$ và $\cos\gamma=\cos\widehat{AKH}=\dfrac{HK}{AK}=\dfrac{\frac{6a}{\sqrt{17}}}{\frac{15a}{\sqrt{34}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại $O, SO\perp(ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a.

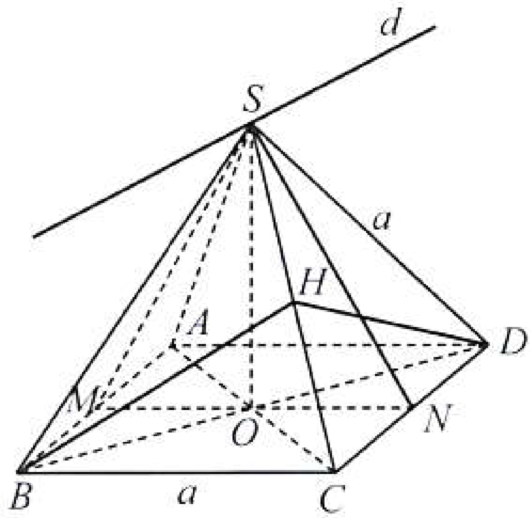
a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$. Tính $\cos\alpha$.

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và $(SCD), \beta$ là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos \beta$.

$d^{*})$ Gọi γ là số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos \gamma$.

Lời giải



Hình 67

a) Vì $BO \perp AC, BO \perp SO$ nên $BO \perp (SAC)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSO. Xét tam giác SBD có $SB = SD$ và $SB^2 + SD^2 = BD^2$ nên tam giác SBD vuông cân tại S. Suy ra $\widehat{BSO} = 45^\circ$, hay góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng 45°.

b) Gọi N là hình chiếu của S trên CD. Khi đó, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SNO}$, hay $\widehat{SNO} = \alpha$. Ta có:

$$\cos \alpha = \frac{ON}{SN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Gọi M là hình chiếu của S trên AB. Vì $AB // CD$ nên $d // AB$ và $d // CD$. Khi đó $SM \perp d, SN \perp d$. Suy ra số đo của $[A, d, D]$ bằng $\widehat{MSN}$, hay $\widehat{MSN} = \beta$.

Ta có: $\cos \beta = \dfrac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \dfrac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

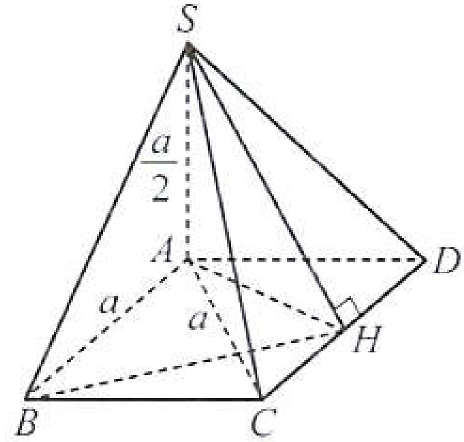
d*) Gọi H là hình chiếu của B trên SC. Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Suy ra $SC \perp (BHD)$ nên $SC \perp HD$. Vậy số đo của $[B, SC, D]$ bằng $\widehat{BHD}$, hay $\widehat{BHD} = \gamma$.

Vì hai tam giác SBC, SCD đều nên $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, ta có:

$$\cos \gamma = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB \cdot HD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{3}$$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$.

Lời giải



Hình 68

Gọi H là hình chiếu của A trên CD. Khi đó, $AH \perp CD$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$. Suy ra $CD \perp (SAH)$. Khi đó, $SH \perp CD$. Như vậy, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA}$. Ta có:

$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \frac{a}{2}$

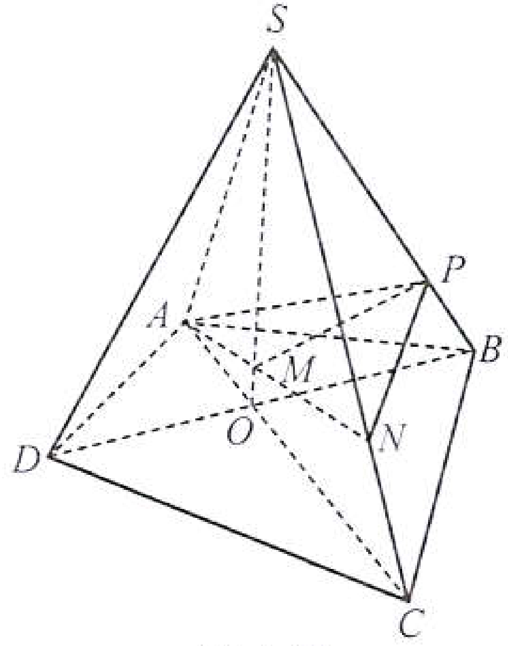
nên

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA} = 30^\circ$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O. Gọi α, β lần lượt là số đo của các nhị diện $[A, SO, B]$ và $[B, SO, C]$. Tính $\alpha + \beta$.

Lời giải



Hình 69

Trong mặt phẳng (SAC), lấy đường thẳng $AN(N \in SC)$ sao cho $AN \perp SO$. Gọi M là giao điểm của AN và SO. Trong mặt phẳng (SOB), lấy đường thẳng $MP(P \in SB)$ sao cho $MP \perp SO$. Khi đó, số đo của $[A, SO, B]$ bằng $\widehat{AMP}$, hay $\widehat{AMP} = \alpha$ và số đo của $[B, SO, C]$ bằng $\widehat{PMN}$, hay $\widehat{PMN} = \beta$. Trong mặt phẳng (APN) có A, M, N thẳng hàng nên $\alpha + \beta = 180^{\circ}$.

Câu 26. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính:

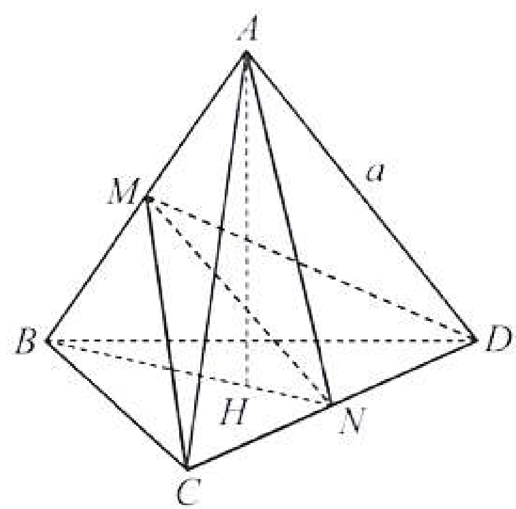
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD;

b) Chiều cao và thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$;

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD);

d) Côsin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$.

Lời giải



Hình 84

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Vì tứ diện $ABCD$ đều nên các tam giác ABC và ABD đều. Suy ra $CM \perp AB, DM \perp \dot{A}B$ nên $AB \perp (CDM)$. Do đó, $AB \perp MN$. Tương tự ta có $CD \perp MN$. Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD. Ta có:

$$MN=\sqrt{MC^2-NC^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d(AB,CD)=MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD). Khi đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Vì tam giác BCD đều nên H thuộc BN và $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ta có:

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3},$$

hay chiều cao của khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích của tam giác BCD là $S_{BCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{BCD}\cdot AH=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng:

$$\cos\widehat{ABH}=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

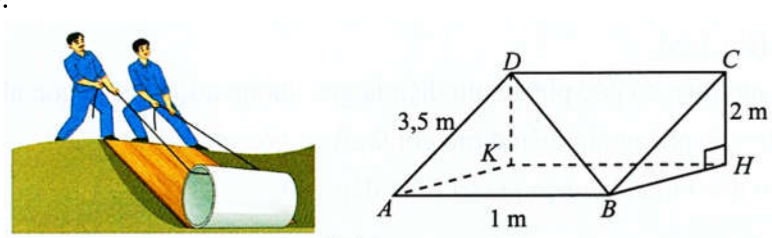
d) Vì $CM\perp AB, DM\perp AB$ nên số đo của góc nhị diện $[C,AB,D]$ bằng $\widehat{CMD}$.

Ta có: $$\cos\widehat{CMD}=\frac{CM^2+DM^2-CD^2}{2CM\cdot DM}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Vậy côsin của số đo góc nhị diện $[C,AB,D]$ bằng $\dfrac{1}{3}$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 27. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một tấm ván hình chữ nhật $ABCD$ được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu $2m$. Cho biết $AB=1m, AD=3,5m$. Tính góc giữa đường thẳng BD và đáy hố.



Hình 3

Lời giải

Ta có: $DK=CH=2, AK=\sqrt{AD^2-DK^2}=\dfrac{\sqrt{33}}{2}$, $BK=\sqrt{AK^2+AB^2}=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$, $\tan\widehat{DBK}=\dfrac{DK}{KB}$.

Nên $\widehat{DBK}=43,4^\circ$

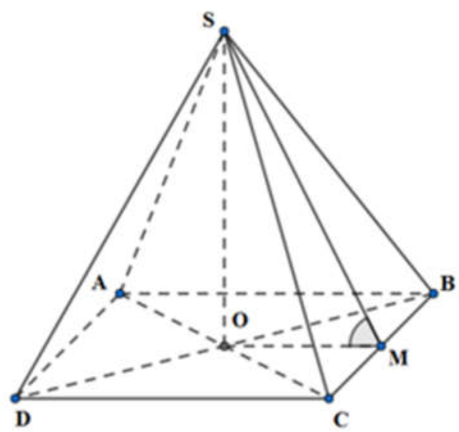
Góc giữa đường thẳng BD và đáy hố là $43,4^\circ$

Câu 28. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

Hình 8

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis_Pyramid)

Lời giải



Kẻ $SM \perp BC$

Mà $BC \perp SO$ nên $BC \perp (SOM)$. Suy ra $BC \perp OM$

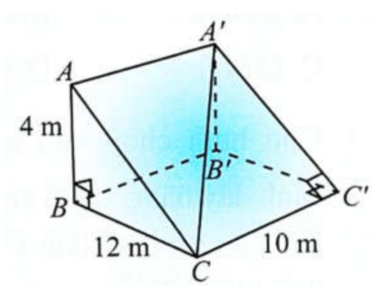
Do đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SMO}$

Ta có: $SO = 98; OM = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90$

$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = 1,1$. Suy ra $\widehat{SMO} = 47,4^\circ$

Vậy góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $47,4^\circ$

Câu 29. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình 9.



Hình 9

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và $\left(CC'B'B\right)$.

b) Tính số đo góc nhị diện cạnh CC'.

Lời giải

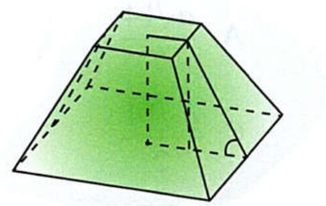
a) Góc giữa CA' và $(CC'B'B)$ là $\widehat{A'CB'}$

Ta có: $CB' = \sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$, $\tan\widehat{A'CB'} = \dfrac{A'B'}{CB'} = 0,256$. Nên $\widehat{A'CB'} = 14,36^\circ$

b) Góc nhị diện cạnh CC' là $\widehat{ACB}$

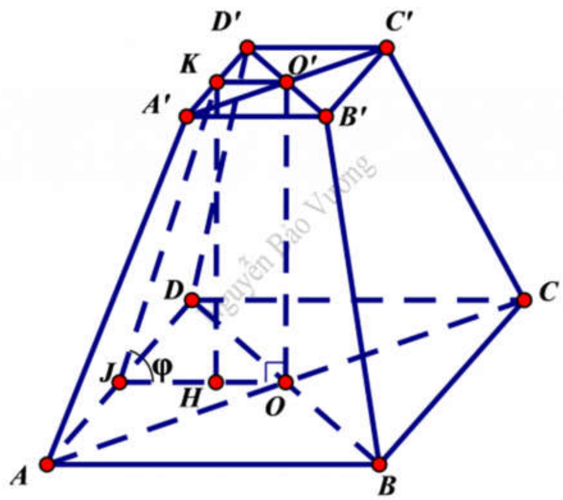
Ta có: $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Nên $\widehat{ACB} = 18,4^\circ$.

Câu 30. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135°. Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.



Hình 10

Lời giải



Ta có: $OJ = \dfrac{1}{2}.14 = 7; O'K = \dfrac{1}{2}.10 = 5$, suy ra $OH = 5, JH = 7 - 5 = 2$.

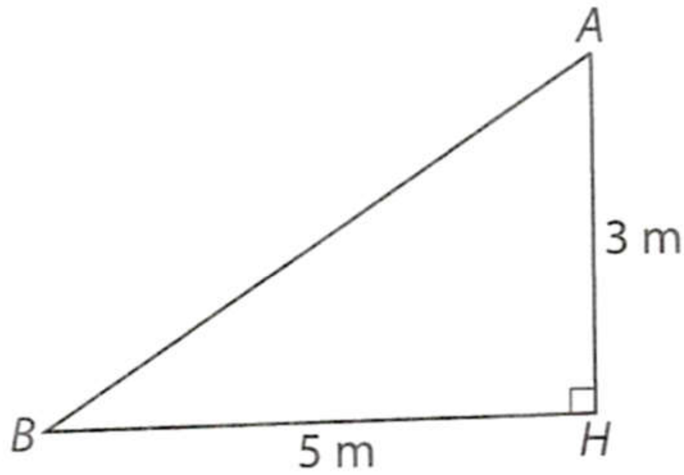
Mặt bên tạo với đáy nhỏ 1 góc $\widehat{O'KJ} = 135^\circ$ nên $\widehat{KJH} = 45^\circ$, $KH = OO' = JH \cdot \tan 45^\circ = 2$

Thể tích khối chóp cụt là: $V = \dfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(10^2 + \sqrt{10^2 \cdot 14^2} + 14^2\right) = 290,7\left(m^3\right)$

Câu 31. Một chiếc cột cao $3m$ được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài $5m$. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

(H.7.9)

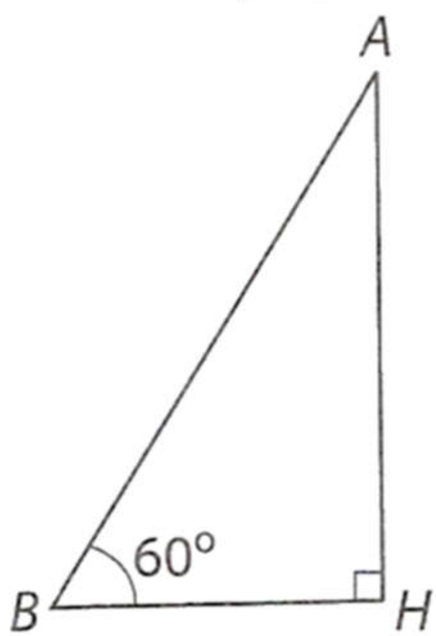


Hình 7.9

Góc giữa tia nắng mặt trời AB và mặt đất là góc ABH. Ta có: $\tan\widehat{ABH}=\frac{AH}{BH}=\frac{3}{5}$, suy ra $\widehat{ABH}\approx 30,96^{\circ}$.

Câu 32. Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60°. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài $10m$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

Lời giải



Hình 7.37

Gọi A là vị trí con diều, B là vị trí đầu dây diều trên mặt đất, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt đất.

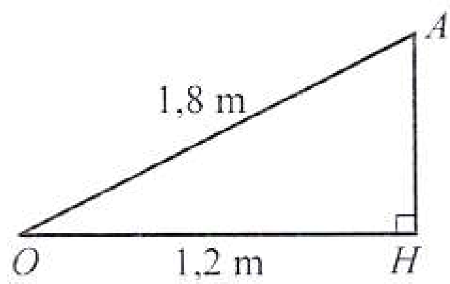
Tam giác ABH vuông tại H, góc ABH bằng 60° và $AB=10m=1000cm$.

Ta có: $AH=AB\cdot\sin 60^{\circ}\approx 866(cm)$.

Câu 33. Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình 20 có các ống hấp nhiệt chân không dài $1,8m$ được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hình 20

Lời giải



Hình 71

Vẽ OA biểu diễn cho ống hấp nhiệt chân không, OH biểu diễn bóng nắng (hình chiếu vuông góc do tia nắng chiếu vuông góc với mặt sân) của ống đó trên mặt sân. Như vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân bằng $\widehat{AOH}$. Ta có:

$\cos\widehat{AOH} = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{1,2}{1,8} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \widehat{AOH} \approx 48^\circ$.

Vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân thượng bằng khoảng 48°.