

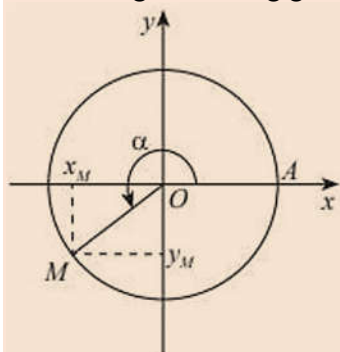
BÀI 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

- **CHƯƠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC**
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Khi đó:



- Tung độ y_M của M gọi là sin của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Hoành độ x_M của M gọi là cosin của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là cotang của α , kí hiệu $\cot \alpha$.

Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ và $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc lượng giác α .

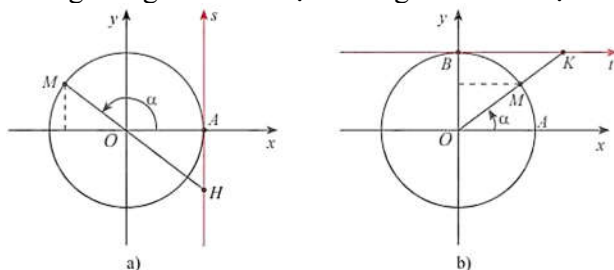
Chú ý:

a) Ta gọi trục hoành là **trục cosin**, còn trục tung là **trục sin**.

Trục As có gốc ở điểm $A(1;0)$ và song song với trục sin (Hình 3a) gọi là trục tang.

Nếu đường thẳng OM cắt trục tang thì tung độ của giao điểm đó chính là $\tan \alpha$.

Trục Bt có gốc ở điểm $B(0;1)$ và song song với trục cosin (Hình 3b) gọi là trục cotang. Nếu đường thẳng OM cắt trục cotang thì hoành độ của giao điểm đó chính là $\cot \alpha$.



Hình 3

b) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$; $\tan \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); $\cot \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

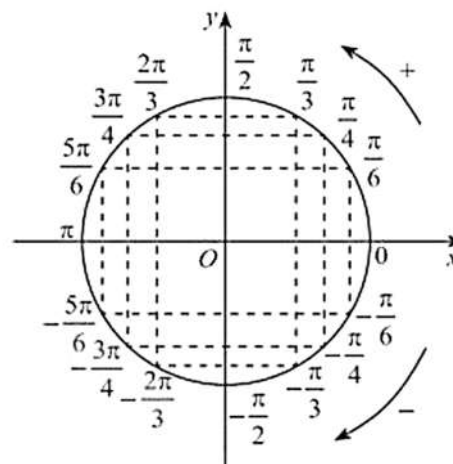
c) Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k , ta có

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$$

d) Ta đã biết bảng giá trị lượng giác của một số góc α đặc biệt với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (hay $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) như sau:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Giá trị lượng giác	(0°)	(30°)	(45°)	(60°)	(90°)
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



Hình 4

Sử dụng bảng trên và Hình 4, ta có thể xác định được giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) $\frac{13\pi}{3}$;

b) -45° .

Giải

a) Vì $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi$ nên:

$$\sin \frac{13\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{13\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \tan \frac{13\pi}{3} = \frac{\sin \frac{13\pi}{3}}{\cos \frac{13\pi}{3}} = \sqrt{3}; \quad \cot \frac{13\pi}{3} = \frac{\cos \frac{13\pi}{3}}{\sin \frac{13\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Vì điểm biểu diễn của góc -45° và góc 45° trên đường tròn lượng giác đối xứng nhau qua trục hoành (Hình 4), nên chúng có cùng hoành độ và tung độ đối nhau. Do đó ta có:

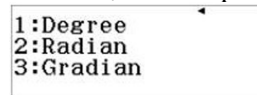
$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan(-45^\circ) = \frac{\sin(-45^\circ)}{\cos(-45^\circ)} = -1; \quad \cot(-45^\circ) = \frac{\cos(-45^\circ)}{\sin(-45^\circ)} = -1.$$

2. Tính giá trị lượng giác của một góc bằng máy tính cầm tay

Ta có thể tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì bằng máy tính cầm tay. Lưu ý trước khi tính, cần chọn đơn vị đo góc như sau: lên bảng lựa chọn đơn vị đo góc.

- Lần lượt ấn các phím SHIFT, MENU và 2 để màn hình hiện lên bảng lựa chọn đơn vị đo góc



- Tiếp tục ấn phím 1 để chọn đơn vị độ (Degree) hoặc phím 2 để chọn đơn vị radian.

- Ấn các phím MENU 1 để vào chế độ tính toán

Ví dụ 2. Sử dụng máy tính cầm tay để tính $\sin(-45^\circ)$ và $\cot \frac{11\pi}{3}$.

Giải

Chọn đơn vị đo góc là độ. Ấn liên tiếp các phím $\boxed{\sin} \boxed{(-)} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{)} \boxed{=}$

ta được $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Để tính $\cot \frac{11\pi}{3}$, ta tính $\frac{1}{\tan \frac{11\pi}{3}}$ như sau:

Chọn đơn vị đo góc là radian. Ấn liên tiếp các phím

ta được $\cot \frac{11\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Ta có các hệ thức sau liên hệ giữa các giá trị lượng giác của cùng một góc lượng giác α :

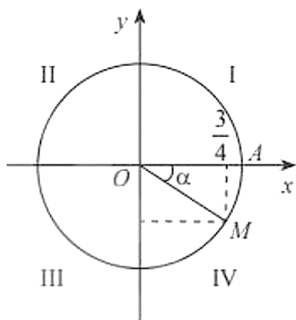
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ • $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ • $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 3. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Giải

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$.

Do đó $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ hoặc $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.



Hình 6

Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên điểm biểu diễn của góc α trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV (Hình 6), do đó $\sin \alpha < 0$.

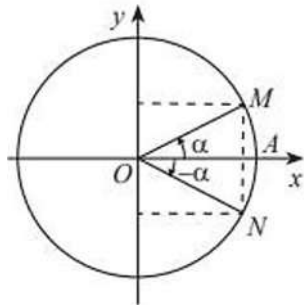
Suy ra $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Do đó $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

4. Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $-\alpha$ đối xứng qua trục Ox (Hình 7), nên ta có:



Hình 7

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

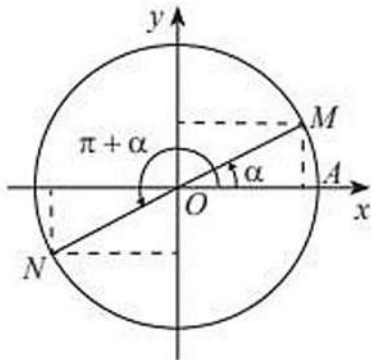
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Hai góc hơn kém nhau π : α và $\alpha + \pi$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\alpha + \pi$ đối xứng nhau qua gốc toạ độ O (Hình 8), nên ta có:



Hình 8

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

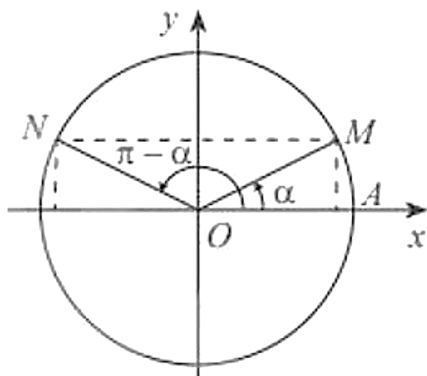
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục Oy (Hình 9), nên ta có:



Hình 9

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

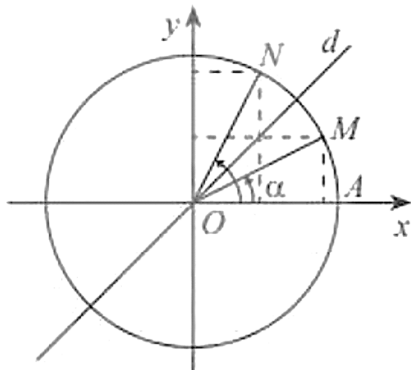
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ đối xứng nhau qua đường phân giác d của góc xOy (Hình 10), nên ta có:



Hình 10

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

Ví dụ 4. a) Biểu diễn $\sin \frac{61\pi}{8}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.

b) Biểu diễn $\tan 258^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .

Giải

$$\text{a) } \sin \frac{61\pi}{8} = \sin\left(8\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\sin \frac{3\pi}{8} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{8};$$

$$\text{b) } \tan 258^\circ = \tan(180^\circ + 78^\circ) = \tan 78^\circ = \cot(90^\circ - 12^\circ) = \cot 12^\circ.$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Dấu các giá trị lượng giác của góc

Câu 1. Xác định dấu của các biểu thức sau:

$$\text{a) } C = \cot \frac{3\pi}{5} \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right). \text{ b) } D = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cot \frac{3\pi}{5} < 0 \text{ và } \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \Rightarrow C > 0.$$

$$\text{b) Ta có } \cos \frac{4\pi}{5} < 0, \sin \frac{\pi}{3} > 0, \tan \frac{4\pi}{3} > 0, \cot \frac{9\pi}{5} < 0 \Rightarrow D > 0.$$

Câu 2. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sin(\alpha + 90^\circ). \text{ b) } B = \cos(\alpha - 45^\circ).$$

$$\text{c) } C = \cos(270^\circ - \alpha). \text{ d) } D = \cos(2\alpha + 90^\circ).$$

Lời giải

$$\text{a) } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < \alpha + 90^\circ < 180^\circ \Rightarrow \sin(\alpha + 90^\circ) > 0.$$

$$\text{b) } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -45^\circ < \alpha - 45^\circ < 45^\circ \Rightarrow \cos(\alpha - 45^\circ) > 0.$$

c) $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 180^\circ < 270^\circ - \alpha < 270^\circ \Rightarrow \cos(270^\circ - \alpha) < 0$.

a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < 2\alpha + 90^\circ < 270^\circ \Rightarrow \cos(2\alpha + 270^\circ) < 0$.

Câu 3. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + \pi)$. b) $B = \tan(\alpha - \pi)$.

c) $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$. d) $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$.

Lời giải

a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \alpha + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha + \pi) < 0$.

b) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha - \pi) > 0$.

c) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} < \alpha + \frac{2\pi}{5} < \frac{9\pi}{10} \Rightarrow \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) > 0$.

d) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{8} < \alpha - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) > 0$.

Câu 4. Cho tam giác ABC . Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \sin A + \sin B + \sin C$. b) $B = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

c) $C = \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$. d) $D = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}$.

Lời giải

a) $A, B, C \in (0^\circ; 180^\circ) \Rightarrow \sin A > 0, \sin B > 0, \sin C > 0 \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C > 0$.

b) $A, B, C \in (0^\circ; 180^\circ) \Rightarrow \sin A > 0, \sin B > 0, \sin C > 0 \Rightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C > 0$.

c) $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in (0^\circ; 90^\circ) \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0, \cos \frac{B}{2} > 0, \cos \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} > 0$.

d) $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in (0^\circ; 90^\circ) \Rightarrow \tan \frac{A}{2} > 0, \tan \frac{B}{2} > 0, \tan \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} > 0$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức lượng giác

Câu 5. (SGK-CTST-11-Tập 1) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1}$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)$

c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi) \cot(3\pi - \alpha)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1} &= \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} + \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}} + \frac{1}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 \end{aligned}$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha - (-\sin \alpha) = 2 \sin \alpha$

c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi) \cot(3\pi - \alpha)$
 $= \cos \alpha + \cos(-\alpha) - \tan \alpha \cdot \cot(\pi - \alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha - \tan \alpha \cdot (-\cot \alpha) = 2 \cos \alpha + 1$

Câu 6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

b) $B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

c) $C = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

d) $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
 A &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x) \\
 &= -\sin x + \cos(-x) - \cos x \\
 &= -\sin x + \cos x - \cos x \\
 &= -\sin x
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 B &= 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \\
 &= 2\cos x + 3\cos x + 5\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) \\
 &= 5\cos x - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
 &= 5\cos x - 5\cos x + \tan x \\
 &= \tan x
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 C &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
 &= 2\cos x + \sin(4\pi + \pi - x) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x \\
 &= 2\cos x + \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x \\
 &= 2\cos x - \sin x - \cos x - \sin x \\
 &= \cos x - 2\sin x
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 D &= \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x) \\
 &= \cos(4\pi + \pi - x) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + \pi - x) \\
 &= \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(\pi - x) \\
 &= -\cos x + \cos x + \cot x - \cot x = 0
 \end{aligned}$$

Câu 7. Không dùng bảng số và máy tính, rút gọn các biểu thức:

a) $A = \tan 18^\circ \cdot \tan 288^\circ + \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$.

b) $B = \frac{1 + \sin^4 a - \cos^4 a}{1 - \sin^6 a - \cos^6 a}$.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
 A &= \tan(90^\circ - 72^\circ) \cdot \tan(360^\circ - 72^\circ) + \sin 32^\circ \cdot \sin(180^\circ - 32^\circ) - \sin(360^\circ - 58^\circ) \cdot \sin(180^\circ - 58^\circ) \\
 &= \cot 72^\circ \cdot (-\tan 72^\circ) + \sin^2 32^\circ + \sin^2 58^\circ = -1 + \sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ = -1 + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

b) $B = \frac{1 + (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^2 a - \cos^2 a)}{1 - (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a)}$

$$= \frac{1 + \sin^2 a - \cos^2 a}{1 - [(\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 3\sin^2 a \cos^2 a]} = \frac{2\sin^2 a}{3\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{2}{3}(1 + \tan^2 a).$$

Câu 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$

$$\Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$$

b) Ta có $B = \frac{1}{\tan(8^\circ + 360^\circ)} + \frac{2 \sin(30^\circ + 7.360^\circ) \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos(-90^\circ + 8^\circ + 2.360^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)}$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \sin 30^\circ (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(8^\circ - 90^\circ) - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(90^\circ - 8^\circ) - \sin 8^\circ} = \\
 &= \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = 0
 \end{aligned}$$

c) Vì $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ do đó

$$C = (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

d) $D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \tan \frac{5\pi}{8}\right]$

$$\text{Mà } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8}, \tan \frac{5\pi}{8} = \cot \left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{Nên } D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan \left(-\frac{\pi}{8}\right) \cot \left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = -1.$$

Câu 9. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{\sin(328^\circ) \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}.$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \tan 36^\circ.$$

$$\text{c) } C = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ.$$

$$\text{d) } D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ.$$

$$\text{e) } E = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \dots + \sin 340^\circ + \sin 360^\circ.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sin 328^\circ = \sin(360^\circ - 32^\circ) = -\sin 32^\circ;$$

$$\sin 958^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 122^\circ) = -\sin 122^\circ = -\sin(90^\circ + 32^\circ) = -\cos 32^\circ;$$

$$\cot 572^\circ = \cot(2 \cdot 360^\circ - 148^\circ) = -\cot 148^\circ = -\cot(180^\circ - 32^\circ) = \cot 32^\circ;$$

$$\cos(-508^\circ) = \cos 508^\circ = \sin(360^\circ + 148^\circ) = \cos 148^\circ = \cos(180^\circ - 32^\circ) = -\cos 32^\circ;$$

$$\cos 1022^\circ = \cos(3 \cdot 360^\circ - 58^\circ) = \cos 58^\circ = \cos(90^\circ - 32^\circ) = \sin 32^\circ;$$

$$\tan(212^\circ) = -\tan(180^\circ + 32^\circ) = -\tan 32^\circ.$$

$$\text{Khi đó: } A = \frac{\sin 32^\circ \cos 32^\circ}{\cot 32^\circ} - \frac{\cos 32^\circ \sin 32^\circ}{\tan 32^\circ} = \sin^2 32^\circ - \cos^2 32^\circ = -\cos 64^\circ.$$

b) Ta có:

$$\sin(-234^\circ) = \sin(126^\circ - 360^\circ) = \sin 126^\circ = \sin(90^\circ + 36^\circ) = \cos 36^\circ;$$

$$\cos 216^\circ = \sin(180^\circ + 36^\circ) = -\cos 36^\circ;$$

$$\sin 144^\circ = \sin(180^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ;$$

$$\cos 126^\circ = \cos(90^\circ + 36^\circ) = -\sin 36^\circ.$$

$$\text{Khi đó: } B = \frac{\cos 36^\circ + \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ + \sin 36^\circ} \tan 36^\circ = 1.$$

c) Ta có:

$$C = (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) - 1$$

$$= (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + (\cos 40^\circ - \cos 40^\circ) + (\cos 60^\circ - \cos 60^\circ) + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) - 1$$

$$= -1.$$

d) Ta có:

$$\begin{aligned}
 D &= (\cos^2 10^\circ + \cos^2 170^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 160^\circ) + \dots + (\cos^2 80^\circ + \cos^2 100^\circ) + \cos 90^\circ + 1 \\
 &= (\cos^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + \dots + (\cos^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ) + 1 \\
 &= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ) + 1 \\
 &= 2[(\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ) + \dots + (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ)] + 1 \\
 &= 2[(\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) + \dots + (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ)] + 1 \\
 &= 2.4 + 1 = 9.
 \end{aligned}$$

e)Ta có:

$$\begin{aligned}
 E &= \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \dots + \sin 340^\circ + \sin 360^\circ \\
 &= (\sin 20^\circ + \sin 340^\circ) + (\sin 40^\circ + \sin 320^\circ) + \dots + (\sin 160^\circ + \sin 200^\circ) + \sin 180^\circ + \sin 360^\circ \\
 &= 2 \sin 180^\circ \cos 160^\circ + 2 \sin 180^\circ \cos 140^\circ + \dots + 2 \sin 180^\circ \cos 20^\circ \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Câu 10. Rút gọn biểu thức $A = \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot(2\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Lời giải

$$A = \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot(2\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha + \sin \alpha - \cot \alpha + \cot \alpha = 0.$$

Câu 11. Rút gọn biểu thức $B = \frac{\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^3\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \\
 &= \frac{-\cot \alpha \cdot \sin \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cdot (-\cot \alpha)} = \frac{-\cos \alpha + \cos^3 \alpha}{-\cos \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

Câu 12. Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + 1}\right)^2 + 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \left(\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + 1}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + 1}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\sin x(\cos x + 1)}{\cos x(\cos x + 1)}\right)^2 + 1 \\
 &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1 = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Câu 13. Rút gọn biểu thức $A = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

Lời giải

Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x(1 + \sin x) + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{\cos x}.$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \tan x + \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \tan x + \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \tan x + \frac{(1 - \sin x)}{\cos x} = \tan x + \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{\cos x}.$$

Câu 14. Đơn giản biểu thức $A = \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x$

Lời giải

$$A = \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Câu 15. Đơn giản biểu thức $B = \frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + 3 \cos^4 x - 1} \\ &= \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x}{\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x + 3 \cos^4 x - 1} = \frac{2 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x - 1} \\ &= \frac{2 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{-3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x} = \frac{2 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{3 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Câu 16. Đơn giản biểu thức $C = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{1 - (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2. \end{aligned}$$

Câu 17. Đơn giản biểu thức $D = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x - 1}$

Lời giải

$$D = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1$$

Câu 18. Đơn giản biểu thức $E = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) - 3(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \\ &= 2(1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x) - 3(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = -1. \end{aligned}$$

Dạng 3. Tính giá trị lượng giác của góc lượng giác

Câu 19. (SGK-CTST-11-Tập 1) Tính $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ và $\tan 495^\circ$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \tan 495^\circ &= \tan(135^\circ + 360^\circ) = \tan(135^\circ) = -1 \end{aligned}$$

Câu 20. (SGK-CTST-11-Tập 1) Sử dụng máy tính cầm tay để tính $\cos 75^\circ$ và $\tan\left(\frac{-19\pi}{6}\right)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,26 \\ \tan\left(\frac{-19\pi}{6}\right) &= \frac{-\sqrt{3}}{3} \approx -0,58 \end{aligned}$$

Câu 21. (SGK-CTST-11-Tập 1) Cho $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cos \alpha$ và $\sin \alpha$.

Lời giải

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên điểm biểu diễn góc α trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ

III. Do đó, $\sin \alpha < 0$ và $\cos \alpha < 0$

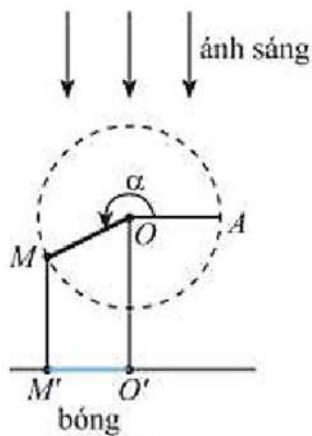
$$\text{Ta có: } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{Do đó, } \cos \alpha = \frac{-\sqrt{9}}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Và } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{Suy ra } \sin \alpha = \frac{-\sqrt{4}}{\sqrt{13}}$$

Câu 22. (SGK-CTST-11-Tập 1) Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm ? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Lời giải

Sau khi thanh OM quay được 3 vòng, vị trí của thanh là OA .

Quay tiếp $\frac{1}{10}$, thanh sẽ tạo với OA một góc $\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

Độ dài của bóng $O'M' = OM \cos \alpha = 15 \cdot \cos \frac{\pi}{5} = 12,1(cm)$.

Câu 23. (SGK-CTST-11-Tập 1) Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là $11rad/s$ (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58cm$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 13

Lời giải

Sau một phút di chuyển, van V quay được một góc là $11.60 = 660 (rad)$

Khoảng cách từ van đến mặt đất là: $58 + 58 \cdot \sin 660 \approx 57,7(cm)$

Câu 24. Cho biết một GTLG, tính các GTLG còn lại

a) $\cos a = \frac{4}{5}$, $270^\circ < a < 360^\circ$. b) $\sin a = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.

c) $\tan a = 3$, $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$. d) $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

Lời giải

a) $270^\circ < a < 360^\circ \Rightarrow \sin a < 0$ nên $\sin a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\frac{3}{5}$; $\tan a = -\frac{3}{4}$; $\cot a = -\frac{4}{3}$.

b) $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \cos a < 0$ nên $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\frac{12}{13}$; $\tan a = -\frac{5}{12}$; $\cot a = -\frac{12}{5}$.

$$\text{c) } \pi < a < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos a < 0 \text{ nên từ } 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos a = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\sin a = \tan a \cdot \cos a = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \cot a = \frac{1}{\tan a} = -\sqrt{10}.$$

$$\text{d) Ta có } \frac{1}{\sin^2 15^\circ} = 1 + \cot^2 15^\circ = 8 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}};$$

$$\cos 15^\circ = \cot 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}}.$$

Câu 25. (SGK-CTST-11-Tập 1) a) Biểu diễn $\cos 638^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .

b) Biểu diễn $\cot \frac{19\pi}{5}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

$$\text{a) } \cos 638^\circ = \cos(-82^\circ) = \cos(82^\circ) = \sin 8^\circ$$

$$\text{b) } \cot \frac{19\pi}{5} = \cot \frac{4\pi}{5} = -\cot \frac{\pi}{5}$$

Câu 26. (SGK-CTST-11-Tập 1) Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{4}{5};$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\text{c) } \tan \alpha = 3 \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{3}.$$

Lời giải

Đẳng thức câu a và c có thể đồng thời xảy ra.

Đẳng thức câu b không thể đồng thời xảy ra do $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Câu 27. (SGK-CTST-11-Tập 1) Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

Lời giải

$$A = \sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha)$$

Vì $\sin \alpha > 0$ và $\cos \alpha < 0$ nên điểm biểu diễn góc α trên đường tròn lượng giác nằm ở góc phần tư thứ II.

$$\text{Suy ra: } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha), \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\text{Vậy } A = 2 \cdot \cos(\alpha) = \frac{-10}{13}$$

Câu 28. (SGK-CTST-11-Tập 1) Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ và } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{2}{5} \text{ và } 0 < \alpha < 90^\circ;$$

$$\text{c) } \tan \alpha = \sqrt{3} \text{ và } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

d) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Lời giải

a) $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$; $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$; $\cot \alpha = -\frac{12}{5}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$; $\cot \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\tan \alpha = 2$

Câu 29. (SGK-CTST-11-Tập 1) Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ hoặc từ 0 đến 45° và tính:

a) $\cos \frac{21\pi}{6}$

b) $\sin \frac{129\pi}{4}$

c) $\tan 1020^\circ$.

Lời giải

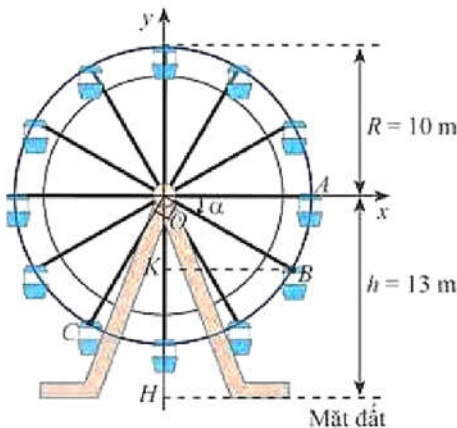
a) $\cos \frac{21\pi}{6} = \cos \left(2.2\pi - \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) = -\cos \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin \frac{129\pi}{4} = \sin \left(16.2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)

$\tan 1020^\circ = \tan (3.360^\circ - 60^\circ) = \tan (-60^\circ) = -\tan (60^\circ) = -\cot (90^\circ - 60^\circ) = -\cot (30^\circ) = -\sqrt{3}$

Câu 30. (SGK-CTST-11-Tập 1) Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.



Hình 11

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10\sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.

b) Khi điểm B cách mặt đất 4m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$ và $OK = 10\sin \alpha$

Ta có: $KH = OH + OK = 13 + 10\sin\alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$ và $OK = 10 \cdot (-\sin\alpha)$.

Ta có: $KH = OH - OK = 13 - 10 \cdot (-\sin\alpha) = 13 + 10\sin\alpha$

Khi $\alpha = -30^\circ$, $KH = 13 + 10 \cdot \frac{-1}{2} = 8$

b) Gọi $(OA, OC) = \beta$. Ta có: $\beta = \alpha - 90^\circ$

Khi $KH = 4$. Suy ra $\sin\alpha = \frac{-9}{10}$, $\alpha < 0$

$$\sin\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-9}{10}\right)^2} = \frac{-\sqrt{19}}{10}$$

Điểm C cách mặt đất là: $13 + 10\sin\beta \approx 12,96$

Câu 31. Cho biết một GTLG, tính giá trị của biểu thức, với:

a) $A = \frac{\cot a + \tan a}{\cot a - \tan a}$, khi $\sin a = \frac{3}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

b) $C = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 2\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + 4\cos^2 a}$, khi $\cot a = -3$.

c) $E = \frac{8\cos^3 a - 2\sin^3 a + \cos a}{2\cos a - \sin^3 a}$ khi $\tan a = 2$.

d) $G = \frac{\cot a + 3\tan a}{2\cot a + \tan a}$ khi $\cos a = -\frac{2}{3}$.

e) $H = \frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a}$ khi $\tan a = 5$.

Lời giải

a) $\sin a = \frac{3}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{4}{5}$; do đó $\cot a = \frac{4}{3}$ và $\tan a = \frac{3}{4}$. Vậy

$$A = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{25}{7}$$

b) Chia tử và mẫu cho $\sin^2 a \Rightarrow C = \frac{1 + 3\cot a - 2\cot^2 a}{2 - 3\cot a + 4\cot^2 a} = \frac{1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)^2}{2 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-3)^2} = -\frac{23}{47}$.

c) Chia tử và mẫu cho $\cos^3 a \Rightarrow E = \frac{8 - 2\tan^3 a + 1 + \tan^2 a}{2(1 + \tan^2 a) - \tan^3 a} = \frac{8 - 2 \cdot 2^3 + 1 + 2^2}{2 \cdot (1 + 2^2) - 2^3} = -\frac{3}{2}$.

d) Biểu thức $G = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} + 3 \cdot \frac{\sin a}{\cos a}}{2 \cdot \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{\cos a}} = \frac{\cos^2 a + 3\sin^2 a}{2\cos^2 a + \sin^2 a} = \frac{\cos^2 a + 3(1 - \cos^2 a)}{2\cos^2 a + 1 - \cos^2 a} = \frac{\frac{4}{9} + 3\left(1 - \frac{4}{9}\right)}{2 \cdot \frac{4}{9} + 1 - \frac{4}{9}} = \frac{19}{13}$.

e) Chia tử và mẫu cho $\cos a \Rightarrow H = \frac{\tan a + 1}{1 - \tan a} = \frac{5 + 1}{1 - 5} = -\frac{2}{3}$.

Câu 32. Tính giá trị lượng giác của góc α nếu

a) $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. b) $\cos\alpha = 0,8$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

c) $\tan\alpha = \frac{13}{8}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. d) $\cot\alpha = -\frac{19}{7}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Lời giải

- a) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0$ nên $\cos \alpha = -\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$; $\cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$.
- b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin \alpha < 0$ nên $\sin \alpha = -\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = -0,6$; $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$; $\cot \alpha = -\frac{4}{3}$.
- c) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0$ nên $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{8}{\sqrt{233}}$; $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{13}{\sqrt{233}}$;
 $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{8}{13}$.
- d) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$ nên $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}} = \frac{7}{\sqrt{410}}$; $\cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{19}{\sqrt{410}}$;
 $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{7}{19}$.

Câu 33.

- a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.
- b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$.
- c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } C &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

Câu 34. Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a/ $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$
- b/ $B = \tan \alpha + \cot \alpha$
- c/ $C = \tan^4 \alpha - \cot^4 \alpha$

Lời giải

$$\text{a/ } A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \Leftrightarrow A = (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha \Leftrightarrow A = 3^2 + 2 \Leftrightarrow A = 11.$$

$$\text{b/ } B = \tan \alpha + \cot \alpha \Rightarrow B^2 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 \Leftrightarrow B^2 = (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 4 \tan \alpha \cdot \cot \alpha$$

$$\Leftrightarrow B^2 = 3^2 + 4 \Leftrightarrow B^2 = 13 \Leftrightarrow B = \pm \sqrt{13}.$$

$$c/ C = \tan^4 \alpha - \cot^4 \alpha \Leftrightarrow C = (\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha)(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$$

$$\Leftrightarrow C = (\tan \alpha - \cot \alpha)(\tan \alpha + \cot \alpha)(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$$

$$\Leftrightarrow C = \pm 33\sqrt{13} \text{ (theo giả thiết và kết quả của câu a, b ở trên).}$$

Câu 35.

a) Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.

b) Cho $3\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$. Tính $C = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.

c) Cho $4\sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{7}{4}$. Tính $C = 3\sin^4 x + 4\cos^4 x$.

Lời giải

a) Ta có $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Với $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ thì $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

Vậy $A = \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{9}{16} = \frac{7}{4}$.

b) Ta có $3\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 x - (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^4 x + 2\sin^2 x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Với $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ thì $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Vậy $B = \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

c) Ta có $4\sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{7}{4}$

$$\Leftrightarrow 4\sin^4 x + 3(1 - \sin^2 x)^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 7\sin^4 x - 6\sin^2 x + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 x = \frac{5}{14} \end{cases}.$$

Với $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ thì $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

Với $\sin^2 x = \frac{5}{14}$ thì $\cos^2 x = \frac{9}{14} \Rightarrow A = 3 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 = \frac{57}{28}$.

Câu 36.

a) Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.

b) Cho $\tan x + \cot x = 4$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.

Lời giải

a) Ta có $\sin x + \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \cos x$. Thay vào phương trình $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta được:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} - \cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \frac{2}{5}\cos x - \frac{24}{25} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \cos x = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Với } \cos x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{3}{4}$$

b)

$$\tan x + \cot x = 4$$

$$\Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 4$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 2 + \sqrt{3} \\ \tan x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Với $\tan x = 2 + \sqrt{3}$ ta có :

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin x = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Với $\tan x = 2 - \sqrt{3}$ ta có :

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \tan^2 x + 1 &= \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \cos x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin x = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức

Câu 37. (SGK-CTST-11-Tập 1) Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$;

b) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Lời giải

a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$
 $= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \cos^2 \alpha$

b) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

Câu 38. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = 1 - \sin a \cos a$. b) $\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{1 + 2 \sin a \cos a} = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$.
 c) $\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^6 a - \cos^6 a = \sin^2 a \cdot \cos^2 a$.

Lời giải

a) $\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = \frac{(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)}{\sin a + \cos a} = \sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a$
 $= 1 - \sin a \cos a$.

b) $\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{1 + 2 \sin a \cos a} = \frac{(\sin a - \cos a)(\sin a + \cos a)}{(\sin a + \cos a)^2} = \frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = \frac{\frac{\sin a - \cos a}{\cos a}}{\frac{\sin a + \cos a}{\cos a}} = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$.

c) $\sin^4 a + \cos^4 a - (\sin^6 a + \cos^6 a) = \sin^4 a + \cos^4 a - [(\sin^2 a)^3 + (\cos^2 a)^3]$
 $= \sin^4 a + \cos^4 a - (\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a) = \sin^2 a \cos^2 a$.

Câu 39. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\frac{\tan a - \tan b}{\cot a - \cot b} = \tan a \cdot \tan b$. b) $\tan 100^\circ + \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ}$.
 c) $2(\sin^6 a + \cos^6 a) + 1 = 3(\sin^4 a + \cos^4 a)$.

Lời giải

a) $\frac{\tan a - \tan b}{\cot a - \cot b} = \frac{\tan a - \tan b}{\frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan b}} = \frac{\tan a - \tan b}{\frac{\tan a - \tan b}{\tan a \tan b}} = \tan a \tan b$.

b) $\tan 100^\circ + \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \tan(90^\circ + 10^\circ) + \frac{\sin(360^\circ + 170^\circ)}{1 + \sin(720^\circ - 80^\circ)} = -\cot 10^\circ + \frac{\sin 170^\circ}{1 - \sin 80^\circ}$
 $= -\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{1 - \cos 10^\circ} = \frac{-\cos 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot (1 - \cos 10^\circ)} = \frac{1}{\sin 10^\circ}$.

$$\begin{aligned}
 & c) 2[(\sin^2 a)^3 + (\cos^2 a)^3] + 1 = 2(\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a) + 1 \\
 & = 2(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a + 1 = 2(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a + (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 \\
 & = 2(\sin^4 a + \cos^4 a) + \sin^4 a + \cos^4 a = 3(\sin^4 a + \cos^4 a).
 \end{aligned}$$

Câu 40. Giả sử biểu thức sau đây có nghĩa. Chứng minh rằng:
 $\sin^4 x \cot^2 x + \cos^4 x \tan^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 VT &= \sin^4 x \cot^2 x + \cos^4 x \tan^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x \\
 &= \sin^4 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^4 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) \\
 &= \sin^2 x = VP.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sin^4 x \cot^2 x + \cos^4 x \tan^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x.$$

Câu 41. Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + \tan^2 x + 3} = \cos x.$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 VT &= \frac{2 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + \tan^2 x + 3} \\
 &= \frac{1 + 1 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + 2 + \tan^2 x + 1} \\
 &= \frac{1 + 2\cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + 2 + \frac{1}{\cos^2 x}} \\
 &= \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \sqrt{\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) \text{ vì } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0 \\
 &= \cos x = VP.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{2 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + \tan^2 x + 3} = \cos x \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Câu 42. Chứng minh các đẳng thức sau : $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \cdot \sin^2 x \text{ (đpcm)}$$

Câu 43. Chứng minh đẳng thức sau: $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} &= \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1} \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 1)(\sin x - \cos x + 1) &= 2 \cos x(1 - \cos x) \\ \Leftrightarrow \sin^2 x - (\cos x - 1)^2 &= 2 \cos x - 2 \cos^2 x \\ \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 &= 2 \cos x - 2 \cos^2 x \\ \Leftrightarrow -2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$$

Câu 44. Cho $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Lời giải

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$

Đặt $A = \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 2}}$. Ta có biến đổi sau:

$$A = \frac{-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\sqrt{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{-\tan \alpha - 2}{\sqrt{\tan \alpha + 2 \cdot \tan^2 \alpha + 2 \cdot (1 + \tan^2 \alpha)}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(Đpcm)

Câu 45. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

- a. $\sin B = \sin(A + C)$. b. $\cos(A + B) = -\cos C$.
 c. $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$. d. $\cos(B - C) = -\cos(A + 2C)$.
 e. $\cos(A + B - C) = -\cos 2C$. f. $\cos \frac{-3A + B + C}{2} = \sin 2A$.
 g. $\sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C$. h. $\tan \frac{A+B-2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$.

Lời giải

a. Vì A, B, C là 3 góc của ΔABC nên ta có:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{B} &= 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \\ \Rightarrow \sin B &= \sin[180^\circ - (A + C)] = \sin(A + C) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sin B = \sin(A + C)$$

b. Vì A, B, C là 3 góc của ΔABC nên ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

$$\Rightarrow \cos(A + B) = \cos[180^\circ - C] = -\cos C$$

$$\text{Vậy } \cos(A + B) = -\cos C$$

c. Vì A, B, C là 3 góc của ΔABC nên ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \cos \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\text{Vậy } \sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

d. Vì A, B, C là 3 góc của ΔABC nên ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} - 2\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - 2\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + 2\hat{C})$$

$$\Rightarrow \cos(B - C) = \cos[180^\circ - (A + 2C)] = -\cos(A + 2C)$$

$$\text{Vậy } \cos(B - C) = -\cos(A + 2C)$$

e. Vì A, B, C là 3 góc của ΔABC nên ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - \hat{C} - \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 2\hat{C}$$

$$\Rightarrow \cos(A + B - C) = \cos(180^\circ - 2C) = -\cos 2C$$

$$\text{Vậy } \cos(A + B - C) = -\cos 2C$$

f. Vì A, B, C là 3 góc của ΔABC nên ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\Rightarrow -3\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = -3\hat{A} + 180^\circ - \hat{A}$$

$$\Rightarrow -3\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 4\hat{A}$$

$$\Rightarrow \frac{-3\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - 4\hat{A}}{2} = 90^\circ - 2\hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{-3A + B + C}{2} = \cos(90^\circ - 2A) = \sin 2A$$

$$\text{Vậy } \cos \frac{-3A + B + C}{2} = \sin 2A$$

g. Vì A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + 3\hat{C} = 180^\circ - \hat{C} + 3\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + 3\hat{C} = 180^\circ + 2\hat{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A} + \hat{B} + 3\hat{C}}{2} = \frac{180^\circ + 2\hat{C}}{2} = 90^\circ + \hat{C}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{A + B + 3C}{2}\right) = \sin(90^\circ + C) = \cos C$$

$$\text{Vậy } \sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C$$

h. Vì A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} - 2\hat{C} = 180^\circ - \hat{C} - 2\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} - 2\hat{C} = 180^\circ - 3\hat{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A} + \hat{B} - 2\hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - 3\hat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{3\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A + B - 2C}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{3C}{2}\right) = \cot \frac{3C}{2}$$

$$\text{Vậy } \tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Cho $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Kết quả đúng là

A. $\sin a > 0, \cos a > 0$. **B.** $\sin a < 0, \cos a < 0$. **C.** $\sin a > 0, \cos a < 0$. **D.** $\sin a < 0, \cos a > 0$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a > 0, \cos a < 0$.

Câu 2. Trong các giá trị sau, $\sin \alpha$ có thể nhận giá trị nào?

- A. $-0,7$. B. $\frac{4}{3}$. C. $-\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$. Nên ta chọn A.

Câu 3. Cho $2\pi < a < \frac{5\pi}{2}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $\tan a > 0, \cot a < 0$. B. $\tan a < 0, \cot a < 0$.
C. $\tan a > 0, \cot a > 0$. D. $\tan a < 0, \cot a > 0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $a = b + 2\pi$

$$2\pi < a < \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi < b + 2\pi < \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < b < \frac{\pi}{2}$$

Có $\tan a = \tan(b + 2\pi) = \tan b > 0$

$$\cot a = \frac{1}{\tan a} > 0.$$

Vậy $\tan a > 0, \cot a > 0$.

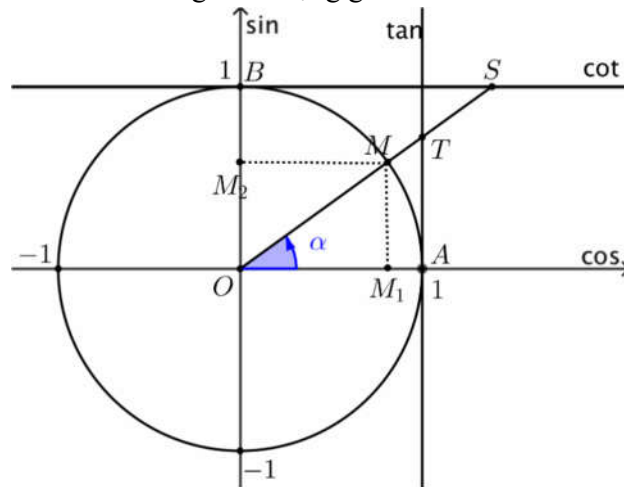
Câu 4. Ở góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\cot \alpha < 0$. B. $\sin \alpha > 0$. C. $\cos \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đường tròn lượng giác:



-Ta thấy ở góc phần tư thứ nhất thì: $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

\Rightarrow chỉ có câu A thỏa mãn.

Câu 5. Ở góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha > 0$. C. $\sin \alpha > 0$. D. $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn D

- Ở góc phần tư thứ tư thì: $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0; \tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$.

\Rightarrow chỉ có C thỏa mãn.

Câu 6. Cho $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$. Xét câu nào sau đây đúng?

- A.** $\tan \alpha > 0$. **B.** $\cot \alpha > 0$. **C.** $\cos \alpha > 0$. **D.** $\sin \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn C

$\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ nên α thuộc cung phần tư thứ IV vì vậy đáp án đúng là A

Câu 7. Xét câu nào sau đây đúng?

A. $\cos^2 45^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{3} \cos 60^\circ\right)$.

B. Hai câu A và

C. Nếu a âm thì ít nhất một trong hai số $\cos a, \sin a$ phải âm.

D. Nếu a dương thì $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$.

Lời giải

Chọn A

A sai vì $\alpha = \frac{-7\pi}{4}$ nhưng $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

B sai vì $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ nhưng $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$.

C đúng vì $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{3} \cos 60^\circ\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Câu 8. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Kết quả đúng là:

A. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$. **B.** $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$.

C. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$. **D.** $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$

Câu 9. Xét các mệnh đề sau:

I. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$. II. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$. III. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$.

Mệnh đề nào **sai**?

A. Chỉ I.

B. Chỉ II.

C. Chỉ II và III.

D. Cả I, II và III.

Lời giải

Chọn C

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên α thuộc cung phần tư thứ IV nên chỉ II, II sai.

Câu 10. Xét các mệnh đề sau đây:

I. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$. II. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$. III. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ II và III.

B. Cả I, II và III.

C. Chỉ I.

D. Chỉ I và II.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < \frac{3\pi}{2} \text{ nên đáp án là D}$$

Câu 11. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A.** $\cot \alpha = \tan \beta$. **B.** $\cos \alpha = \sin \beta$. **C.** $\cos \beta = \sin \alpha$. **D.** $\sin \alpha = -\cos \beta$.

Lời giải

Chọn D

Thường nhớ: các góc phụ nhau có các giá trị lượng giác bằng chéo nhau
Nghĩa là $\cos \alpha = \sin \beta$; $\cot \alpha = \tan \beta$ và ngược lại.

Câu 12. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A.** $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$. **B.** $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.
C. $\sin(180^\circ - a) = \sin a$. **D.** $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

Lời giải

Chọn

C.

Theo công thức.

Câu 13. Chọn đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau

- A.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. **B.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.
C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. **D.** $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Lời giải

Chọn

D.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** $\cos(-x) = -\cos x$. **B.** $\sin(x - \pi) = \sin x$.
C. $\cos(\pi - x) = -\cos x$. **D.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

Câu 15. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. **B.** $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$. **C.** $\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$. **D.** $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy **C** sai vì $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

Câu 16. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\sin(-x) = -\sin x$. **B.** $\cos(-x) = -\cos x$.
C. $\cot(-x) = \cot x$. **D.** $\tan(-x) = \tan x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sin(-x) = -\sin x$.

Câu 17. Chọn hệ thức **sai** trong các hệ thức sau.

- A.** $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x$. **B.** $\sin(3\pi - x) = \sin x$.
C. $\cos(3\pi - x) = \cos x$. **D.** $\cos(-x) = \cos x$.

Lời giải

Chọn C

$$\cos(3\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Câu 18. $\cos(x + 2017\pi)$ bằng kết quả nào sau đây?

A. $-\cos x$.

B. $-\sin x$.

C. $\sin x$.

D. $\cos x$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos(x + 2017\pi) = -\cos x.$$

Câu 19. Giá trị của $\cot 1458^\circ$ là

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\cot 1458^\circ = \cot(4.360^\circ + 18^\circ) = \cot 18^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Câu 20. Giá trị $\cot \frac{89\pi}{6}$ là

A. $\sqrt{3}$.

B. $-\sqrt{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Biến đổi } \cot \frac{89\pi}{6} = \cot\left(-\frac{\pi}{6} + 15\pi\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

Câu 21. Giá trị của $\tan 180^\circ$ là

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. Không xác định.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Biến đổi } \tan 180^\circ = \tan(0^\circ + 180^\circ) = \tan 0^\circ = 0.$$

Câu 22. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

A. $\cot \alpha = 2$.

B. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.

C. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

D. $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Câu 23. Trong các công thức sau, công thức nào sai?

A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. **B.** $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

C. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

D. $\tan \alpha + \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$

Lời giải

Chọn D

$$\text{D sai vì: } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$$

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi