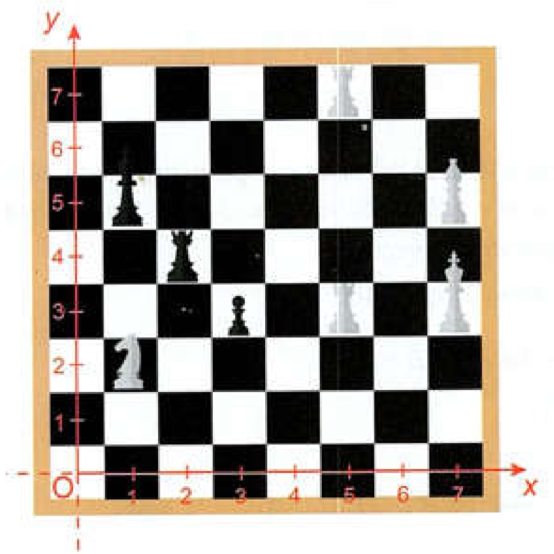
CHỦ ĐỀ 7. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

- **BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 10**
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

NỘI DUNG CÂU HỎI

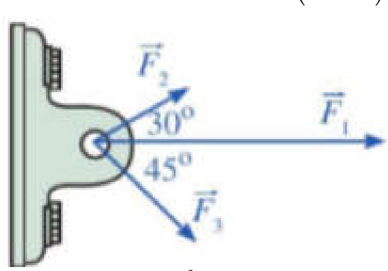
Câu 1. Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau:
Tàu khởi hành từ vị trí $A(1;2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v}=(3;4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Câu 2. Trong hình, quân mã đang ở vị trí có tọa độ $(1;2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



Câu 3. Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật $ABCD$ với độ dài $AB=200\,m, AD=180\,m$, người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều, cột thứ nhất nằm trên bờ AB và cách đỉnh A khoảng cách $20\,m$, cột thứ tư nằm trên bờ CD và cách đỉnh C khoảng cách $30\,m$. Tính các khoảng cách từ vị tri các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ AB, AD.

Câu 4. Một vật đồng thời bị ba lực tác động: lực tác động thứ nhất $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là $1500\,N$, lực tác động thứ hai $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là $600\,N$, lực tác động thứ ba $F3$ có độ lớn là $800\,N$. Các lực này được biểu diễn bằng những vecto như Hình 23, với $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=30^\circ$; $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)=45^\circ$; $\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)=75^\circ$.



Tính độ lớn lực tổng hợp tác động lên vật (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 5. Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(600;200)$ đến thành phố B có toạ độ $(200;500)$ và thời gian bay quãng đường AB là 3 giờ. Hãy tìm toạ độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ.

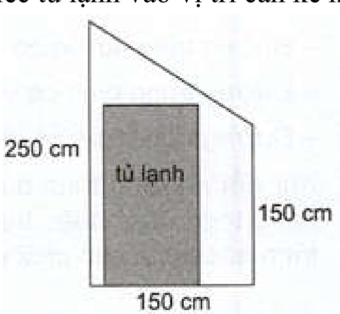
Câu 6. Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ $21,2°$ Bắc, kinh độ $105,8°$ Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ $16,1°$ Bắc, kinh độ $108,2°$ Đông. Một máy bay, bay từ Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x^0 Bắc, kinh độ y^0 Đông được tính theo công thức

$$\begin{cases} x = 21,2 - \dfrac{153}{40}t \\ y = 105,8 + \dfrac{9}{5}t \end{cases}$$

a. Hỏi chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất mấy giờ?

b. Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến 17 ($17^0 B?c$) chưa?

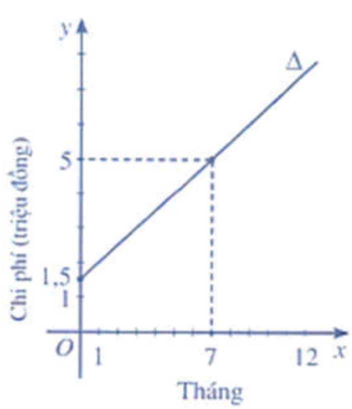
Câu 7. Nhà bạn Nam định đổi tủ lạnh và dự định kê vào vị trí dưới cầu thang. Biết vị trí định kê tủ lạnh có mặt cắt là một hình thang vuông với hai đáy lần lượt là $150cm$ và $250cm$, chiều cao là 150 cm (như hình vẽ). Bố mẹ bạn Nam định mua một $250cm$ tủ lạnh 2 cánh (Side by side) có chiều cao là 183 cm và bề ngang $90cm$. Bằng cách sử dụng toạ độ trong mặt phẳng, em hãy giúp Nam tính xem bố mẹ bạn Nam có thể kê vừa chiếc tủ lạnh vào vị trí cần kê không ?



Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ, một tín hiệu âm thanh phát đi từ một vị trí và được ba thiết bị ghi tín hiệu tại ba vị trí $O(0;0), A(1;0), B(1;3)$ nhận được cùng một thời điểm. Hãy xác định vị trí phát tín hiệu âm thanh.

Câu 9. Trong một hoạt động ngoại khoá của trường, lớp Việt định mở một gian hàng bán bánh mì và nước khoáng. Biết rằng giá gốc một bánh mì là 15000 đồng, một chai nước là 5000 đồng. Các bạn dự kiến bán bánh mì với giá 20000 đồng/1 bánh mì và nước giá 8000 đồng/1 chai. Dựa vào thống kê số người tham gia hoạt động và nhu cầu thực tế các bạn dự kiến tổng số bánh mì và số chai nước không vượt qua 200. Theo quỹ lớp thì số tiền lớp Việt được dùng không quá 2000000 đồng. Hỏi lớp Việt có thể đạt được tối đa lợi nhuận là bao nhiêu?

Câu 10. Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở Hình 38 biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) để tham gia một phòng thập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).



a. Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b. Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?

c. Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.

Câu 11. Có hai con tài A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki - lô - mét), sau khi xuất phát t (giờ) ($t \geq 0$), vị trí của tàu A có tọa độ được xác định bởi công thức: $\begin{cases} x = 3 - 33t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$, vị trí của tàu B có tọa độ là (4-30t;3-40t)

a. Tính cosin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.

b. Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhất?

c. Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Câu 12. Có hai tàu điện ngầm A và B chạy trong nội đô thành phố cùng xuất phát từ hai ga, chuyển động đều theo đường thẳng. Trên màn hình ra đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), sau khi xuất phát t (giờ) ($t \geq 0$), vị trí của tàu A có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 7 + 36t \\ y = -8 + 8t \end{cases}$, vị trí của tàu B có toạ độ là $(9 + 8t; 5 - 36t)$.

a) Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

Câu 13. Một người đang viết chương trình cho trò chơi bóng đá rô bốt. Gọi $A(-1;1), B(9;6), C(5;-3)$ là ba vị trí trên màn hình.

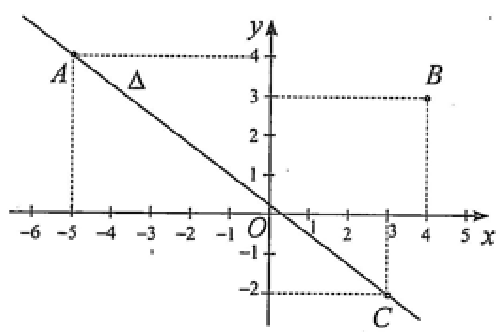
a. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC, BC.

b. Tính góc hợp bởi hai đường thẳng AB và AC.

c. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

Câu 14. Một trạm viễn thông S có toạ độ $(5;1)$. Một người đang ngồi trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng Δ có phương trình $12x + 5y - 20 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S. Biết rằng mỗi đơn vị độ dài tương ứng với $1km$.

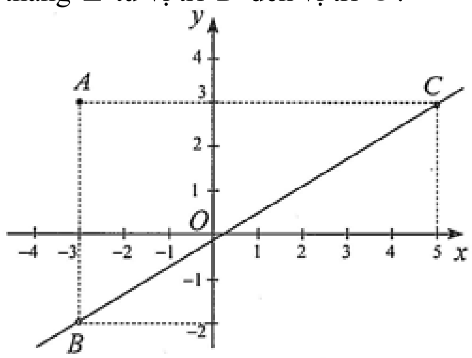
Câu 15. Có hai con tàu cùng chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình rađa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên hai trục tính theo kilômét), tàu số 1 chuyển động đều theo đường thẳng Δ từ vị trí A đên vị trí C. Tàu số 2 sắp hết nhiên liệu, đang ở vị trí B muốn gặp tàu số 1 để tiếp nhiên liệu. Hỏi tàu số 2 phải đi đoạn đường ngắn nhất là bao nhiêu kilômét?



A. $7,8km$.
B. $5,1km$.
C. $4,6km$.
D. $3,4km$.

Câu 16. Có hai tàu cá A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình rađa của trạm kiểm soát có hệ trục toạ độ Oxy, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét và trạm kiểm soát coi là gốc toạ độ O. Tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu cá A có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 3 - t \end{cases}$

Tàu cá B di chuyển theo đường thẳng Δ từ vị trí B đến vị trí C.

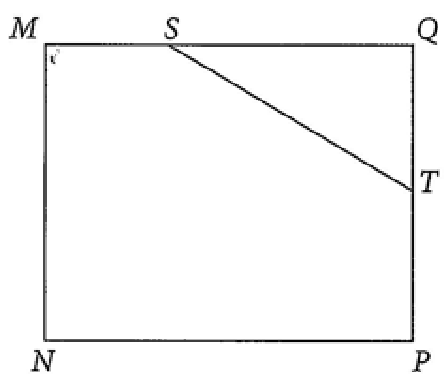


a) Viết phương trình đường đi Δ của tàu cá B.
b) Tính góc giữa hai đường đi của hai tàu cá.
c) Nếu tàu cá A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu cá B di chuyển thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Câu 17. Chuyển động của vật thể M được thể hiện trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Vật thể M khởi hành từ điểm $A(5;3)$ và chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc là $\vec{v}(1;2)$.

a) Hỏi vật thể M chuyển động trên đường thẳng nào?
b) Xác định toạ độ của vật thể M tại thời điểm $t(t>0)$ tính từ khi khởi hành.
c) Hỏi khi $t=5$ thì vật thể M chuyển động được quãng đường dài bao nhiêu?

Câu 18. Nhà Nam có một ao cá dạng hình chữ nhật $MNPQ$ với chiều dài $MQ = 30\,m$, chiều rộng $MN = 24\,m$. Phần tam giác QST là nơi nuôi ếch, $MS = 10\,m, PT = 12\,m$ (với S, T lần lượt là các điểm nằm trên cạnh MQ, PQ) (xem hình bên dưới).



a) Chọn hệ trục tọ độ Oxy, có điểm O trùng với điểm N, các tia Ox, Oy tương ứng trùng với các tia NP, NM, mỗi đơn vị độ dài trên mặt phẳng toạ độ tương ứng với $1m$ trong thực tế. Hãy xác định tọa độ của các điểm M, N, P, Q, S, T và viết phương trình đường thẳng ST.
b) Nam đứng ở vị trí N câu cá và có thể quăng lưỡi câu xa 21,4 m. Hỏi lưỡi câu có thể rơi vào nơi nuôi ếch hay không?

Câu 19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vị trí của một chất điểm K tại thời điểm $t(0 \le t \le 180)$ có toạ độ là $\left(3+2\cos t^{\circ}; 4+2\sin t^{\circ}\right)$.

a) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của chất điểm K.
b) Tìm quỹ đạo chuyển động của chất điểm K.

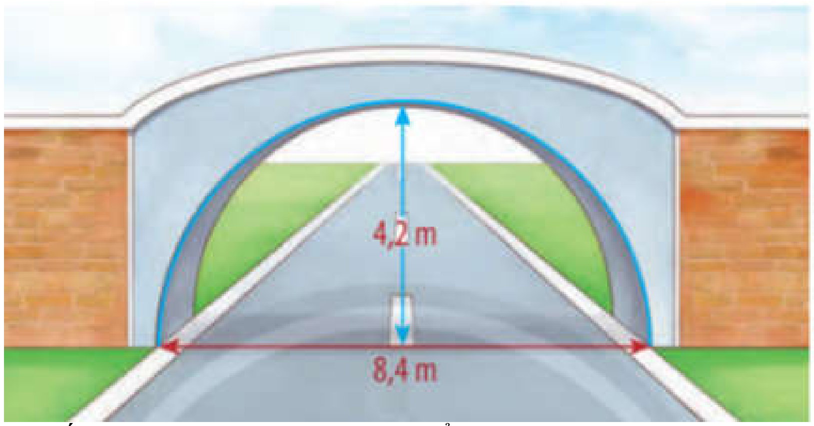
Câu 20. Có hai con tàu A, B xuất phát từ hai bến, chuyển động theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra-đa của trạm điều khiển (xem như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính bằng ki-lô-mét), tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu A có tọa độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 3 - 33t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$; vị trí tàu B có tọa độ là $(4 - 30t; 3 - 40t)$.

a) Tính gần đúng côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A, B.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát, hai tàu gần nhau nhất?

c) Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Câu 21. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng $8,4\,m$, cao $4,2\,m$ như Hình. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn xe ra vào.



a. Viết phương trình mô phỏng cái cổng.

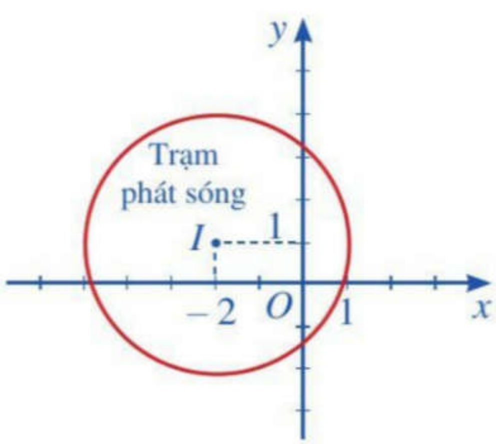
b. Một chiếc xe tải rộng 2,2 m và cao $2,6m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?

Câu 22. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 6,8 m, cao 3,4 m. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng;

b) Một chiếc xe tải rộng $2,4m$ và cao $2,5m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng được hay không?

Câu 23. Hình mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có toạ độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).



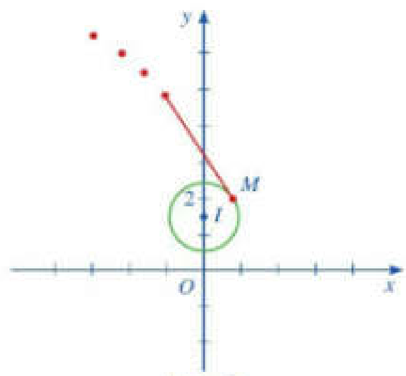
a. Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng $3km$.

b. Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(-1;3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.

c. Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 24. Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0;\frac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\frac{\sqrt{39}}{10};2\right)$, đĩa được ném đi (Hình 47). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?

(Nguồn: https://shutterstock.com)



Hình 47

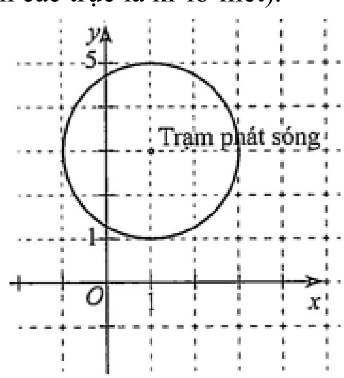
Câu 25. Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t\,(0 \le t \le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $\left(2+\sin t^0;4+\cos t^0\right)$.

a. Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.
b. Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Câu 26. Vị trí của một chất điểm M tại thời điểm t (t trong khoảng thời gian từ 0 phút đến 180 phút) có toạ độ là $\left(3+5\sin t^\circ;4+5\cos t^\circ\right)$. Tìm toạ độ của chất điểm M khi M ở cách xa gốc toạ độ nhất.

Câu 27. Một vật chuyển động tròn đều chịu tác động của lực hướng tâm, quỹ đạo chuyển động của vật trong mặt phẳng toạ độ Oxy là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=100$. Vật chuyển động đến điểm $M(8;6)$ thì bị bay ra ngoài. Trong những giây đầu tiên sau khi vật bay ra ngoài, vật chuyển động trên đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Câu 28. Hình mô phỏng một trạm thu phát sóng wifi chuyên dụng tầm xa đặt ở vị trí I có tọa độ $(1;3)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là ki-lô-mét).

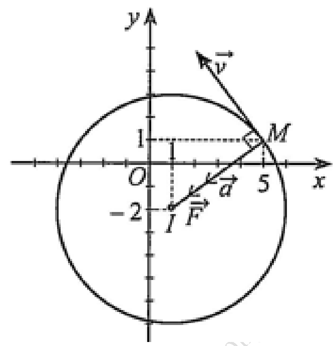


a) Viết phương trình đường tròn để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng $2km$.
b) Nếu người dùng điện thoại ở toạ độ $(2;2)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.

Câu 29. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét), một chất điểm chuyển động đều luôn cách điểm $I(3;3)$ một khoảng bằng 2.

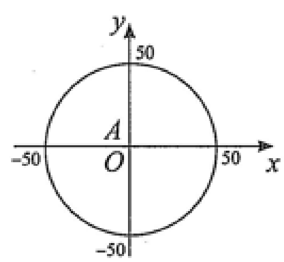
a) Viết phương trình đường tròn mô tả quỹ đạo chuyển động của chất điểm trên.
b) Một chất điểm khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng, tại hai thời điểm, chất điểm đó ở vị trí $A(-3;2)$ và $B(2;7)$. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn hơn $1m$.

Câu 30. Một vật chuyển động tròn đều chịu tác động của lực hướng tâm, quỹ đạo chuyển động của vật trong mặt phẳng toạ độ Oxy là đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính $5dm$ (đơn vị của trục là đề-xi-mét). Vật chuyển động đến điểm $M(5;1)$ thì bị bay ra ngoài như Hình. Những giây đầu tiên sau khi vật bay ra ngoài, vật chuyển động theo đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đó.



Câu 31. Trên sân khấu, các bóng đèn thường chiếu sáng là một vùng diện tích hình tròn. Diễn viên chính đứng tại vị trí có toạ độ $I(3;4)$ và cũng chính là tâm của hình tròn với bán kính chiếu sáng là $2m$. Có ba diễn viên phụ ở ba vị trí $A(4;4)$; $B(5;2);C(15;5)$. Hỏi trong ba diễn viên phụ, diễn viên nào ở trong vùng chiếu sáng đó?

Câu 32. Trên hòn đảo A, người ta đặt một trạm kiểm soát. Màn hình rađa của trạm kiểm soát có hệ trục toạ độ Oxy, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét và trạm kiểm soát coi là gốc toạ độ O. Nếu tàu cá di chuyển trong phạm vi cách trạm $50km$ thì sẽ hiển thị trên màn hình rađa. Một tàu cá khởi hành từ hòn đảo B lúc 8 giờ. Sau thời gian t (giờ), vị trí của tàu cá được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 30 - 20t \\ y = 80 - 20t \end{cases}$



a) Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài vùng tín hiệu của rađa.
b) Tìm vị trí của tàu cá lúc 9 giờ 30 phút. Thời điểm này tàu cá đã xuất hiện trên màn hình rađa chưa?
c) Lúc mấy giờ tàu cá gần trạm kiểm soát nhất? Tính khoảng cách giữa tàu cá và trạm kiểm soát vào thời điểm đó.

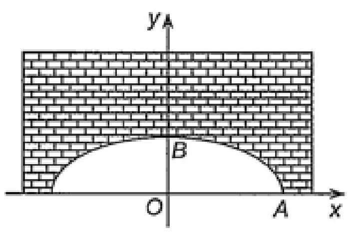
Câu 33. Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A,B cách nhau $300km$. Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292000 km/s để một tàu thủy thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là $0,0005s$. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thủy thuộc đường hybebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômét.

Câu 34. Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A, điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 400m$. Đỉnh parabol (P) của khúc của cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B.

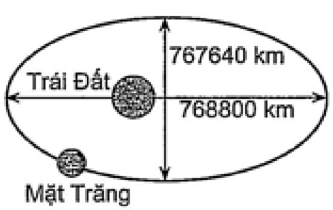
a. Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng $1m$ trên thực tế.

b. Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng $1km$ trên thực tế.

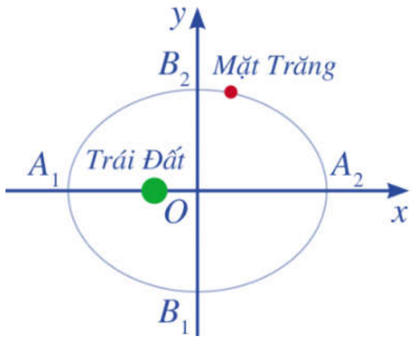
Câu 35. Một người kĩ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là $12m$, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là $3m$. Người kĩ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao $2,8m$ thì có chiều rộng không quá $3m$. Hỏi chiếc xe tải có chiều cao $2,8m$ có thể đi qua hầm được không?



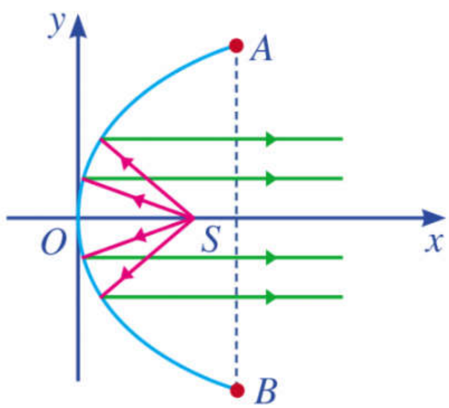
Câu 36. Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là $768800km$ và $767640km$. Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.



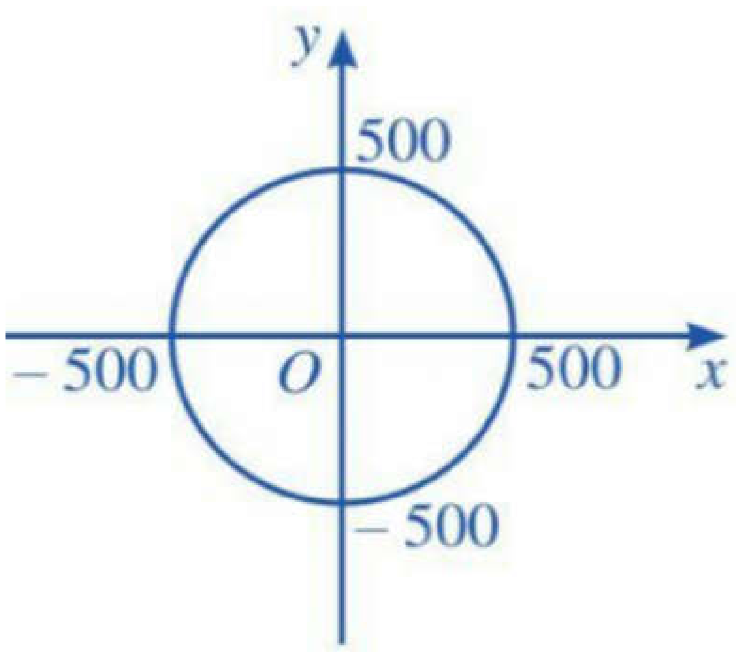
Câu 37. Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip có $A_1A_2 = 768800km$ và $B_1B_2 = 767619km$ (Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus Real Mathematics, Real People, Cengage (Hình). Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Câu 38. Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol (Hình). Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40cm$ và chiều sâu $h = 30cm$ (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Câu 39. Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu sân bay A có hệ trục toạ độ Oxy (Hình), trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét và đài kiểm soát được coi là gốc toạ độ $0(0;0)$. Nếu máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát $500km$ thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa như một điểm chuyển động trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy.

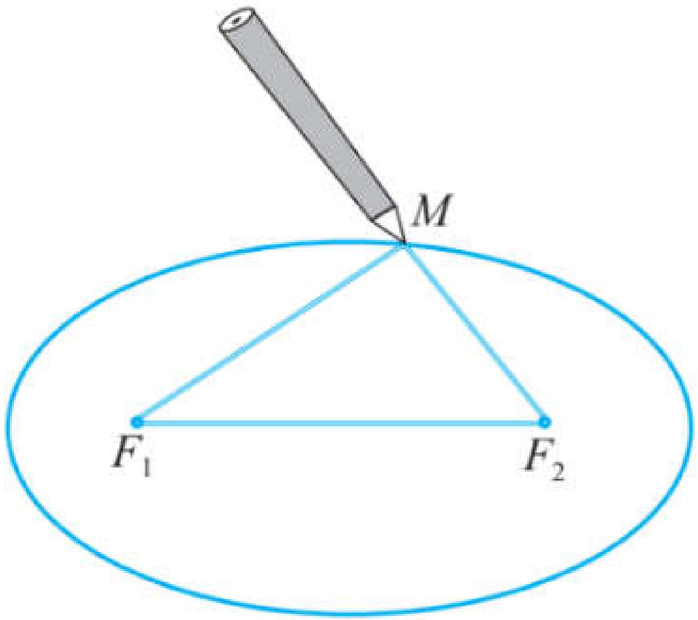


Câu 40. Để cắt một bảng quảng cáo hình elip có trục lớn là $80cm$ và trục nhỏ là $40cm$ từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước $80cm x 40cm$, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:

- Chuẩn bị:

- Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.
- Thực hiện:

1. Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván).
2. Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh vào kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường elip (Xem minh họa trong Hình).



Phải ghim hai cái đinh các mép tấm ván ép bao nhiêu xentimet và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

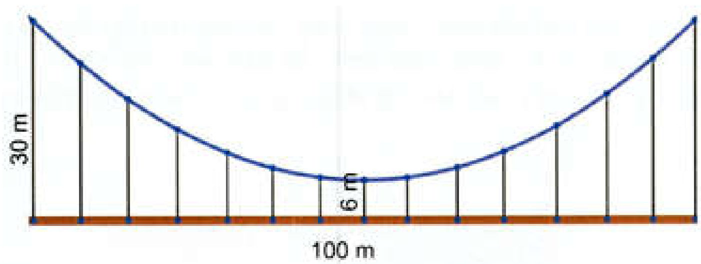
Câu 41. Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 8m, rộng 20m (Hình).

a. Chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.

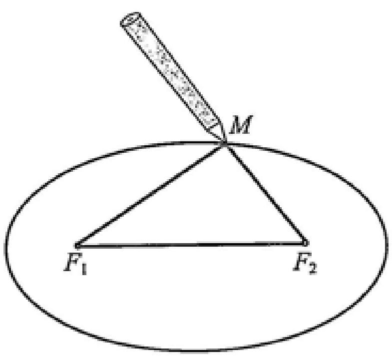
b. Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 5m đến nóc nhà vòm.

Câu 42. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình là $\frac{x^2}{28^2}-\frac{y^2}{42^2}=1$ (Hình). Biết chiều cao của tháp là $150m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tấm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Câu 43. Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài $100m$ và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là $30m$, thanh ngắn nhất là $6m$ (Hình). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu $18m$.



Câu 44. Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là $1m$ và trục nhỏ là $0,6m$ từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước $1m \times 0,6m$, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:



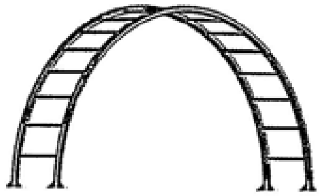
Hình 10

Chuẩn bị:
- Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.

Thực hiện:
- Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván.
- Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường mà ta gọi là đường elip. (Xem minh hoạ trong Hình 10).

Phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

Câu 45. Thang leo gợn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao $100cm$ và khoảng cách giữa hai chân là $240cm$.



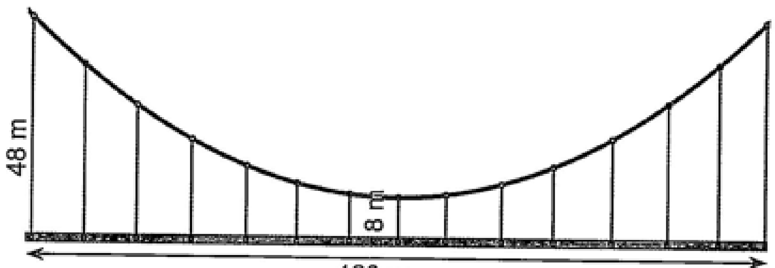
Hình 11

a) Hãy chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.
b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm Hinh 11 cách chân khung $20cm$ lên đến khung thép.

Câu 46. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{50^2}=1$.

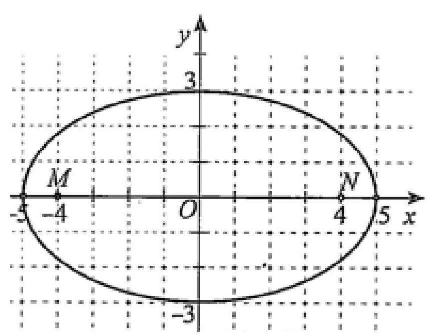
Biết chiều cao của tháp là $120m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Câu 47. Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài $120m$ và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là $48m$, thanh ngắn nhất là $8m$ (Hình 12). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu $20m$.



Hình 12

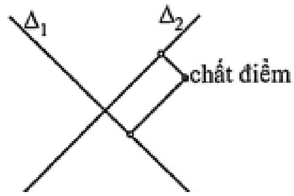
Câu 48. Trước một tòa nhà, người ta làm một cái hồ bơi có dạng hình elip với độ dài hai bán trục lần lượt là $3m$ và $5m$. Xét hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét) có hai trục tọa độ chứa hai trục của elip, gốc tọa độ O là tâm của elip (hình)



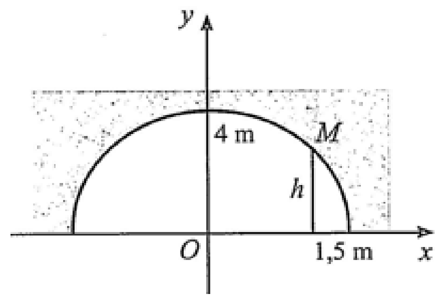
a) Lập phương trình chính tắc của elip.
b) Xét các điểm M,N cùng thuộc trục lớn của elip và đều cách O một khoảng bằng $4m$ về hai phía của O. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ mọi vị trí trên mép hồ (ứng với đường elip) đến M và N không đổi.
c) Một người đứng ở vị trí P cách O một khoảng bằng $6m$. Người đó đứng ở trong hồ hay ngoài hồ? Vì sao?
d) Xét vị trí C trên mép hồ cách trục lớn một khoảng bằng $2m$. Hỏi vị trí C cách trục nhỏ một khoảng bằng bao nhiêu mét?

Câu 49. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.

Một chất điểm chuyển động trong một góc vuông tạo bởi Δ_1 và Δ_2 (Hình) có tính chất: ở mọi thời điểm, tích khoảng cách từ mỗi vị trí của chất điểm đến hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 luôn bằng 4 . Chứng minh rằng chất điểm chuyển động trên một phần của đường hypebol.

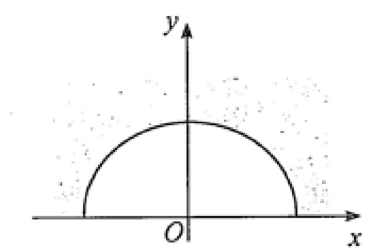


Câu 50. Một cây cầu bê tông bắc qua con sông rộng 12m, nhịp cuốn cầu có hình dạng nửa elip. Các kĩ sư đã thiết kế sao cho vị trí cao nhất của gầm cầu so với mặt nước là 4m. Tại vị trí cách bờ 1,5m, chiều cao h của gầm cầu là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến chữ số tập phân thứ nhất)?



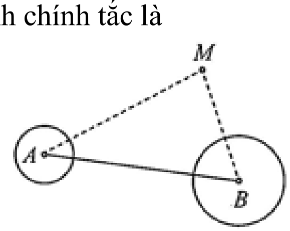
A. 4,5m
B. 2,5m
C. 2,6m
D. 2,8m

Câu 51. Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là $20m$, mặt cắt đứng của đường hàm có dạng nửa elip (hình bên). Biết elip có tiêu cự bằng $10m$. Hỏi chiều cao của đường hầm là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?



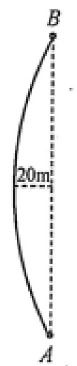
A. $8,66m$.
B. $17,32m$.
C. $11,18m$.
D. $5,48m$.

Câu 52. Trên hai hòn đảo A và B cách nhau $420km$ người ta đặt hai trạm phát tín hiệu vô tuyến. Tại cùng thời điểm, hai trạm phát tín hiệu với vận tốc $290000km/s$ để một tàu thuỷ ở vị trí M trên biển thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu truyền từ đảo B đến sớm hơn tín hiệu từ đảo A là $0,0008s$. Tàu thuỷ đang ở vị trí thuộc đường hypebol có phương trình chính tắc là



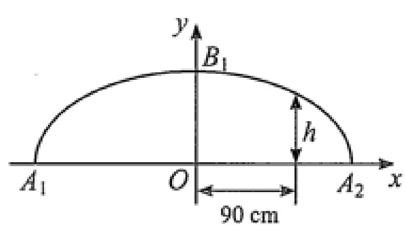
A. $\dfrac{x^2}{13456}-\dfrac{y^2}{30644}=1$.
B. $\dfrac{x^2}{13456}-\dfrac{y^2}{44100}=1$.
C. $\dfrac{x^2}{44100}-\dfrac{y^2}{30644}=1$.
D. $\dfrac{x^2}{30644}-\dfrac{y^2}{13456}=1$.

Câu 53. Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol (P), điểm đầu vào của khúc của là A và điểm cuối là B, khoảng cách $AB=320m$. Đỉnh của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng $20m$ và cách đều A,B (hình bên). Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng toạ độ tương ứng với $1m$ trên thực tế. Phương trình chính tắc của parabol (P) đó là



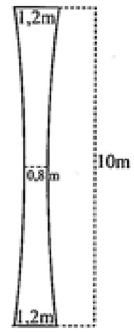
A. $y^2=640x$.
B. $y^2=320x$.
C. $x^2=1280y$.
D. $y^2=1280x$.

Câu 54. Trong bản vẽ thiết kế, mặt cắt đứng của vòm cửa ô thoáng là nửa nằm phía trên tục hoành của elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$.



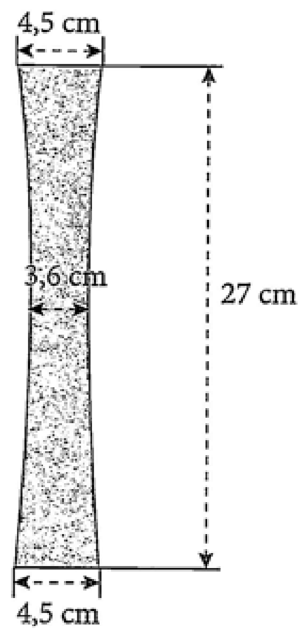
Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng toạ độ của bản vẽ ứng với $30cm$ trên thực tế.
a) Tính chiều rộng, chiều cao thực tế của vòm cửa.
b) Tính chiều cao h của vòm cửa tại điểm cách điểm chính giữa O $90cm$.

Câu 55. Một cột trụ hình hypebol, có chiều cao $10m$, chỗ nhỏ nhất ở chính giữa rộng $0,8m$, đỉnh cột và đáy cột đều rộng $1,2m$. Độ rộng của cột ở độ cao $8m$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai)?



Câu 56. Bạn An cùng một lúc bắn hai phát súng về đích A và đích B cách nhau $400m$. Biết vận tốc trung bình của viên đạn là $760m/s$. Viên đạn bắn về đích A nhanh hơn viên đạn bắn về đích B là 0,5 giây. Hỏi những vị trí mà bạn An đứng để có thể đạt được kết quả bắn tương tự như trên thuộc đường conic nào? Viết phương trình chính tắc của đường conic đó.

Câu 57. Một chiếc bình trang trí có mặt cắt ngang là một hình hypebol với chiều cao $27cm$, chỗ hẹp nhất nằm ở chính giữa và rộng $3,6cm$, đỉnh và đáy của chiếc bình đều rộng $4,5cm$ (xem hình bên dưới). Tính độ rộng của chiếc bình ở độ cao $22,5cm$ kể từ đáy (làm tròn kết quả đến hàng phân trăm).



LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau:
Tàu khởi hành từ vị trí $A(1;2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v}=(3;4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Lời giải

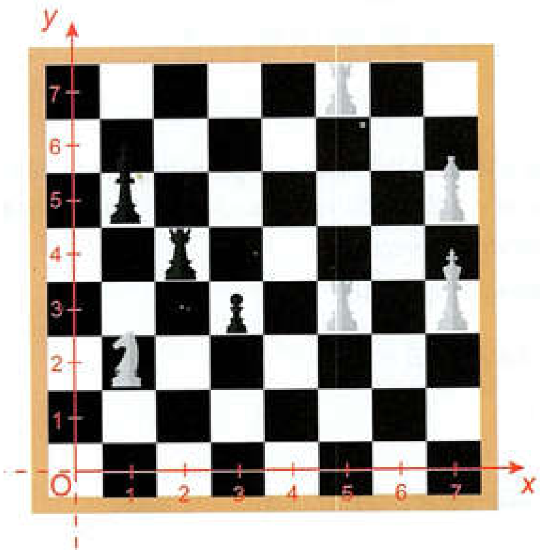
Gọi $B(x;y)$ là vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.
Do tàu khởi hành từ A đi chuyển với vận tốc được biểu thị bởi vectơ $\vec{v}=(3;4)$ nên cứ sau mỗi giờ, tàu đi chuyển được một quãng bằng $|\vec{v}|$.
Vậy sau 1,5 giờ tàu di chuyển tới B, ta được: $\overrightarrow{AB}=1,5\cdot\vec{v}$

$\Leftrightarrow (x-1; y-2) = 1,5.(3;4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 4,5 \\ y-2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5,5 \\ y = 8 \end{cases}$

Vậy sau 1,5 tàu ở vị trí (trên mặt phẳng tọa độ) là $B(5,5;8)$.

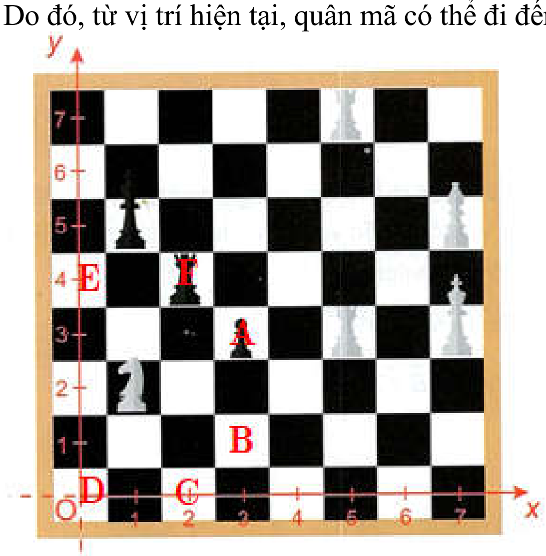
Câu 2. Trong hình, quân mã đang ở vị trí có tọa độ $(1;2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



Lời giải

a) Quân mã đi theo đường chéo hình chữ nhật có chiều dài 3 ô, chiều rộng 2 ô.

Do đó, từ vị trí hiện tại, quân mã có thể đi đến các vị trí A, B, C, D, E, F như dưới đây:



A có tọa độ $(3;3)$

B có tọa độ $(3;1)$

C có tọa độ $(2;0)$

D có tọa độ $(0;0)$

E có tọa độ $(0;4)$

F có tọa độ $(2;4)$

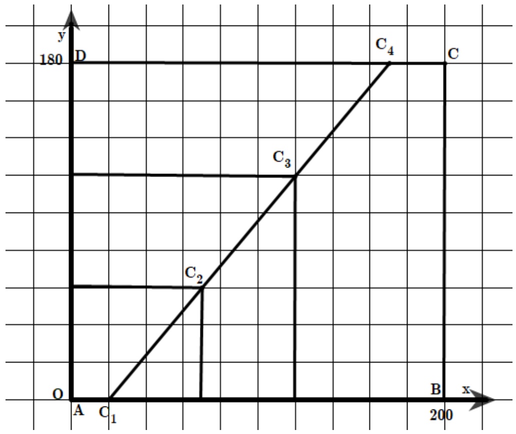
Vậy quân mã có thể đi đến các vị trí $A(3;3), B(3;1), C(2;0), D(0;0), E(0;4), F(2;4)$.

Câu 3. Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật $ABCD$ với độ dài $AB = 200\,m, AD = 180\,m$, người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều, cột thứ nhất nằm trên bờ AB

và cách đỉnh A khoảng cách $20m$, cột thứ tư nằm trên bờ CD và cách đỉnh C khoảng cách $30m$. Tính các khoảng cách từ vị tri các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ AB, AD.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho $A(0;0), B(200;0), C(200;180), D(0;180)$. Gọi vị trí các cột điện được trồng là C_1, C_2, C_3, C_4.



Do C_1 thuộc cạnh AB và $AC_1 = 20$ nên $C_1(20;0)$, do C_4 thuộc cạnh CD và $C_4C = 30$ nên $C_4(170;180)$.

Suy ra $\overrightarrow{C_1C_4} = (150;180)$. (1)

Do bốn cột điện C_1, C_2, C_3, C_4 được trồng liên tiếp, cách đều trên một đường thẳng, nên $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$ và $\overrightarrow{C_1C_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$.

Gọi toạ độ của C_2 đối với hệ trục đang xét là $(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{C_1C_2} = (x-20;y)$.

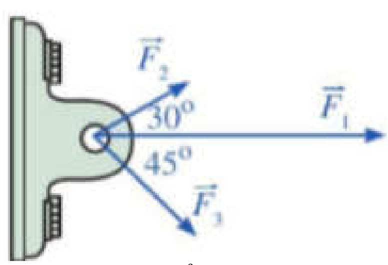
Từ đó và (1), do $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$ nên $\begin{cases} x-20 = \frac{150}{3} = 50 \\ y = \frac{180}{3} = 60. \end{cases}$

Sury ra $x = 70, y = 60$, tức là $C_2(70;60)$.

Khi đó $d(C_2;AB) = d(C_2;Ox) = 60(m)$ và $d(C_2;AD) = d(C_2;Oy) = 70(m)$.

Hoàn toàn tương tự, cũng được $d(C_3;AB) = 120(m), d(C_3;AD) = 120(m)$.

Câu 4. Một vật đồng thời bị ba lực tác động: lực tác động thứ nhất $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là $1500N$, lực tác động thứ hai $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là $600N$, lực tác động thứ ba $F3$ có độ lớn là $800N$. Các lực này được biểu diễn bằng những vecto như Hình 23, với $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 30^\circ$; $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_3}) = 45^\circ$; $(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}) = 75^\circ$.



Tính độ lớn lực tổng hợp tác động lên vật (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_{23}}$

$\overrightarrow{F_{23}} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

$\Rightarrow F_{23}^2 = F_2^2 + F_3^2 + 2F_2 \cdot F_3 \cdot \cos\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\right)$

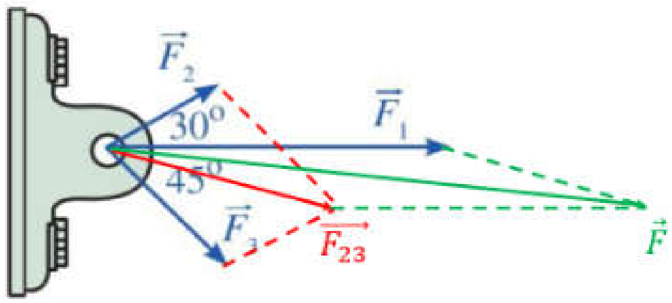
$= 600^2 + 800^2 + 2.600.800 \cdot \cos 75^o$

$= 1248466,283(N)$

$\Rightarrow F_{23} = \sqrt{1248466,283} = 1117,347879 \approx 1117,35(N)$

$\cos\left(\overrightarrow{F_{23}}, \overrightarrow{F_3}\right) = \dfrac{F_{23}{}^2 + F_3^2 - F_2^2}{2 \cdot F_{23} \cdot F_3} = \dfrac{1248466,283 + 800^2 - 600^2}{2.1117,35.800} \approx 0,855$

$\left(\overrightarrow{F_{23}}, \overrightarrow{F_3}\right) \approx 31^o = \left(\overrightarrow{F_{23}}, \overrightarrow{F_1}\right) = 45^\circ - 31^\circ = 14^0$



$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_{23}}$

$\Rightarrow F^2 = F_{23}^2 + F_1^2 + 2F_{23} \cdot F_1 \cdot \cos\left(\overrightarrow{F_{23}}, \overrightarrow{F_1}\right)$

$= 1248466,283 + 1500^2 + 2.1117,35.1500 \cdot \cos 14^o$

$= 6750946,072$

$\Rightarrow F = \sqrt{6750946,072} = 2598,258277 \approx 2598(N)$

Câu 5. Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(600;200)$ đến thành phố B có toạ độ $(200;500)$ và thời gian bay quãng đường AB là 3 giờ. Hãy tìm toạ độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ.

Lời giải

Giả sử $M(x;y)$ là vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x-600; y-200), \overrightarrow{AB} = (-400;300)$.

Vì máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Do đó

$$\begin{cases} x - 600 = -\dfrac{400}{3} \\ y - 200 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1400}{3} \\ y = 300. \end{cases}$$

Vậy vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ là $M\left(\dfrac{1400}{3};300\right)$.

Câu 6. Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ $21,2°$ Bắc, kinh độ $105,8°$ Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ $16,1°$ Bắc, kinh độ $108,2°$ Đông. Một máy bay, bay từ Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x^0 Bắc, kinh độ y^0 Đông được tính theo công thức

$$\begin{cases} x = 21,2 - \dfrac{153}{40}t \\ y = 105,8 + \dfrac{9}{5}t \end{cases}$$

a. Hỏi chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất mấy giờ?

b. Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến 17 ($17^0 B?c)$ chưa?

Lời giải

a. Nếu máy bay đến Đà Nẵng thì $x=16,1$ và $y=108,2$

Ta có: $\begin{cases}16,1=21,2-\dfrac{153}{40}t\\108,2=105,8+\dfrac{9}{5}t\end{cases} \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}$

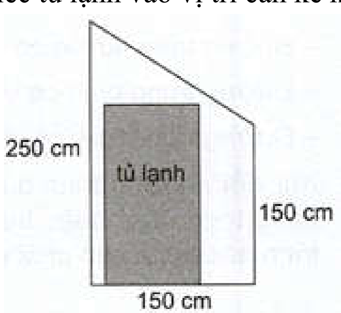
Vậy chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất gần 1,33 giờ

b. Tại thời điểm 1 giờ thì t $=1$ thay vào phương trình có:

$$\begin{cases}x=21,2-\dfrac{153}{40}.1=17,375\\y=105,8+\dfrac{9}{5}.1=107,6\end{cases}$$

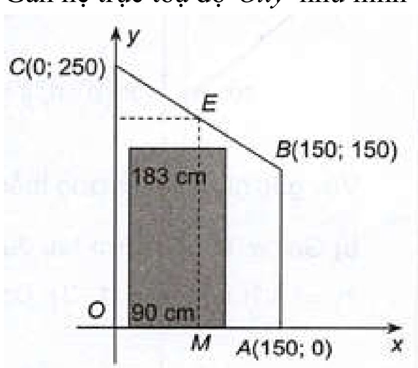
Vậy tại thời điểm 1 giờ, máy bay đã qua vĩ tuyến 17.

Câu 7. Nhà bạn Nam định đổi tủ lạnh và dự định kê vào vị trí dưới cầu thang. Biết vị trí định kê tủ lạnh có mặt cắt là một hình thang vuông với hai đáy lần lượt là $150\,cm$ và $250\,cm$, chiều cao là 150 cm (như hình vẽ). Bố mẹ bạn Nam định mua một $250\,cm$ tủ lạnh 2 cánh (Side by side) có chiều cao là 183 cm và bề ngang $90\,cm$. Bằng cách sử dụng toạ độ trong mặt phẳng, em hãy giúp Nam tính xem bố mẹ bạn Nam có thể kê vừa chiếc tủ lạnh vào vị trí cần kê không ?



Lời giải

Gắn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó để tận dụng tối đa chiều cao có thể khi kê tủ lạnh thì bố mẹ bạn Nam sẽ kê tủ sát vào trục Oy. Do đó để kê được một chiếc tủ lạnh 2 cánh với bề ngang 90 cm thì chiều cao của tủ phải nhỏ hơn tung độ của điểm E thuộc đường thẳng BC với hoành độ điểm E bằng 90.

Ta có $B(150;150), C(0;250) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-150;100) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}}=(100;150)$.

Phương trình đường thẳng BC là: $100(x-0)+150(y-250)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-750=0$.

Điểm E thuộc BC có hoành độ bằng 90 nên tung độ của E tính theo công thức $2\cdot 90+3y_E-750=0 \Rightarrow y_E=190$.

Do $183\,cm<190\,cm$ nên bố mẹ bạn Nam có thể kê chiếc tủ lạnh có bề ngang là $90\,cm$ và chiều cao $183\,cm$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ, một tín hiệu âm thanh phát đi từ một vị trí và được ba thiết bị ghi tín hiệu tại ba vị trí $O(0;0), A(1;0), B(1;3)$ nhận được cùng một thời điểm. Hãy xác định vị trí phát tín hiệu âm thanh.

Lời giải

Gọi điểm phát tín hiệu là $I(x;y)$.

Do vị trí |đều được ba thiết bị ghi tín hiệu tại O, A, B nhận được cùng một thời điểm nên: $IO = IA = IB$.

Ta có: $IO=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$

$IA=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$

$IB=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$

Vì $IO = IA = IB$, nên ta có hệ phương trình:

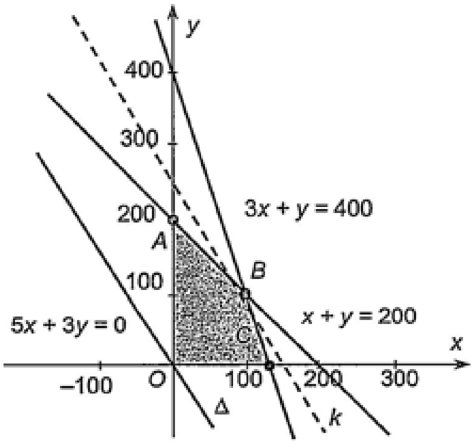
$$\begin{cases}(x-0)^2+(y-0)^2=(x-1)^2+(y-0)^2\\(x-1)^2+(y-0)^2=(x-1)^2+(y-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+1=0\\-6y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Câu 9. Trong một hoạt động ngoại khoá của trường, lớp Việt định mở một gian hàng bán bánh mì và nước khoáng. Biết rằng giá gốc một bánh mì là 15000 đồng, một chai nước là 5000 đồng. Các bạn dự kiến bán bánh mì với giá 20000 đồng/1 bánh mì và nước giá 8000 đồng/1 chai. Dựa vào thống kê số người tham gia hoạt động và nhu cầu thực tế các bạn dự kiến tổng số bánh mì và số chai nước không vượt qua 200. Theo quỹ lớp thì số tiền lớp Việt được dùng không quá 2000000 đồng. Hỏi lớp Việt có thể đạt được tối đa lợi nhuận là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số chiếc bánh mì và chai nước khoáng mà lớp Việt định mua để bán. Khi đó từ giả thiết ta có: $x, y \in \mathbb{N}$.



Mặt khác từ giả thiết ta có: $\begin{cases}x+y\le 200\\15000x+5000y\le 2000000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\le 200\\3x+y\le 400\end{cases}$

Nếu bán hết thì lợi nhuận lớp Việt có được là: $T=5x+3y$ (nghìn đồng).

Để tìm lợi nhuận lớn nhất ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $d=5x+3y$.

Trước hết, ta biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\\x+y\le 200\\3x+y\le 400\end{cases}$ trên mặt phẳng Oxy, là miền tứ giác $OABC$.

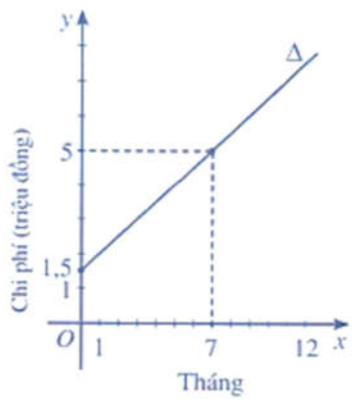
Khi đó các cặp $(x;y)$ thoả mãn đề bài là các cặp số tự nhiên sao cho điểm $M(x;y)$ nằm trong miền tứ giác $OABC$.

Ta có $d=5x+3y=\sqrt{34}\cdot\frac{|5x+3y|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\sqrt{34}\cdot d(M,\Delta)$, với Δ là đường thẳng có phương trình $5x+3y=0$.

Gọi k là đường thẳng qua M và song song với Δ. Khi đó ta có $d(M,\Delta)=d(k,\Delta)$. Do đó d lớn nhất tương ứng với khoảng cách giữa k và Δ lớn nhất. Từ hình vẽ ta có khoảng cách giữa k và Δ lớn nhất khi M trùng B. Do đó giá trị lớn nhất của d là $\sqrt{34}\cdot\frac{|5\cdot 100+3\cdot 100|}{\sqrt{5^2+3^2}}=800$.

Vậy lợi nhuận tối đa mà lớp Việt có thể đạt được là 800 nghìn đồng khi các bạn mua và bán được 100 chiếc bánh mì và 100 chai nước.

Câu 10. Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở Hình 38 biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) để tham gia một phòng thập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).



a. Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b. Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?

c. Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.

Lời giải

a. Δ qua $A(7;5)$ và $B(0;1,5)$, nhận $\overrightarrow{AB}(-7;-3,5)$ làm vecto chỉ phương có phương trình là:

$\Delta:\begin{cases}x=7-7t\\ y=5-3,5t\end{cases}$ (t là tham số).

b. Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa là: khoản phí tham gia ban đầu mà người tập phải trả.

c. Tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng là:

$x=12$ thay vào phương trình của Δ ta được:

$$\begin{cases}12=7-7t\\ y=5-3,5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12=7-7t\\ y=5-3,5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{-5}{7}\\ y=5-3,5\cdot\left(\frac{-5}{7}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{-5}{7}\\ y=7,5\end{cases}$$

Vậy Tổng chi phí mà người đo phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng là: 7,5 triệu đồng.

Câu 11. Có hai con tài A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki - lô - mét), sau khi xuất phát t (giờ) ($t\ge 0$), vị trí của tàu A có tọa độ được xác định bởi công thức: $\begin{cases}x=3-33t\\ y=-4+25t\end{cases}$, vị trí của tàu B có tọa độ là (4-30t;3-40t)

a. Tính cosin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.
b. Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhất?
c. Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Lời giải

a. Giả sử đường đi của tàu A là $(d_1) \Rightarrow (d_1): \begin{cases} x = 3 - 33t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$; đường đi của tàu A là (d_2)

$\Rightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4 - 30t \\ y = 3 - 40t \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{u_{d_1}} = (-33; 25); \overrightarrow{u_{d_2}} = (-30; -40)$

$$\cos\left(\overrightarrow{u_{d_1}, u_{d_1}}\right) = \frac{|-33.(-30) + 25 \cdot (-40)|}{\sqrt{(-33)^2 + 25^2} \cdot \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2}} = \frac{1990}{2070,024154} \approx 0,96$$

b. Kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhất, khi hai tàu gặp nhau.

Phương trình tham số của $(d_1): \begin{cases} x = 3 - 33t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình tổng quát $(d_1): 25x + 33y + 57 = 0$

Phương trình tham số của $(d_2): \begin{cases} x = 4 - 30t \\ y = 3 - 40t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình tổng quát $(d_2): 40x - 30y - 70 = 0$

Xét phương trình tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 có:

$$\begin{cases} 25x + 33y + 57 = 0 \\ 40x - 30y - 70 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{69} \\ y = \dfrac{-403}{207} \end{cases}$$

Thay vào phương trình tham số của (d_1) ta được $\begin{cases} \dfrac{20}{69} = 3 - 33.t \\ \dfrac{-403}{207} = -4 + 25t \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{17}{207} = \dfrac{340}{69} \approx 4,93$ (phút)

Vậy hai tàu gần nhất sau khi xuất phát khoảng 4,93 phút.

c. Khi tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu $\Rightarrow A(3; -4)$. Khi đó khoảng cách ngắn nhất giữa tàu A và tàu $B = d\left(A_{,}(d_2)\right)$

Vì $(d_2): \begin{cases} x = 4 - 30t \\ y = 3 - 40t \end{cases} \Rightarrow (d_2)$ qua $B(4;3)$, nhận vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{d_2}} = (40; -30)$

$\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của (d): $40(x-4) - 30(y-3) = 0$ hay (d): $40x - 30y - 70 = 0$

$$d(A; d_2) = \frac{|40.3 - 30.(-4) - 70|}{\sqrt{40^2 + (-30)^2}} = \frac{170}{50} = 3,4$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng $3,4\,cm$.

Câu 12. Có hai tàu điện ngầm A và B chạy trong nội đô thành phố cùng xuất phát từ hai ga, chuyển động đều theo đường thẳng. Trên màn hình ra đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), sau khi xuất phát t (giờ) ($t \geq 0$), vị trí của tàu A có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 7 + 36t \\ y = -8 + 8t \end{cases}$, vị trí của tàu B có toạ độ là $(9 + 8t; 5 - 36t)$.

a) Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

Lời giải

a) Tàu A di chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\vec{u}_1=(36;8)$; tàu Bdi chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\vec{u}_2=(8;-36)$. Gọi φ là góc giữa hai đường đi của hai tàu.

Ta có: $\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|\cdot\left|\vec{u}_2\right|}=\dfrac{|36\cdot 8+8\cdot(-36)|}{\sqrt{36^2+8^2}\cdot\sqrt{8^2+(-36)^2}}=0$.

b) Vị trí của tàu A sau khi xuất phát t (giờ) là điểm M có toạ độ là $(7+36t;-8+8t)$. Vị trí của tàu B sau khi xuất phát t (giờ) là điểm N có toạ độ là $(9+8t;5-36t)$. Do đó $\overrightarrow{MN}=(2-28t;13-44t)$. Suy ra

$$MN=\sqrt{(2-28t)^2+(13-44t)^2}=\sqrt{2720\left(t-\frac{157}{680}\right)^2+\frac{4761}{170}}\geq\sqrt{\frac{4761}{170}}$$

$$\approx 5,29(km).$$

MN nhỏ nhất bằng xấp xỉ 5,29 khi $t=\dfrac{157}{680}$ (giờ).

Như vậy, sau $\dfrac{157}{680}$ giờ di chuyển thì hai tàu gần nhau nhất và cách nhau khoảng $5,29\,km$.

Câu 13. Một người đang viết chương trình cho trò chơi bóng đá rô bốt. Gọi $A(-1;1),B(9;6),C(5;-3)$ là ba vị trí trên màn hình.

a. Viết phương trình các đường thẳng AB,AC,BC.

b. Tính góc hợp bởi hai đường thẳng AB và AC.

c. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

Lời giải

a. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(10;5),\overrightarrow{AC}=(6;-4),\overrightarrow{BC}=(-4;-9)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua điểm $A(-1;1)$ và nhận $\overrightarrow{n_1}=(5;-10)$ là vectơ pháp tuyến là: $5(x+1)-10(y-1)=0\Leftrightarrow 5x-10y+15=0\Leftrightarrow x-2y+3=0$

Phương trình đường thẳng AC đi qua điểm $A(-1;1)$ và nhận $\overrightarrow{n_2}=(4;6)$ là vectơ pháp tuyến là: $4(x+1)+6(y-1)=0\Leftrightarrow 4x+6y-2=0\Leftrightarrow 2x+3y-1=0$

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm $B(9;6)$ và nhận $\overrightarrow{n_3}=(9;-4)$ là vectơ pháp tuyến là: $9(x-9)-4(y-6)=0\Leftrightarrow 9x-4y-57=0$

b. $\cos(AB,AC)=\dfrac{|1\cdot 2+(-2)\cdot 3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{65}}\Rightarrow(AB,AC)\approx 60^\circ 15'$.

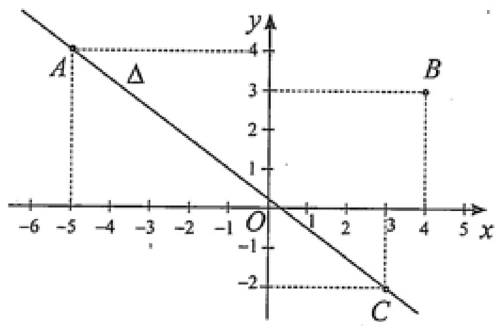
c. $d(A;BC)=\dfrac{|9.(-1)-4.1-57|}{\sqrt{9^2+(-4)^2}}=\dfrac{70}{\sqrt{97}}$

Câu 14. Một trạm viễn thông S có toạ độ $(5;1)$. Một người đang ngồi trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng Δ có phương trình $12x+5y-20=0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S. Biết rằng mỗi đơn vị độ dài tương ứng với $1km$.

Lời giải

Khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S chính là khoảng cách từ S đến đường thẳng Δ. Ta có: $d(S,\Delta)=\dfrac{|12.5+5.1-20|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{45}{13}\approx 3,46(km)$.

Câu 15. Có hai con tàu cùng chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình rađa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên hai trục tính theo kilômét), tàu số 1 chuyển động đều theo đường thẳng Δ từ vị trí A đến vị trí C. Tàu số 2 sắp hết nhiên liệu, đang ở vị trí B muốn gặp tàu số 1 để tiếp nhiên liệu. Hỏi tàu số 2 phải đi đoạn đường ngắn nhất là bao nhiêu kilômét?



A. $7,8\,km$.
B. $5,1\,km$.
C. $4,6\,km$.
D. $3,4\,km$.

Lời giải

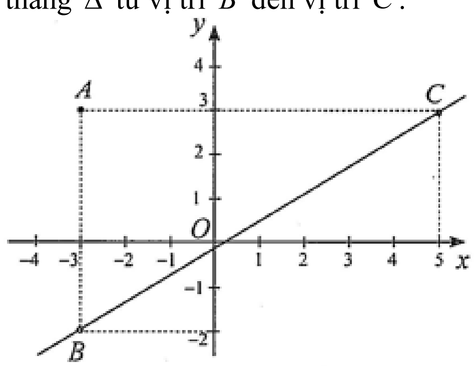
Ta có $A(-5;4), B(4;3), C(3;-2)$. Vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=\overrightarrow{AC}=(8;-6)=2(4;-3)$. Suy ra vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}=(3;4)$.

Phương trình của đường thẳng Δ là $3(x+5)+4(y-4)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-1=0$.

Đoạn đường ngắn nhất tàu số 2 phải đi để gặp tàu số 1 là: $d(B;\Delta)=\dfrac{|3\cdot 4+4\cdot 3-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4,6(km)$.

Câu 16. Có hai tàu cá A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình rađa của trạm kiểm soát có hệ trục toạ độ Oxy, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét và trạm kiểm soát coi là gốc toạ độ O. Tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu cá A có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x=-3+3t \\ y=3-t \end{cases}$

Tàu cá B di chuyển theo đường thẳng Δ từ vị trí B đến vị trí C.



a) Viết phương trình đường đi Δ của tàu cá B.
b) Tính góc giữa hai đường đi của hai tàu cá.
c) Nếu tàu cá A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu cá B di chuyển thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Ta có $B(-3;-2), C(5;3)$ suy ra phương trình của Δ là $5x-8y-1=0$.
b) Vectơ chỉ phương của hai đường đi của hai tàu cá là
$\overrightarrow{u_1}=(3;-1), \overrightarrow{u_2}=(8;5)$. Gọi α là góc giữa hai đường đi của hai tàu cá.

$\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \dfrac{|3\cdot 8+(-1)\cdot 5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{8^2+5^2}} = \dfrac{19}{\sqrt{890}} \Rightarrow \alpha \approx 50,44^\circ$.

c) Ta có $A(-3;3)$. Suy ra $d(A;\Delta) = \dfrac{|5\cdot(-3)-8\cdot 3-1|}{\sqrt{5^2+(-8)^2}} = \dfrac{40}{\sqrt{89}}$.

Câu 17. Chuyển động của vật thể M được thể hiện trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Vật thể M khởi hành từ điểm $A(5;3)$ và chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc là $\vec{v}(1;2)$.

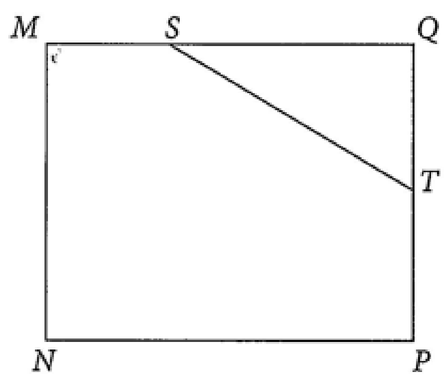
a) Hỏi vật thể M chuyển động trên đường thẳng nào?
b) Xác định toạ độ của vật thể M tại thời điểm $t(t>0)$ tính từ khi khởi hành.
c) Hỏi khi $t=5$ thì vật thể M chuyển động được quãng đường dài bao nhiêu?

Lời giải

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng biểu diễn chuyển động của vật thể là $\vec{v}(1;2)$, do đó đường thẳng này có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(2;-1)$. Mặt khác, đường thẳng này đi qua điểm $A(5;3)$ nên có phương trình là: $2(x-5)-(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-7=0$.
b) Vật thể khởi hành từ điểm $A(5;3)$ và chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc là $\vec{v}(1;2)$ nên vị trí của vật thể tại thời điểm $t(t>0)$ có toạ độ là: $\begin{cases} x=5+t \\ y=3+2t \end{cases}$

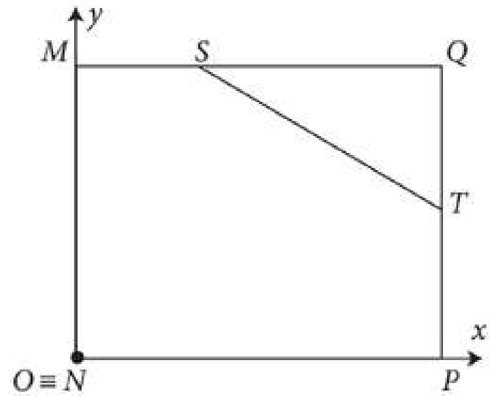
c) Gọi B là vị trí của vật thể tại thời điểm $t=5$. Do đó, toạ độ của điểm B là: $\begin{cases} x_B=5+5=10 \\ y_B=3+2\cdot 5=13 \end{cases}$

Câu 18. Nhà Nam có một ao cá dạng hình chữ nhật $MNPQ$ với chiều dài $MQ=30\,m$, chiều rộng $MN=24\,m$. Phần tam giác QST là nơi nuôi ếch, $MS=10\,m, PT=12\,m$ (với S, T lần lượt là các điểm nằm trên cạnh MQ, PQ) (xem hình bên dưới).



a) Chọn hệ trục tọ độ Oxy, có điểm O trùng với điểm N, các tia Ox, Oy tương ứng trùng với các tia NP, NM, mỗi đơn vị độ dài trên mặt phẳng toạ độ tương ứng với $1m$ trong thực tế. Hãy xác định tọa độ của các điểm M,N,P,Q,S,T và viết phương trình đường thẳng ST.
b) Nam đứng ở vị trí N câu cá và có thể quăng lưỡi câu xa 21,4 m. Hỏi lưỡi câu có thể rơi vào nơi nuôi ếch hay không?

Lời giải



a) $MN = 24m$ và $N(0;0)$ nên $M(0;24).NP = MQ = 30m$ nên $P(30;0)$.
Q và M có cùng tung độ, Q và P có cùng hoành độ nên $Q(30;24)$.
S và M có cùng tung độ, $MS = 10m$ nên $S(10;24)$.
T và P có cùng hoành độ, $PT = 12m$ nên $T(30;12)$.
Đường thẳng ST có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{ST} = (20;-12)$ nên nhận $\vec{n} = (3;5)$ làm vectơ pháp tuyến. Do đó, phương trình đường thẳng ST là: $3(x-10)+5(y-24)=0 \Leftrightarrow 3x+5y-150=0.$

b) Khoảng cách tù điểm $N(0;0)$ đến đường thẳng ST là: $\dfrac{|3\cdot 0+5\cdot 0-150|}{\sqrt{3^2+5^2}} \approx 25,72 > 21,4.$

Vì Nam quăng lưỡi câu xa $21,4m$ nên lưỡi câu không thể rơi vào nơi nuôi ếch.

Câu 19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vị trí của một chất điểm K tại thời điểm $t(0 \le t \le 180)$ có toạ độ là $\left(3+2\cos t^{\circ};4+2\sin t^{\circ}\right)$.

a) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của chất điểm K.
b) Tìm quỹ đạo chuyển động của chất điểm K.

Lời giải

a) Vị trí ban đầu của chất điểm $K(t=0)$ là: $\begin{cases} x = 3+2\cos 0^{\circ} = 5 \\ y = 4+2\sin 0^{\circ} = 4 \end{cases}$.

Vị trí kết thúc của chất điểm $K(t=180)$ là: $\begin{cases} x = 3+2\cos 180^{\circ} = 1 \\ y = 4+2\sin 180^{\circ} = 4 \end{cases}$.

b) Ta có: $\begin{cases} x = 3+2\cos t^{\circ} \\ y = 4+2\sin t^{\circ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2\cos t^{\circ} \\ y-4 = 2\sin t^{\circ} \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2 = 4$.

Vậy chất điểm K chuyển động theo quỹ đạo đường tròn $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=2$.

Câu 20. Có hai con tàu A, B xuất phát từ hai bến, chuyển động theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra-đa của trạm điều khiển (xem như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính bằng ki-lô-mét), tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu A có tọa độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 3-33t \\ y = -4+25t \end{cases}$; vị trí tàu B có tọa độ là $(4-30t;3-40t)$.

a) Tính gần đúng côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A, B.
b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát, hai tàu gần nhau nhất?
c) Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Hai đường đi (giả sử là hai đường thẳng d_1, d_2) của hai tàu có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-33; 25), \vec{u}_2 = (-30; -40)$; côsin góc tạo bởi hai đường thẳng là:

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|-33 \cdot (-30) + 25(-40)|}{\sqrt{(-33)^2 + 25^2} \cdot \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2}} \approx 0,00483.$$

b) Tại thời điểm t, vị trí tàu A là $M(3-33t; -4+25t)$, vị trí của tàu B là $N(4-30t; 3-40t)$. Ta có

$MN = \sqrt{(1+3t)^2 + (7-65t)^2} = \sqrt{4234t^2 - 904t + 50}$.

MN nhỏ nhất khi hàm bậc hai $f(t) = 4234t^2 - 904t + 50$ đạt giá trị nhỏ nhất, lúc đó:

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-904}{2.4234} = \frac{226}{2117} \approx 0,107$ (giây).

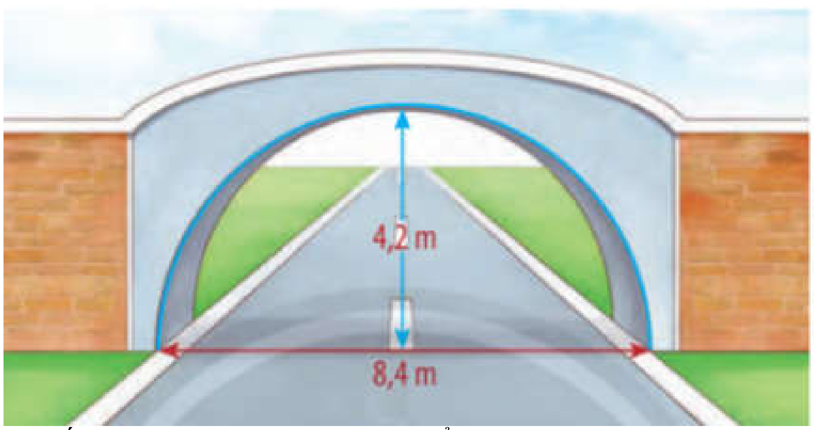
c) Khi tàu A đứng yên, vị trí ban đầu của nó có tọa độ $P(3; -4)$; vị trí tàu B ứng với thời gian t là $Q(4-30t; 3-40t)$;

$PQ = \sqrt{(1-30t)^2 + (7-40t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 620t + 50}$.

Đoạn PQ ngắn nhất ứng với $t = -\frac{b}{2a} = \frac{620}{2.2500} = \frac{31}{250} = 0,124$ (giây).

Khi đó : $PQ_{\min} = \sqrt{2500 \cdot (0,124)^2 - 620 \cdot (0,124) + 50} = \frac{17}{5} = 3,4(km)$.

Câu 21. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng $8,4\,m$, cao $4,2\,m$ như Hình. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn xe ra vào.

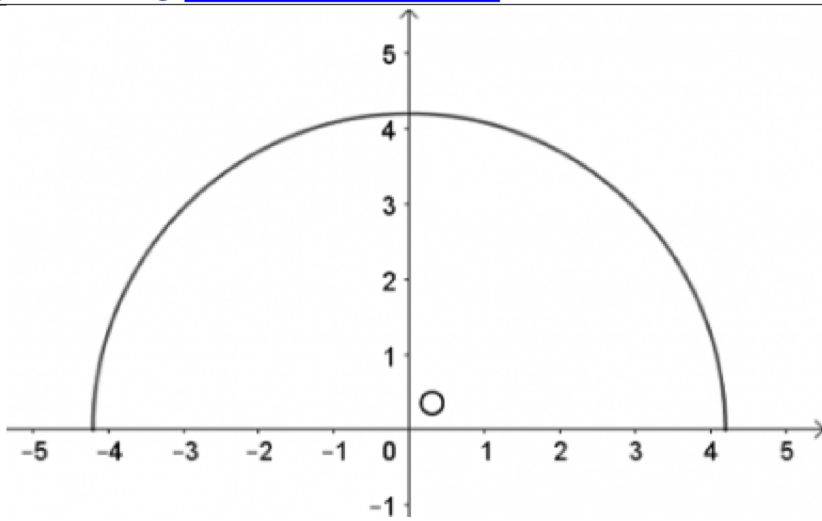


a. Viết phương trình mô phỏng cái cổng.

b. Một chiếc xe tải rộng 2,2 m và cao $2,6m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?

Lời giải

a. Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ



Ta có phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=4,2$ là: $x^2+y^2=17,64$

$\Rightarrow$ Phương trình mô phỏng cái cổng là: $x^2+y^2=17,64(y \geq 0)$

b. Thay $x=2,2$ vào phương trình đường tròn, ta được $y=\sqrt{17,64-2,2^2} \approx 3,58>2,6$

Vậy xe tải rộng $2,2m$ và cao $2,6m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng.

Câu 22. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 6,8 m, cao 3,4 m. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng;

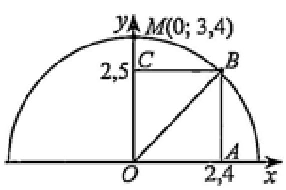
b) Một chiếc xe tải rộng $2,4m$ và cao $2,5m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng được hay không?

Lời giải

a) Chọn hệ tọa độ sao cho tâm của cái cổng hình bán nguyệt có tọa độ $(0;0)$ và đỉnh của cổng có toạ độ $M(0;3,4)$.

Ta có phương trình mô phỏng của cổng là: $x^2+y^2=3,4^2(y>0)$.

b) Gọi $OABC$ là thiết diện của xe tải (Hình 1).

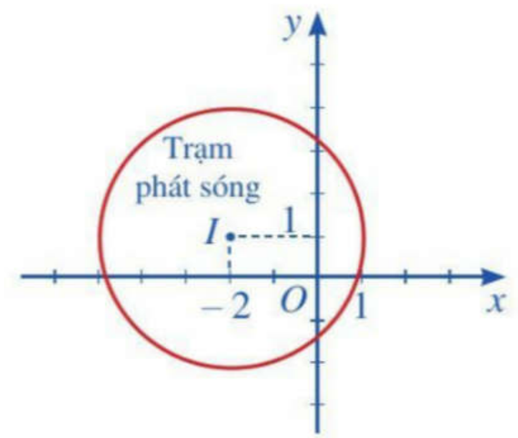


Hình 1

Ta có: $OB=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{2,4^2+2,5^2} \approx 3,5(m)>R=3,4(m)$.

Vậy nếu đi đúng làn đường quy định thì xe tải không thể đi qua cổng.

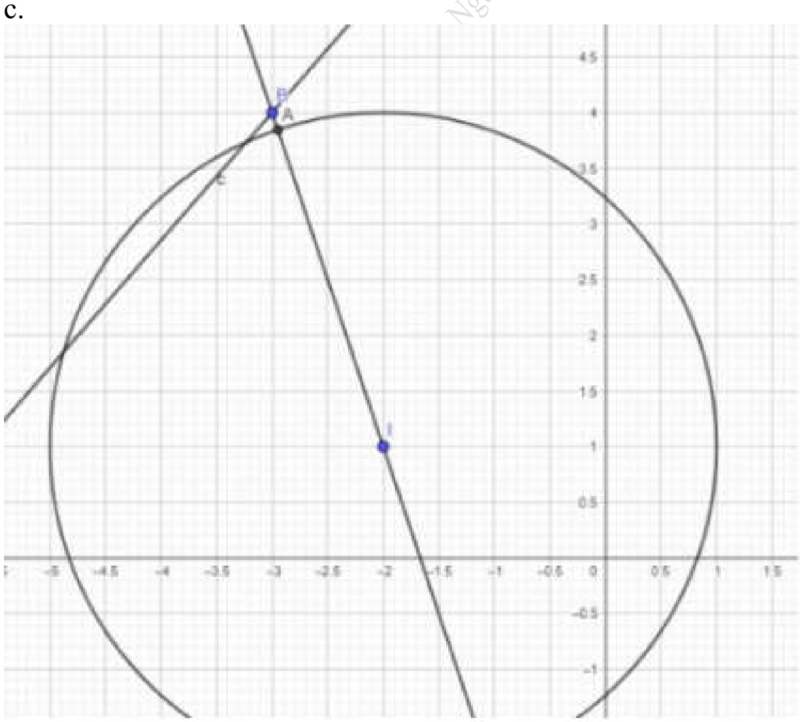
Câu 23. Hình mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có toạ độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).



a. Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng $3km$.
b. Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(-1;3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.
c. Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

a. Đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng đi qua tâm I(-2;1), có bán kính phủ sóng $3km$ nên phương trình đường tròn đó là:
$(x+2)^2+(y-1)^2=9$
b. Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $M(-1;3)$
$\Rightarrow IM=\sqrt{(-1-(-2))^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}\approx 3,6>R$
$\Rightarrow$ Người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(-1;3)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.
c.



Giả sử vị trí đứng của người đó là $B(-3;4)$.
(BI) qua I $(-2;1)$, nhận vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BI}}\perp\overrightarrow{BI}(1;-3)\Rightarrow\overrightarrow{n_{BI}}(3;1)$
$\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của $(BI):3(x+2)+1(y-1)=0$
hay (BI): $3x+y+5=0$

Gọi A là giao điểm của đường tròn tâm I và (BI)

$\Rightarrow$ Khoảng cách ngắn nhất để người đó di chuyển được từ vị trí $B(-3;4)$ tới vùng phủ sóng là BI.

Tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+y+5=0 \\ (x+2)^2+(y-1)^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x-5 \\ (x+2)^2+(-3x-5-1)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x-5 \\ (x+2)^2+(-3x-6)^2=9 \end{cases}$$

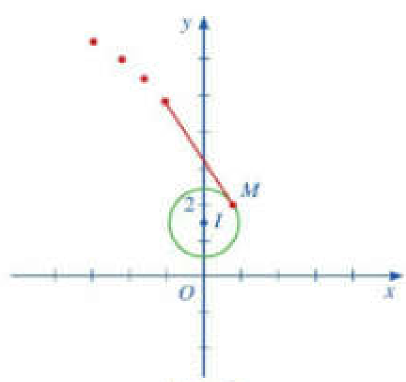
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x-5 \\ (x+2)^2+9(x+2)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x-5 \\ (x+2)^2=\dfrac{9}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x-5 \\ x+2=\dfrac{-3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{10+9\sqrt{10}}{10} \\ x=-\dfrac{20+3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{\left(-\dfrac{20+3\sqrt{10}}{10}+2\right)^2+\left(\dfrac{10+9\sqrt{10}}{10}-1\right)^2}=3$$

Câu 24. Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};2\right)$, đĩa được ném đi (Hình 47). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?

(Nguồn: https://shutterstock.com)



Hình 47

Lời giải

Phương trình đường tròn tâm $I\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 là: $x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

Phương trình Δ mô tả quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa chính là phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};2\right)$:

Δ qua $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};2\right)$, nhận vecto $\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};\dfrac{1}{2}\right)$ làm vecto pháp tuyến.

$\Rightarrow (\Delta): \dfrac{\sqrt{39}}{10}\cdot\left(x-\dfrac{\sqrt{39}}{10}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot(y-2)=0$

hay $(\Delta): \dfrac{\sqrt{39}}{10}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{139}{100}=0$

Câu 25. Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t\,(0\le t\le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $\left(2+\sin t^0;4+\cos t^0\right)$.

a. Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.
b. Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Lời giải

a. Vị trí ban đầu của vật thể là tại thời điểm $t=0$, nên tọa độ của điểm là: $(2+\sin 0^\circ;4+\cos 0^\circ)=(2;5)$

Vị trí kết thúc của vật thể là tại thời điểm $t=180$, nên tọa độ của điểm là: $(2+\sin 180^\circ;4+\cos 180^\circ)=(2;3)$

b. Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc vào quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Ta có $x=2+\sin t^0$ và $y=4+\cos t^0$

$\Rightarrow x-2=\sin t^0$ và $y-4=\cos t^0$

Mà $\sin^2 t^o+\cos^2 t^o=1$

Nên $(x-2)^2+(y-4)^2=1$

Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thể là đường tròn có tâm $I(2;4)$ và bán kính bằng 1.

Câu 26. Vị trí của một chất điểm M tại thời điểm t (t trong khoảng thời gian từ 0 phút đến 180 phút) có toạ độ là $\left(3+5\sin t^\circ;4+5\cos t^\circ\right)$. Tìm toạ độ của chất điểm M khi M ở cách xa gốc toạ độ nhất.

Lời giải

Từ cách xác định tọ độ của chất điểm M ta có $\begin{cases} x_M=3+5\sin t^\circ \\ y_M=4+5\cos t^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M-3=5\sin t^\circ \\ y_M-4=5\cos t^\circ \end{cases} \Rightarrow \left(x_M-3\right)^2+\left(y_M-4\right)^2=25.$

Vậy chất điểm M luôn thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và có bán kính $R=5$. Mặt khác gốc toạ độ O cũng thuộc đường tròn (C). Do đó ta có $OM\le 2R=10$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi OM là đường kính của đường tròn (C), nghĩa là / là trung điểm của OM, điều đó tương đương với $\begin{cases} x_M=2x_1-x_O=6 \\ y_M=2y_1-y_O=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \sin t^\circ=\dfrac{3}{5}\cos t^\circ=\dfrac{4}{5} \right.$ (có $t\in(0;180)$ thoả mãn hệ).

Vậy $M(6;8)$.

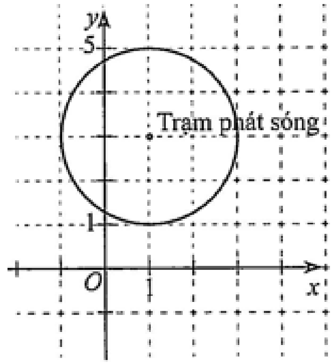
Câu 27. Một vật chuyển động tròn đều chịu tác động của lực hướng tâm, quỹ đạo chuyển động của vật trong mặt phẳng toạ độ Oxy là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=100$. Vật chuyển động đến điểm $M(8;6)$ thì bị bay ra ngoài. Trong những giây đầu tiên sau khi vật bay ra ngoài, vật chuyển động trên đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải

Vecto pháp tuyến của tiếp tuyến là: $\overrightarrow{OM}=(8;6)$.

Phương trình của tiếp tuyến là: $8(x-8)+6(y-6)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-50=0$.

Câu 28. Hình mô phỏng một trạm thu phát sóng wifi chuyên dụng tầm xa đặt ở vị trí I có tọa độ $(1;3)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là ki-lô-mét).



a) Viết phương trình đường tròn để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng $2km$.
b) Nếu người dùng điện thoại ở toạ độ $(2;2)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.

Lời giải

a) Phương trình của đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là: $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

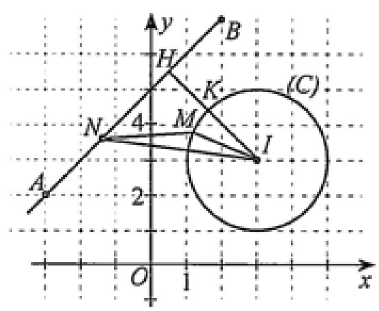
b) Khoảng cách từ tâm $I(1;3)$ đến điểm có toạ độ $(2;2)$ là: $\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$

Vì $\sqrt{2}<2$ nên điểm có toạ độ $(2;2)$ nằm trong đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng. Vậy người dùng có thể sử dụng dịch vụ của trạm.

Câu 29. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét), một chất điểm chuyển động đều luôn cách điểm $I(3;3)$ một khoảng bằng 2 .

a) Viết phương trình đường tròn mô tả quỹ đạo chuyển động của chất điểm trên.
b) Một chất điểm khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng, tại hai thời điểm, chất điểm đó ở vị trí $A(-3;2)$ và $B(2;7)$. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn hơn $1m$.

Lời giải



a) Quỹ đạo chuyển động của chất điểm thứ nhất là đường tròn (C) có phương trình chính tắc:
$(x-3)^2+(y-3)^2=4$.

b) Vì $\overrightarrow{AB}=(5;5)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB nên phương trình đường thẳng AB là:
$\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-2}{5} \Leftrightarrow x-y+5=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB.

Ta có: $IH=\dfrac{|3-3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}(m)$.

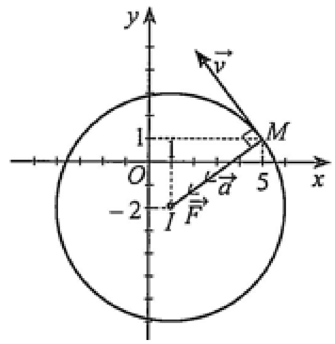
Vì $\dfrac{5}{\sqrt{2}}>2$, tức là $IH>R$ nên đường thẳng AB và đường tròn (C) không có điểm chung. Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng IH và đường tròn. Ta có: $HK=IH-IK=\dfrac{5}{\sqrt{2}}-1>1(m)$.

Xét M là điểm bất kì trên đường tròn, N là điểm bất kì trên đường thẳng AB.

Ta có: $MN \geq IN - IM, IM = IK, IN \geq IH \Rightarrow MN \geq IH - IK = HK > 1m$.

Vậy tại mọi thời điểm, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn hơn $1m$.

Câu 30. Một vật chuyển động tròn đều chịu tác động của lực hướng tâm, quỹ đạo chuyển động của vật trong mặt phẳng toạ độ Oxy là đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính $5dm$ (đơn vị của trục là đề-xi-mét). Vật chuyển động đến điểm $M(5;1)$ thì bị bay ra ngoài như Hình. Những giây đầu tiên sau khi vật bay ra ngoài, vật chuyển động theo đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đó.



Lời giải

Phương trình của đường tròn là $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5^2$.

Vectơ pháp tuyến của đường tiếp tuyến tại M là $\overrightarrow{IM} = (4;3)$.

Vậy phương trình của đường tiếp tuyến là: $4(x-5) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 23 = 0$.

Câu 31. Trên sân khấu, các bóng đèn thường chiếu sáng là một vùng diện tích hình tròn. Diễn viên chính đứng tại vị trí có toạ độ $I(3;4)$ và cũng chính là tâm của hình tròn với bán kính chiếu sáng là $2m$. Có ba diễn viên phụ ở ba vị trí $A(4;4)$; $B(5;2); C(15;5)$. Hỏi trong ba diễn viên phụ, diễn viên nào ở trong vùng chiếu sáng đó?

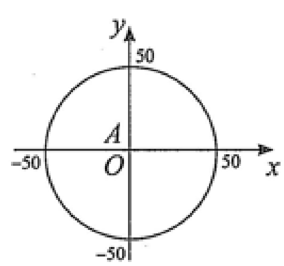
Lời giải

Phương trình vùng được chiếu sáng có dạng đường tròn là: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Do $(4-3)^2 + (4-4)^2 < 4, (5-3)^2 + (2-4)^2 = 4$, nên diễn viên phụ đứng tại vị trí A và B trong vùng sáng.

Tương tự ta có $(15-3)^2 + (5-4)^2 > 4$ nên diễn viên phụ đứng tại vị trí C không trong vùng sáng.

Câu 32. Trên hòn đảo A, người ta đặt một trạm kiểm soát. Màn hình rađa của trạm kiểm soát có hệ trục toạ độ Oxy, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét và trạm kiểm soát coi là gốc toạ độ O. Nếu tàu cá di chuyển trong phạm vi cách trạm $50km$ thì sẽ hiển thị trên màn hình rađa. Một tàu cá khởi hành từ hòn đảo B lúc 8 giờ. Sau thời gian t (giờ), vị trí của tàu cá được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 30 - 20t \\ y = 80 - 20t \end{cases}$



a) Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài vùng tín hiệu của rađa.

b) Tìm vị trí của tàu cá lúc 9 giờ 30 phút. Thời điểm này tàu cá đã xuất hiện trên màn hình rađa chưa?

c) Lúc mấy giờ tàu cá gần trạm kiểm soát nhất? Tính khoảng cách giữa tàu cá và trạm kiểm soát vào thời điểm đó.

Lời giải

a) Ranh giới bên ngoài vùng tín hiệu của rađa là đường tròn tâm O và bán kính 50 có phương trình là $x^2+y^2=50^2$.
b) Lúc 9 giờ 30 phút tàu cá rời đảo B được 1,5 giờ. Khi đó vị trí của tàu cá là
$$\begin{cases} x=30-20\cdot 1,5=0 \\ y=80-20\cdot 1,5=50. \end{cases}$$
Suy ra $M(0;50)$ cách trạm kiểm soát $50km$ nên tàu cá đã xuất hiện trên màn hình rađa.
c) Tàu cá di chuyển trên đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=30-20t \\ y=80-20t \end{cases}$.
Gọi d là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ. Vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n}=(-20;-20)$. Phương trình của d là $-20(x-0)-20(y-0)=0 \Rightarrow x+y=0$.
Giả sử d cắt Δ tại H. Suy ra H là vị trí tàu cá gần trạm kiểm soát nhất.
Ta có $30-20t+80-20t=0 \Rightarrow t=2,75$. Suy ra $H=(-25;25)$.
Lúc 10 giờ 45 phút tàu cá gần trạm kiểm soát nhất.
Khoảng cách giữa tàu cá và trạm kiểm soát là $OH=25\sqrt{2}\approx 35,36km$.

Câu 33. Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A,B cách nhau $300km$. Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292000 km/s để một tàu thủy thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là $0,0005s$. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thủy thuộc đường hybebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômét.

Lời giải

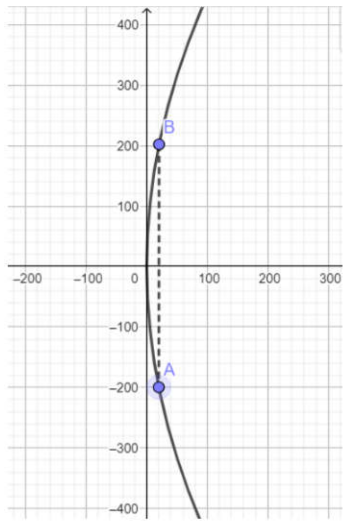
Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho A,B nằm trên trục Ox, tia Ox trùng với tia OB,O là trung điểm của AB. Nên tọa độ hai điểm là: $A(-150;0)$ và $B(150;0)$
Khi đó vị trí tàu thủy là điểm M nằm trên hypebol có 2 tiêu điểm là A và B.
Tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là $0,0005s$ nên ta có: $|MA-MB|=0,0005.292000=146km$. Gọi phương trình chính tắc của hypebol có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b>0$.
Do $|MA-MB|=146=2a \Leftrightarrow a=73$.
Do hai tiêu điểm là: $A(-150;0)$ và $B(150;0)$ nên $C=150$
$\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{17171}$
Vậy phương trình chính tắc của hypebol cần tìm là: $\frac{x^2}{5329}-\frac{y^2}{17171}=1$

Câu 34. Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A, điểm cuối là B, khoảng cách $AB=400m$. Đỉnh parabol (P) của khúc của cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A,B.

a. Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng $1m$ trên thực tế.
b. Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng $1km$ trên thực tế.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho đỉnh của parabol trùng với gốc tọa độ $O(0;0)$ (như hình vẽ).



a. Nếu 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng $1m$ trên thực tế thì tọa độ các điểm là: $A(20;-200)$ và $B(20;200)$ thuộc vào parabol có dạng $y^2=2px$

Thay tọa độ điểm A và ta có: $200^2=2p.20 \Rightarrow 2p=2000$

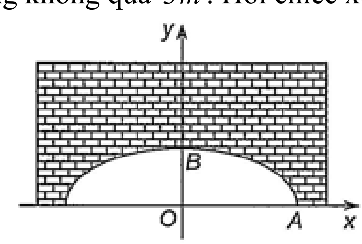
Vậy parabol có dạng: $y^2=2000\cdot x$

b. Nếu 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 km trên thực tế thì tọa độ các điểm là: $A(0,02;-0,2)$ và $B(0,02;0,2)$ thuộc vào parabol có dạng $y^2=2px$

Thay tọa độ điểm A và ta có: $0,2^2=2p.0,02 \Rightarrow 2p=2$

Vậy parabol có dạng: $y^2=2\cdot x$

Câu 35. Một người kĩ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là $12m$, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là $3m$. Người kĩ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao $2,8m$ thì có chiều rộng không quá $3m$. Hỏi chiếc xe tải có chiều cao $2,8m$ có thể đi qua hầm được không?

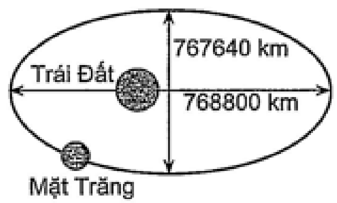


Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $a>b>0$. Do các điểm $B(0;3)$ và $A(6;0)$ thuộc (E) nên thay vào phương trình của (E) ta có $b=3$ và $a=6$. Suy ra phương trình của (E) là $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

Với những xe tải có chiều cao 2,8 m, chiều rộng của xe tải là 3 m, tương ứng với $x=1,5$. Thay vào phương trình của elip để ta tìm ra độ cao y của điểm M (có hoành độ bằng 1,5 thuộc (E)) so với trục Ox $y_M=3\cdot\sqrt{1-\frac{x_M^2}{16}}=3\cdot\sqrt{1-\frac{1,5^2}{16}}\approx 2,905>2,8.$

Câu 36. Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là $768800\,km$ và $767640\,km$. Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.



Lời giải

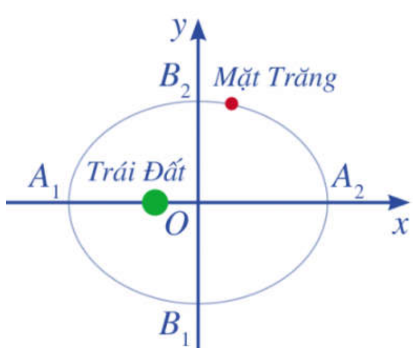
Vì $2a=768800$ và $2b=767640$ nên ta có $a=384400$ và $b=383820$.

Từ đó suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{384400^2-383820^2}\approx 21108$.

Vì vậy, khoảng cách lớn nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng là $a+c\approx 384400+21108=405508(km)$

và khoảng cách nhỏ nhất là $a-c\approx 384400-21108=363292(km)$.

Câu 37. Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip có $A_1A_2=768800\,km$ và $B_1B_2=767619\,km$ (Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus Real Mathematics, Real People, Cengage (Hình). Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Lời giải

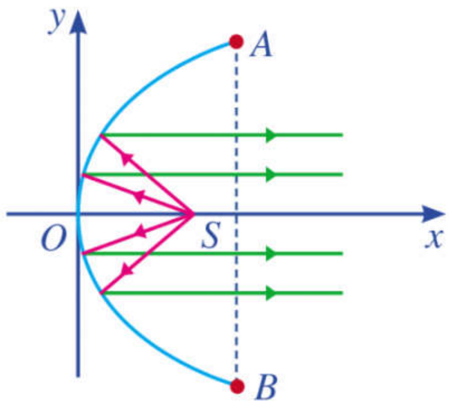
Có:

$A_1A_2=2a=768800\Rightarrow a=384400\Rightarrow a^2=384400^2$

$B_1B_2=2b=767619\Rightarrow b=383809,5\Rightarrow b^2=383809,5^2$

Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{384400^2}+\frac{y^2}{383809,5^2}=1$

Câu 38. Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol (Hình). Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB=40\,cm$ và chiều sâu $h=30\,cm$ (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Lời giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng: $y^2 = 2px(p > 0)$

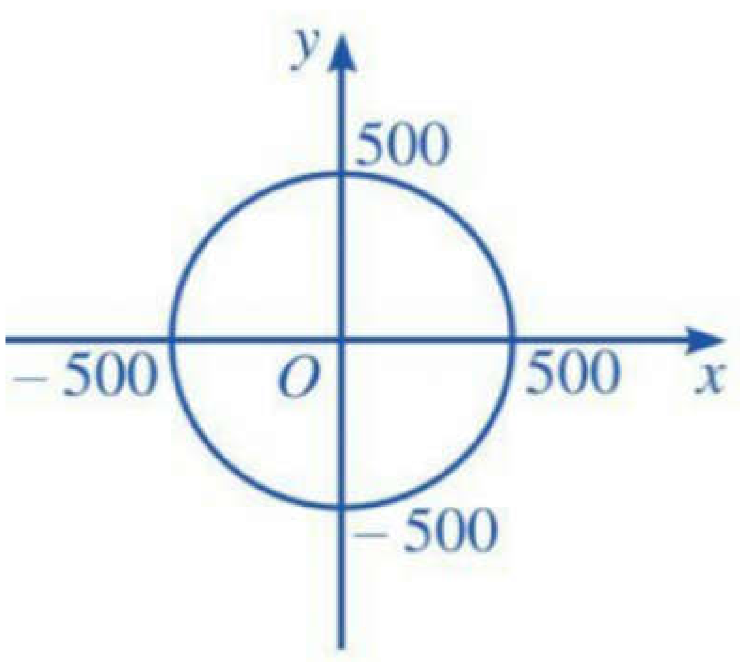
Vì $AB = 40$ nên khoảng cách từ A đến trục Ox là $\frac{40}{20} = 20$

$h =$ khoảng cách từ O đến $AB =$ khoảng cách từ A đến trục $Oy = 30$

$\Rightarrow$ Parabol đi qua $A(30;20) \Rightarrow 20^2 = 2p.30$ hay $p = \frac{20}{3}$

Vậy phương trình chính tắc của Parabol là: $y^2 = \frac{40}{3}x$

Câu 39. Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu sân bay A có hệ trục toạ độ Oxy (Hình), trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét và đài kiểm soát được coi là gốc toạ độ $0(0;0)$. Nếu máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát $500km$ thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa như một điểm chuyển động trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy.



Lời giải

Một máy bay khởi hành từ sân bay B lúc 14 giờ. Sau thời gian + (giờ), vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M có toạ độ như sau: $\begin{cases} x = \frac{1600}{3} - \frac{1400}{3}t \\ y = \frac{1900}{3} - \frac{1400}{3}t \end{cases}$

a. Tìm vị trí của máy bay lúc 14 giờ 30 phút. Thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra đa chưa?
b. Lúc mấy giờ máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất? Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.
c. Máy bay ra khỏi màn hình ra đa vào thời gian nào?

a. Lúc $14h30$ phút => Máy bay bay được $t = 30$ phút $= \frac{1}{2}$ giờ $\Rightarrow$ Tọa độ của máy bay khi đó là: $\begin{cases} x = \frac{1600}{3} - \frac{1400}{3} \cdot \frac{1}{2} = 300 < 500 \\ y = \frac{1900}{3} - \frac{1400}{3} \cdot \frac{1}{2} = 400 < 500 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra đa.

b. Gọi H là chân đường cao kẻ từ O đến đường thẳng (d):

$$\begin{cases} x = \frac{1600}{3} - \frac{1400}{3}t \\ y = \frac{1900}{3} - \frac{1400}{3}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H\left(\frac{1600}{3} - \frac{1400}{3}t; \frac{1900}{3} - \frac{1400}{3}t\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OH} = \left(\frac{1600}{3} - \frac{1400}{3}t; \frac{1900}{3} - \frac{1400}{3}t\right)$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$$

$$\left(\frac{1600}{3} - \frac{1400}{3}t\right) \cdot \left(\frac{-1400}{3}\right) + \left(\frac{1900}{3} - \frac{1400}{3}t\right) \cdot \left(\frac{-1400}{3}\right) = 0$$

$$\frac{3920000}{9}t = \frac{4900000}{9}$$

$t = \frac{5}{4} = 1,25 = 1$ giờ 15 phút

Vậy máy bay gần đài kiểm soát không lưu nhất lúc: 14 giờ $+1$ giờ 15 phút = 15h15 phút.
Khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó là:

$$|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{1600}{3} - \frac{1400}{3} \cdot 1,25\right)^2 + \left(\frac{1900}{3} - \frac{1400}{3} \cdot 1,25\right)^2} = 50\sqrt{2}$$

c. Gọi $M\left(\frac{1600}{3} - \frac{1400}{3}t; \frac{1900}{3} - \frac{1400}{3}t\right)$ là vị trí máy bay ra khỏi màn hình ra đa.

$\Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\left(\frac{1600}{3} - \frac{1400}{3} \cdot t\right)^2 + \left(\frac{1900}{3} - \frac{1400}{3} \cdot t\right)^2} > 500$. Khi đó ta có:

$$\sqrt{\frac{3920000}{9}t^2 - \frac{9800000}{9}t + \frac{6170000}{9}} > 500$$

$$\frac{3920000}{9}t^2 - \frac{9800000}{9}t + \frac{6170000}{9} > 250000$$

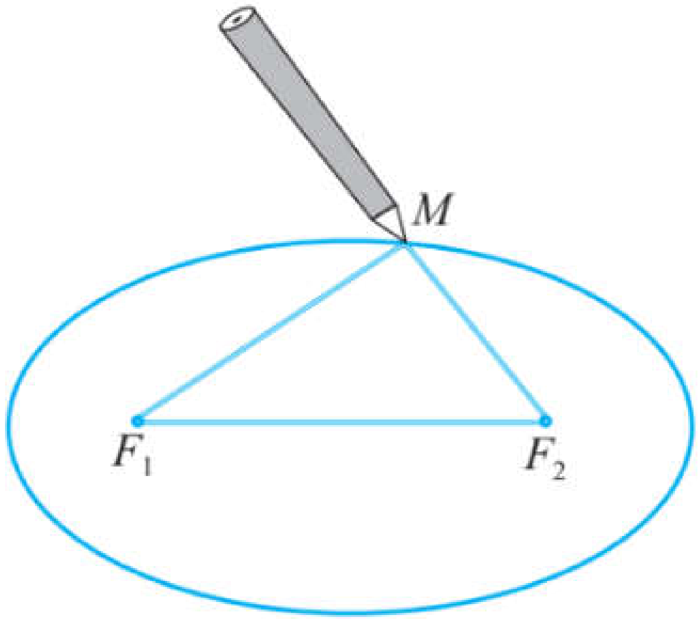
$$\frac{3920000}{9}t^2 - \frac{9800000}{9}t + \frac{3920000}{9} > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t < \frac{25 - 3\sqrt{65}}{2} \\ t > \frac{25 + 3\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$$

Câu 40. Để cắt một bảng quảng cáo hình elip có trục lớn là $80cm$ và trục nhỏ là $40cm$ từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước $80cmx40cm$, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:

- Chuẩn bị:
- Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.
- Thực hiện:

1. Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván).
2. Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh vào kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường elip (Xem minh họa trong Hình).



Phải ghim hai cái đinh các mép tấm ván ép bao nhiêu xentimet và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $2a = 80cm, 2b = 40cm \Rightarrow a = 40cm, b = 20cm$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{40^2 - 20^2} = 20\sqrt{3}(cm)$

$\Rightarrow$ Hai cái đinh cách mép chiều dài của tâm ván là $20cm$, cách mép chiều rộng của tấm ván là $40 - 20\sqrt{3} \approx 5,36cm$.

Vòng dây có độ dài là $2a + 2c = 2.40 + 2.20\sqrt{3} \approx 74,64cm$.

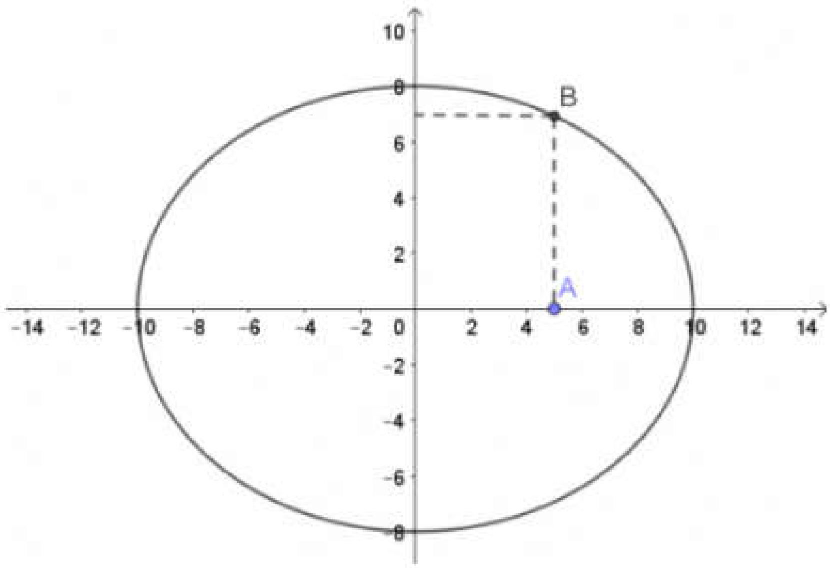
Câu 41. Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 8m, rộng 20m (Hình).

a. Chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.

b. Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 5m đến nóc nhà vòm.

Lời giải

a. Chọn hệ tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $b=8m, 2a=20m \Rightarrow a=10m$

Vậy phương trình của elip (E) là: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

b. Điểm A cách chân tường $5m$ nên $A=(5;0)$. Ta có độ dài AB chính là khoảng cách từ điểm A đến nóc nhà vòm.

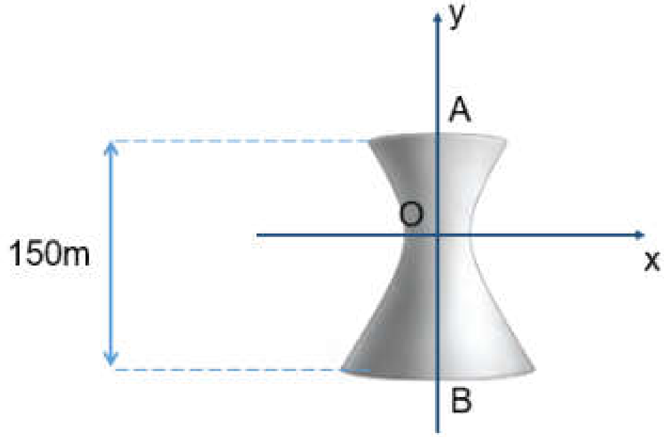
Gọi $B(5;y_B)$. Vì $B\in(E)$ nên thay tọa độ B vào phương trình (E), ta được:

$\frac{5^2}{100}+\frac{y_B^2}{64}=1 \Rightarrow y_B=4\sqrt{3}\approx 6,9$

Vậy $AB=6,9m$.

Câu 42. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình là $\frac{x^2}{28^2}-\frac{y^2}{42^2}=1$ (Hình). Biết chiều cao của tháp là $150m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tấm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Lời giải



Theo bài ra ta có: $OA + OB = 150\,m, OA = \dfrac{2}{3}OB \Rightarrow OA = 60\,m, OB = 90\,m \Rightarrow A(0;60), B(0;-90)$

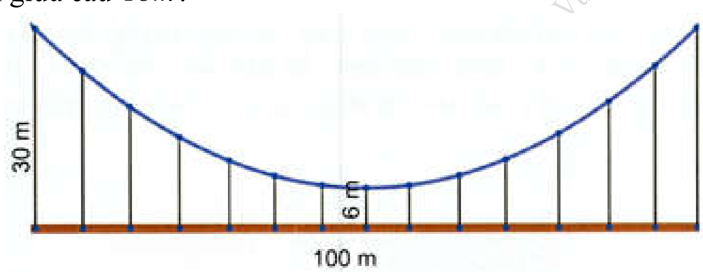
Thay $y = 60$ vào phương trình (H), ta được: $\dfrac{x^2}{28^2} - \dfrac{60^2}{42^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2384 \Leftrightarrow x = \pm 4\sqrt{149}$

$\Rightarrow$ Bán kính nóc bằng $4\sqrt{149}\,m$.

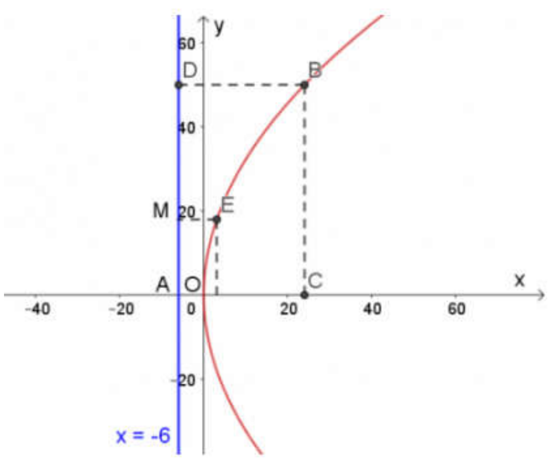
Thay $y = -90$ vào phương trình (H), ta được: $\dfrac{x^2}{28^2} - \dfrac{(-90)^2}{42^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4384 \Leftrightarrow x = \pm 4\sqrt{274}$

$\Rightarrow$ Bán kính đáy bằng $4\sqrt{274}\,m$.

Câu 43. Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài $100\,m$ và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là $30\,m$, thanh ngắn nhất là $6\,m$ (Hình). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu $18\,m$.



Lời giải



Theo bài ra ta có: $AO = 6\,m, AD = 50\,m, BD = 30\,m \Rightarrow$ điểm B có tọa độ $B(24;50)$.

Gọi phương trình của parabol (P) là $y^2 = 2px$.

Vì $B(24;50) \in (P)$ nên thay tọa độ điểm B vào phương trình (P), ta được:

$50^2 = 2\text{ p. }24 \Rightarrow p = \dfrac{625}{12}$

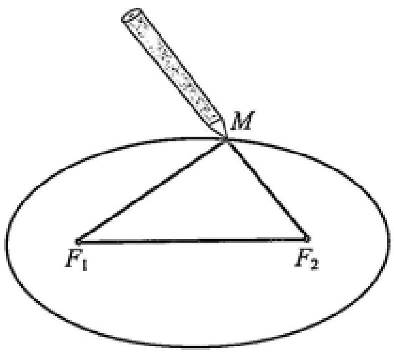
$\Rightarrow$ Phương trình (P) là: $y^2 = \dfrac{625}{6}x$

Ta có: Độ dài đoạn ME chính là chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu $18m$. Gọi $E = (m,18)$, vì $E \in (P)$ nên thay tọa độ E vào phương trình P, ta được: $18^2 = \dfrac{625}{6}.\ m$

$\Rightarrow m = 3{,}1104 \Rightarrow ME = 6 + 3{,}1104 = 9{,}1104(m)$

Vậy thanh cáp cách điểm giữa cầu $18m$ có chiều dài là $9{,}1104m$.

Câu 44. Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là $1m$ và trục nhỏ là $0,6m$ từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước $1m \times 0,6m$, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:



Hình 10

Chuẩn bị:

- Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.

Thực hiện:

- Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván.
- Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường mà ta gọi là đường elip. (Xem minh hoạ trong Hình 10).

Phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

Lời giải

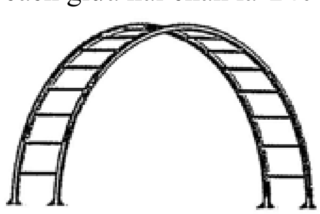
Ta có $2a = 1m = 100cm; 2b = 0,6m = 60cm$.

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 50^2 - 30^2 = 1600 \Rightarrow c = 40$.

Ta có $a - c = 10(cm)$ và $2a + 2c = 180(cm)$.

Vậy phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép $10cm$ và lấy vòng dây có độ dài là $180cm$ hay $1,8m$.

Câu 45. Thang leo gợn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao $100cm$ và khoảng cách giữa hai chân là $240cm$.


Hình 11

a) Hãy chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.

b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm Hinh 11 cách chân khung $20cm$ lên đến khung thép.

Lời giải

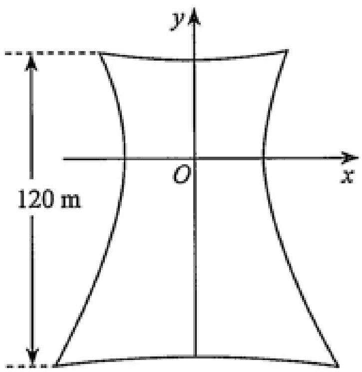
a) Phương trình chính tắc của elip là $\dfrac{x^2}{120^2} + \dfrac{y^2}{100^2} = 1$.

b) Thay $x = 120 - 20 = 100$ vào phương trình elip ta có: $\frac{100^2}{120^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 100^2\left(1 - \frac{100^2}{120^2}\right) \Rightarrow y \approx 55(cm)$.

Câu 46. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là $120\,m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Lời giải

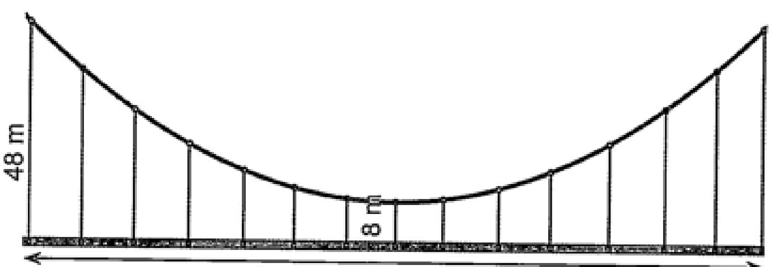
Gọi r và R lần lượt là bán kính nóc và bán kính đáy của tháp. Ta tính được khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $40\,m$ và khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy bằng $80\,m$.



Hình 1

Thay toạ độ 2 điểm $M(R;-80)$ và $N(r;40)$ vào phương trình hypebol ta tính được: $R = 30\sqrt{1 + \frac{(-80)^2}{50^2}} \approx 57(m); r = 30\sqrt{1 + \frac{40^2}{50^2}} \approx 38(m)$.

Câu 47. Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài $120\,m$ và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là $48\,m$, thanh ngắn nhất là $8\,m$ (Hình 12). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu $20\,m$.



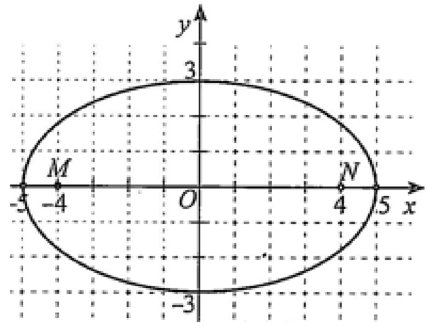
Hình 12

Lời giải

Ta chọn hệ toạ độ sao cho parabol có phương trình: $y^2 = 2px$ Thay toạ độ điểm $M(40;60)$ vào phương trình (1) ta tính được $p = \frac{60^2}{80} = 45$. Thay tọ độ điểm $N(x;20)$ vào phương trình $y^2 = 2.45$. x ta tính được $x = \frac{20^2}{90} \approx 4,44\,m$

Vậy chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu $20\,m$ là khoảng $12,44\,m$.

Câu 48. Trước một tòa nhà, người ta làm một cái hồ bơi có dạng hình elip với độ dài hai bán trục lần lượt là $3m$ và $5m$. Xét hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét) có hai trục tọa độ chứa hai trục của elip, gốc tọa độ O là tâm của elip (hình)



a) Lập phương trình chính tắc của elip.

b) Xét các điểm M, N cùng thuộc trục lớn của elip và đều cách O một khoảng bằng $4m$ về hai phía của O. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ mọi vị trí trên mép hồ (ứng với đường elip) đến M và N không đổi.

c) Một người đứng ở vị trí P cách O một khoảng bằng $6m$. Người đó đứng ở trong hồ hay ngoài hồ? Vì sao?

d) Xét vị trí C trên mép hồ cách trục lớn một khoảng bằng $2m$. Hỏi vị trí C cách trục nhỏ một khoảng bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Phương trình chính tác của đường elip là: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

b) Ta có: $a=5, b=3$ nên $c^2=a^2-b^2=25-9=16$, suy ra $c=4$.

Các tiêu điểm của elip có toạ độ là $(-4;0)$ và $(4;0)$.

Vậy M và N chính là các tiêu điểm của elip. Vì vậy, tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng $2a=10m$ không đổi.

c) Gọi giao điểm của đường thẳng OP và elip là Q.

Vì độ dài bán trục lớn là $5m$ nên $OQ \leq 5$. Suy ra $OQ < OP = 6m$.

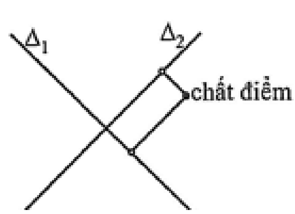
Vậy vị trí P ở ngoài hồ.

d) Giả sử $C(x_0;y_0)$. Ta có: $\begin{cases}\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1\\ |y_0|=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x_0^2}{25}+\frac{4}{9}=1\\ |y_0|=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x_0|=\frac{5\sqrt{5}}{3}\\ |y_0|=2\end{cases}$

Vậy C cách trục nhỏ một khoảng bằng $\frac{5\sqrt{5}}{3}m$.

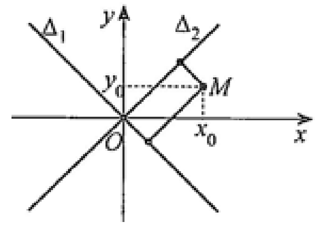
Câu 49. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.

Một chất điểm chuyển động trong một góc vuông tạo bởi Δ_1 và Δ_2 (Hình) có tính chất: ở mọi thời điểm, tích khoảng cách từ mỗi vị trí của chất điểm đến hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 luôn bằng 4. Chứng minh rằng chất điểm chuyển động trên một phần của đường hypebol.



Lời giải

Xét hệ trục toạ độ Oxy như Hình, trong đó các trục Ox, Oy lần lượt là các đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2. Phương trình hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\Delta_1: x+y=0$ và $\Delta_2: x-y=0$.



Giả sử chất điểm ở vị trí $M\left(x_0; y_0\right)$ và chỉ chuyển động trong một góc vuông tương ứng với miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$ (điểm có toạ độ $(1;0)$ thuộc miền nghiệm của cả hai bất phương trình $x+y>0$ và $x-y>0$.

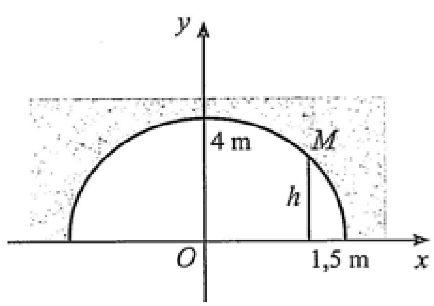
Khoảng cách từ M đến hai đường thẳng $\Delta_1: x+y=0$ và $\Delta_2: x-y=0$ lần lượt là:

$d\left(M, \Delta_1\right)=\frac{\left|x_0+y_0\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|x_0+y_0\right|}{\sqrt{2}}=\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}$; $d\left(M, \Delta_2\right)=\frac{\left|x_0-y_0\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|x_0-y_0\right|}{\sqrt{2}}=\frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $d\left(M, \Delta_1\right) \cdot d\left(M, \Delta_2\right)=\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}=\frac{x_0^2-y_0^2}{2}$. Do đó

$d\left(M, \Delta_1\right) \cdot d\left(M, \Delta_2\right)=4 \Leftrightarrow \frac{x_0^2-y_0^2}{2}=4 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{8}-\frac{y_0^2}{8}=1$. Vậy chất điểm M chuyển động trên một phần của đường hypebol $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

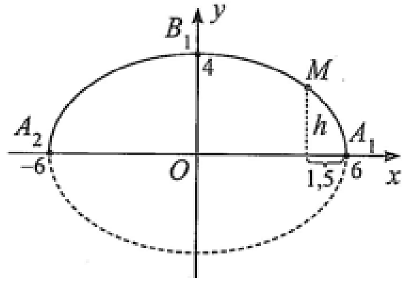
Câu 50. Một cây cầu bê tông bắc qua con sông rộng 12m, nhịp cuốn cầu có hình dạng nửa elip. Các kĩ sư đã thiết kế sao cho vị trí cao nhất của gầm cầu so với mặt nước là 4m. Tại vị trí cách bờ 1,5m, chiều cao h của gầm cầu là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến chữ số tập phân thứ nhất)?



A. 4,5m
B. 2,5m
C. 2,6m
D. 2,8m

Lời giải

Vì sông rộng $12m$ nên ta có toạ độ giao điểm giữa elip với trục hoành Ox là $A_1(6;0), A_2(-6;0)$. Mặt khác, vị trí cao nhất của gầm cầu so với mặt nước là $4m$ nên suy ra toạ độ giao điểm giữa elip với trục tung Oy là $B_1(0;4)$. Giả sử elip có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



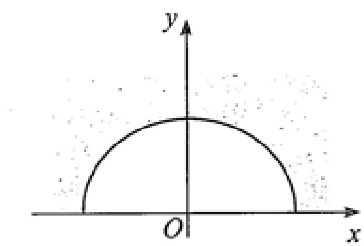
Với $A_1(6;0)$ suy ra $\frac{6^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1 \Rightarrow a^2=6^2 \Rightarrow a=6$.

Với $B_1(0;4)$ suy ra $\frac{0^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=4^2 \Rightarrow b=4$.

Do đó elip có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Gọi M là điểm thuộc elip ứng với chiều cao h. Suy ra toạ độ của $M(4,5;h)$.

Khi đó ta có $\frac{4,5^2}{6^2}+\frac{h^2}{4^2}=1 \Rightarrow \frac{h^2}{16}=\frac{7}{16} \Rightarrow h \approx 2,6(m)$. Đáp án là C.

Câu 51. Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là $20m$, mặt cắt đứng của đường hàm có dạng nửa elip (hình bên). Biết elip có tiêu cự bằng $10m$. Hỏi chiều cao của đường hầm là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?



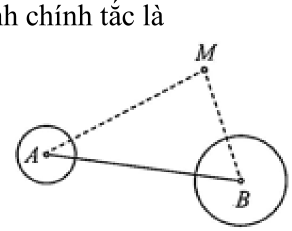
A. $8,66m$.
B. $17,32m$.
C. $11,18m$.
D. $5,48m$.

Lời giải

Xét elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Vì chiều rộng của hầm là $20m$ nên elip cắt trục Ox tại hai điểm $A_1(-10;0), A_2(10;0)$. Suy ra $a=10$.

Mặt khác, tiêu cự $2c=10$ suy ra $c=5$. Chiều cao của hầm là
$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{10^2-5^2}\approx 8,66(m)$.

Câu 52. Trên hai hòn đảo A và B cách nhau $420km$ người ta đặt hai trạm phát tín hiệu vô tuyến. Tại cùng thời điểm, hai trạm phát tín hiệu với vận tốc $290000km/s$ để một tàu thuỷ ở vị trí M trên biển thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu truyền từ đảo B đến sớm hơn tín hiệu từ đảo A là $0,0008s$. Tàu thuỷ đang ở vị trí thuộc đường hypebol có phương trình chính tắc là



A. $\frac{x^2}{13456}-\frac{y^2}{30644}=1$.

B. $\frac{x^2}{13456}-\frac{y^2}{44100}=1$.

C. $\frac{x^2}{44100}-\frac{y^2}{30644}=1$.

D. $\frac{x^2}{30644}-\frac{y^2}{13456}=1$.

Lời giải

Khoảng cách AB chính là tiêu cự của hypebol.

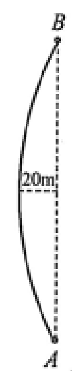
Suy ra $2c=420 \Rightarrow c=210$.

Theo đề bài ta có $MB-MA=290000\cdot 0,0008=232(km)$.

Do đó $|MB-MA|=2a=232 \Rightarrow a=116$. Suy ra $b^2=210^2-116^2=30644$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{13456}-\frac{y^2}{30644}=1$.

Câu 53. Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol (P), điểm đầu vào của khúc của là A và điểm cuối là B, khoảng cách $AB=320m$. Đỉnh của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng $20m$ và cách đều A,B (hình bên). Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng toạ độ tương ứng với $1m$ trên thực tế. Phương trình chính tắc của parabol (P) đó là



A. $y^2=640x$.

B. $y^2=320x$.

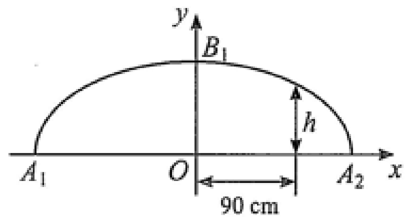
C. $x^2=1280y$.

D. $y^2=1280x$.

Lời giải

Ta có $B(20;160)$. Suy ra $160^2=2p\cdot 20 \Rightarrow p=640$. Phương trình chính tắc của parabol là $y^2=2\cdot 640x=1280x$

Câu 54. Trong bản vẽ thiết kế, mặt cắt đứng của vòm cửa ô thoáng là nửa nằm phía trên tục hoành của elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.



Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng toạ độ của bản vẽ ứng với $30cm$ trên thực tế.
a) Tính chiều rộng, chiều cao thực tế của vòm cửa.
b) Tính chiều cao h của vòm cửa tại điểm cách điểm chính giữa O $90cm$.

Lời giải

a) Toạ độ giao điểm của elip với trục hoành là $A_1(5;0), A_2(-5;0)$ và với trục tung là $B_1(0;2)$.

Suy ra chiều rộng của vòm cửa là $A_1A_2 \cdot 30 = 10 \cdot 30 = 300(cm)$.

Chiều cao của vòm của là $OB_1 \cdot 30 = 2 \cdot 30 = 60(cm)$.

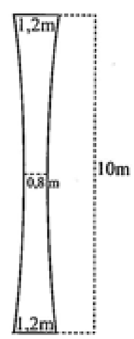
b) Gọi M là điểm trên elip ứng với chiều h của vòm cửa.

Suy ra toạ độ của $M = \left(\frac{90}{30}; y_0\right) = (3; y_0)$. Thay vào phương trình elip ta được

$\frac{3^2}{25} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$.

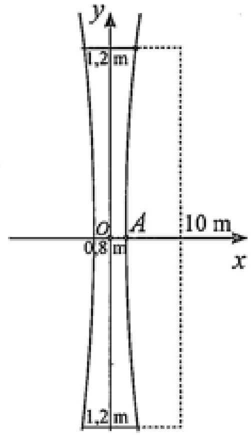
Suy ra chiều cao $h = \frac{8}{5} \cdot 30 = 48(cm)$.

Câu 55. Một cột trụ hình hypebol, có chiều cao $10m$, chỗ nhỏ nhất ở chính giữa rộng $0,8m$, đỉnh cột và đáy cột đều rộng $1,2m$. Độ rộng của cột ở độ cao $8m$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai)?



Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy với gốc O là tâm của hình.



Ta có hai điểm $A(0,4;0), B(0,6;5)$. Gọi phương trình của hypebol là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, lần lượt thay toạ độ của A, B ta được $a=0,4$ và $b=2\sqrt{5}$. Suy ra phương trình của hypebol là $\frac{x^2}{0,16}-\frac{y^2}{20}=1$. Gọi điểm thuộc đường hypebol ứng với độ cao $8m$ của cột trụ là $M(x;4)$. Thay vào phương trình hypebol ta có

Câu 56. Bạn An cùng một lúc bắn hai phát súng về đích A và đích B cách nhau $400m$. Biết vận tốc trung bình của viên đạn là $760m/s$. Viên đạn bắn về đích A nhanh hơn viên đạn bắn về đích B là 0,5 giây. Hỏi những vị trí mà bạn An đứng để có thể đạt được kết quả bắn tương tự như trên thuộc đường conic nào? Viết phương trình chính tắc của đường conic đó.

Lời giải

Gọi $s_A, s_B(m)$ lần lượt là quãng đường cần để viên đạn bắn về đích A, đích B.

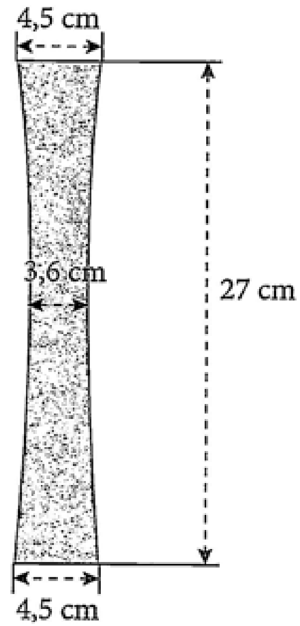
Theo đề bài, ta có $s_A - s_B = 760\cdot 0,5 = 380(m)$. Lại có, khoảng cách giữa đích A và đích B là $400m$, do đó những vị trí mà bạn An đứng thuộc hypebol với hai tiêu điểm là A và B.

Đặt hệ trục toạ độ Oxy với O là trung điểm của AB, Ox trùng với AB và mỗi đơn vị trên hệ trục toạ độ ứng với $1m$ trên thực tế. Khi đó, ta có $A(-200;0)$ và $B(200;0)$, tiêu cự của hypebol là $2c = AB = 400$ (hay $c=200$).

Gọi M là vị trí mà bạn An đứng để có thể đạt được kết quả bắn theo đề bài.

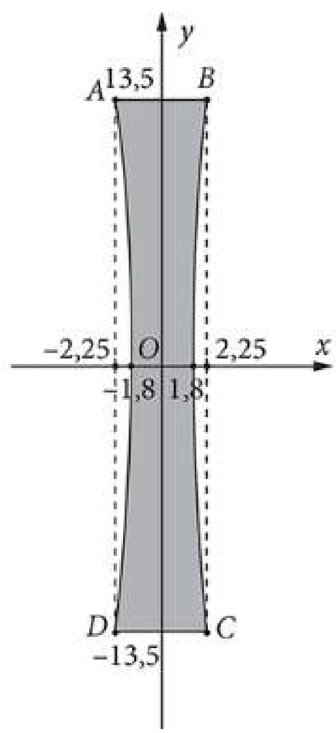
Tập hợp các điểm M thoả mãn $|MA-MB| = 2a = 380$ (hay $a=190$) là hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{190^2}-\frac{y^2}{200^2-190^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36100}-\frac{y^2}{3900}=1$.

Câu 57. Một chiếc bình trang trí có mặt cắt ngang là một hình hypebol với chiều cao $27cm$, chỗ hẹp nhất nằm ở chính giữa và rộng $3,6cm$, đỉnh và đáy của chiếc bình đều rộng $4,5cm$ (xem hình bên dưới). Tính độ rộng của chiếc bình ở độ cao $22,5cm$ kể từ đáy (làm tròn kết quả đến hàng phân trăm).



Lời giải

Đặt hệ trục toạ độ Oxy vào hình sao cho O là giao điểm giữa trục đối xứng dọc và trục đối xứng ngang và khi chiếc bình được đặt thẳng đứng trên bàn thì trục Oy có chiều hướng từ dưới mặt bàn lên trên. Mỗi đơn vị đo trên hệ trục toạ độ tương ứng với $1cm$ trên thực tế.



Khi đó, hypebol (H) có:

- Bốn đỉnh: $A(-2,25;13,5), B(2,25;13,5)$, $C(2,25;-13,5), D(-2,25;-13,5)$.
- Phần eo hẹp nhất trùng với trục Ox có hai đầu mút là: $M(-1,8;0), N(1,8;0)$.

Gọi phương trình chính tắc của hypebol (H) là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$.

Ta có: $\begin{cases} N \in (H) \\ B \in (H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1,8^2}{a^2} - \dfrac{0^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{2,25^2}{a^2} - \dfrac{13,5^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3,24 \\ b^2 = 324. \end{cases}$

Ở độ cao $22,5cm$ (kể từ đáy chiếc bình) tương ứng với phần hypebol có tung độ $y = 22,5 - 13,5 = 9$. Gọi x_0 là hoành độ của điểm thuộc (H) có tung độ là 9. Khi đó, ta có: $\dfrac{x_0^2}{3,24} - \dfrac{9^2}{324} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{9\sqrt{5}}{10}$ hoặc $x_0 = \dfrac{-9\sqrt{5}}{10}$.

Do đó, độ rộng của chiếc bình ở độ cao $22,5cm$ (kể từ đáy chiếc bình) là:

$2|x_0| = 2 \cdot \dfrac{9\sqrt{5}}{10} \approx 4,02(cm).$