

BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. GÓC NHỊ DIỆN

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

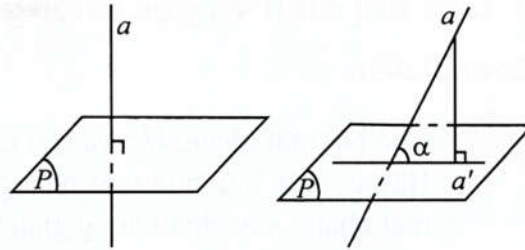
1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng 90° .

Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P) .



Hình 1

Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu là $(a, (P))$.

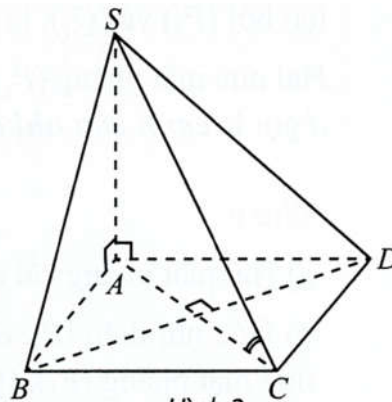
Chú ý: a) Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

b) Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^\circ$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Tính:

- a) Góc giữa đường thẳng BC và (SAB) ;
- b) Góc giữa đường thẳng BD và (SAD) ;
- c) Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$.

Giải



Hình 2

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BC \perp SA$. Ta lại có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra góc giữa đường thẳng BC và (SAB) bằng 90° .

b) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BA \perp SA$. Ta lại có $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$. Vậy AD là hình chiếu của BD trên (SAD) . Nếu gọi φ là góc giữa đường thẳng BD và (SAD) thì

$\varphi = (BD, AD) = \widehat{BDA} = 45^\circ$ (vì tam giác ABD vuông cân tại A).

c) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Nếu gọi φ' là góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ thì $\varphi' = (SC, CA) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác SCA vuông tại A , ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 60° .

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

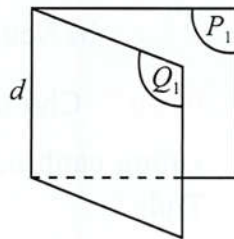
Góc nhị diện

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d . Hình tạo bởi $(P_1), (Q_1)$ và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1) , kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$ gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện.



Hình 5

Chú ý:

- a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.
- b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$.

Góc phẳng nhị diện

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

- a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.
- b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt $(P_1), (Q_1)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì \widehat{uOv} là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P_1), (Q_1)$.
- c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.
- d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.
- e) Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180° .

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a . Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

- a) $[A, BD, A']$;
- b) $[C, BD, A']$.

Giải

a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OA \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{AOA'}$ là góc phẳng nhị diện $[A, BD, A']$. Trong tam giác AOA' vuông tại A , ta

$$\text{có: } \tan \widehat{AOA'} = \frac{AA'}{AO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{AOA'} \approx 54,7^\circ.$$

b) Ta có $OC \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{A'OC}$ là góc phẳng nhị diện $[C, BD, A']$.

Ta có $\widehat{A'OC} = 180^\circ - \widehat{AOA'} \approx 125,3^\circ$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Xác định góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

Câu 1. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa các đường thẳng sau đây với mặt phẳng $(ABCD)$:

- a) AA' ;
- b) BC' ;
- c) AC .

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $3a$, các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau và bằng $2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) .

Câu 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A , góc BAC bằng 120° và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC , biết $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) .

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Tính cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) .

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

- a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- b) Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , biết $AB = a, SA = a\sqrt{6}$.

- a) Tính tang của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .
- b) Tính sin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC) .

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a .

- a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
- b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .
- c) Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $AB \perp AD$, $SA = AD = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính số đo của:

- Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) .

Dạng 2. Góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện

Câu 10. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh đều bằng a . Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

- $[S, BC, O]$;
- $[C, SO, B]$.

Câu 11. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho tứ diện đều $ABCD$. Vẽ hình bình hành $BCED$.

- Tìm góc giữa đường thẳng AB và (BCD) .
- Tìm góc phẳng nhị diện $[A, CD, B]$; $[A, CD, E]$.

Câu 12. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh bằng nhau.

- Tìm góc giữa đường thẳng SA và $(ABCD)$.
- Tìm góc phẳng nhị diện $[A, SO, B]$; $[S, AB, O]$.

Câu 13. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho hình chóp cụt lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}$, $OO' = a$.

- Tìm góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
- Tìm góc phẳng nhị diện $[O, AB, A']$; $[O', A'B', A]$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

- Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$.
- Tính cosin của số đo góc nhị diện $[A', BD, C']$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , biết $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính cosin của số đo góc nhị diện $[S, BD, C]$ và góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC . Tính số đo các góc phẳng nhị diện:

- $[B, SA, D]$;
- $[S, BD, A]$;
- $[S, BD, C]$;
- $[D, SC, B]$.

Câu 19. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$. Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

- a) $[B, SA, C]$;
- b) $[S, DA, B]$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α, β, γ lần lượt là số đo của các góc nhị diện $[B, SA, C]$, $[A, BC, S]$, $[A, SC, B]$. Tính:

- a) $\cos \alpha, \cos \beta$;
- b*) $\cos \gamma$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại O , $SO \perp (ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a .

- a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .
- b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$. Tính $\cos \alpha$.
- c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) , β là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos \beta$.
- d*) Gọi γ là số đo của góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos \gamma$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$.

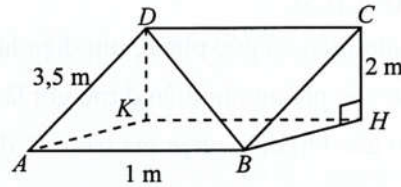
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O . Gọi α, β lần lượt là số đo của các nhị diện $[A, SO, B]$ và $[B, SO, C]$. Tính $\alpha + \beta$.

Câu 26. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính:

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD ;
- b) Chiều cao và thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$;
- c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) ;
- d) Côsin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 27. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một tấm ván hình chữ nhật $ABCD$ được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu $2m$. Cho biết $AB = 1m$, $AD = 3,5m$. Tính góc giữa đường thẳng BD và đáy hố.



Hình 3

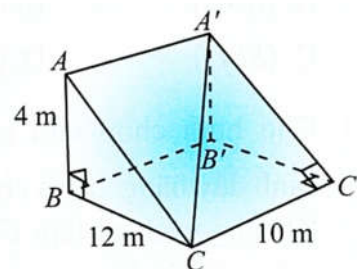
Câu 28. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.



Hình 8

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis_Pyramid)

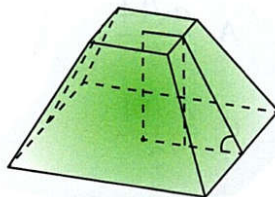
Câu 29. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình 9.



Hình 9

- Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và $(CC'B'B)$.
- Tính số đo góc nhị diện cạnh CC' .

Câu 30. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.



Hình 10

Câu 31. Một chiếc cột cao $3m$ được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài $5m$. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 32. Một con điều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60° . Đoạn dây điều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con điều) dài $10m$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con điều cách đầu dây điều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

Câu 33. Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình 20 có các ống hấp nhiệt chân không dài $1,8m$ được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài $1,2m$. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 20

Nguyễn Bảo Vương