BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Chú ý:

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a,b ta có thể lấy một điểm O nằm trên một trong hai đường thẳng đó và vẽ đường thẳng song song với đường thẳng còn lại.

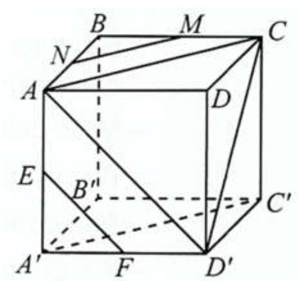
b) Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ 0° đến 90°.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông và M,N,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh $BC,BA,AA',A'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) $A'C'$ và BC;

b) MN và EF.

Giải



Hình 2

a) Ta có $AC//A'C'$, suy ra $\left(A'C',BC\right)=(AC,BC)=\widehat{ACB}=45^\circ$ (tam giác ACB vuông cân tại B).

b) Ta có $AC//MN, AD'//EF$,suy ra $(MN,EF)=\left(AC,AD'\right)=\widehat{CAD'}=60^\circ$ (tam giác ACD' có ba cạnh bằng nhau).

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Kiến thức trọng tâm

Định nghĩa

Trong không gian, hai đường thẳng a,b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Hai đường thẳng a,b vuông góc được kí hiệu là $a\perp b$ hoặc $b\perp a$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Chứng minh rằng $AB\perp CC', AC\perp B'D'$.

Giải

Ta có $CC'//BB'$, suy ra $\left(AB,CC'\right)=\left(AB,BB'\right)=\widehat{ABB'}=90^\circ$. Vậy $AB\perp CC'$.

Ta có $B'D'//BD$, suy ra $\left(AC,B'D'\right)=(AC,BD)=90^\circ$ (hai đường chéo của hình vuông luôn vuông góc với nhau). Vậy $AC\perp B'D'$.

Chú ý:

a) Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

b) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường này thì cũng vuông góc với đường kia.
c) Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt a,b cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba c thì ta chưa kết luận được $a//b$ như trong hình học phẳng.

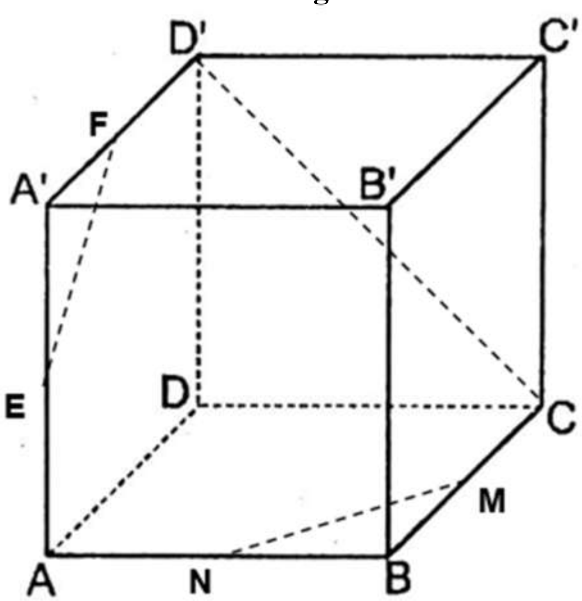
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

Câu 1. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông M,N,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh $BC,BA,AA',A'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

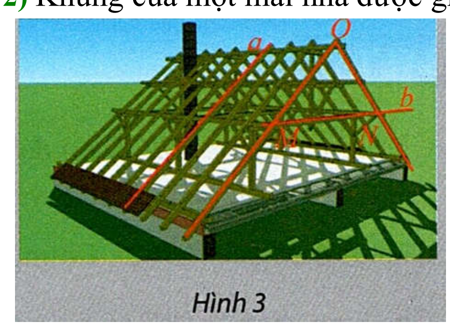
a) MN và DD';
b) MN và CD';
c) EF và CC'.

Lời giải



a) Trong tam giác ABC có MN là đường trung bình nên $MN//AC$
Mà $AA'//DD'$
Nên góc giữa MN và DD' là góc giữa AC và AA'
b) Vì $MN//AC$ nên góc giữa MN và CD' là góc giữa AC và CD'
c) Trong tam giác $AA'D'$ có EF là đường trung bình nên $EF//AD'$
Mà $CC'//AA'$
Nên góc giữa EF và CC' là góc giữa AA' và AD'

Câu 2. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Khung của một mái nhà được ghép bởi các thanh gỗ như Hình 3.



Hình 3

Cho biết tam giác OMN vuông cân tại O. Tính góc giữa hai thanh gỗ a và b.

Lời giải

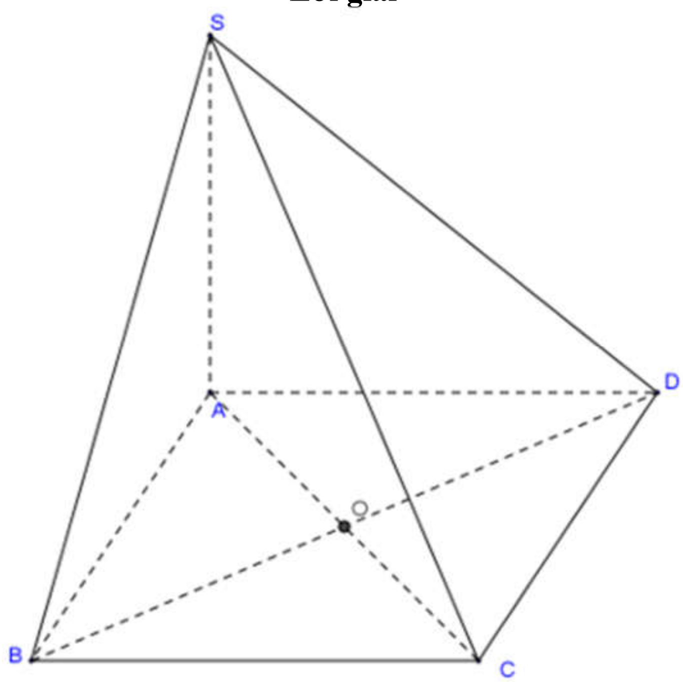
Vì $a//OM$ nên góc giữa a và b là góc giữa MN và OM

Mà tam giác OMN vuông cân

Nên góc giữa a và b là 45°

Câu 3. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a. Cho biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp AB$ và $SA \perp AD$. Tính góc giữa SB và CD, SD và CB.

Lời giải



$CD//AB$ nên góc giữa SB và CD là góc giữa AB và $SB, \widehat{ABS}$

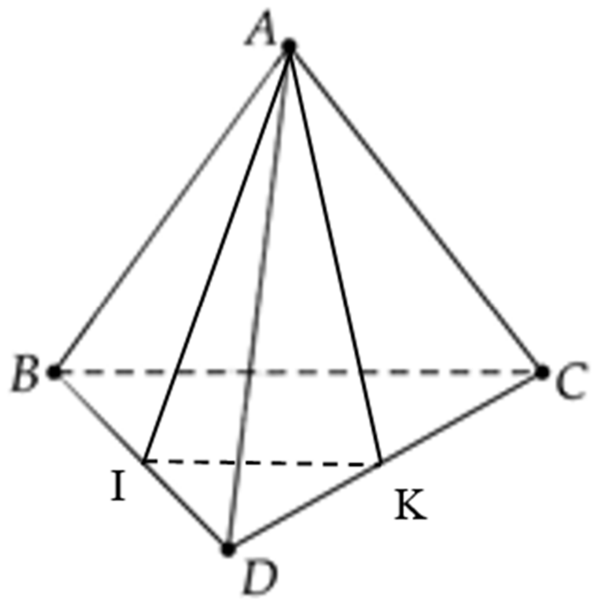
$CB//AD$ nên góc giữa SD và CB là góc giữa SD và $AD, \widehat{ADS}$

Ta có: $\tan\widehat{ABS} = \tan\widehat{ADS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

Suy ra $\widehat{ABS} = \widehat{ADS} = \dfrac{\pi}{3}$

Câu 4. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AK và BC.

Lời giải



Tam giác ACD đều cạnh a có AK là trung tuyến nên $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Gọi I là trung điểm của BD

Tam giác ABD đều cạnh a có AI là trung tuyến nên $AI=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Tam giác BCD có IK là đường trung bình nên $IK//BC, IK=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$

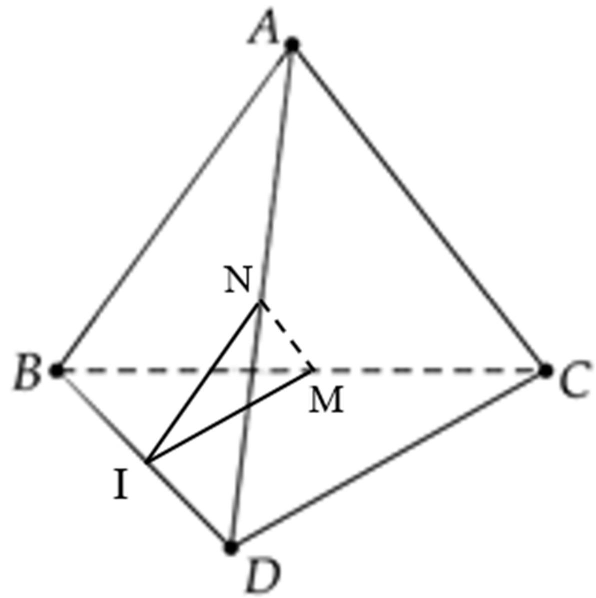
Ta có: $\cos\widehat{AKI}=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Nên $\widehat{AKI}=73,2^\circ$

Vì $BC//IK$ nên góc giữa AK và BC là góc giữa AK và KI và bằng $73,2^\circ$

Câu 5. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB=CD=2a$ và $MN=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BD.

Tam giác BCD có IM là đường trung bình nên $IM//DC$ và $IM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\cdot 2a=1$

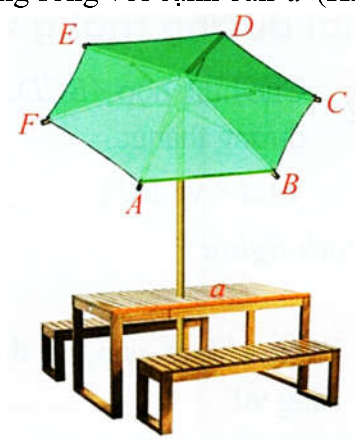
Tam giác ABD có IN là đường trung bình nên $IN//AB$ và $IN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot 2a=1$

Ta có: $\cos\widehat{MIN}=\frac{a^2+a^2-(a\sqrt{3})^2}{2.a\cdot a}=\frac{-1}{2}$

Nên $\widehat{MIN}=120^\circ$

Do $AB//IN, CD//IM$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa IM và IN là bằng 120°

Câu 6. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$ song song với mặt bàn và có cạnh AB song song với cạnh bàn a (Hình 5).



Hình 5

Tính số đo góc hợp bởi đường thẳng a lần lượt với các đường thẳng AF, AE và AD.

Lời giải

Vì $a//AB$ nên góc giữa a và AF là góc giữa AB và AF và bằng 120°

Vì $a//AB$ nên góc giữa a và AE là góc giữa AB và AE và bằng 90°

Vì $a//AB$ nên góc giữa a và AD là góc giữa AB và AD và bằng 60°

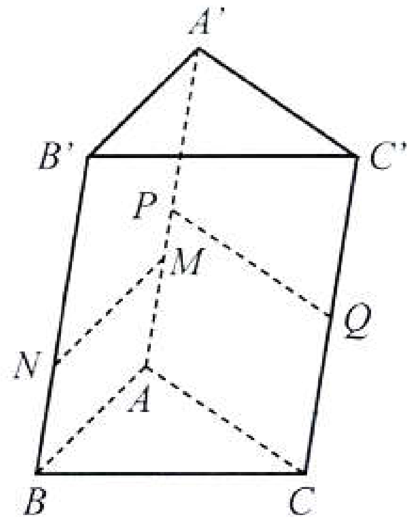
Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC}=120^0$. Các điểm M,N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và BB' thoả mãn $MN//AB$, các điểm P,Q lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và CC' (P khác M) thoả mãn $PQ//AC$ (Hình 2). Tính các góc sau:

a) (AB,AC);

b) $\left(AB,B'C'\right)$;

c) (MN,PQ).

Giải



Hình 2

a) Trong mặt phẳng (ABC), vì $\widehat{BAC}=120^\circ$ nên $(AB,AC)=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

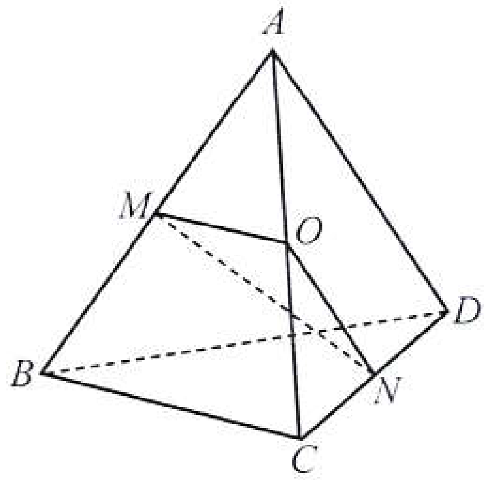
b) Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\dfrac{180^\circ-\widehat{BAC}}{2}=\dfrac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$.

Ta có $BC//B'C'$ nên $\left(AB,B'C'\right)=(AB,BC)=\widehat{ABC}=30^\circ$.

c) Vì $MN//AB, PQ//AC$ nên $(MN,PQ)=(AB,AC)=60^\circ$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC, biết $MN=a\sqrt{3}$ và $AD=BC=2a$.

Lời giải

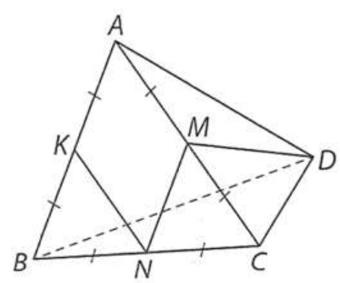


Hình 53

Gọi O là trung điểm AC.
Vì OM, ON lần lượt là đường trung bình của hai tam giác ABC, CAD nên $OM // BC, ON // AD$ và $OM = \frac{1}{2}CB = a, ON = \frac{1}{2}AD = a$. Khi đó $(AD, BC) = (ON, OM)$.
Xét tam giác OMN có:
$\cos\widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2a \cdot a} = -\frac{1}{2}$ nên $\widehat{MON} = 120^\circ$.
Suy ra $(AD, BC) = (ON, OM) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC và AB. Tính góc giữa đường thẳng MN và BD; góc giữa đường thẳng KN và MD.

Giải. (H.7.1)

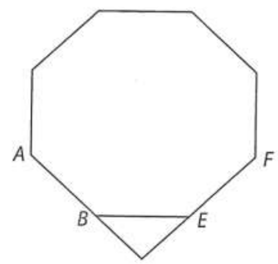


Hình 7.1

Vì $MN // AB$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BD, mà tam giác ABD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AB và BD bằng 60°.
Do đó $(MN, BD) = (AB, BD) = 60^\circ$.
Vì $NK // AC$ nên góc giữa hai đường thẳng NK và MD bằng góc giữa hai đường thẳng AC và MD, mà tam giác ACD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AC và MD bằng 90°. Do đó $(NK, MD) = (AC, MD) = 90^\circ$.

Câu 10. Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh AB và CD được thể hiện trên hình sau:

Giải. (H.7.3)

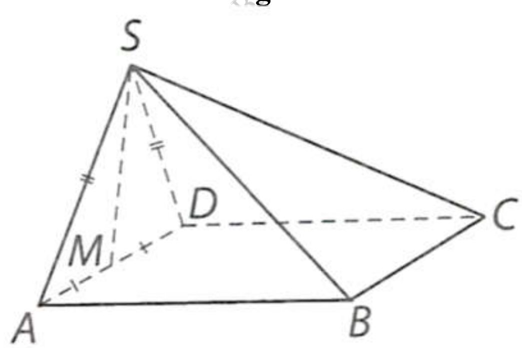


Hình 7.3

Ta có: $CD//EF$ nên $(AB,CD)=(AB,EF)$, với AB, EF là hai cạnh của một hình bát giác đều. Góc ngoài của một bát giác đều bằng $\frac{360^{\circ}}{8}=45^{\circ}$ nên $(AB,EF)=90^{\circ}$, suy ra $(AB,CD)=90^{\circ}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD là tam giác đều và M là trung điểm của cạnh AD. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và $SA; BC$ và SM.

Lời giải

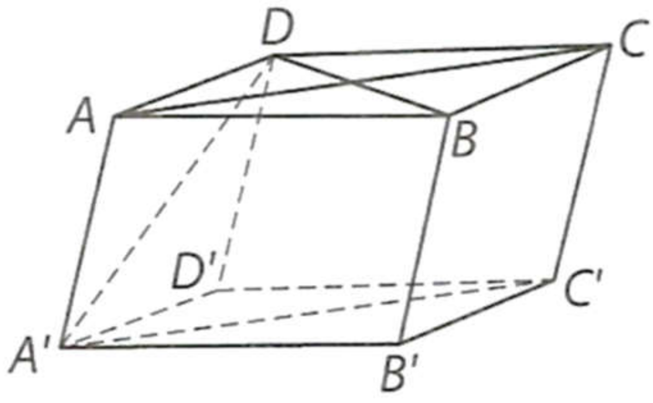


Hình 7.21

Vì $BC//AD$ nên $(BC,SA)=(AD,SA)=\widehat{SAD}=60^{\circ}$ và $(BC,SM)=(AD,SM)=90^{\circ}$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120°. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và $BD; AD$ và BB'; $A'D$ và BB'.

Lời giải



Hình 7.22

Vì $ABCD$ là hình thoi và $A'C'//AC$ nên $(A'C',BD)=(AC,BD)=90^0$.

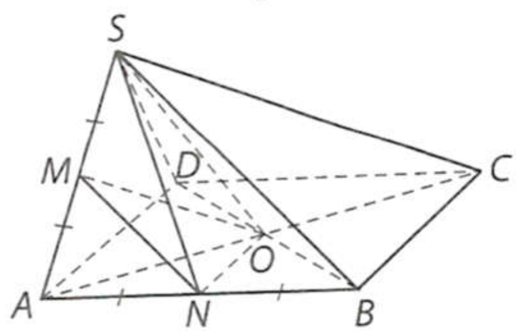
Vì $BB'//AA'$ nên $(AD,BB')=(AD,AA')=180^0-\widehat{A'AD}=60^0$ và $(A'D,BB')=(A'D,AA')=\widehat{AA'D}=30^0$.

Câu 13. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA,AB.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: MN và $SD;MO$ và SB.

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng SN và BC.

Lời giải



Hình 7.24

a) Ta có: $BD^2=SB^2+SD^2=2a^2$ nên ΔSBD vuông tại S, mà $MN//SB$, suy ra $(MN,SD)=(SB,SD)=90^{\circ}$.

Với O là giao điểm của AC và BD thì $MO//SC$.

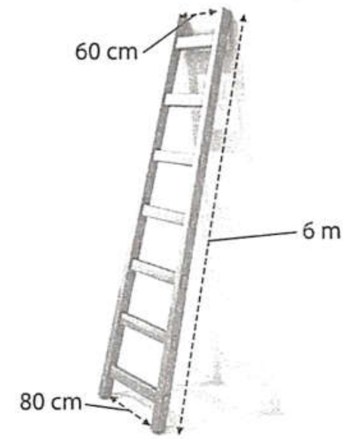
Khi đó $(MO,SB)=(SC,SB)=\widehat{BSC}=60^{\circ}$.

b) Vì $ON//BC$ nên $(SN,BC)=(SN,ON)=\widehat{SNO}$.

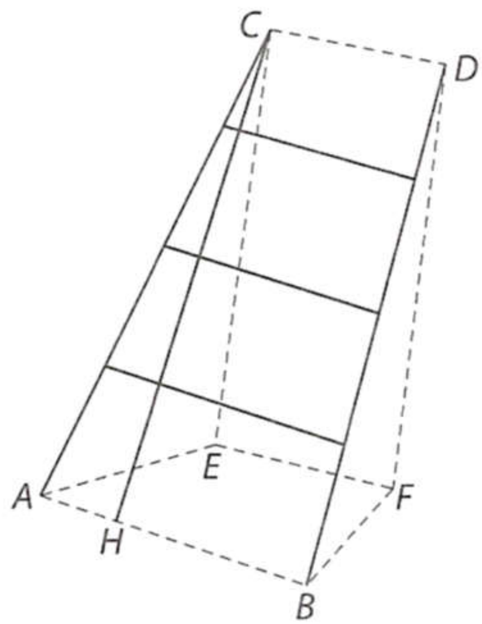
Ta có $SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2};ON=\dfrac{a}{2}$ và tam giác SNO

vuông tại O nên $\tan\widehat{SNO}=\dfrac{SO}{ON}=\sqrt{2}$. Vậy $\tan(SN,BC)=\sqrt{2}$.

Câu 14. Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao $6m$, hai chân thang cách nhau $80cm$, hai ngọn thang cách nhau $60cm$. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải



Hình 7.25

Gọi A, B là hai điểm tại hai vị trí chân thang và C, D là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang, EF là đường chân tường.

Ta có $EF // AB$ nên $(EF, AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$.

Kẻ CH vuông góc với AB tại H, khi đó

$AH = \dfrac{AB - CD}{2} = 10(cm) = 0,1(m)$. Tam giác ACH vuông tại H nên

$\cos \widehat{CAH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{0,1}{6} = \dfrac{1}{60}$,

suy ra $\widehat{CAH} \approx 89,05^{\circ}$.

Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang bằng khoảng $89,05^{\circ}$.

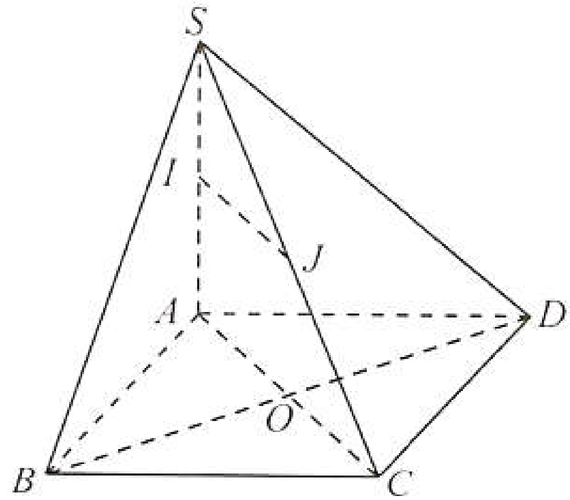
Câu 15. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, SA = a\sqrt{3}, SA \perp BC$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) IJ và BD;

b) SD và BC.

Giải



Hình 2

a) ΔSAC có I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC, suy ra IJ là đường trung bình của ΔSAC, suy ra $IJ // AC$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vậy $(IJ, BD) = (AC, BD) = \widehat{AOB} = 90^\circ$.

b) Ta có $AD // BC$, suy ra $(SD, BC) = (SD, AD)$.

Mặt khác: $\begin{cases} SA \perp BC \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp AD$.

Vậy ΔSAD vuông tại A.

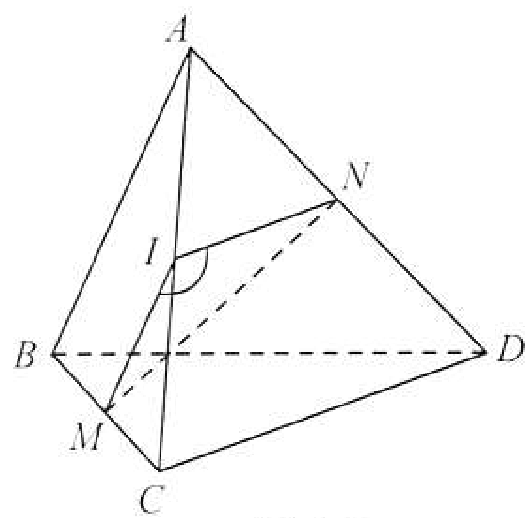
Suy ra $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SDA} = 60^\circ$.

Vậy $(SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung diểm của BC, AD. Cho biết $MN = a\sqrt{3}$, tính góc giữa AB và CD.

Giải



Hình 3

Gọi I là trung điểm AC.

ΔABC có I,M lần lượt là trung điểm của AC,BC, suy ra IM là đường trung bình của ΔABC, suy ra $IM//AB$ và $IM=\frac{1}{2}AB=a$.
Tương tự, ta có $IN//CD$ và $IN=a$.
Ta có $IM//AB$ và $IN//CD$, suy ra $(AB,CD)=(IM,IN)$. Áp dụng định lí côsin trong tam giác MIN :

$MN^2=IM^2+IN^2-2\cdot IM\cdot IN\cdot\cos\widehat{MIN}$

$\Rightarrow 3a^2=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\cos\widehat{MIN}$

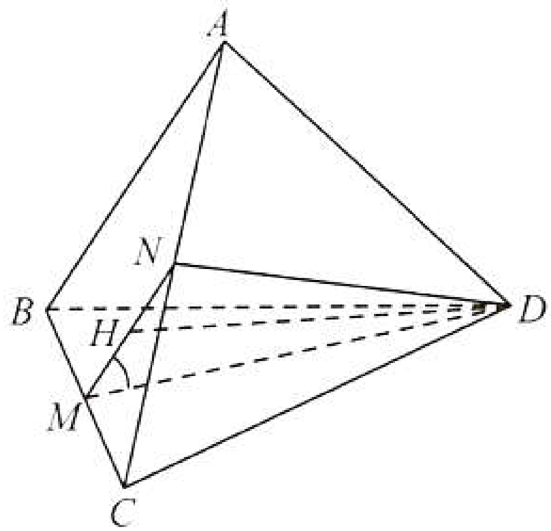
$\Rightarrow \cos\widehat{MIN}=\frac{3a^2-2a^2}{-2a^2}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{MIN}=120^\circ$.

Vậy $(AB,CD)=(IM,IN)=180^\circ-\widehat{MIN}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

Câu 17. Cho tứ diện đều $ABCD,M$ là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa AB và DM.

Lời giải



Hình 1

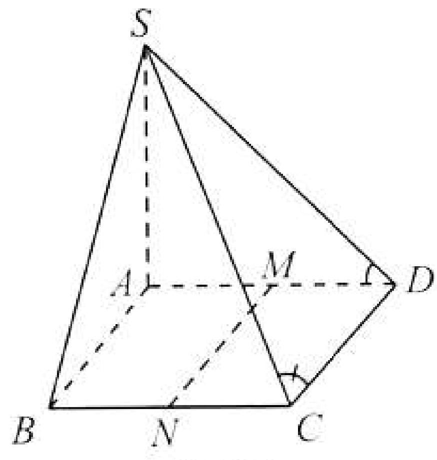
Đặt $2a$ là độ dài cạnh của tứ diện đều.
Gọi N là trung điểm của AC,H là trung điểm của MN, ta có:
$MN//AB$, suy ra $(AB,DM)=(MN,DM)$.
$DM=DN=a\sqrt{3},MN=a$ nên ΔDMN cân tại D.
Suy ra $MH=\frac{a}{2}$ và $DH\perp MN$.

$\cos\widehat{DMN}=\frac{MH}{MD}=\frac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow \widehat{DMN}\approx 73,2^\circ$.

Vậy $(AB,DM)=(MN,DM)=\widehat{DMN}\approx 73,2^\circ$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a,SA=a\sqrt{3},SA\perp AC$, $SA\perp BC,\widehat{BAD}=120^\circ$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:
a) SD và BC.
b) MN và SC.

Lời giải



Hình 2

a) Vì $AD//BC$ nên $(SD,BC)=(SD,AD)$.

Vì $SA\perp BC$ và $AD//BC$ nên $SA\perp AD$ hay tam giác SAD vuông tại A.

Do đó $(SD,BC)=(SD,AD)=\widehat{SDA}=60^{\circ}$.

b) Vì $MN//CD$ nên $(SC,MN)=(SC,CD)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{A}=120^{\circ}$ nên ACD là tam giác đều cạnh a.

Xét các tam giác vuông SAC,SAD có:

$SC=\sqrt{AC^2+SA^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$ và $SD=\sqrt{AD^2+SA^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác SCD :

$$\cos\widehat{SCD}=\frac{SC^2+CD^2-SD^2}{2\cdot SC\cdot CD}=\frac{1}{4}\Rightarrow\widehat{SCD}\approx 75,5^{\circ}.$$

Vậy $(SC,MN)=(SD,AD)=\widehat{SCD}=75,5^{\circ}$.

Câu 19. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M,N,I,J lần lượt là trung điểm của SA,SD,SC và BC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) IJ và DC;

b) MN và IJ.

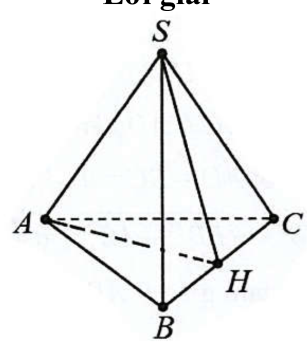
Lời giải

a) Ta có $IJ//SB,DC//AB$, suy ra $(IJ,DC)=(SB,AB)=\widehat{SBA}=60^{\circ}$.

b) Ta có $MN//AD//BC,IJ//SB$, suy ra $(MN,IJ)=(BC,SB)=\widehat{SBC}=60^{\circ}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC,\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải



Cách 1:

Ta có: $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AS}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=AS\cdot AC\cdot\cos\widehat{SAC}-AS\cdot AB\cdot\cos\widehat{SAB}=0$

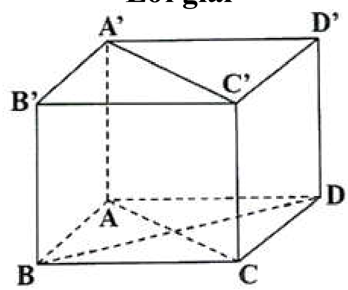
Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90.

Cách 2:

Vì $AB=AC,\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$ nên $\Delta SAC=\Delta SAB$, suy ra $SB=SC$, do đó hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Chứng minh tương tự bài 1 (trang 194) ta được $SA\perp BC$.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD.

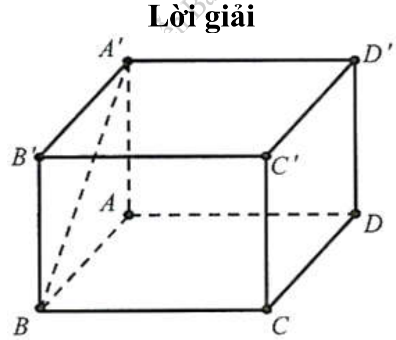
Lời giải



$AC//A'C'$ nên $\left(A'C';BD\right)=(AC;BD)=90$.

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng BA' và CD.

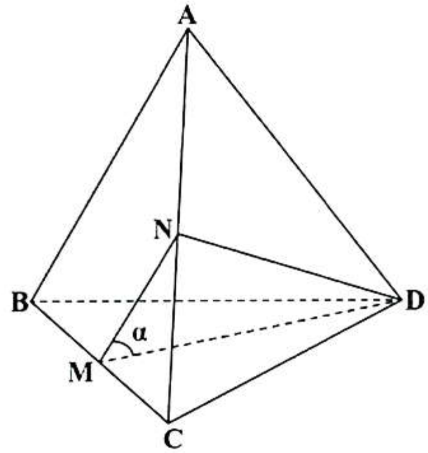
Lời giải



Có $CD//AB\Rightarrow\left(BA',CD\right)=\left(BA',BA\right)=\widehat{ABA'}=45^\circ$ (do $ABB'A'$ là hình vuông).

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Côsin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng?

Lời giải



Kẻ $MN//AB$, có MN là đường trung bình của ΔABC.

Suy ra $MN=\frac{AB}{2}$.

Do đó: $(AB,DM)=(MN,DM)=\widehat{DMN}=\alpha$.

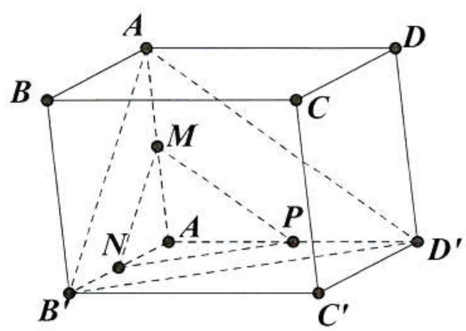
Gọi tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a.

$MN=\frac{a}{2}, DN=DM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{MN^2+DM^2-DN^2}{2\cdot MN\cdot DM}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 24. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và $A'B'$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

Lời giải



Gọi P là trung điểm cạnh AD'.

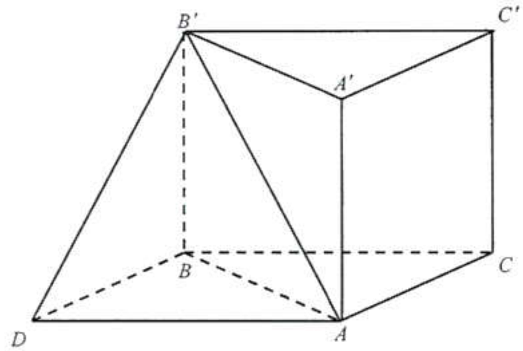
Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên $AB'=B'D'=D'A=a\sqrt{2}$.

Suy ra $MN=NP=PM=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow (MN,BD)=(MN,NP)=60^\circ$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC\cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$ và $AA'\perp AB, AA'\perp AC$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC.

Lời giải



Trong (ABC), kẻ AD sao cho $ACBD$ là hình bình hành.

Ta có: $BC//AD$ nên $\left(AB';BC\right)=\left(AB';AD\right)=\widehat{B'AD}$.

Ta có: $AD=BC=a\sqrt{3}, AB'=\sqrt{AB^2+AB'^2}=a\sqrt{3}$,

$DB'=\sqrt{BB'^2+AC^2}=a\sqrt{3}$.

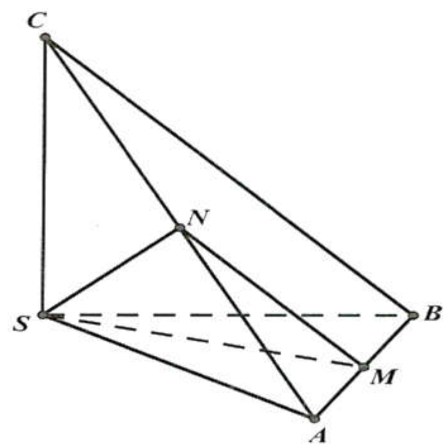
Vậy tam giác $B'AD$ đều nên $\widehat{B'AD}=60^\circ$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó góc giữa SM và BC bằng góc giữa SM và MN.

Ta có: $AB=BC=CA$



$SM=\frac{1}{2}AB$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

$SN=\frac{1}{2}AC$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

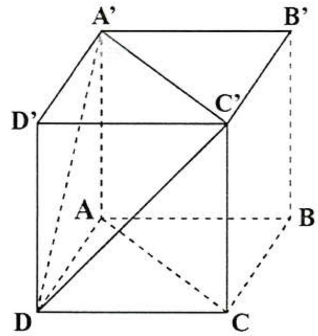
$MN=\frac{1}{2}BC$.

Suy ra $SM=MN=SN$ hay tam giác SMN đều.

Do đó $(SM;BC)=\widehat{SMN}=60^\circ$.

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$?

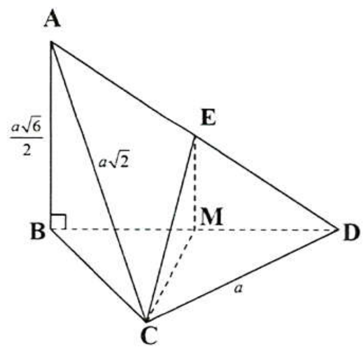
Lời giải



Ta có: $\left(AC, A'D\right) = \left(A'C', A'D\right) = \widehat{DA'C'} = 60^\circ$.
Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CE ?

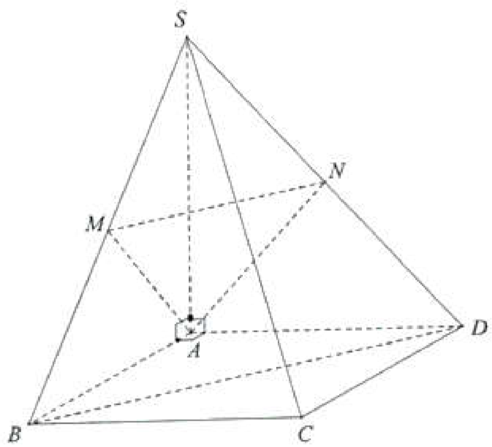
Lời giải



Ta có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, BD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
Gọi M là trung điểm $BD \Rightarrow ME // AB$,
$ME = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{6}}{4}, CM = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$
$\Rightarrow \Delta CME$ vuông cân tại M.
Ta có $(AB, CE) = (EM, CE) = \widehat{CEM} = 45^\circ$.

Câu 29. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với AB và $AD, SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính góc giữa AM và BD.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của SD khi đó ta có $MN//BD \Rightarrow (AM,BD)=(AM,MN)$.

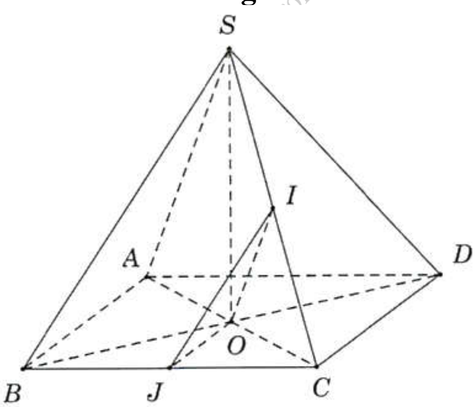
Theo giả thiết ta có: $AM=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$AN=\dfrac{1}{2}SD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; MN=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \Delta AMN$ đều $\Rightarrow \widehat{AMN}=60^\circ$. Vậy $(AM,BD)=60^\circ$.

Câu 30. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ,CD) bằng ?

Lời giải



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$

$\Rightarrow OJ$ là đường trung bình của ΔBCD. Suy ra $\begin{cases} OJ//CD \\ OJ=\dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

Vì $CD//OJ \Rightarrow (IJ,CD)=(IJ,OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{a}{2} \\ OJ=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{a}{2} \\ IO=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta IOJ$ đều.

Vậy $(IJ,CD)=(IJ,OJ)=\widehat{IJO}=60^\circ$.

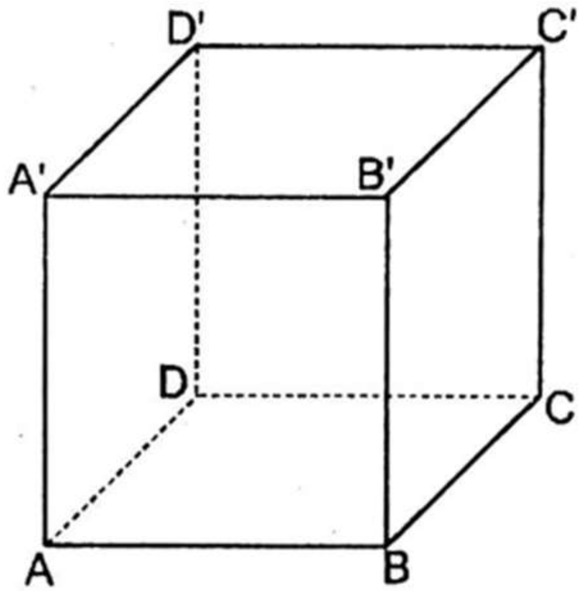
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Câu 31. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông.

a) Tìm các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình hộp và vuông góc với AC.

b) Trong các đường thẳng tìm được ở câu a, tìm đường thẳng chéo với AC.

Lời giải



a) Các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình hộp và vuông góc với AC là $BD, B'D', AA', CC', BB', DD'$

b) Trong các đường thẳng trên, đường thẳng chéo với AC là $B'D'$

Câu 32. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Hình bên mô tả một người thợ đang ốp gạch vào tường có sử dụng thước laser để kẻ vạch. Tìm các đường thẳng vuông góc với đường thẳng a trong Hình 4.

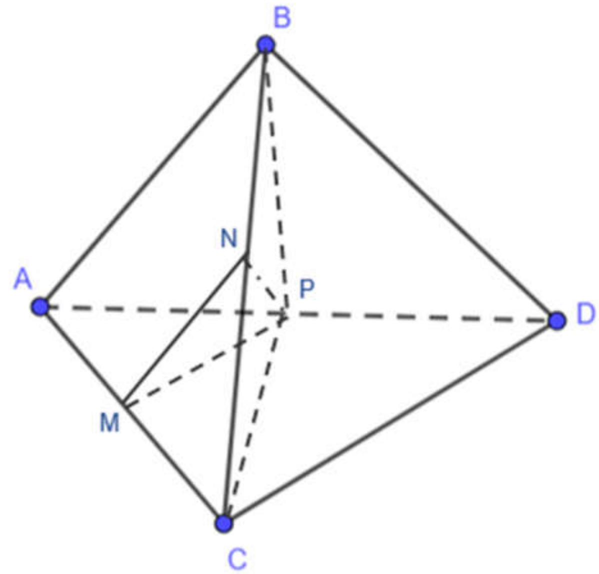
Hình 4

Lời giải

Các đường thẳng vuông góc với a là: chân tường, mép các viên gạch ốp,...

Câu 33. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC, AD

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD$

Tam giác ACD là MP là đường trung bình nên $MP=\frac{1}{2}\cdot CD=\frac{1}{2}a, MP//CD$

Tam giác ABC là MN là đường trung bình nên $MN=\frac{1}{2}.AB=\frac{1}{2}a; MN//AB$

Tam giác ABD đều có BP là trung tuyến nên $BP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Tam giác ACD đều có CP là trung tuyến nên $CP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

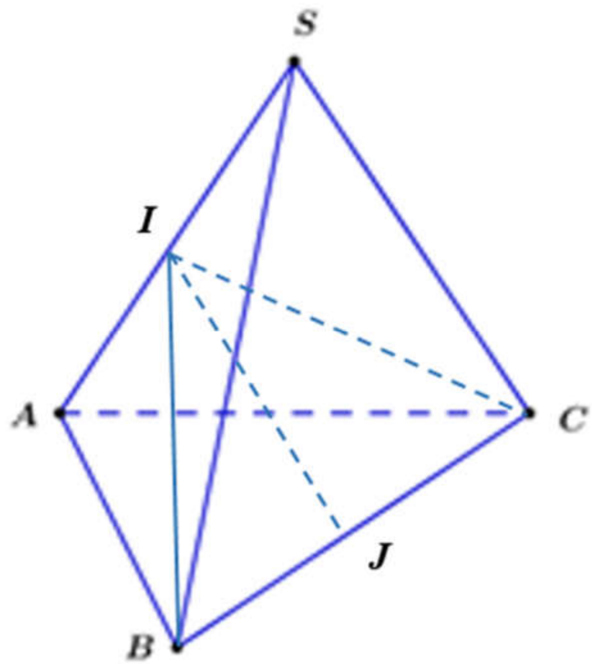
Suy ra tam giác BCP cân tại P có PN là trung tuyến nên $PN\perp BC$

$NP=\sqrt{CP^2-CN^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Tam giác MNP có: $MN^2+MP^2=NP^2$ nên tam giác MNP vuông tại M. Do $MN//AB, MP//CD$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa MN và MP và bằng 90° Vậy $AB\perp CD$

Câu 34. **(SGK – CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S\cdot ABC$ có $SA=SB=SC=a, \widehat{BSA}=\widehat{CSA}=60^\circ, \widehat{BSC}=90^\circ$. Cho I và J lần lượt là trung điểm của SA và BC. Chứng minh rằng $IJ\perp SA$ và $IJ\perp BC$.

Lời giải



Tam giác SAB có $SA = SB = a; \widehat{BSA} = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều cạnh a. Suy ra $IB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Tam giác SAC có $SA = SC = a; \widehat{CSA} = 60^\circ$ nên tam giác SAC đều cạnh a. Suy ra $IC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Suy ra tam giác IBC cân tại I có IJ là trung tuyến. Nên $IJ \perp BC$

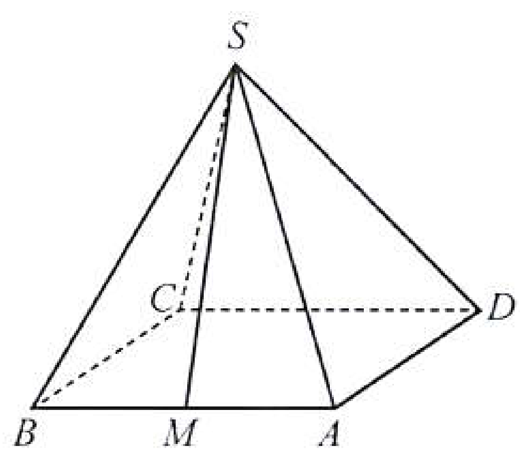
Tam giác SBC vuông cân tại S nên $BC = \sqrt{2}a; SJ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Tam giác ABC có $AB = AC = a; CB = \sqrt{2}a$ nên tam giác ABC vuông cân tại A. Mà AJ là trung tuyến nên $AJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra tam giác SAJ cân tại J có JI là trung tuyến. Nên $IJ \perp SA$

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, SAB là tam giác cân tại S. Gọi M là trung điểm AB (Hình 3). Chứng minh rằng $SM \perp CD$.

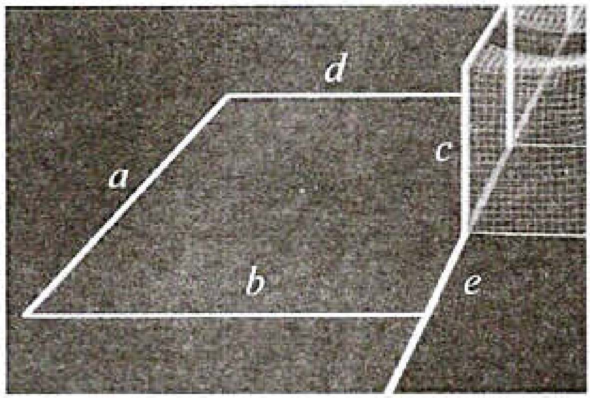
Giải



Hình 3

Vì $SA = SB, MA = MB$ nên SM là đường trung trực của AB trong (SAB). Suy ra $SM \perp AB$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$.
Từ đó, suy ra $SM \perp CD$.

Câu 36. Hình 5 gợi nên hình ảnh một số cặp đường thẳng vuông góc với nhau. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng vuông góc với nhau.



Hình 5

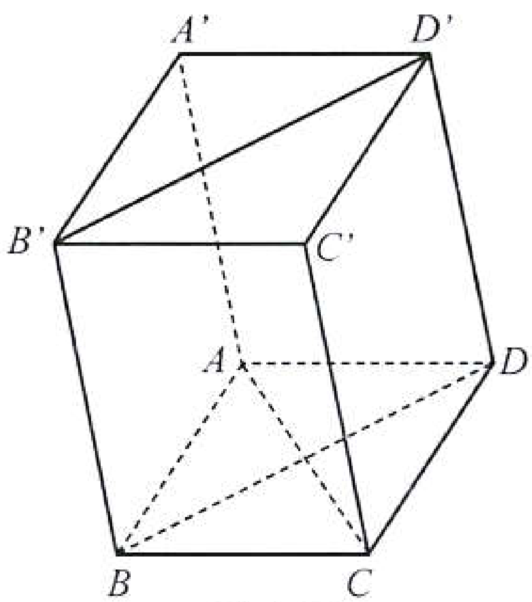
Lời giải

Ba cặp đường thẳng vuông góc có thể là a và $b; b$ và $c; c$ và d.

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông.

a) Chứng minh rằng $AB \perp A'D'$ và $AC \perp B'D'$.
b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

Lời giải



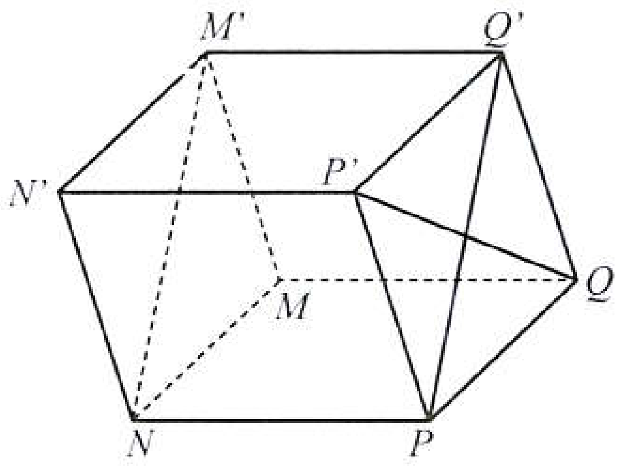
Hình 51

a) Vì $ABB'A'$ ' là hình bình hành nên $AB//A'B'$ '.
Do $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'D' \perp A'B'$.
Từ đó, suy ra $AB \perp A'D'$.
Vì $BDD'B'$ có $BB'//DD'$ và $BB' = DD'$ nên $BDD'B'$ 'à hình bình hành, suy ra $BD//B'D'$. Mà $AC \perp BD$ do $ABCD$ là hình vuông. Như vậy, ta có $AC \perp B'D'$.
b) Xét hình vuông $ABCD$ có

$(AC,AB)=\widehat{CAB}=45^{\circ}$.
Mà $AB//A'B'$ nên $\left(AC,A'B'\right)=(AC,AB)=45^{\circ}$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$ bằng 45°.

Câu 38. Cho hình lăng trụ $MNPQ\cdot M'N'P'Q'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng $M'N\perp P'Q$.

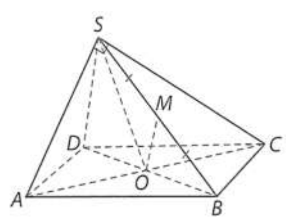
Lời giải



Hình 52

Vì $PQQ'P'$ là hình thoi (do các cạnh bằng nhau) nên $P'Q\perp PQ$ '.
Do $NP=MQ=M'Q'$ và $NP//MQ//M'Q'$ nên $NPQ'M$ ' là hình bình hành, suy ra $M'N//PQ$ '.
Từ đó ta có $M'N\perp P'Q$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và tam giác SAC vuông tại S. Gọi M là trung điểm của cạnh SB. Chứng minh rằng đường thẳng OM vuông góc với đường thẳng SB.
Giải. (H.7.2)

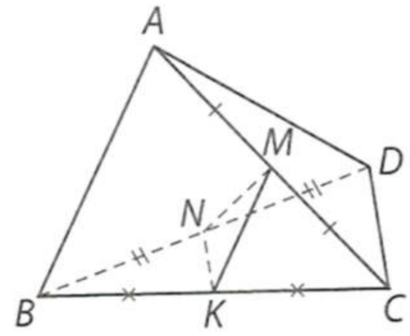


Hình 7.2

Ta có tam giác SAC vuông tại S và O là trung điểm của AC nên $SO=\frac{1}{2}AC$. Ta lại có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC=BD$, suy ra $SO=\frac{1}{2}BD$, mà O là trung điểm của BD nên tam giác SBD vuông tại S hay $SD\perp SB$. Vì $OM//SD$ và $SD\perp SB$ nên $OM\perp SB$.

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Biết $MN=a\sqrt{3}; AB=2\sqrt{2}a$ và $CD=2a$. Chứng minh rằng đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng CD.

Lời giải

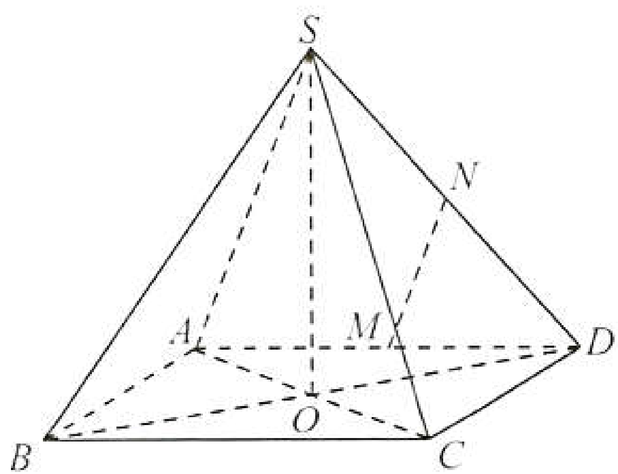


Hình 7.23

Lấy K là trung điểm của cạnh BC, ta có: NK và MK lần lượt là đường trung bình của tam giác BCD và tam giác ABC nên $NK=a$ và $MK=a\sqrt{2}$.
Do đó, $MN^2=3a^2=MK^2+NK^2$ suy ra tam giác MNK vuông tại K, hay $MK\perp NK$ mà $MK//AB$ và $NK//CD$ nên $(AB,CD)=(MK,NK)=90^0$, hay $AB\perp CD$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,SD. Chứng minh rằng $MN\perp SC$.

Giải



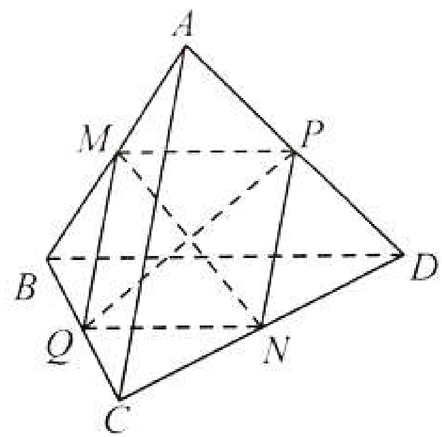
Hình 4

ΔSAD có M,N lần lượt là trung điểm của AD,SD, suy ra MN là đường trung bình của ΔSAD, suy ra $MN//SA$.
Vậy $(MN,SC)=(SA,SC)$.
ΔABC vuông tại B nên $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.
Xét ΔSAC, nhận thấy: $AC^2=SA^2+SC^2$.
Theo định lí Pythagore đảo, ΔSAC vuông tại S.
Suy ra $\widehat{ASC}=90^\circ$ hay $(MN,SC)=\widehat{ASC}=90^\circ$.
Vậy $MN\perp SC$.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD, AC=BD, AD=BC$.

a) Chứng minh đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.
b) Chứng minh hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau.

Lời giải

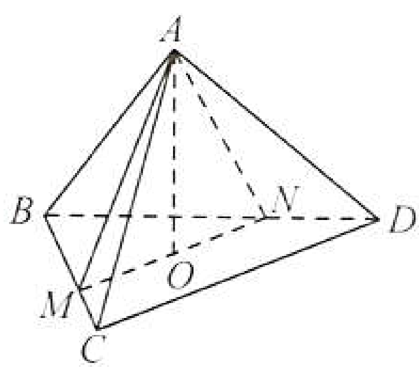


Hình 3

a) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các canh AB, CD, AD, BC.
Ta có $\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.c.c), suy ra $AN = BN$, suy ra ΔNAB cân tại N. Mà M là trung điểm của AB, suy ra $NM \perp AB$.
Tương tự ta có $NM \perp CD$.
b) Ta có $MQ = PN = \frac{AC}{2}, MP = QN = \frac{BD}{2}, AC = BD$.
Suy ra $MQ = PN = MP = QN$.
Vậy tứ giác $MPNQ$ là hình thoi, suy ra $MN \perp PQ$.

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh hai đường thẳng OA và CD vuông góc với nhau.

Lời giải

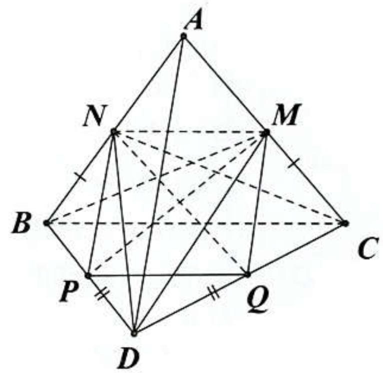


Hình 4

Qua O vẽ đường $MN // CD (M \in BC, N \in BD)$. Ta có $OM = ON, AM = AN$, suy ra ΔAMN cân tại A, suy ra $AO \perp MN$. Mà $MN // CD$ nên $AO \perp CD$.

Câu 44. Cho tứ diện $ABDC$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Chứng minh: $BC \perp AD$.

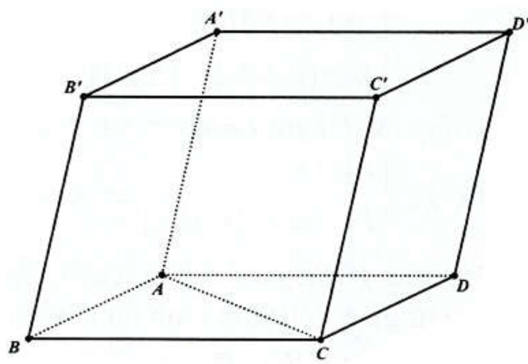
Lời giải



Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AB, BD, CD.
Dễ dàng chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành.
Dễ dàng chứng minh được $\Delta MBD = \Delta NCD$ (c-c-c).
Suy ra hai trung tuyến tương ứng $NQ = MP$.
Suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MN \perp MQ$. Mà $AD // MQ$ và $BC // MN$ nên $AD \perp BC$.

Câu 45. Trong hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh:
a) $A'C' \perp BD$.
b) $A'B \perp DC'$.
c) $BC' \perp A'D$.

Lời giải



Vì hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA, B'C'CB$ đều là hình thoi.
$AC \perp BD$ mà $AC // A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD$.
$A'B \perp AB'$ mà $AB' // DC' \Rightarrow A'B \perp DC'$.
$BC' \perp B'C$ mà $B'C // A'D \Rightarrow BC' \perp A'D$.