BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng d?

A. 3. **B.** vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Trong không gian, có vô số đường thẳng qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Vì vậy chọn đáp án B

Câu 2. Trong không gian cho trước điểm M và đường thẳng Δ. Các đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ thì:

A. vuông góc với nhau. **B.** song song với nhau.

C. cùng vuông góc với một mặt phẳng. **D.** cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn D

Suy ra từ tính chất 1 theo SGK hình học 11 trang 100.

Câu 3. Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Sử dụng định lí $\begin{cases} a \perp b \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a \perp c.$

Câu 4. Trong không gian, cho 3 đường thẳng a,b,c phân biệt và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \perp c$ và $(P) \perp c$ thì $a // (P)$.

B. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a // b$.

C. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.

D. Nếu $a \perp b$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Lời giải

Chọn D

Theo kiến thức SGK có bốn vị trí tương đối của hai đường thẳng mà nếu hai đường thẳng trùng nhau hoặc song song thì chúng không vuông góc với nhau do đó nếu $a \perp b$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Câu 5. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D

Qua một điểm O cho trước có vô số đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước. Các đường thẳng này cùng nằm trên mặt phẳng qua O và vuông góc với đường thẳng ấy.

Vậy D **sai.**

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể song song hoặc chéo nhau.

Đáp án C chỉ đúng trong mặt phẳng.

Câu 7. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Đáp án **A** sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$. Dễ thấy AA' và AD cắt nhau.

Đáp án **C** sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

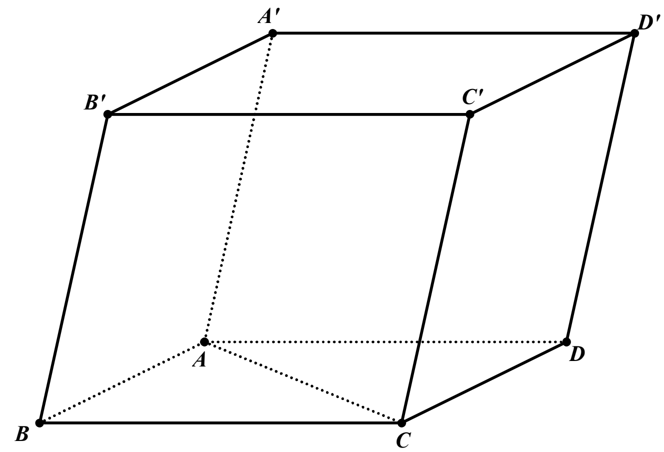
Đáp án D sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

Câu 8. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $BB' \perp BD$. **B.** $A'C' \perp BD$. **C.** $A'B \perp DC'$. **D.** $BC' \perp A'D$.

Lời giải

Chọn A



Vì hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA$, $B'C'CB$ đều là hình thoi nên ta có

$AC \perp BD$ mà $AC // A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD$ (B đúng).

$A'B \perp AB'$ mà $AB' // DC' \Rightarrow A'B \perp DC'$ (C đúng).

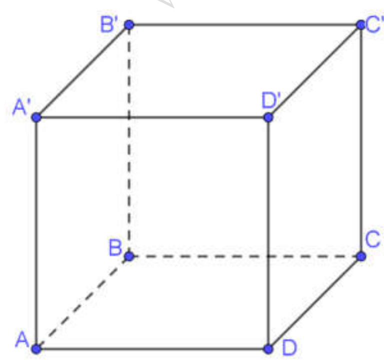
$BC' \perp B'C$ mà $B'C // A'D \Rightarrow BC' \perp A'D$ (D đúng).

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC'?

A. $A'D$. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

Lời giải

Chọn A



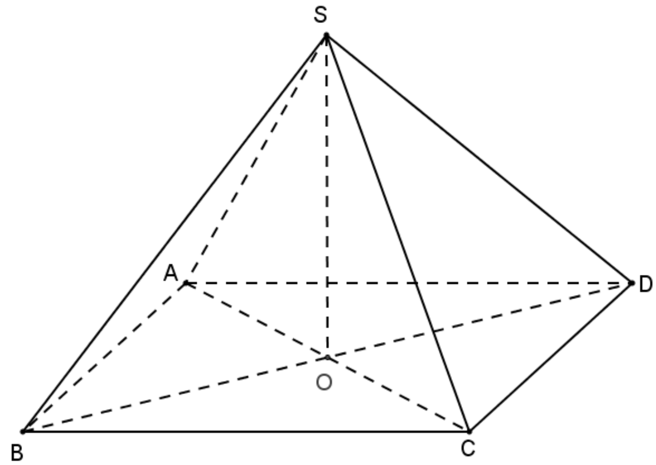
Ta có: $A'D // B'C$, $B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. $AC \perp SD$. **B.** $BD \perp AC$. **C.** $BD \perp SA$. **D.** $AC \perp SA$.

Lời giải

Chọn D



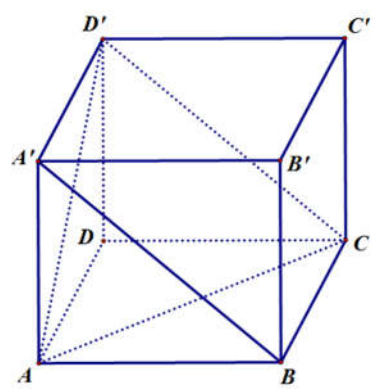
Ta có tam giác SAC cân tại S và SO là đường trung tuyến cũng đồng thời là đường cao.
Do đó $SO \perp AC$.
Trong tam giác vuông SOA thì AC và SA không thể vuông tại A.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $75°$ **D.** $90°$

Lời giải

Chọn A

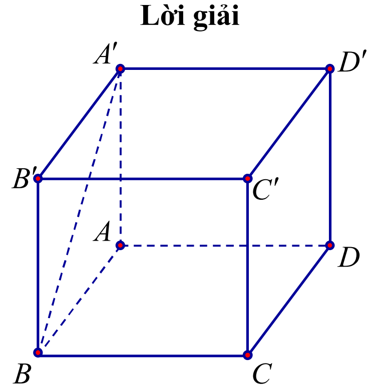


Do $A'BCD'$ là hình bình hành nên $A'B//D'C$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng góc giữa hai đường thẳng AC và $D'C$ và đó chính là góc $\widehat{ACD'} = 60°$ (do Δ ACD' đều).

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng:

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải



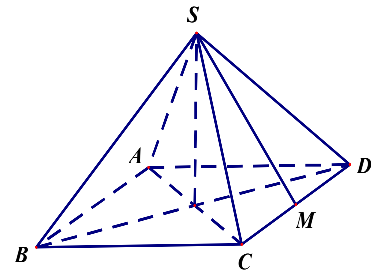
Có $CD//AB \Rightarrow (BA', CD) = (BA', BA) = \widehat{ABA'} = 45°$ (do $ABB'A'$ là hình vuông).

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $\arctan 2$.

Lời giải

Chọn A



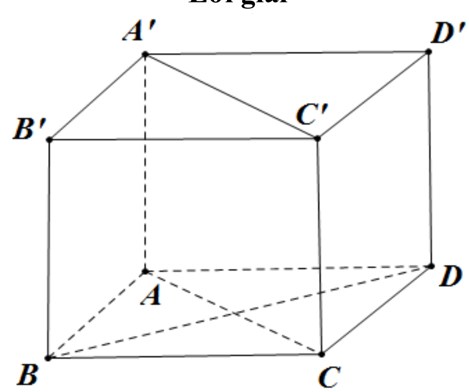
Ta có $AB//CD$ nên $\left(\widehat{AB;SC}\right) = \left(\widehat{CD;SC}\right) = \widehat{SCD}$.

Gọi M là trung điểm của CD. Tam giác SCM vuông tại M và có $SC = a\sqrt{2}$, $CM = a$ nên là tam giác vuông cân tại M nên $\widehat{SCD} = 45°$. Vậy $\left(\widehat{AB;SC}\right) = 45°$.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

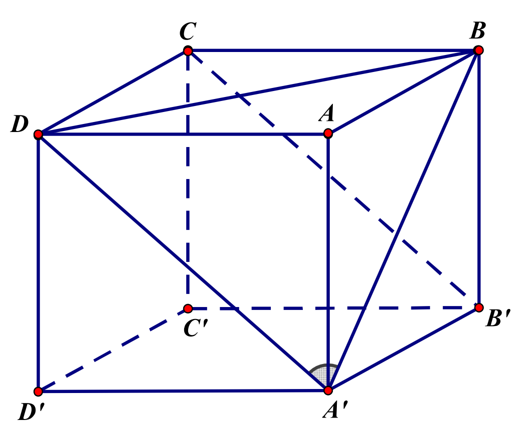


Ta có: $\left(\widehat{A'C';BD}\right) = \left(\widehat{AC;BD}\right) = 90°$

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Ta có $B'C\,//\,A'D \Rightarrow \left(\widehat{A'B;B'C}\right) = \left(\widehat{A'B;A'D}\right) = \widehat{DA'B}$.

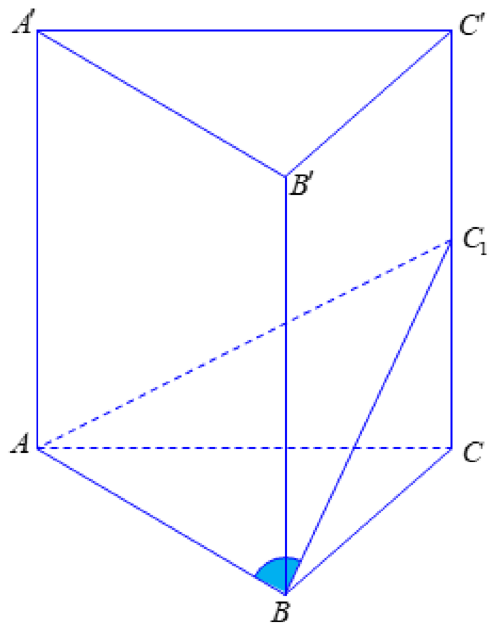
Xét $\Delta DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\Delta DA'B$ là tam giác đều.

Vậy $\widehat{DA'B} = 60°$.

Câu 16. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 2. Gọi C_1 là trung điểm của CC'. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng BC_1 và $A'B'$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải



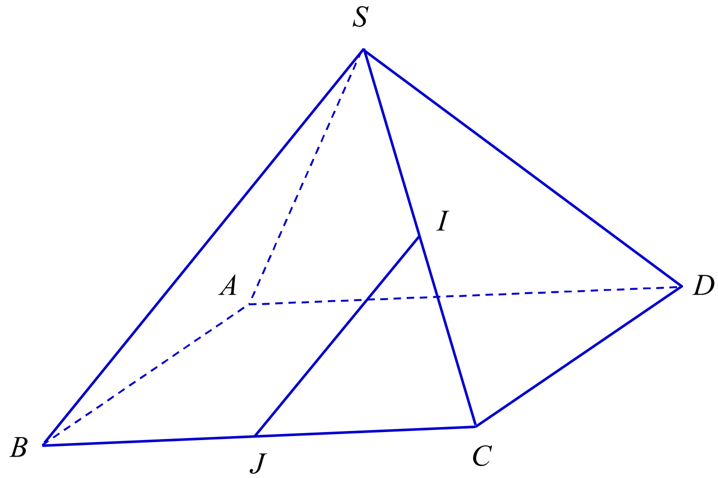
Ta có $A'B'\,//\,AB \Rightarrow \left(\widehat{BC_1, A'B'}\right) = \left(\widehat{BC_1, AB}\right) = \widehat{ABC_1}$.

Tam giác ABC_1 có $AB = 1$; $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$ và $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC_1^2 - AC_1^2}{2AB.BC_1} \Leftrightarrow \cos B = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

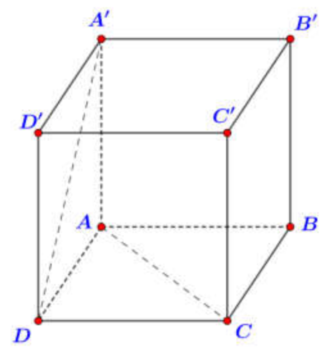
Lời giải



Ta có $\left.\begin{matrix} IJ \parallel SB \\ CD \parallel AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{(IJ, CD)} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$

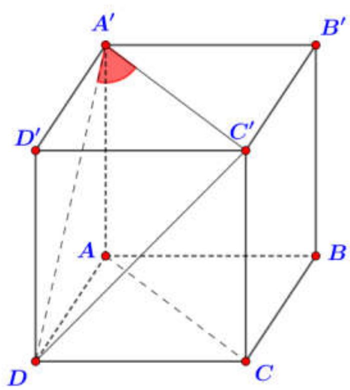
(vì tam giác SAB là tam giác đều cạnh a).

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải



Ta có: $\widehat{(AC, A'D)} = \widehat{(A'C', A'D)} = \widehat{DA'C'} = 60^\circ$.

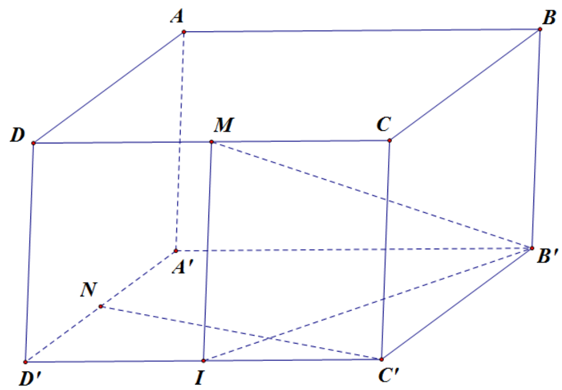
Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của CD và N là trung điểm của $A'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $B'M$ và $C'N$ bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D



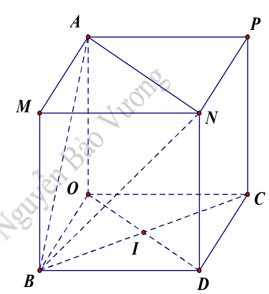
Gọi I là trung điểm của $C'D'$ khi đó IB' là hình chiếu vuông góc của $B'M$ trên $(A'B'C'D')$. Mặt khác ta có $\widehat{IB'C'} + \widehat{NC'B'} = \widehat{NC'D'} + \widehat{NC'B'} = \widehat{B'C'D'} = 90° \Rightarrow C'N \perp IB'$ Do đó $C'N \perp B'M$. Vậy góc giữa $B'M$ và $C'N$ bằng $90°$.

Câu 20. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$; OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi I là trung điểm BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và OI.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Vì tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$; OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có thể dựng hình lập phương $AMNP.OBDC$ như hình vẽ với I là trung điểm BC nên $\{I\} = OD \cap BC$.

Cạnh của hình lập phương trên bằng a nên $AB = AN = NB = a\sqrt{2}$ vậy tam giác ABN đều.

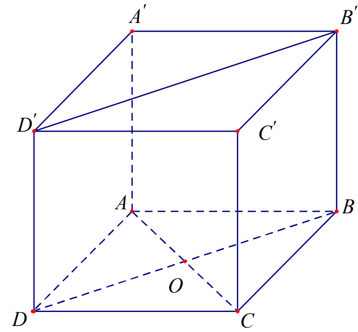
Dễ thấy $OI // AN$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và OI bằng góc giữa AB và AN bằng $60°$.

Câu 21. Cho hình hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD} = 40^0$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ là

A. 40^0. **B.** 20^0. **C.** 50^0. **D.** 80^0.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BD//B'D' \Rightarrow \left(\widehat{AC;B'D'}\right) = \left(\widehat{AC;BD}\right)$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $\widehat{CAD} = 40^0 \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 50^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 80^0$

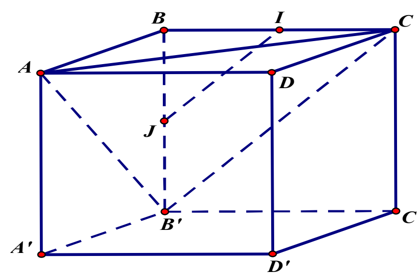
Vậy $\left(\widehat{AC;B'D'}\right) = 80^0$.

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J lần lượt là trung điểm của BC và BB'. Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn B



Vì $IJ // B'C$ nên $(IJ, AC) = (B'C, AC)$.

Mà AC, AB', CB' là đường chéo của các hình vuông bằng nhau nên $AC = AB' = CB'$.

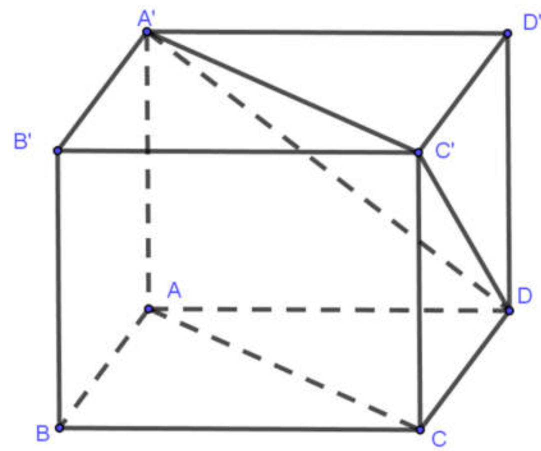
$\Rightarrow \Delta ACB'$ đều. Vậy $(IJ, AC) = (B'C, AC) = \widehat{ACB'} = 60^0$.

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC // A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và DA'.

Mà $A'C' = DA' = DC'$ (các đường chéo của hình vuông).

Suy ra $\Delta A'C'D$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{A'C'D} = 60°$.

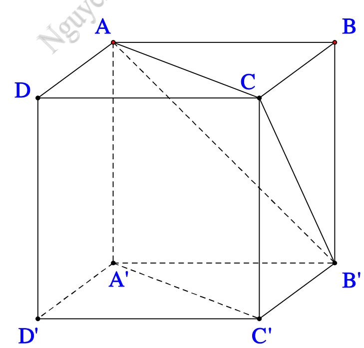
Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng $60°$.

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a.

Do $AC \parallel A'C'$ nên $\left(AB', A'C'\right) = \left(AB', AC\right)$.

Ta có: $AB' = AC = CB' = a\sqrt{2}$ $\Rightarrow$Tam giác $AB'C$ đều nên $\widehat{CAB'} = 60°$.

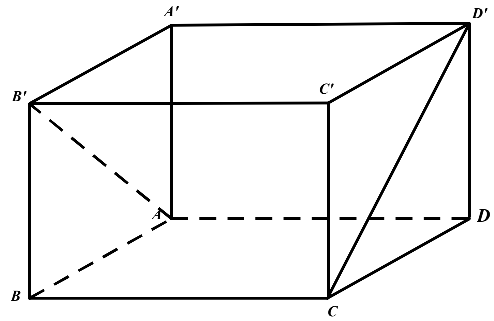
$\Rightarrow \left(AB', A'C'\right) = \left(AB', AC\right) = \widehat{CAB'} = 60°$.

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CD' bằng

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $C'D // AB'$.

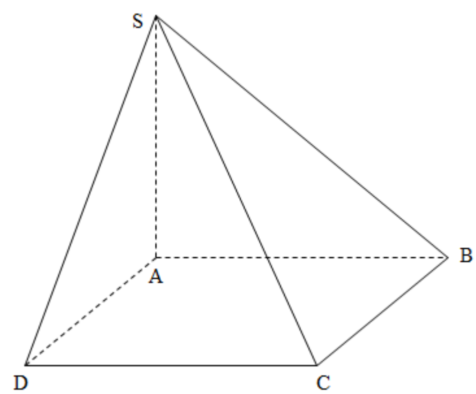
$\Rightarrow \left(\widehat{AB',CD'}\right)=\left(\widehat{C'D,CD'}\right)=90°$ (vì $CDD'C'$ là hình vuông nên hai đường chéo vuông góc).

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$ và $SA\perp BC$. Góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn B

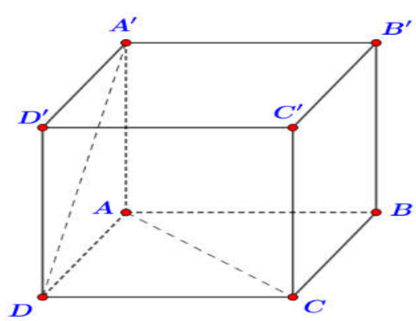


$AD//BC, SA\perp BC \Rightarrow SA\perp AD$ hay ΔSAD vuông tại A.

$AD//BC, SD\cap AD=D \Rightarrow \left(\widehat{SD,BC}\right)=\left(\widehat{SD,AD}\right)=\widehat{SDA}$.

ΔSAD vuông tại $A \Rightarrow \tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{SDA}=60°$.

Câu 27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A

Gọi cạnh hình lập phương là a.

Ta có $\left(AC,A'D\right)=\left(A'C',A'D\right)=\widehat{C'A'D}$.

Vì $A'C'=A'D=DC'=a\sqrt{2}$ nên tam giác $A'C'D$ là tam giác đều.

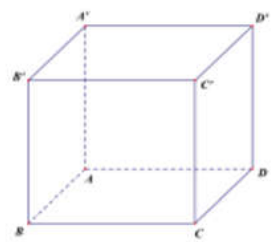
Suy ra $\widehat{C'A'D}=60°$.

Câu 28. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng BC' và $B'D'$ bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C

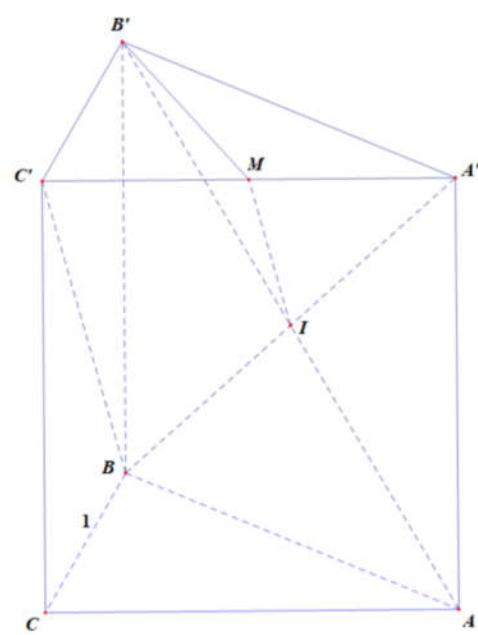


Ta có $\left(BC',B'D'\right)=\left(BC',BD\right)=\widehat{DBC'}$, xét $\Delta BDC'$ có BD,BC',DC' đều là các đường chéo của hình vuông cạnh bằng a nên $\Delta BDC'$ là tam giác đều. Do đó $\left(BC',B'D'\right)=\left(BC',BD\right)=\widehat{DBC'}=60^0$.

Câu 29. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=1, AA'=\sqrt{2}$. Tính góc giữa AB' và BC'

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABB'A'$ và M là trung điểm của $A'C'$.

Có $IM=IB'=B'M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $\left(AB',BC'\right)=\left(AB',IM\right)=\widehat{MIB'}=60^0$.

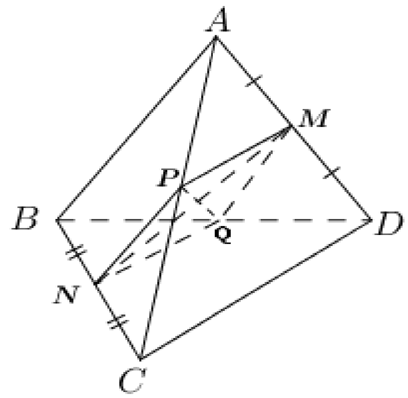
2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN = \sqrt{3}a$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó ta có

$\begin{cases} PM // NQ // CD \\ PM = NQ = \dfrac{CD}{2} \end{cases} \Rightarrow PMQN$ là hình bình hành.

Ta cũng có $MQ // NP // AB, MQ = NP = \dfrac{AB}{2}$.

Do $AB = CD = 2a \Rightarrow PM = MQ = QN = NP = a$.

Gọi $\widehat{(AB, CD)} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\left(\widehat{MPN}\right)\right|$. Áp dụng định lí Côsin ta có

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM.PN.\cos\left(\widehat{MPN}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3a^2 = a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos\left(\widehat{MPN}\right)$$

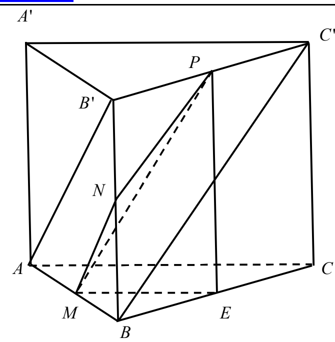
$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\widehat{MPN}\right) = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = \frac{-1}{2}$$

nên $\cos\alpha = \left|\cos\left(\widehat{MPN}\right)\right| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = 60°$

Câu 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Chọn C

Gọi M, N, P, E lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $AB, BB', B'C', BC$.

Suy ra $MN//AB'$ và $NP//BC'$. Khi đó góc giữa đường thẳng AB' và BC' là góc giữa hai đường thẳng MN và NP.

Ta có: $MN = NP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

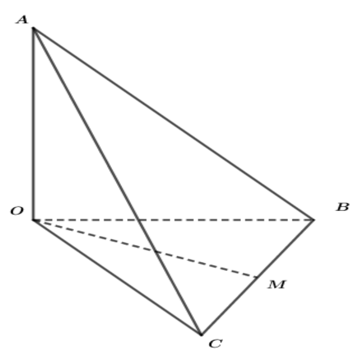
Xét tam giác PEM vuông tại E, $MP^2 = PE^2 + ME^2 = 2a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{9a^2}{4}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác MNP, ta có

$$\cos MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2.MN.NP} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{4}}{2.\frac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó góc MNP bằng 120^0 nên góc giữa đường thẳng AB' và BC' bằng 60^0.

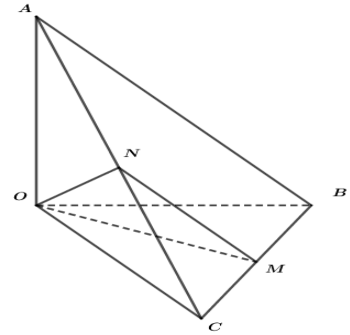
Câu 32. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0

Lời giải

Chọn C



Đặt $OA=a$ suy ra $OB=OC=a$ và $AB=BC=AC=a\sqrt{2}$

Gọi N là trung điểm AC ta có $MN//AB$ và $MN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc $(\widehat{OM,AB})=(\widehat{OM,MN})$. Xét $\widehat{OMN}$

Trong tam giác OMN có $ON=OM=MN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều

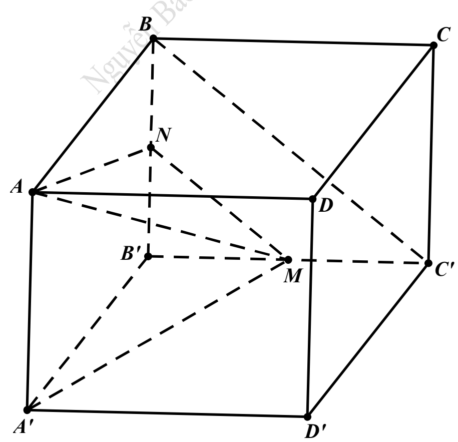
Suy ra $\widehat{OMN}=60^0$. Vậy $(\widehat{OM,AB})=(\widehat{OM,MN})=60^0$.

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử cạnh của hình lập phương là $a>0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB'. Khi đó, $MN//BC'$ nên $(AM,BC')=(AM,MN)$.

Xét tam giác $A'B'M$ vuông tại B' ta có: $A'M=\sqrt{A'B'^2+B'M^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A' ta có: $AM=\sqrt{AA'^2+A'M^2}=\sqrt{a^2+\frac{5a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$.

Có $AN=A'M=\frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN=\frac{BC'}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

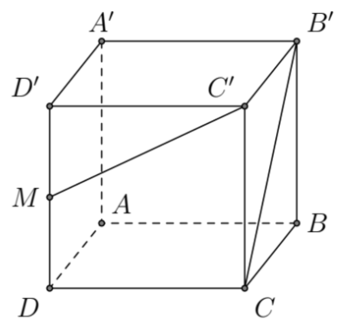
Trong tam giác AMN ta có:

$$\cos\widehat{AMN}=\frac{MA^2+MN^2-AN^2}{2.MA.MN}=\frac{\frac{9a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}-\frac{5a^2}{4}}{2.\frac{3a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{6a^2}{4}.\frac{4}{6a^2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\widehat{AMN}=45°$.

Vậy $\left(AM,BC'\right)=\left(AM,MN\right)=\widehat{AMN}=45°$.

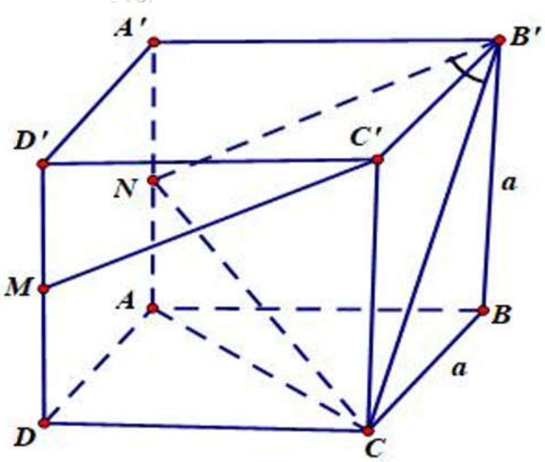
Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (Tham khảo hình vẽ). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$



A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AA' $\Rightarrow B'N\,//\,C'M \Rightarrow \left(\widehat{B'C,C'M}\right)=\left(\widehat{B'C,B'N}\right)$

Xét tam giác $B'NC$ có $B'N=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}; B'C=a\sqrt{2}; NC=\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$

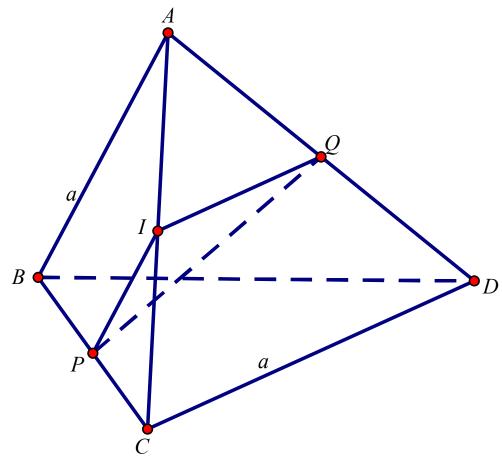
Vậy $\cos\left(\widehat{B'C,C'M}\right)=\left|\cos\widehat{NB'C}\right|=\frac{\left|B'N^2+B'C^2-NC^2\right|}{2B'N.B'C}=\frac{a^2}{2.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Giả sử $AB = CD = a$ và $PQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 30. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC, khi đó $\begin{cases} IP\,//\,AB \\ IQ\,//\,CD \end{cases}$ do IP, IQ lần lượt là các đường trung bình của tam giác CAB và ACD.

Suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD là góc giữa hai đường thẳng IP và IQ.

Xét tam giác IPQ, ta có

$$\cos\widehat{PIQ} = \frac{IP^2 + IQ^2 - PQ^2}{2IP.IQ} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\left(\frac{a}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \text{ suy ra } \widehat{PIQ} = 120^0.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD có số đo là $180^0 - 120^0 = 60^0$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AB và SC ta được kết quả:

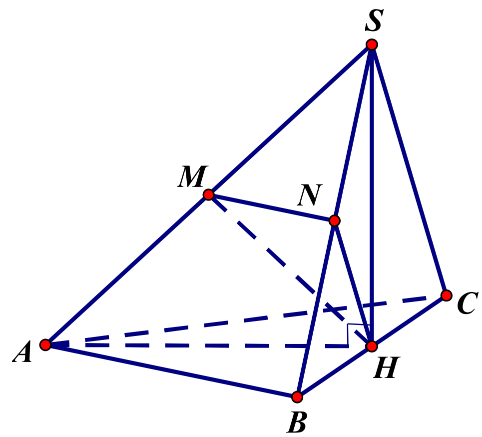
A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC), theo đầu bài $SA = SB = SC$ và tam giác ΔABC vuông cân tại A ta có H là trung điểm của BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB ta có: $\begin{cases} MN\,//\,AB \\ HN\,//\,SC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa AB và SC là góc giữa MN và HN.

Xét tam giác ΔMNH ta có: $MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$; $HN = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a}{2}$; $MH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$ (Do ΔSHA vuông tại H)

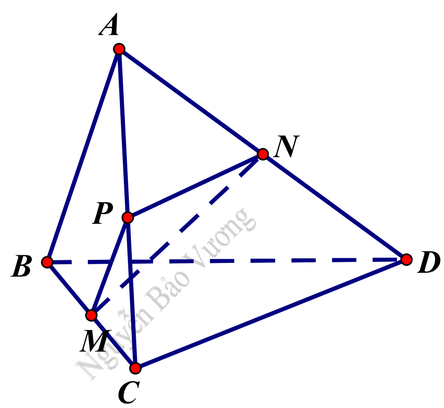
$\Rightarrow$ tam giác ΔMNH là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNH} = 60°$. Vậy góc cần tìm là $60°$.



Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải



Kẻ $MP // AB$, $NP // CD$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa MP và NP.

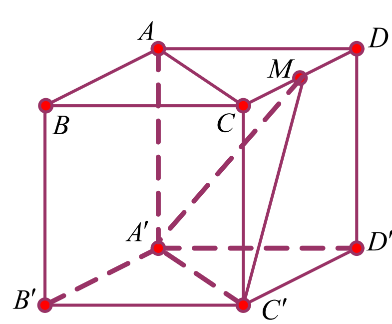
$$\cos\widehat{MPN} = \frac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2.MP.NP} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ.$$

Vậy góc giữa AB và CD bằng $60°$.

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M trung điểm các cạnh CD. cosin của góc giữa AC và $C'M$ là

A. 0. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải



Ta có $AC//A'C'$ nên góc giữa AC và $C'M$ cũng bằng góc giữa $A'C'$ và $C'M$ là $\widehat{A'C'M}$.

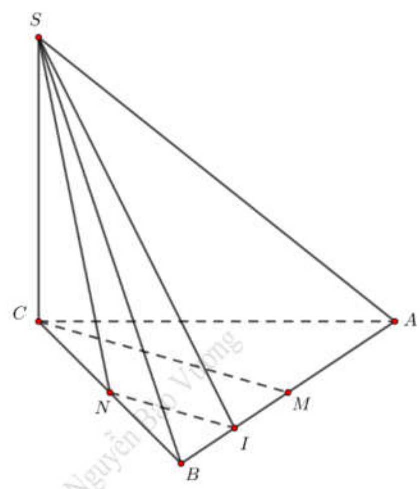
Gọi cạnh của hình lập phương có độ dài là a. Khi đó $A'C'=a\sqrt{2}$, $C'M=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$(trong tam gics vuông $CC'M$ có $CM=\dfrac{a}{2}$), $A'M=\dfrac{3a}{2}$(trong tam giác vuông $A'MD$, $MD=\dfrac{a}{2}$, $A'D=a\sqrt{2}$).

Xét tam giác $A'MC'$ ta có $\cos\widehat{A'C'M}=\dfrac{\left(A'C'\right)^2+C'M^2-A'M^2}{2A'M.C'M}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a=4\sqrt{2}\text{cm}$, cạnh bên SC vuông góc với đáy và $SC=2\text{cm}$. Gọi M, N là trung điểm của AB và BC. Góc giữa hai đường thẳng SN và CM là

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BM, ta có $NI//CM$ nên góc giữa SN và CM là góc giữa SN và NI.

Xét tam giác SNI có $SN=\sqrt{SC^2+CN^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$; $NI=\dfrac{1}{2}CM=\dfrac{1}{2}4\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$;

$CI=\sqrt{CM^2+MI^2}=\sqrt{24+2}=\sqrt{26}\Rightarrow SI=\sqrt{SC^2+CI^2}=\sqrt{4+26}=\sqrt{30}$.

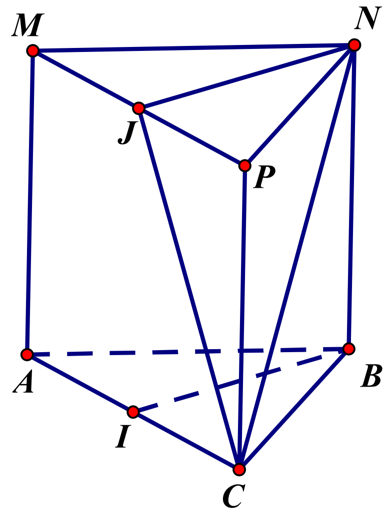
Vậy $\cos\widehat{SNI}=\dfrac{SN^2+NI^2-SI^2}{2SN.NI}=\dfrac{12+6-30}{2.2\sqrt{3}.\sqrt{6}}=\dfrac{-12}{3\sqrt{2}.4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{SNI}=135°$.

Vậy góc giữa SN và CM bằng $45°$.

Câu 40. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Cosin của góc giữa hai đường thẳng NC và IB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

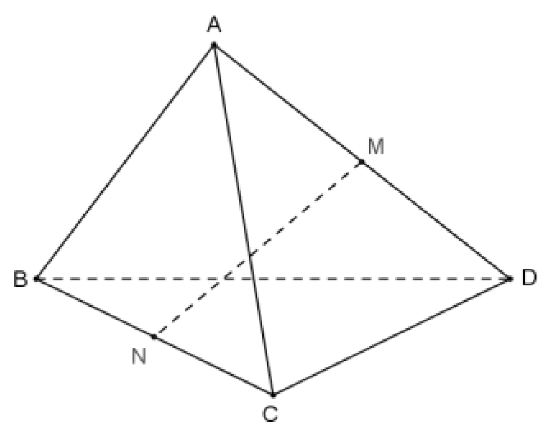


Gọi J là trung điểm của MP. Góc giữa hai đường thẳng NC và IB bằng góc giữa hai đường thẳng NC và NJ.

Ta có $JN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $NC^2=NP^2+PC^2=2a^2$, $JC^2=JP^2+PC^2=\frac{5a^2}{4}$.

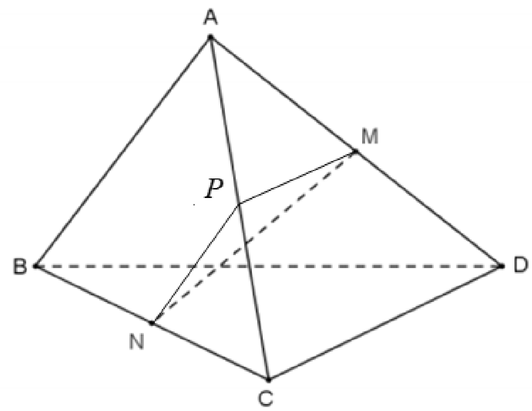
Xét tam giác NJC có: $\cos\widehat{JNC}=\frac{JN^2+NC^2-JC^2}{2NJ.NC}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$.



A. $MN=\frac{a}{2}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $MN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN=\frac{a}{4}$.

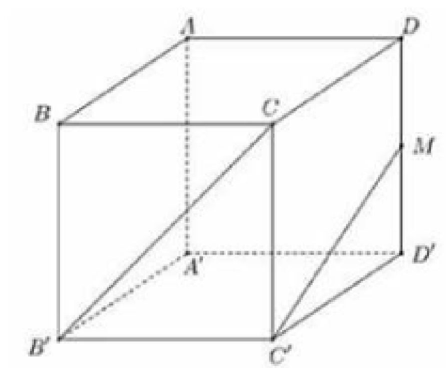
Lời giải



Gọi P là trung điểm của AC. Suy ra $PM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=PN$. Do đó tam giác PMN cân tại P. Lại có góc giữa AB và MN bằng $30°$ nên góc giữa MN và PN bằng $30°$. Vậy tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng $120°$.

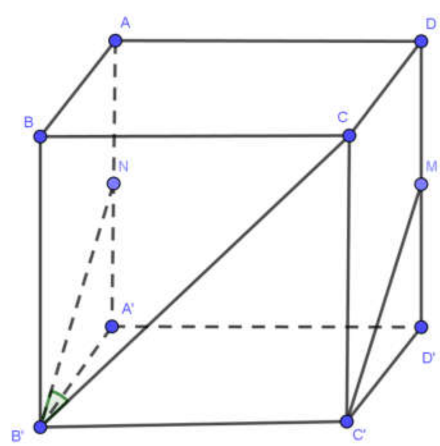
Ta có $PN.\sqrt{3}=MN$ nên $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 42. Cho hình lập phương trình $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (tham khảo hình vẽ dưới đây). Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.



A. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải



Kẻ $B'N$ song song với $C'M$. Ta được $\left(B'C;C'M\right)=\left(B'C;B'N\right)=\widehat{NB'C}$

Ta có $B'C=\sqrt{BB'^2+BC^2}=a\sqrt{2}$, $B'N=\sqrt{AB'^2+A'N^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $CN=\sqrt{AN^2+AC^2}=\dfrac{3}{2}a$

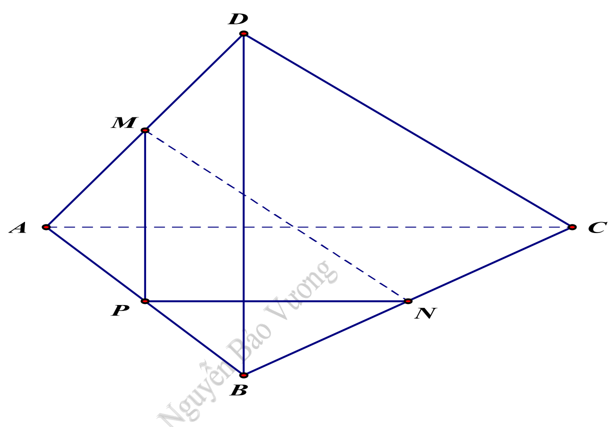
Áp dụng định lý hàm số côsin trong $\Delta B'NC$, ta được $cos\,\widehat{NB'C}=\dfrac{B'N^2+B'C^2-NC^2}{2.B'N.B'C}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=3a, BD=4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Biết AC vuông góc BD. Tính MN.

A. $MN=\dfrac{5a}{2}$. **B.** $MN=\dfrac{7a}{2}$. **C.** $MN=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $MN=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi P là trung điểm AB

Ta có $\begin{cases} AC\,//\,PN \\ BD\,//\,PM \end{cases} \Rightarrow PN\perp PM$ và $PN=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{3a}{2}; PM=\dfrac{BD}{2}=2a$

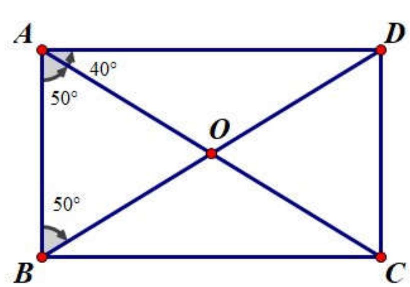
$MN=\sqrt{PM^2+PN^2}=\dfrac{5a}{2}$

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD}=40^\circ$. Số đo góc giữa hai đường thẳng $AC, B'D'$ là

A. 40° **B.** 20°. **C.** 50°. **D.** 80°.

Lời giải

Chọn D



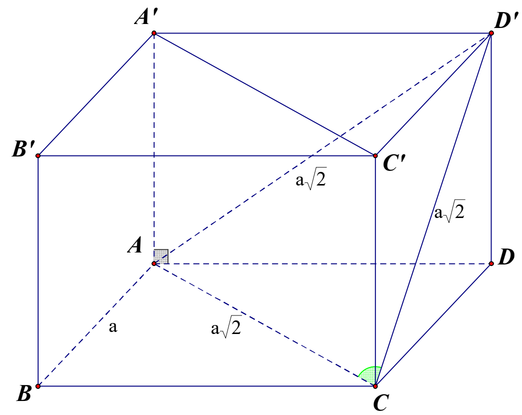
Vì $BD\,//\,B'D'$ nên $\left(\widehat{AC;B'D'}\right)=\left(\widehat{AC;BD}\right)=\widehat{AOB}=80^\circ$ với O là tâm hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng CD' và $A'C'$ bằng.

A. 30^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy $A'C'//AC \Rightarrow \left(\widehat{CD', A'C'}\right) = \left(\widehat{CD', AC}\right) = \varphi$

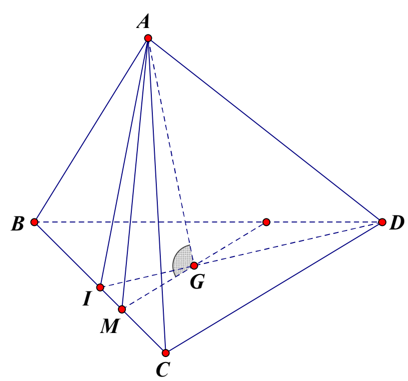
Do các mặt của hình lập phương bằng nhau nên các đướng chéo $AC = CD' = AD' = a\sqrt{2}$

Suy ra $\Delta ACD'$ đều nên $\left(\widehat{CD', A'C'}\right) = \left(\widehat{CD', AC}\right) = \varphi = 60^0$.

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $\widehat{BAC} = 60°$; $\widehat{BAD} = 90°$; $\widehat{DAC} = 120°$. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD, trong đó G là trọng tâm tam giác BCD.

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



* ΔABC đều $\Rightarrow BC = 1$.

* ΔACD cân tại A có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos 120°} = \sqrt{3}$.

* ΔABD vuông cân tại A có $BD = \sqrt{2}$.

* ΔBCD có $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B.

Dựng đường thẳng d qua G và song song CD, cắt BC tại M.

Ta có $MG // CD \Rightarrow (AG, CD) = (AG, MG)$.

Gọi I là trung điểm của BC, xét ΔBDI vuông tại B có $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{IM}{IC}=\frac{MG}{CD}=\frac{IG}{ID}=\frac{1}{3}\Rightarrow IM=\frac{1}{3}.IC=\frac{1}{3}.\frac{BC}{2}=\frac{1}{6}$; $MG=\frac{1}{3}.CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $IG=\frac{1}{3}.ID=\frac{1}{2}$.

Xét ΔAIM vuông tại I có $AM=\sqrt{AI^2+IM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

$$\cos\widehat{AID}=\frac{AI^2+ID^2-AD^2}{2AI.ID}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$AG=\sqrt{AI^2+IG^2-2AI.IG.\cos\widehat{AID}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét ΔAMG có

$$\cos(AG,MG)=\left|\cos\widehat{AGM}\right|=\left|\frac{AG^2+GM^2-AM^2}{2.AG.GM}\right|=\left|\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|=\frac{1}{6}.$$

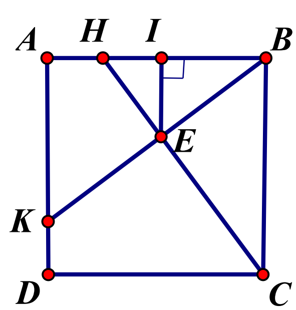
Câu 47. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H, K lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho $BH=3HA$, $AK=3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH}=30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC.

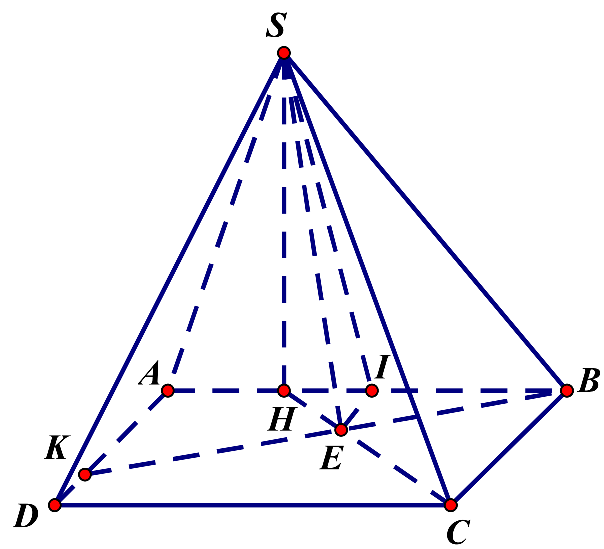
A. $\frac{28}{5\sqrt{39}}$. **B.** $\frac{18}{5\sqrt{39}}$. **C.** $\frac{36}{5\sqrt{39}}$. **D.** $\frac{9}{5\sqrt{39}}$.

Lời giải

Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên AB ta có $\Delta ABD=\Delta BCH$.

$\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{BCH}\Rightarrow\widehat{HEB}=90^\circ$.





Ta có: $\cos(SE;BC)=\cos(SE;EI)=\left|\cos\widehat{SEI}\right|$, $SH=BH.\tan 30°=a\sqrt{3}$.

$\frac{HB}{HC}=\frac{HE}{HB}\Rightarrow HE=\frac{HB^2}{HC}=\frac{9a}{5}$, $SE=\sqrt{SH^2+HE^2}=\sqrt{3a^2+\frac{81a^2}{25}}=\frac{2a\sqrt{39}}{5}$.

$\frac{HE}{HB}=\frac{HI}{HE}\Rightarrow HI=\frac{HE^2}{HB}=\frac{27a}{25}$, $SI=\sqrt{SH^2+HI^2}=\sqrt{3a^2+\left(\frac{27a}{25}\right)^2}=\frac{2a\sqrt{651}}{25}$.

$\frac{EI}{BC}=\frac{HI}{HB}=\frac{9}{25}\Rightarrow EI=\frac{36a}{25}$

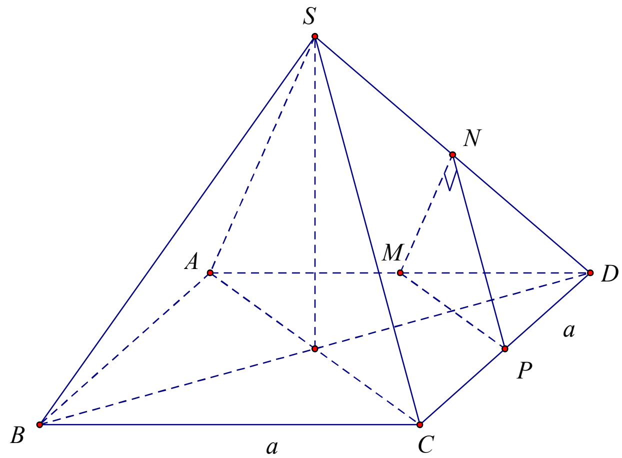
Áp dụng định lý cosin cho tam giác SEI ta được:

$$\cos\widehat{SEI}=\frac{SE^2+EI^2-SI^2}{2.SE.EI}=\frac{\left(\frac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2+\left(\frac{36a}{25}\right)^2-\left(\frac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2.\frac{2a\sqrt{39}}{5}.\frac{36a}{25}}=\frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$

Câu 48. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và SC là

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm của CD.

Ta có: $NP\,//\,SC \Rightarrow (MN,SC)=(MN,NP)$.

Xét tam giác MNP ta có: $MN=\frac{a}{2}$, $NP=\frac{a}{2}$, $MP=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

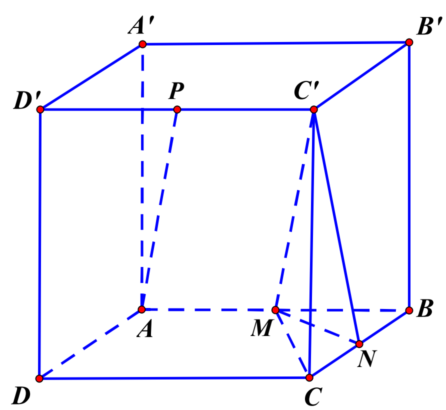
$\Rightarrow MN^2+NP^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}=MP^2 \Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại N

$\Rightarrow \widehat{MNP}=90^\circ \Rightarrow (MN,SC)=(MN,NP)=90^\circ$.

Câu 49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. 60°. **B.** 90° **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải



Ta có tứ giác $AMC'P$ là hình bình hành nên $AP\,//\,MC'$ $\Rightarrow \left(\widehat{MN,AP}\right)=\left(\widehat{MN,MC'}\right)=\widehat{NMC'}$.

Gọi cạnh hình vuông có độ dài bằng a.

Xét tam giác $C'CM$ vuông tại C có $C'M=\sqrt{C'C^2+MC^2}=\sqrt{C'C^2+BC^2+MB^2}=\frac{3a}{2}$.

Xét tam giác $C'CN$ vuông tại C có $C'N=\sqrt{C'C^2+CN^2}=\frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Mà $MN=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

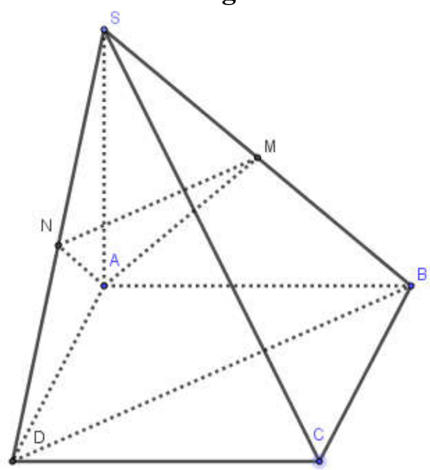
Xét tam giác $C'CM$ có $\cos\widehat{NMC'} = \dfrac{MC'^2 + MN^2 - C'N^2}{2MC'.MN} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{NMC'} = 45° \Rightarrow \left(\widehat{MN, AP}\right) = 45°$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm SB. Góc giữa AM và BD là

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải



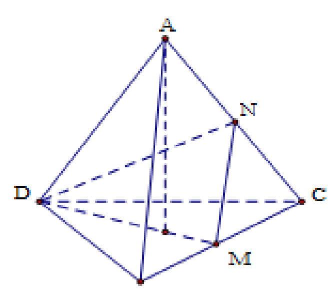
Gọi N là trung điểm SD khi đó $MN \parallel BD$, suy ra $\left(\widehat{BD; AM}\right) = \left(\widehat{MN; AM}\right) = \widehat{AMN}$

$AN = AM = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra ΔAMN là tam giác đều, nên $\widehat{AMN} = 60^\circ$

Câu 51. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Tính giá trị của $\cos(AB, DM)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a.
Gọi N là trung điểm của AC.
Khi đó: $\left(\widehat{AB, DM}\right) = \left(\widehat{MN, DM}\right)$

Ta có: $MN = \dfrac{a}{2}$, $DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos\widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2.MN.MD} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

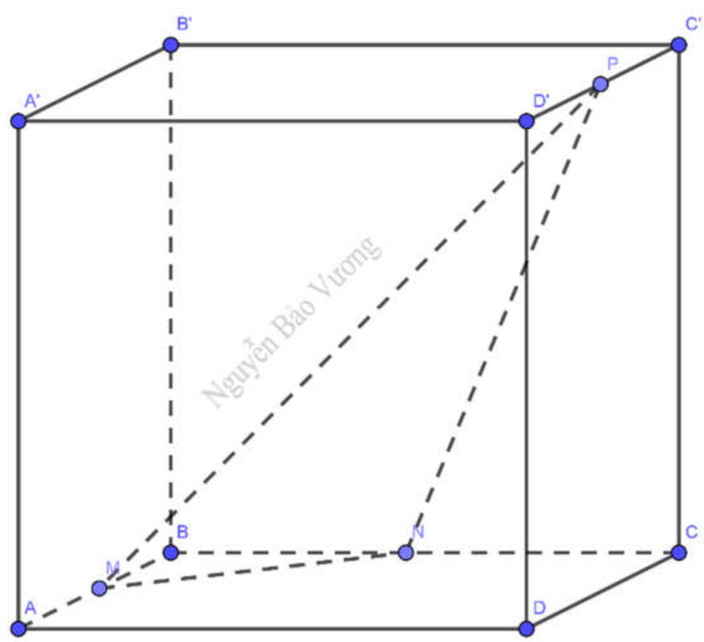
Vậy $\cos\left(AB, DM\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 52. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D'$. Xác định góc giữa MN và AP.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$

Lời giải

Chọn D



Ta có MN song song AC (Đường trung bình)

$(MN, AP) = (AC, AP)$

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1

Xét tam giác APC có:

$PC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $AP = \sqrt{1^2 + \left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{3}{2}$.

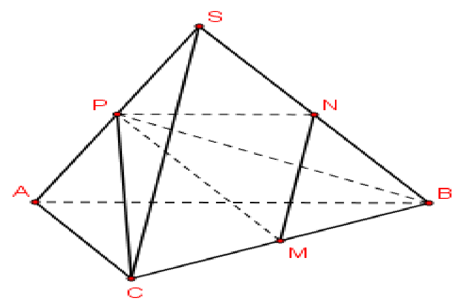
Theo định ý hàm cos trong tam giác APC ta có: $\cos\widehat{PAC} = \frac{2 + \frac{9}{4} - \frac{5}{4}}{2\sqrt{2}.\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{PAC} = 45°$.

Câu 53. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a; BC=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. 0°. **B.** 120°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, SB, SA.

Góc giữa AB và SC là góc giữa PN và MN.

$MN=\frac{a}{2}=NP$

$PC=BP=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PM=\sqrt{PC^2-CM^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$

Suy ra tam giác MNP là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNP}=60^\circ$.

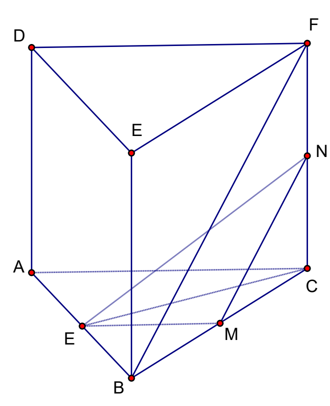
Vậy góc giữa AB và SC bằng 60°.

Câu 54. Cho lăng trụ đều $ABC.DEF$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF.

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{10}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CF, AB.

Khi đó: $\begin{cases} MN // BF \\ ME // AC \end{cases} \Rightarrow (AC;BF) = (MN;ME)$.

Tính góc $\widehat{EMN}$.

Xét tam giác MNE, ta có:

$MN = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$ME = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$, $EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$NE = \sqrt{EC^2 + NC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Suy ra: $\cos\widehat{EMN} = \frac{ME^2 + MN^2 - EN^2}{2ME.MN} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

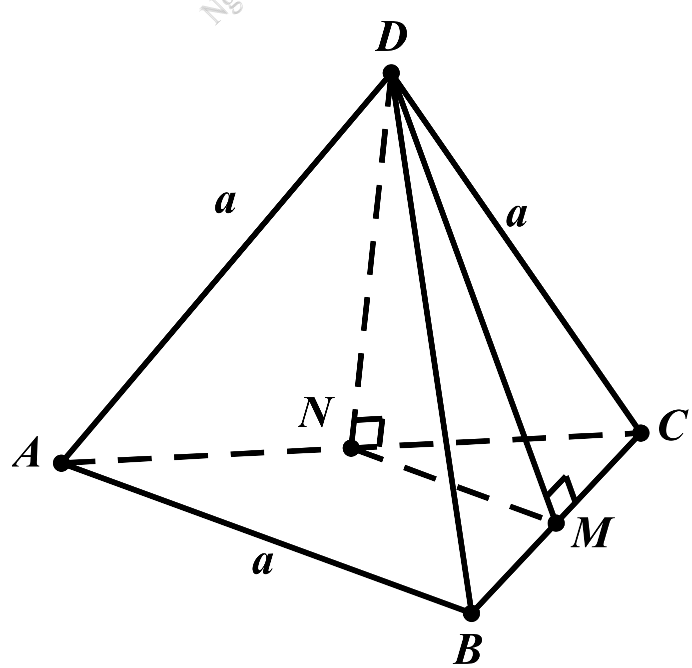
Vậy $\cos(AC;BF) = \left|\cos\widehat{EMN}\right| = \frac{\sqrt{5}}{10}$

Câu 55. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM ?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó, $AB /\!/ MN$ nên $(DM, AB) = (DM, MN)$.

Dễ dàng tính được $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $MN = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác DMN, ta có $\cos\widehat{DMN}=\dfrac{DM^2+MN^2-DN^2}{2DM.MN}=\dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{2\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Vì $\cos\widehat{DMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0$ nên $\cos\left(DM,MN\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

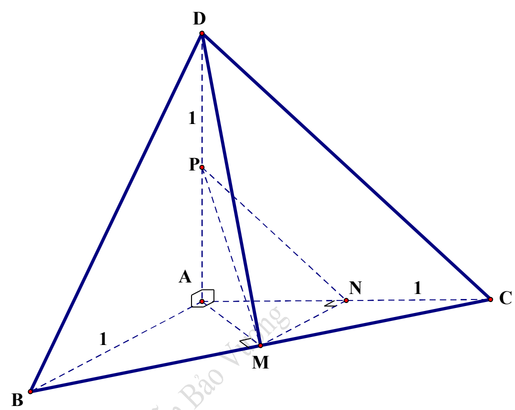
Vậy $\cos\left(DM,AB\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 56. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB=AC=AD=1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD.

Trong ΔABC, có $\begin{cases} MN\,//\,AB \\ MN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔACD, có $\begin{cases} NP\,//\,CD \\ NP=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔAMP, có $MP=\sqrt{AP^2+AM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} MN\,//\,AB \\ NP\,//\,CD \end{cases}\Rightarrow\left(AB;CD\right)=\left(MN;NP\right)=\widehat{MNP}$

Áp dụng định lý Cosin cho ΔMNP, có

$$\cos\widehat{MNP}=\frac{NP^2+NM^2-MP^2}{2NP.NM}=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}}=0\Rightarrow\widehat{MNP}=90°$$

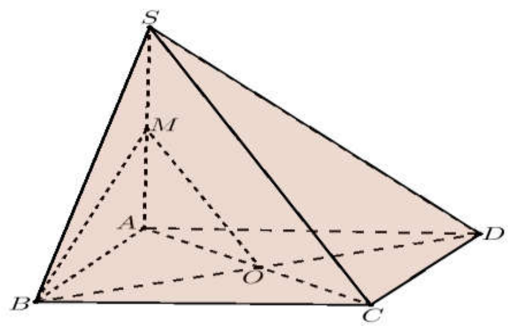
Hay $\left(AB;CD\right)=90°$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng SC và BD.

A. $\sqrt{\frac{3}{10}}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải

Chọn. B.



Kẻ $OM \parallel SC \Rightarrow (\widehat{SC,BD})=(\widehat{OM,BD})$

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}\Rightarrow AC=BD=2a$.

$BO=\frac{BD}{2}=a$, $OM=\frac{SC}{2}=\frac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $BM=\sqrt{SA^2+AB^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

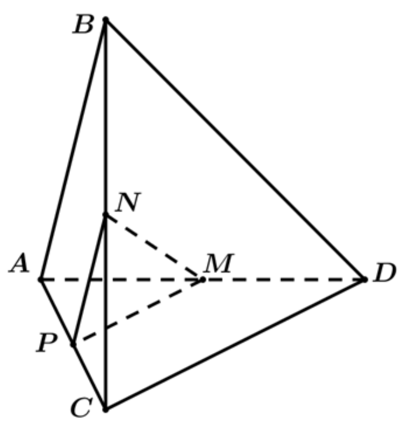
$\cos(\widehat{MOB})=\frac{OM^2+BO^2-BM^2}{2OM.BO}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\cos(\widehat{SC,BD})=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 58. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Biết $MN=a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng.

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi P là trung điểm AC, ta có $PM//CD$ và $PN//AB$, suy ra $\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{PM,PN}\right)$.

Dễ thấy $PM=PN=a$.

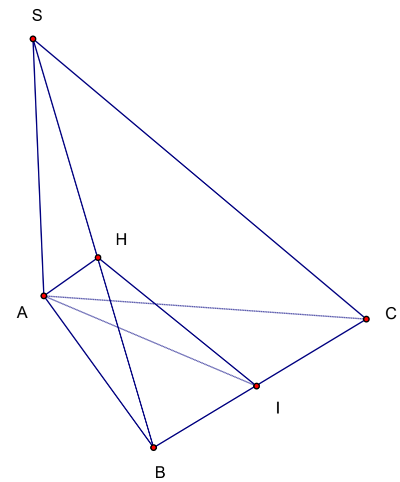
Xét ΔPMN ta có $\cos\widehat{MPN}=\frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2PM.PN}=\frac{a^2+a^2-3a^2}{2.a.a}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\widehat{MPN}=120^0\Rightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=180^0-120^0=60^0$.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B, $SA=a, AB=a, BC=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm BC. Côsin của góc giữa đường thẳng AI và SC là?

A. $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm SB ta có $SC//HI$

Góc giữa đường thẳng AI và SC bằng góc giữa đường thẳng AI và HI

$AH=\frac{1}{2}SB=\frac{\sqrt{AB^2+SA^2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$AI=\sqrt{AB^2+BI^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}a$

$HI=\frac{SC}{2}=\frac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+3a^2}}{2}=a$

$AI^2=AH^2+HI^2$ suy ra tam giác AHI vuông tại H

$\cos\widehat{AIH}=\frac{HI}{AI}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

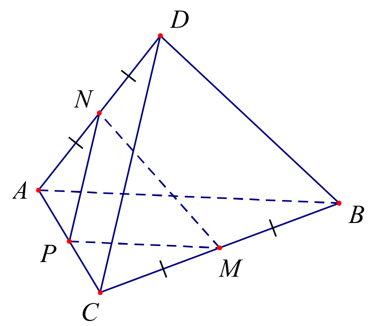
Côsin của góc giữa đường thẳng AI và SC là $\cos\widehat{AIH}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 60. Cho tứ diện $ABCD$ gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB=CD=a$, $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 30^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi P là trung điểm của AC, ta có: $MP//AB$, $PN//CD$ và $MP = PN = \frac{a}{2}$.

Do $MP//AB$ và $PN//CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng MP và PN.

Xét tam giác MPN, có $\cos\widehat{MPN} = \frac{MP^2 + PN^2 - MN^2}{2.MP.PN} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MPN} = 120°$.

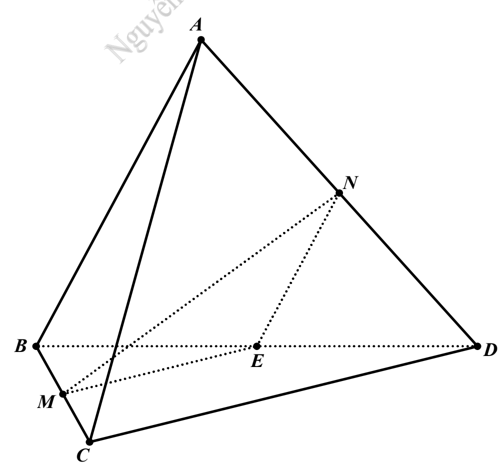
Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $60°$.

Câu 61. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Biết $AB = CD = a$ và $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E lần lượt là trung điểm của BD. Vì $\begin{cases} AB \parallel NE \\ CD \parallel ME \end{cases}$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng NE và ME.

Trong tam giác MNE ta có: $\cos\widehat{MEN} = \frac{ME^2 + NE^2 - MN^2}{2ME.NE} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a^2}{4}} = -\frac{1}{2}$

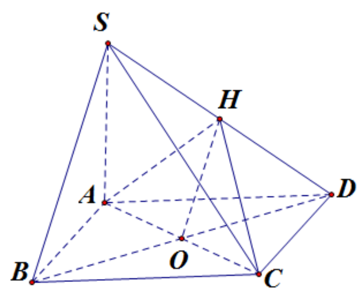
Suy ra $\widehat{MEN} = 120°$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là $60°$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{2}$; $SA = 2a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính côsin góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{15}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của $SD \Rightarrow OH \,//\, SB$. Do đó $(SB, AC) = (OH, AC)$.

Tính được $SB = \sqrt{5}a$; $SD = a\sqrt{6}$; $AC = a\sqrt{3}$, suy ra $OH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$;

$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\cos \widehat{AOH} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{15}}{15}$ nên $\cos(SB, AC) = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

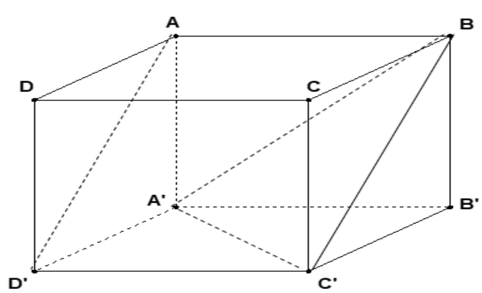
Vậy góc giữa hai đường thẳng *BA'* và *B'D'* bằng 60^0.

Câu 63. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD'.

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0

Lời giải

Chọn B



Vì là hình lập phương $\Rightarrow$ 6 mặt đều là hình vuông bằng nhau nên các đường chéo của chúng đều bằng nhau

$\Rightarrow A'C' = A'B = BC'$

$\Rightarrow \Delta A'C'B$ đều

Ta có: $AD' // BC' \Rightarrow (A'B; AD') = (A'B; BC') = \angle A'BC' = 60^0$