

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

• CHƯƠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Câu 1. (SGK-CTST 11-Tập 1) Chỉ ra lỗi sai trong phép biến đổi phương trình dưới đây:

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Lời giải

Trong phép biến đổi phương trình trên, ta chia cả 2 vế cho x khi x chưa khác 0

Câu 2. Phương trình $x^2 = 3x$ tương đương với phương trình nào trong bốn phương trình sau ?

$$(1): x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2} \quad (2): x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}.$$

$$(3): x^2 \sqrt{x-3} = 3x \sqrt{x-3} \quad (4): x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}.$$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \quad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x(\sqrt{x-3})^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \quad (4): x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 3x$$

Vậy (4) tương đương với phương trình đã cho

Câu 3. Tìm m để cặp phương trình sau tương đương $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (1) và $(m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$ (2)

Lời giải

Giả sử hai phương trình (1) và (2) tương đương

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow (x-1)(mx-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0 \end{cases}$$

Do hai phương trình tương đương nên $x = 1$ là nghiệm của phương trình (2)

Thay $x = 1$ vào phương trình (2) ta được

$$(m-2) - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } m = -5: \text{ Phương trình (1) trở thành } -5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành } -7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{10}{7} \end{cases}$$

Suy ra hai phương trình không tương đương

• Với $m = 4$: Phương trình (1) trở thành $4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

Phương trình (2) trở thành $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra hai phương trình tương đương

Vậy $m = 4$ thì hai phương trình tương đương.

Câu 4. Tìm m để cặp phương trình sau tương đương $2x^2 + mx - 2 = 0$ (1) và $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0$ (2)

Lời giải

Giả sử hai phương trình (3) và (4) tương đương

Ta có $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + mx - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0 \end{cases}$

Do hai phương trình tương đương nên $x = -2$ cũng là nghiệm của phương trình (3) Thay

$x = -2$ vào phương trình (3) ta được $2(-2)^2 + m(-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

• Với $m = 3$ phương trình (3) trở thành $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình (4) trở thành $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(2x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra phương trình (3) tương đương với phương trình (4)

Vậy $m = 3$.

DẠNG 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Câu 5. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin(x+30^\circ) = \sin(x+60^\circ)$.

Lời giải

a) Vì $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ nên ta có phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó phương trình có các nghiệm là:

$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin(x+30^\circ) = \sin(x+60^\circ)$

$\Leftrightarrow x+30^\circ = x+60^\circ + k.360^\circ, k \in \mathbb{Z} \vee x+30^\circ = 180^\circ - x - 60^\circ + k.360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 45^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Câu 6. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình sau:

- a) $\cos x = -3$;
- b) $\cos x = \cos 15^\circ$;
- c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{3\pi}{12}$.

Lời giải

a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-1 \leq \cos x \leq 1$

Vậy phương trình $\cos x = -3$ vô nghiệm

b) $\cos x = \cos 15^\circ$

$$\Leftrightarrow x = 15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = -15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{3\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x + \frac{\pi}{12} = \frac{-3\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 7. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình sau:

- a) $\tan x = 0$;
- b) $\tan(30^\circ - 3x) = \tan 75^\circ$.

Lời giải

$$\text{a) } \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \tan(30^\circ - 3x) = \tan 75^\circ \Leftrightarrow 30^\circ - 3x = 75^\circ + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -15^\circ - k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 8. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình sau:

- a) $\cot x = 1$;
- b) $\cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ$.

Lời giải

$$\text{a) } \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ \Leftrightarrow 3x + 30^\circ = 75^\circ + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 15^\circ + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 9. (SGK-CTST 11-Tập 1) Sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình sau:

- a) $\cos x = 0,4$;
- b) $\tan x = \sqrt{3}$.

Kết quả ghi theo đơn vị radian và làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

$$\text{a) } \cos x = 0,4 \Leftrightarrow x = 1,16 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = -1,16 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 10. (SGK-CTST 11-Tập 1) Quay lại bài toán khởi động, phương trình chuyển động của bóng đầu trực bàn đạp là $x = 17 \cos 5\pi t (cm)$ với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng $10cm$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có $|x|=10$

$$\Leftrightarrow |17 \cos 5\pi t|=10$$

$$\Leftrightarrow 17 \cos 5\pi t = 10 \vee 17 \cos 5\pi t = -10$$

$$\bullet 17 \cos 5\pi t = 10$$

$$\Leftrightarrow 5\pi t = 0,94 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 5\pi t = -0,94 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 0,06 + 0,4k, k \in \mathbb{Z} \vee t = -0,06 + 0,4k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet 17 \cos 5\pi t = -10$$

$$\Leftrightarrow 5\pi t = 2,2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 5\pi t = -2,2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 0,14 + 0,4k, k \in \mathbb{Z} \vee t = -0,14 + 0,4k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 11. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{2\pi}{7};$

c) $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$

Lời giải

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{2\pi}{7}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{7} = \frac{2\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x - \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{6\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 4x = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{2\pi}{9} + x + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 12. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

b) $\cos 4x = \cos \frac{5\pi}{12};$

c) $\cos^2 x = 1.$

Lời giải

$$a) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \cos 4x = \frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 4x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 13. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \tan x = \tan 55^\circ;$$

$$b) \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Lời giải

$$a) \tan x = \tan 55^\circ \Leftrightarrow x = 55^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 14. (SGK-CTST 11-Tập 1) Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$b) \cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải

$$a) \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 15. (SGK-CTST 11-Tập 1) Tại các giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau?

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau tại điểm x thỏa mãn $\cos x = \sin x$

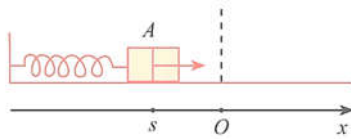
Vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên $\cos x$ và $\sin x$ không thể đồng thời bằng 0

Chia cả 2 vế phương trình trên cho $\cos x$ ta được

$$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 16. (SGK-CTST 11-Tập 1) Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ $s(cm)$ của A trên

trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3} \text{ cm}$?



Hình 9

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Lời giải

Khi: $s = -5\sqrt{3}$ thì $10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 10t + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 17. (SGK-CTST 11-Tập 1) Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1 \text{ km}$. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$ và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



Hình 10

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)

a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .

b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1(\text{km})$. Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Lời giải

a) $y_M = \tan \frac{\pi}{10} t$

b) Khi $y_N = -1$ ta có $\tan \frac{\pi}{10} t = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{15}{2} + 10k, k \in \mathbb{Z}$

Câu 18. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\text{b) } \sin(3x - 30^\circ) = \sin 45^\circ$$

$$\text{c) } \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\text{d) } \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{e) } \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\text{f) } \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\text{g) } \cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{h) } \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{4}$$

Lời giải

$$\text{a) } \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{đặt} \quad \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = t + k2\pi \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pi - t + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2t + k4\pi \\ x = \frac{8\pi}{3} - 2t + k4\pi \end{cases}$$

$$\text{b) } \sin(3x - 30^\circ) = \sin 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} 3x - 30^\circ = 45^\circ + k360^\circ \\ 3x - 30^\circ = 180^\circ - 45^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25^\circ + k120^\circ \\ x = 55^\circ + k120^\circ \end{cases}$$

$$\text{c) } \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - x + k2\pi \\ 3x - \frac{3\pi}{4} = \pi - \left(\frac{\pi}{6} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{19\pi}{24} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{d) } \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$$

$$\text{e) } \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow -x + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - k2\pi$$

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right) \Rightarrow \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(5x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - 5x\right)$$

$$\text{f) } \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{6} - 5x\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{6} - 5x = \frac{7\pi}{4} - 2x + k2\pi \\ \frac{5\pi}{6} - 5x = \pi - \left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11\pi}{36} - \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{19\pi}{84} - \frac{k2\pi}{7} \end{cases}$$

$$\cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(2x + 25^\circ) = \cos 135^\circ$$

$$\text{g) } \Rightarrow \begin{cases} 2x + 25^\circ = 135^\circ + k360^\circ \\ 2x + 25^\circ = -135^\circ + k360^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 55^\circ + k180^\circ \\ x = -80^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

h)

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{4}; \cos t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = t + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} - 2x = -t + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{t}{2} - k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{t}{2} - k\pi \end{cases}$$

Câu 19. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \tan(2x-1) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{b) } \tan(3x-10^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } 3 \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$\text{d) } \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\text{e) } 2 \cot(3x) = 3$$

$$\text{f) } \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Lời giải

$$\text{a) } \tan(2x-1) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x-1 = -x + \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$$

$$\text{b) } \tan(3x-10^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \tan(3x-10^\circ) = \tan 60^\circ \Rightarrow 3x-10^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{70^\circ}{3} + k60^\circ$$

$$\text{c) } 3 \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{3} = \tan t \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = t + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{18} + \frac{t}{3} + \frac{k\pi}{3}$$

$$\text{d) } \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{e) } 2 \cot(3x) = 3 \Rightarrow \cot(3x) = \frac{3}{2} \text{ đặt } \cot t = \frac{3}{2} \Rightarrow \cot(3x) = \cot t \Rightarrow 3x = t + k\pi \Rightarrow x = \frac{t}{3} + \frac{k\pi}{3}$$

$$\text{f) } \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = -2x + \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN CÓ ĐIỀU KIỆN NGHIỆM

Câu 20. 1. Tìm nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$$

$$\text{b) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{c) } \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

2. Tìm nghiệm thuộc khoảng $[-\pi; \pi]$

$$\text{a) } \cot\left(-x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{b) } 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \tan(-x) = \tan(2x+1)$$

Lời giải

1. Tìm nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Rightarrow k = 1; 2 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}.$$

$$b) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } x \in \left(-\frac{\pi}{4}; 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \\ k = 0; 1; 2 \Rightarrow x = 0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$c) \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3 \Rightarrow x = \left\{\frac{5\pi}{24}; \frac{17\pi}{24}; \frac{29\pi}{24}; \frac{41\pi}{24}\right\}$$

2. Tìm nghiệm thuộc khoảng $[-\pi; \pi]$

a)

$$\cot\left(-x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

$$x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow k = 0; 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$$

$$b) \quad 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases}$$

$$x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$$c) \tan(-x) = \tan(2x + 1) \Leftrightarrow -x = 2x + 1 + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} - \frac{k\pi}{3}$$

$$x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow k = -3; -2; -1; 0; 1; 2 \Rightarrow x = \left\{-\frac{1}{3} + \pi; -\frac{1}{3} + \frac{2\pi}{3}; -\frac{1}{3} + \frac{2\pi}{3}; -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}; -\frac{1}{3} - \frac{2\pi}{3}\right\}$$

DẠNG 4. SỬ DỤNG CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Câu 21. Giải các phương trình sau:

$$a) \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$b) \tan 3x + \tan x = 0$$

Lời giải

$$a) \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 2x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) $\tan 3x + \tan x = 0$

ĐK: $\cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$; $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\tan 3x = -\tan x = \tan(-x) \Leftrightarrow 3x = -x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = k\pi$

Câu 22. Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin^2\left(2x + \frac{4\pi}{5}\right)$

b) $4\cos^2(2x - 1) = 1$

Lời giải

a) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin^2\left(2x + \frac{4\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)}{2} = \frac{1 - \cos\left(4x + \frac{8\pi}{5}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(4x + \frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - 4x - \frac{8\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{2\pi}{5} = \pi - 4x - \frac{8\pi}{5} + k2\pi \\ 2x - \frac{2\pi}{5} = -\pi + 4x + \frac{8\pi}{5} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

b) $4\cos^2(2x - 1) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x - 1) = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x - 1) = \frac{1}{2} \\ \cos(2x - 1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - 1 = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - 1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - 1 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Câu 23. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

b) $8\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \sqrt{2}$

c) $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$

d) $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$

Lời giải

$$a) \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \left(\frac{x+3x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-3x}{2} \right) + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$b) 8 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 4x \cdot \cos 4x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 8x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$c) \cos 3x - \cos 5x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \left(\frac{3x+5x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{3x-5x}{2} \right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 4x \sin(-x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \sin 4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$d) \sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 5x \sin 5x = \cos 5x$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x (2 \sin 5x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = 0 \\ \sin 5x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Câu 24. Giải các phương trình sau:

$$a) \cot \left(\frac{5\pi}{3} - 3x \right) - \tan \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

$$b) \cot x \cdot \cot 2x = -1$$

Lời giải

$$\text{a) ĐK: } \begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{3}-3x\right) \neq 0 \\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{3}-3x\right) - \tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{3}+3x\right) = \tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6}+3x = \frac{\pi}{3}+2x+k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}+k\pi \text{ (thỏa đk)}$$

$$\text{b) ĐK: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cot x \cdot \cot 2x = -1 \Leftrightarrow \cot 2x = -\tan x = \tan(-x)$$

$$\Leftrightarrow \cot 2x = \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ không thỏa điều kiện nên PT vô nghiệm.}$$

Câu 25. Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = 3 \cot x$

b) $2 \sin^2 x + \cos 2x = 2$

Lời giải

$$\text{a) ĐK: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\tan x = 3 \cot x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin^2 x = 3 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

b) $2 \sin^2 x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x = 2$

$$\Leftrightarrow 1 = 2 \text{ vô lý nên PT vô nghiệm.}$$

Câu 26. Giải các phương trình: $\sqrt{2} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin x + \cos x + 2$

Lời giải

$$\sqrt{2} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin x + \cos x + 2 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 3 \sin x + \cos x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 3 \sin x + \cos x + 2$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 3)(\sin x + \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{3}{2} : VN \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 27. Giải các phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

Lời giải

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$* \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$* \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Câu 28. Giải các phương trình: $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

Lời giải

$$(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = 2 \sin x \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$* \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$* \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Câu 29. Giải các phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

Lời giải

$$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 2x \sin x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 30. Tìm m để:

a) Phương trình $\sin x = m$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

b) Phương trình $(2 \cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Lời giải

a) Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $-1 < \sin x < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

b) $(2 \cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \sin 2x = m \end{cases}$$

Nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ suy ra $x = \frac{\pi}{3}$ là nghiệm của phương trình)

Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ thì phương trình $\sin 2x = m$ có 1 nghiệm

thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ khác $\frac{\pi}{3}$ (*)

Ta có $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ hay $2x \in [0; 2\pi]$

Từ (*) suy ra $m = 1$ hoặc $m = -1$

NGUYỄN BẢO VƯƠNG 0946798489