BÀI 1. ĐẠO HÀM

- CHƯƠNG 7. ĐẠO HÀM
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Lời giải

Chọn D

Ta có định lí sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$. **B.** $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. **D.** $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$. Kết quả đúng là

A. $f'(2)=3$. **B.** $f'(x)=2$. **C.** $f'(x)=3$. **D.** $f'(3)=2$.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2=f'(3)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6)=2.$ Giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là D và $x_0\in D$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0

Vậy kết quả của biểu thức $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=2$.

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ có hệ số góc bằng

A. 5. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** -5. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{-5}{(2x-3)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=-1$:

$f'(-1)=\dfrac{-5}{(2.(-1)-3)^2}=\dfrac{-1}{5}$

Câu 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+5$ tại điểm có hoành độ $x=-1$.

A. $y=4x-6$.

B. $y=4x+2$.

C. $y=4x+6$.

D. $y=4x-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=4x^3-8x$, $y'(-1)=4$.

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x=-1$ là: $M(-1;2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1;2)$ là:

$y=y'(-1)(x+1)+2 \Leftrightarrow y=4(x+1)+2 \Leftrightarrow y=4x+6$.

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+5$ tại điểm có hoành độ $x=-1$.

A. $y=4x-6$. **B.** $y=4x+2$. **C.** $y=4x+6$. **D.** $y=4x-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=4x^3-8x$, $y'(-1)=4$

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x=-1$ là: $M(-1;2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1;2)$ là:

$y=y'(-1)(x+1)+2 \Leftrightarrow y=4(x+1)+2 \Leftrightarrow y=4x+6$.

Câu 8. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

A. $y=7x+13$. **B.** $y=-7x+30$. **C.** $y=3x+9$. **D.** $y=-x-2$.

Lời giải

Chọn B

$x=3 \Rightarrow y=9$;

$y'=\dfrac{-7}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3)=-7$.

Phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y=-7(x-3)+9 \Leftrightarrow y=-7x+30$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2x+1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$ là:

A. $y=3x-2$. **B.** $y=-3x+2$. **C.** $y=x-\dfrac{2}{3}$. **D.** $y=-x+\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn C

$y'=x^2+2x-2$

$y'(1)=1+2-2=1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$ là:

$y=y'(1)(x-1)+\dfrac{1}{3}=x-1+\dfrac{1}{3}=x-\dfrac{2}{3}$

Câu 10. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y=-9x+16$. **B.** $y=-9x+20$. **C.** $y=9x-20$. **D.** $y=9x-16$.

Lời giải

Chọn D

$y'=3x^2-3$

Ta có $y(2)=2$ và $y'(2)=9$. Do đó PTTT cần tìm là: $y=9(x-2)+2 \Leftrightarrow y=9x-16$

Câu 11. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=3x-4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=0$ là

A. $y=0$. **B.** $y=3x$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=-12x$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=3-8x$.

Phương trình tiếp tuyến: $y=y'_{(0)}.(x-0)+y_{(0)} \Rightarrow \Delta: y=3x$.

Câu 12. Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=-2x+1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=-3x-2$.

Lời giải

Chọn C

+) $y'=-3x^2+3$

+) Giao điểm của (C) với trục tung có tọa độ là $(0;-2)$.

+) Tiếp tuyến của (C) tại điểm $(0;-2)$ có phương trình là:

$y = y'(0)(x-0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$

Câu 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1.

A. $y = 12x + 14$. **B.** $y = 12x - 14$. **C.** $y = 12x + 10$. **D.** $y = -20x - 22$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 16x. \Rightarrow y'(-1) = 12.$

$\mathrm{M}(-1; \mathrm{y}_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = 2.$

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $\mathrm{M}(-1;2)$ có phương trình là $y = y'(-1)(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 12x + 14.$

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y = 12x + 14.$

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

A. $y = 3x - 2$. **B.** $y = -3x - 2$. **C.** $y = 3x - 3$. **D.** $y = 3x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y = \dfrac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

$y(0) = -2$, $y'(0) = 3$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là

$y = 3(x-0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Câu 15. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

A. $y = -2x + 3$. **B.** $y = -2x - 3$. **C.** $y = 2x - 3$. **D.** $y = 2x + 3$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -2$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2\mathrm{x} - 3$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C). Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoàng độ bằng 1 bằng

A. $k = -5$. **B.** $k = 10$. **C.** $k = 25$. **D.** $k = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 2$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoàng độ bằng 1 bằng $k = y'(1) = 1$.

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là

A. -1. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(3x-2)^2}$.

Gọi M là tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $\Rightarrow M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy hệ số góc cần tìm là: $k=y'(0)=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 18. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s=2t^2+3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0=2$ (giây) bằng

A. $22(m/s)$. **B.** $19(m/s)$. **C.** $9(m/s)$. **D.** $11(m/s)$.

Lời giải

Chọn D

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0=2$ (giây) là: $v(2)=s'(2)=11(m/s)$

Câu 19. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s=2t^2+3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0=2$ (giây) bằng.

A. $22\ (m/s)$.

B. $19\ (m/s)$.

C. $9\ (m/s)$.

D. $11\ (m/s)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình vận tốc của chất điểm được xác định bởi $v=s'=4t+3$.

Suy ra vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0=2$ (giây) bằng $v(2)=4.2+3=11$.

Câu 20. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t)=-t^4+8t^2+500$. Trong khoảng thời gian $t=0$ đến $t=5$ chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

A. $t=1$. **B.** $t=4$. **C.** $t=2$. **D.** $t=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta tính $v'(t)=-4t^3+16t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2(L) \\ t=2 \end{array}\right.$

Ta có $v(0)=500, v(2)=516, v(5)=75$

Hàm số $v(t)$ liên tục trên $[0;5]$ nên chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t=2$.

Câu 21. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là:

A. $12m/s^2$. **B.** $17m/s^2$. **C.** $24m/s^2$. **D.** $14m/s^2$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: Vận tốc của chuyển động $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+5$.

Gia tốc của chuyển động $a(t)=v'(t)=6t-6$. Khi $t=3 \Rightarrow a(t)=12m/s^2$.

Câu 22. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\frac{1}{2}t^3+12t^2$, t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động trong t giây. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=10$ (giây) là:

A. $80(m/s)$. **B.** $90(m/s)$. **C.** $100(m/s)$. **D.** $70(m/s)$.

Lời giải

Chọn B

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là: $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+24t$.

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=10$ (giây) là: $v(10)=-\frac{3}{2}10^2+24.10=90(m/s)$.

Câu 23. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 216 (m/s). **B.** 30 (m/s). **C.** 400 (m/s). **D.** 54 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+18t$ với $t\in[0;10]$.

Ta có : $v'(t)=-3t+18=0 \Leftrightarrow t=6$.

Suy ra: $v(0)=0; v(10)=30; v(6)=54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s).

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 24. Cho hàm số $y=\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x\neq 3 \\ -1 & \text{khi } x=3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x_0=3$.

B. Hàm số có đạo hàm nhưng không liên tục tại $x_0 = 3$.

C. Hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

D. Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-4) = -1 = f(3).$$

Đạo hàm của hàm số tại $x_0 = 3$ $\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12-0}{x-3} = -1 = f(3)$

Suy ra: Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là

A. $f'(1) = 2$. **B.** f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

C. $f'(0) = 2$. **D.** $f'(2) = 4$.

Lời giải

Ta có $\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1} = 2; \\ &\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2. \end{aligned}$

Vậy $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1) = 2.$ Suy ra hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1.$ Vậy B sai.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\dfrac{3-x^2}{2} = 1$ và $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x} = 1$. Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$\lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}\dfrac{1+x}{-2} = -1$ và

$\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x} = -1$. Do đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì $2a+b$ bằng:

A. 2. **B.** 5. **C.** -2. **D.** -5.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-1-1}{x-1}=2$;

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax^2+bx-a-b}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)\left[a(x+1)+b\right]}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\left[a(x+1)+b\right]=2a+b$

Theo yêu cầu bài toán: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow 2a+b=2$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=|x-1|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(1)=0$. **B.** $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$.

C. $f(x)$ liên tục tại $x=1$. **D.** $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

Lời giải

Ta có $f(1)=0$.

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x-0}{x-1}=-1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1-0}{x-1}=1$.

Do đó hàm số không có đại hàm tại $x=1$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x}{1+|x|}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=\dfrac{1}{3}$. **D.** $f'(0)=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{1+|x|}$.

Mà $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{1+x}=3$; $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3}{1-x}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3}{1+|x|}=3$

$\Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{1+|x|}=3$.

Kết luận: $f'(0)=3$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x\neq1\\ \dfrac{-5}{4} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. Không tồn tại. **B.** 0 **C.** $-\dfrac{7}{50}$. **D.** $-\dfrac{9}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+1-4x^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2x\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-4x-1}{\left(\sqrt{3x+1}+2x\right)}=\dfrac{-5}{4}=f(1)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục lại $x=1$.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}+\frac{5}{4}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{3x+1}-3x-5}{4(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{16(3x+1)-(3x+5)^2}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-9}{4\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}=-\frac{9}{64}$$

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1, x\ge 0\\ ax-b-1, x<0\end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$. Hãy tính $T=a+2b$.

A. $T=-4$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-6$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Ta có $f(0)=1$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(ax^2+bx+1\right)=1$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(ax-b-1\right)=-b-1$.

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0=0$ nên $f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Suy ra $-b-1=1\Leftrightarrow b=-2$.

Khi đó $f(x)=\begin{cases}ax^2-2x+1, x\ge 0\\ ax+1, x<0\end{cases}$.

Xét:

+) $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2-2x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(ax-2)=-2$.

+) $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}(a)=a$.

Hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì $a=-2$.

Vậy với $a=-2$, $b=-2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ khi đó $T=-6$.

Câu 32. $\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2012)\sqrt[7]{1-2x}-2012}{x}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a là số nguyên âm. Tổng $a+b$ bằng

A. -4017. **B.** -4018. **C.** -4015. **D.** -4016.

Lời giải

* Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2012)\sqrt[7]{1-2x}-2012}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sqrt[7]{1-2x}\right)+2012.\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[7]{1-2x}-1)}{x}=2012.\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}$$

* Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt[7]{1-2x}$ ta có $f(0)=1$. Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}$$

$$f'(x)=-\frac{2}{7\left(\sqrt[7]{1-2x}\right)^6}\Rightarrow f'(0)=-\frac{2}{7}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}=-\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2012)\sqrt[7]{1-2x}-2012}{x}=-\frac{4024}{7}\Rightarrow \begin{cases}a=-4024\\ b=7\end{cases}\Rightarrow a+b=-4017.$$

Câu 33. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi} \quad x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$. Khi đó $f'\left(0\right)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Với $x\neq 0$ xét:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4-\left(4-x\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{4\left(2+\sqrt{4-0}\right)}=\frac{1}{16}\ \Rightarrow f'\left(0\right)=\frac{1}{16}.$$

Câu 34. Hàm số nào sau đây không có đạo hàm trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left|x-1\right|$. **B.** $y=\sqrt{x^2-4x+5}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\sqrt{2-\cos x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\left|x-1\right|$, do đó: $y=\begin{cases}x-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$ khi đó: $y'=\begin{cases}1, & x>1\\ -1, & x<1\end{cases}$

Tại $x=1$: $y'\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

$y'\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$.

Do $y'\left(1^+\right)\neq y'\left(1^+\right)$ nên hàm số không có đạo hàm tại 1.

Các hàm số còn lại xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm $x_0=2$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f\left(x\right)-xf\left(2\right)}{x-2}$.

A. 0. **B.** $f'\left(2\right)$. **C.** $2f'\left(2\right)-f\left(2\right)$. **D.** $f\left(2\right)-2f'\left(2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm $x_0=2$ suy ra $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=f'\left(2\right)$.

Ta có $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f\left(x\right)-xf\left(2\right)}{x-2}\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f\left(x\right)-2f\left(2\right)+2f\left(2\right)-xf\left(2\right)}{x-2}$

$\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\left(f\left(x\right)-f\left(2\right)\right)}{x-2}-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(2\right)\left(x-2\right)}{x-2}\Leftrightarrow I=2f'\left(2\right)-f\left(2\right)$.

Câu 36. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2 & khi\ x\geq 0\\ -x^2 & khi\ x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0=0$ là?

A. $f'\left(0\right)=0$. **B.** $f'\left(0\right)=1$. **C.** $f'\left(0\right)=-2$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f\left(0\right)=1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-1\right)^2=1$; $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=0$.

Ta thấy $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x_0=0$.

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Trong các khẳng định

(I): Tồn tại một số $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(II): Nếu $f(a)=f(b)$ thì luôn tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=0$.

(III): Nếu $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$ thì giữa hai nghiệm đó luôn tồn tại một nghiệm của $f'(x)$.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

(I) đúng (theo định lý Lagrange).

(II) đúng vì với $f(a)=f(b)$,

theo (I) suy ra tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

(III) đúng vì với α, $\beta\in(a;b)$ sao cho $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$ và có đạo hàm trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

Theo (II) suy ra luôn tồn tại một số $c\in(\alpha;\beta)$ sao cho $f'(c)=0$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0<x<x_0 \\ x^2+12 & \text{khi } x\ge x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Tính giá trị $S=x_0+a$.

A. $S=2\left(3-2\sqrt{2}\right)$. **B.** $S=2\left(1+4\sqrt{2}\right)$. **C.** $S=2\left(3-4\sqrt{2}\right)$. **D.** $S=2\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

+ Khi $0<x<x_0$: $f(x)=a\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(0;x_0)$ nên liên tục trên khoảng $(0;x_0)$.

+ Khi $x>x_0$: $f(x)=x^2+12\Rightarrow f'(x)=2x$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(x_0;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(x_0;+\infty)$.

+ Tại $x=x_0$:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{a\sqrt{x}-a\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{a\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{a}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x^2+12-\left(x_0^2+12\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}(x+x_0)=2x_0.$$

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}}=2x_0.$$

Khi đó $f'(x_0)=\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=2x_0$ và $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0<x<x_0\\ 2x & \text{khi } x\ge x_0\end{cases}$ nên hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=2x_0 \Leftrightarrow a=4x_0\sqrt{x_0}\ \ (1)$

Mặt khác: Hàm số f liên tục tại x_0 nên $x_0^2+12=a\sqrt{x_0}\ \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0=2$ và $a=8\sqrt{2}$

Vậy $S=a+x_0=2\left(1+4\sqrt{2}\right)$.

Câu 39. Cho hàm số $y=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi } x\ge 2\\ x^3-x^2-8x+10 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x=2$. Giá trị của a^2+b^2 bằng

A. 20. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi } x\ge 2\\ x^3-x^2-8x+10 & \text{khi } x<2\end{cases}$

$\Rightarrow y'=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\ge 2\\ 3x^2-2x-8 & \text{khi } x<2\end{cases}$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x=2$ $\Rightarrow 4+a=0$ $\Rightarrow a=-4$.

Mặt khác hàm số có đạo hàm tại điểm $x=2$ thì hàm số liên tục tại điểm $x=2$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$\Rightarrow 4+2a+b=-2$ $\Rightarrow b=2$.

Vậy $a^2+b^2=20$.

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** -2 **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Với $y=3$, ta có: $\dfrac{x+1}{x-1}=3\Rightarrow 3x-3=x+1\Leftrightarrow x=2$.

Ta có: $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$k=y'(2)=-\dfrac{2}{(2-1)^2}=-2$.

Câu 41. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=x^2+x-2$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$.

A. $x+y-1=0$. **B.** $x-y-2=0$. **C.** $x+y+3=0$. **D.** $x-y-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $y=f(x)=x^2+x-2$

Ta có $y'=f'(x)=2x+1$

Tại $x_0=-1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1)=-1 \\ y_0=f(-1)=-2 \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y=-(x+1)-2 \Leftrightarrow y=-x-3 \Leftrightarrow x+y+3=0$.

Câu 42. Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$y=f(x)=x^3-3x^2+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ là $f'(1)=3.1^2-6.1=-3$.

Câu 43. Gọi I là giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại I là

A. -2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Theo bài ra ta có $I(0;-1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại I là $y'(0)=\dfrac{-2}{(0-1)^2}=-2$.

Câu 44. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=2x+9$. **B.** $y=-2x+9$. **C.** $y=2x-9$. **D.** $y=-2x-9$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$, $y'(2)=-2$. Khi $x=2$ thì $y=5$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$y=-2(x-2)+5 \Leftrightarrow y=-2x+9$.

Câu 45. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H): $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là:

A. $y=x-3$. **B.** $y=\dfrac{1}{3}(x-1)$. **C.** $y=3x$. **D.** $y=3(x-1)$.

Lời giải

Chọn B

Giao điểm của (H) và trục hoành là điểm $M(1;0)$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$ nên $y'(1)=\dfrac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến với (H) tại điểm M là: $y=y'(1)(x-1)+0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}(x-1)$.

Câu 46. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị (C). Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là.

A. 1 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 9

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị (C) có tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) là $y'=-3x^2+6x+9=12-3(x+1)^2\le 12$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là 12

Câu 47. Cho hàm số $y=x^4+2x^2+1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$ là

A. $y=8x-4$. **B.** $y=x+3$. **C.** $y=-8x+12$. **D.** $y=8x+4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=4x^3+4x \Rightarrow y'(1)=8.$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=8(x-1)+4=8x-4.$

Câu 48. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ có phương trình $y=ax+b$. Tính $a+b$

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\ne 1$.

Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=-2$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(2;3)$ là: $y=-2(x-2)+3=-2x+7$.

Do đó $a=-2$; $b=7\Rightarrow a+b=5$.

Câu 49. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-6x^2+5$ tại điểm có hoành độ $x=2$.

A. $y=-8x-16$. **B.** $y=8x-19$. **C.** $y=-8x+16$. **D.** $y=8x+19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y(2)=2^4-6.2^2+5=-3$.

$y'=4x^3-12x \Rightarrow y'(2)=4.(2)^3-12.2=8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y=y'(2).(x-2)+y(2)$.

$\Rightarrow y=8(x-2)-3=8x-19$.

Câu 50. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là

A. $y=3x+1$. **B.** $y=-3x-1$. **C.** $y=-3x+1$. **D.** $y=-3x+3$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ mà $y_0=-2$.

Khi đó $\dfrac{x_0+1}{x_0-2}=-2 \Rightarrow x_0+1=-2(x_0-2) \Leftrightarrow x_0=1 \Rightarrow M(1;-2)$.

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$, suy ra $y'(1)=-3$. Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ tại $M(1;-2)$ là $y=-3(x-1)-2=-3x+1$.

Câu 51. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x)=x^3+1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M song song với đường thẳng $d: y=3x-1$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(a;a^3+1)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x)=x^3+1\,(C)$.

Ta có $f'(x)=3x^2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$y=3a^2(x-a)+a^3+1 \Leftrightarrow y=3a^2x-2a^3+1\,(\Delta)$.

$\Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2=3 \\ -2a^3+1\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ a\neq 1 \end{cases} \Rightarrow a=-1$.

Vậy, có duy nhất điểm M thỏa mãn yêu cầu là $M(-1;0)$.

Câu 52. Cho đồ thị hàm số $y=x^3-3x\,(C)$. Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y=3x-10$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$y=x^3-3x \Rightarrow y'=3x^2-3$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=3x-10$ nên

$f'\left(x_0\right)=3\Leftrightarrow 3x_0^2-3=3\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{2}$

+ Với $x_0=\sqrt{2}\Rightarrow y_0=-\sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y=3\left(x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}=3x-4\sqrt{2}$

+ Với $x_0=-\sqrt{2}\Rightarrow y_0=\sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y=3\left(x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=3x+4\sqrt{2}$

Câu 53. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị $\left(C\right)$. Số tiếp tuyến của $\left(C\right)$ vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{9}x+2017$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y'=-3x^2+6x$.

Vì tiếp tuyến của $\left(C\right)$ vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{9}x+2017$ nên

$y'\left(x_0\right).\left(\frac{1}{9}\right)=-1\Leftrightarrow y'\left(x_0\right)=-9\Leftrightarrow -3{x_0}^2+6x_0+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1$, suy ra PTTT là: $y=-9\left(x+1\right)+1\Leftrightarrow y=-9x-8$.

Với $x_0=3\Rightarrow y_0=-3$, suy ra PTTT là: $y=-9\left(x-3\right)-3\Leftrightarrow y=-9x+24$.

Câu 54. Cho hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{x-1},\left(C\right)$. Tiếp tuyến của $\left(C\right)$ song song với đường thẳng $y=-3x$ có phương trình là

A. $y=-3x-1; y=-3x+11$. **B.** $y=-3x+10; y=-3x-4$.

C. $y=-3x+5; y=-3x-5$. **D.** $y=-3x+2; y=-3x-2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến. Theo giả thiết ta có

$f'\left(x_0\right)=-3\Leftrightarrow\frac{-3}{\left(x_0-1\right)^2}=-3\Leftrightarrow\left(x_0-1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$.

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=-1$: Phương trình tiếp tuyến: $y=-3\left(x-0\right)-1\Leftrightarrow y=-3x-1$.

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=5$: Phương trình tiếp tuyến: $y=-3\left(x-2\right)+5\Leftrightarrow y=-3x+11$.

Ta thấy cả hai tiếp tuyến đều thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 55. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}(C)$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x+3y+2=0$ tại điểm có hoành độ

A. $x=0$. **B.** $x=-2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x+3y+2=0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=3$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $y'=3\Leftrightarrow\dfrac{3}{(x+1)^2}=3\Leftrightarrow(x+1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Vậy hoành độ tiếp điểm cần tìm là: $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Câu 56. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=9x+10$ là

A. $y=9x+6, y=9x-28$. **B.** $y=9x, y=9x-26$.

C. $y=9x-6, y=9x-28$. **D.** $y=9x+6, y=9x-26$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Hệ số góc: $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0=9\Leftrightarrow x_0=3; x_0=-1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;1)$: $y=9(x-3)+1=9x-26$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(-1;-3)$: $y=9(x+1)-3=9x+6$.

Câu 57. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 9x-y+7=0$ là

A. $y=9x+25$. **B.** $y=-9x-25$. **C.** $y=9x-25$ **D.** $y=-9x+25$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (Δ) là tiếp tuyến của đồ thị (C) và $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$y'=3x^2-6x$

Theo giả thiết: (Δ) song song với $(d): y=9x+7 \Rightarrow k_\Delta=k_d=9=y'(x_0)$

$\Leftrightarrow 3x_0{}^2-6x_0=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2$: $(\Delta): y=9(x+1)-2=9x+7$ (loại)

Với $x_0=3\Rightarrow y_0=2$: $(\Delta): y=9(x-3)+2=9x-25$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$, tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+5$ của đồ thị hàm số là:

A. $y=9(x+3)$. **B.** $y=9(x-3)$. **C.** $y=9x+5$ và $y=9(x-3)$ **D.** $y=9x+5$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=3x^2-6x$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+5$ nên $3x^2-6x=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Với $x=-1 \Rightarrow y=-4, f'(-1)=9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=9x+5$ (không thỏa)

Với $x=3 \Rightarrow y=0, f'(3)=9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=9(x-3)$

Câu 59. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x-3y+6=0$.

A. $y=\frac{1}{3}x-1$. **B.** $y=\frac{1}{3}x+1$. **C.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$. **D.** $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

$y=\sqrt{2x+1} \Rightarrow y'=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Ta có $x-3y+6=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x_0=4 \Rightarrow y_0=3 \Rightarrow$ PTTT: $y-3=\frac{1}{3}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Câu 60. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 1. **B.** Không tồn tại cặp điểm nào.

C. Vô số cặp điểm **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}$.

Giả sử $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ với $x_1 \neq x_2$.

Tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau nên $y'(x_1)=y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1-1)^2}=\frac{1}{(x_2-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \left[\begin{array}{l} x_1-1=x_2-1 \\ x_1-1=-x_2+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1+x_2=2$

Vậy trên đồ thị hàm số tồn tại vô số cặp điểm $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1+x_2=2$ thì các tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau.

* $y_1+y_2=\dfrac{x_1+1}{x_1-1}+\dfrac{x_2+1}{x_2-1}=\dfrac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-1}=2$. Như vậy $x_1+x_2=2$ và $y_1+y_2=2$ hay đoan thẳng AB có trung điểm là tâm đối xứng $I(1;1)$ của đồ thị.

Câu 61. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d:y=3x+1$.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m+1}{(x+1)^2}$.

Gọi $M(0;-m)\in(C_m)$; k là hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại M và $d:y=3x+1$.

Do tiếp tuyến tại M song song với d nên $k=3\Leftrightarrow y'(0)=3\Leftrightarrow 1+m=3\Leftrightarrow m=-2$

Câu 62. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=x$ của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$, khi đó ta có:

$y'(x_0)=1\Leftrightarrow -3x_0^2+4x_0=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=1/3\end{array}\right.$.

Với $x_0=1$ ta được $M(1;1)$, phương trình tiếp tuyến: $y=1.(x-1)+1\Leftrightarrow y=x$ (loại).

Với $x_0=\dfrac{1}{3}$ ta được $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{27}\right)$, phương trình tiếp tuyến: $y=1.\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{5}{27}\Leftrightarrow y=x-\dfrac{4}{27}$.

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

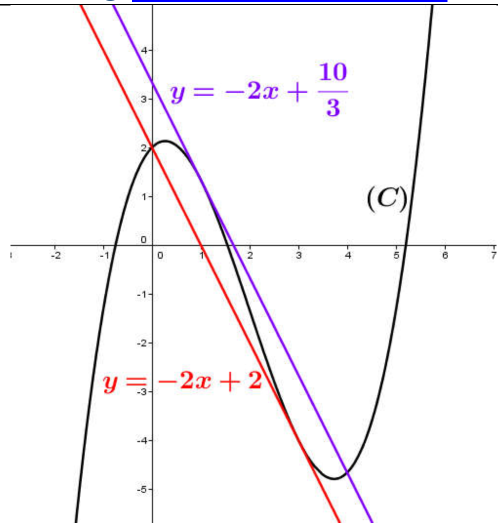
Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x+2$ có đồ thị (C). Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:y=-2x+\dfrac{10}{3}$ là

A. $y=-2x+2$. **B.** $y=-2x-2$.

C. $y=-2x+10, y=-2x-\dfrac{2}{3}$. **D.** $y=-2x-10, y=-2x+\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $M_0\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0\left(x_0;y_0\right)$ là: $f'\left(x_0\right)=x_0^{\ 2}-4x_0+1$

Hệ số góc của đường thẳng $d: y=-2x+\frac{10}{3}$ là -2

Tiếp tuyến song song với đường thẳng d thì $x_0^{\ 2}-4x_0+1=-2$

$$\Leftrightarrow x_0^{\ 2}-4x_0+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$$

*** Th1**: $x_0=1, y_0=\frac{4}{3}, f'\left(x_0\right)=-2$

Phương trình tiếp tuyến: $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0 \Rightarrow y=-2x+\frac{10}{3}$ (loại)

*** Th2**: $x_0=3, y_0=-4, f'\left(x_0\right)=-2$

Phương trình tiếp tuyến: $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0 \Rightarrow y=-2x+2$ (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-2x+2$

Câu 64. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y+16=-9(x+3)$.. **B.** $y=-9(x+3)$. **C.** $y-16=-9(x-3)$.. **D.** $y-16=-9(x+3)$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $y'=x^2+6x$, $y'\left(x_0\right)=-9 \Leftrightarrow x_0^2+6x_0+9=0 \Leftrightarrow x_0=-3 \quad \left(y_0=16\right)$

+ Vậy $y=y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0=-9(x+3)+16$ hay $y-16=-9(x-3)$.

Câu 65. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ biết nó song song với đường thẳng $y=9x+6$.

A. $y=9x+6$, $y=9x-6$. **B.** $y=9x-26$.

C. $y=9x+26$. **D.** $y=9x-26$, $y=9x+6$.

Lời giải

Chọn B

$y'=3x^2-6x$

Gọi hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến Δ là x_0.

Tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ biết song song với đường thẳng $y=9x+6$

$\Rightarrow y'(x_0)=9\Rightarrow 3{x_0}^2-6x_0=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y(-1)=-3\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=9(x+1)-3\Rightarrow y=9x+6$ (loại).

Với $x_0=3\Rightarrow y(3)=1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=9(x-3)+1\Rightarrow y=9x-26$ (thỏa mãn).

Câu 66. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Giả sử tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ tại $M(x_0;y_0)$ có dạng: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=x$ nên $y'(x_0)=1\Leftrightarrow -3x_0^2+4x_0=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

+ Với $x_0=1, y_0=1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=x$ (loại)

+ Với $x_0=\frac{1}{3}, y_0=\frac{5}{27}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=x-\frac{4}{27}$ hay $27x-27y-4=0$.

Vậy có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 67. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2$ song song với trục hoành là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$y'=-4x^3+4x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên có hệ số góc bằng 0.

Suy ra $y'(x_0)=0\Leftrightarrow -4x_0^3+4x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-1\\x_0=1\end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ thì $y_0=0$, tiếp tuyến là: $y=0$ (loại).

Với $x_0=-1$ thì $y_0=1$, tiếp tuyến là $y=1$ (thỏa mãn).

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến là $y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy có một tiếp tuyến song song với trục hoành có phương trình $y = 1$.

Câu 68. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng $\Delta: y = 3x+2$ là

A. $y = 3x+2$. **B.** $y = 3x-2$. **C.** $y = 3x+14$. **D.** $y = 3x+5$.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với $\Delta: y = 3x+2$ nên gọi toạ độ tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ ta có

$$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right..$$

$x_0 = -1 \Rightarrow (d): y = 3(x+1) - 1 = 3x+2$ (Loại).

$x_0 = -3 \Rightarrow (d): y = 3(x+3) + 5 = 3x+14$ (Nhận).

Câu 69. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng d: $y = 9x - 25$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có $y' = 3x^2 - 6x$..

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C), khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3{x_0}^2 - 6x_0$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x - 25$ khi

$$3{x_0}^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \end{array}\right.$$

+ Với $M(-1; -2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 9x + 7$.

+ Với $M(3; 2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 9x - 25$.

Vậy tiếp tuyến của (C) song song với $y = 3x + 1$ là $y = 9x + 7$, nên ta có 1 tiếp tuyến cần tìm

Câu 70. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

A. $M\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $M\left(-2;0\right)$. **C.** $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$. **D.** $M\left(-2;-4\right)$.

Lời giải

Chọn B

Tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k=3$

Ta có: $y'(x)=x^2-1$

Xét phương trình: $y'(x)=3\Leftrightarrow x^2-1=3\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$

Do M có hoành độ âm nên $x=-2$ thỏa mãn, $x=2$ loại.

Với $x=-2$ thay vào phương trình $(C)\Rightarrow y=0$. Vậy điểm M cần tìm là: $M\left(-2;0\right)$

Câu 71. Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y=-3x$.

A. $y=-3x+11; y=-3x-1$. **B.** $y=-3x-6; y=-3x-11$.
C. $y=-3x+1$. **D.** $y=-3x+6$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm

Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-3x$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến Δ là $k=-3$.

Tiếp tuyến Δ tại điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ có phương trình dạng $y=-3\left(x-x_0\right)+y_0$.

Ta có $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$.

$y'\left(x_0\right)=k\Leftrightarrow\frac{-3}{\left(x_0-1\right)^2}=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=0\end{array}\right.$.

+ Với $x_0=2\Rightarrow y_0=5\Rightarrow M_0\left(2;5\right)$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến Δ: $y=-3\left(x-2\right)+5\Leftrightarrow y=-3x+11$.

+ Với $x_0=0\Rightarrow y_0=-1\Rightarrow M_0\left(0;-1\right)$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến Δ: $y=-3\left(x-0\right)-1\Leftrightarrow y=-3x-1$.

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm là $y=-3x+11$ và $y=-3x-1$.

Câu 72. Cho đường cong $(C): y=x^4-3x^3+2x^2-1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong (C) có hệ số góc bằng 7?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 9x^2 + 4x$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $4x^3 - 9x^2 + 4x = 7$.

Phương trình có 1 nghiệm nên có 1 tiếp tuyến có hệ số góc bằng 7.

Câu 73. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox. Tổng các phần tử của S là

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến song song với trục Ox nên hệ số góc của tiếp tuyến $k = 0$.

Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \in (C)$, khi đó $y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = m - 2 \\ x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = m - 3 \end{array}\right.$

Để có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox thì $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 2 \\ m - 3 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m = 3 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 3; m = 2$

Vậy tổng các giá trị của m là 3+2=5.

Câu 74. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$ nên có:

$3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

+ Với $x = -1 \Rightarrow y(-1) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 9x + 11$.

+ Với $x = 3 \Rightarrow y(3) = 2$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x-3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

Vậy chỉ có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 75. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Tính giá trị của $2a + b$.

A. -23 hoặc -24 **B.** -23. **C.** -24. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d: 12x + y = 0 \Rightarrow d: y = -12x$. Hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = -12$.

Do tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k_{tt} = k_d = -12$.

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x - 12$.

Giải sử $M(x_0; y_0)$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến. Khi đó:

$$y'(x_0) = 6{x_0}^2 - 6x_0 - 12 = -12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;1) \\ M(1;-12) \end{array}\right.$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(0;1)$ là: $y = -12(x-0) + 1 = -12x + 1$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(1;-12)$ là: $y = -12(x-1) - 12 = -12x$ (loại do trùng với d).

Vậy $y = -12x + 1$, như vậy $a = -12,\ b = 1 \Rightarrow 2a + b = -23$.

Câu 76. Đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng

A. -4 hoặc -2. **B.** -4 hoặc 0. **C.** 0 hoặc 2. **D.** -2 hoặc 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$.

Có $y' = 3x^2 + 3$.

$$y' = 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = -5 \end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;3)$ là: $y = 6x - 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M'(-1;-5)$ là: $y = 6x + 1$.

Để đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của (C) thì $\left[\begin{array}{l} m+1 = -3 \\ m+1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Câu 77. Tính tổng S tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $S = \dfrac{4}{3}$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta không xét $m = 0$ vì giá trị này không ảnh hưởng đến tổng S.

Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ (I) có nghiệm.

$$(\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3mx^2+3mx+m^2-2m^3=0\\3x^2-6mx+3m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x^2-2mx\right)-mx^2+3mx+m^2-2m^3=0\\x^2-2mx=-m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-mx^2+2mx+m^2-2m^3=0\\x^2-2mx+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+2x+m-2m^2=0\\x^2-2mx+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2mx-2m^2+2m=0 & (1)\\x^2-2mx+m=0 & (2)\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow(x+m)(1-m)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\x=-m\end{array}\right.$$

Với $m=1$ thay vào $(2)\Rightarrow x=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $x=-m$ thay vào $(2)\Rightarrow-3m^2+m=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$

Vậy $S=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

Câu 78. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;0)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua điểm $A(-1;0)$ có dạng: $y=a(x+1)=ax+a\ \ (d)$.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases}x^3-3x^2+2x=ax+a\\3x^2-6x+2=a\end{cases}$ có nghiệm. Dễ thấy hệ có ba nghiệm $(a;x)$ phân biệt nên có ba tiếp tuyến.

Câu 79. Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến kẻ từ $M(2;-1)$ đến đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}-x+1$.

A. $y=-2x+3$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=x-3$. **D.** $y=3x-7$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua $M(2;-1)$ có dạng $y=k(x-2)-1=kx-2k-1\ (d)$.

(d) là tiếp tuyến của parabol $y=\frac{x^2}{4}-x+1$ khi và chỉ khi $\begin{cases}kx-2k-1=\frac{x^2}{4}-x+1\\k=\frac{x}{2}-1\end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.\\k=\frac{x}{2}-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\k=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=4\\k=1\end{cases}\end{array}\right.$$. Vậy $(d):y=-x+1$ hoặc $(d):y=x-3$.

Câu 80. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ có đồ thị (C). Biết rằng khi $m=m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0=-1$ đi qua $A(1;3)$. Khẳng định nào sâu đây đúng?

A. $-1<m_0<0$. **B.** $0<m_0<1$. **C.** $1<m_0<2$. **D.** $-2<m_0<-1$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2+6mx+m+1$.

Với $x_0=-1$ thì $y_0=2m-1$, gọi $B(-1;2m-1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2;2m-4)$.

Tiếp tuyến tại B đi qua A nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-m+2$.

Mặt khác: hệ số góc của tiếp tuyến là $k=y'(x_0)$.

Do đó ta có: $3(x_0)^2+6m_0x_0+m_0+1=-m_0+2$

$\Leftrightarrow 3-6m_0+m_0+1=-m_0+2 \Leftrightarrow -4m_0=-2 \Leftrightarrow m_0=\frac{1}{2}$.

Câu 81. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;1)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tính tổng bình phương các phần tử của tập S.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=\frac{1-x+x-2}{(1-x)^2}=\frac{-1}{(1-x)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$: $y-\frac{x_0-2}{1-x_0}=\frac{-1}{(1-x_0)^2}(x-x_0)$

Tiếp tuyến đi qua $A(m;1)\Rightarrow 1-\frac{x_0-2}{1-x_0}=\frac{-1}{(1-x_0)^2}(m-x_0)\Leftrightarrow 2x_0^2-6x_0+m+3=0(x_0\neq 1)(1)$

Để có 1 tiếp tuyến qua $A(m;1)\Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm $x_0\neq 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta=0\\ \Delta>0;2-6+m+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\frac{3}{2}\\ m<\frac{3}{2};m=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\frac{3}{2}\\ m=1\end{array}\right.$

$S=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$. Ta có $1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

Câu 82. Cho hàm số $y=\frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Biết $a=\frac{m}{n}$ (với mọi $m,n\in N$ và $\frac{m}{n}$ tối giản) là giá trị để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua **A.** Khi đó giá trị $m+n$ là:

A. 2. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $R\setminus\{1\}$.

$y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$

Tiếp tuyến tại tiếp điểm có hoành độ $x_0\,(x_0\neq 1)$ của (C) có phương trình.

$$y=-\frac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{-x_0+2}{x_0-1}\quad (\Delta)$$

đt (Δ) đi qua $A(a;1)$ $\Rightarrow 1=-\frac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\left(a-x_0\right)-\frac{x_0-2}{x_0-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_0^2-6x_0+a+3=0 & (*)\\ x_0\neq\end{cases}$

Có duy nhất 1 tiếp tuyến qua A $pt(*)$ có duy nhất 1 nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=0\\ 2.1^2-6.1+a+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2a=0\\ a-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}=\frac{m}{n}\Rightarrow m+n=5$$

Câu 83. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+6x+1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x+6$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại tiểm điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số là

$k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0+6=3\left(x_0^2-2x_0+1\right)+3=3\left(x_0+1\right)^2+3\geq 3$

Vậy hệ số góc lớn nhất là 3 đạt được tại $M(3;19)$.

Câu 84. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Đường thẳng d có phương trình $y=ax+b$ là tiếp tuyến của (C), biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác ΔOAB cân tại O, với O là gốc tọa độ. Tính $a+b$.

A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Ta có $y'=\frac{-1}{(2x+3)^2}<0;\forall x\in D$.

Tam giác ΔOAB cân tại O, suy ra hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1.

Do $y'=\frac{-1}{(2x+3)^2}<0;\forall x\in D\Rightarrow k_{tt}=-1$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $\left(x_0;y_0\right);x_0\in D$, ta có: $\frac{-1}{\left(2x_0+3\right)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=-2\vee x_0=-1$.

- Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=-x$ (loại vì $A\equiv B\equiv O$).
- Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=0\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=-x-2$ (nhận).

Vậy $\begin{cases}a=-1\\ b=-2\end{cases}\Rightarrow a+b=-3$.

Câu 85. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA=4OB$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Giả sử tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.

Do tam giác OAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc tiếp tuyến là $f'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0\Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.$.

$x_0=3\Rightarrow y_0=\frac{5}{2}$: $d:y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.

$x_0=-1\Rightarrow y_0=\frac{3}{2}$: $d:y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Câu 86. Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+(2m-3)x-1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m\neq 0$. **B.** $m>1$. **C.** $m\neq 1$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+(2m-3)x-1$ tại tiếp điểm $M(x_0;y_0)$ là:

$y'(x_0)=3x_0^2-2mx_0+2m-3$

Hệ số góc luôn dương $\Leftrightarrow y'(x_0)>0,\forall x_0\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\\Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow(m-3)^2<0\Leftrightarrow m\in\varnothing$

Câu 87. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d:y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A,B sao cho ΔOAB cân tại O. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Ta có: $y'=\frac{-1}{(2x+3)^2}<0,\forall x\in D$.

Mặt khác, ΔOAB cân tại $O\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1.

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0;y_0)$, với $x_0\neq-\frac{3}{2}$.

Ta có: $y'=\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=-2\vee x_0=-1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x$ loại vì $A \equiv B \equiv O$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y = ax + b$ *hay* $d: y = -x - 2 \Rightarrow a = -1;\ b = -2 \Rightarrow a + b = -3$.

Câu 88. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C). Số phần tử của S là

A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5

Lời giải

Chọn B.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d qua A.

Ta có phương trình của d có dạng: $y = kx + m - k$.

d tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} kx + m - k = x^3 + 3x^2 + 1 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x^3 + 6x + 1\ (*) \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases}$

Để qua A có thể được đúng 3 tiếp tuyến tới (C) thì phương trình (*) phải có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\ y_{CT} < m < y_{CD}$ với $f(x) = -2x^3 + 6x + 1$.

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$f(1) = 5 = f_{CD}; f(-1) = -3 = f_{CT}$.

Suy ra $-3 < m < 5$.

Vậy số phần tử của S là 7.

Câu 89. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** -2 **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Với $y = 3$, ta có: $\dfrac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có: $y' = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$k = y'(2) = -\dfrac{2}{(2-1)^2} = -2$.

Câu 90. Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m \neq 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Chọn D

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+(2m-3)x-1$ tại tiếp điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ là:

$y'\left(x_0\right)=3x_0^2-2mx_0+2m-3$

Hệ số góc luôn dương $\Leftrightarrow y'\left(x_0\right)>0,\forall x_0\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\left(m-3\right)^2<0\Leftrightarrow m\in\varnothing$

Câu 91. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi Δ là tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm $M\left(2;1\right)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=\dfrac{-1}{\left(x-1\right)^2}$. Theo đề $x_0=2;y_0=1;y'\left(x_0\right)=-1$.

Suy ra pttt Δ là: $y=-x+3$.

Tiếp tuyến Δ cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại $A\left(3;0\right),B\left(0;3\right)$. Do đó diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục tọa độ bằng: $S=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{9}{2}$.

Câu 92. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $y=x+2$. **B.** $y=x-2$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ (C)

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-2\right\}$

$y'=\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}$

Gọi phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $\left(C\right)$ tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ có dạng

$(d):y=\dfrac{1}{\left(x_0+2\right)^2}.\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0+3}{x_0+2}$

Ta có $(d)\cap Ox=A\left(-2x_0^2-6x_0-6;0\right)$; $(d)\cap Oy=B\left(0;\dfrac{2x_0^2+6x_0+6}{\left(x_0+2\right)^2}\right)$

Ta thấy tiếp tuyến $\left(d\right)$ chắn trên hai trục tọa độ tam giác OAB luôn vuông tại O

Để tam giác OAB cân tại O ta có $OA=OB\Rightarrow\left|-2x_0^2-6x_0-6\right|=\left|\dfrac{2x_0^2+6x_0+6}{\left(x_0+2\right)^2}\right|$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(x_0+2\right)^2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-3 \\ x_0=-1 \end{array}\right.$

Ta có hai tiếp tuyến thỏa mãn $(d): y=x$ và $(d): y=x+2$.

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R, thỏa mãn $2f\left(2x\right)+f\left(1-2x\right)=12x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$.

A. $y=2x-6$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=4x-2$.

Lời giải

Chọn D

Đạo hàm hai vế $2f\left(2x\right)+f\left(1-2x\right)=12x^2$ (1) ta có $4f'\left(2x\right)-2f'\left(1-2x\right)=24x$ (2).

Thay $x=0,\ x=\dfrac{1}{2}$ lần lượt vào (1) ta được $\begin{cases} 2f\left(0\right)+f\left(1\right)=0 \\ 2f\left(1\right)+f\left(0\right)=3 \end{cases} \Rightarrow f\left(1\right)=2$.

Thay $x=0,\ x=\dfrac{1}{2}$ lần lượt vào (2) ta được $\begin{cases} 4f'\left(0\right)-2f'\left(1\right)=0 \\ 4f'\left(1\right)-2f'\left(0\right)=12 \end{cases} \Rightarrow f'\left(1\right)=4$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

$y=4\left(x-1\right)+2=4x-2$.