

BÀI 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

• CHƯƠNG 6. LOGARIT

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Thực hiện phép tính (sử dụng biến đổi công thức lũy thừa)

Câu 1. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(-5)^{-1}$; b) $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; c) $6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : 2^{-2}$

Lời giải

$$a) (-5)^{-1} = \frac{1}{(-5)^1} = -\frac{1}{5}$$

$$b) 2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 1 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{\frac{1}{32}} = 32$$

$$c) 6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : 2^{-2} = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} : \frac{1}{2^2} = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{\frac{1}{27}} : \frac{1}{4} = \frac{1}{36} \cdot 27 \cdot 4 = 3$$

Câu 2. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$
 b) $(\sqrt[6]{8})^2$;
 c) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

Lời giải

$$a) \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$b) (\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{2^6} = |2| = 2$$

$$c) \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \cdot 27} = \sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$$

Câu 3. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $25^{\frac{1}{2}}$
 b) $\left(\frac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;
 c) $100^{1,5}$.

Lời giải

$$a) 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$b) \left(\frac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{36}{49}}} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$$

$$c) 100^{1,5} = 100^{\frac{3}{2}} = \sqrt{100^3} = \sqrt{1000000} = 1000$$

Câu 4. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

- a) $\sqrt{2^3}$
- b) $\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$;
- c) $(\sqrt[5]{a})^4 (a > 0)$

Lời giải

- a) $\sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$
- b) $\sqrt[5]{\frac{1}{27}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{5}}$
- c) $(\sqrt[5]{a})^4 (a > 0) = a^{\frac{4}{5}}$

Câu 5. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Sử dụng máy tính cầm tay, tính các lũy thừa sau đây (làm tròn đến chữ số thập phân thứ sáu):

- a) $1,2^{1,5}$;
- b) $10^{\sqrt{3}}$;
- c) $(0,5)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

- a) $1,2^{1,5} = 1,314534$
- b) $10^{\sqrt{3}} = 53,957374$
- c) $(0,5)^{\frac{2}{3}} = 2,924018$

Câu 6. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$):

- a) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}}$
- b) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt{a}$.

Lời giải

- a) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{-2}{5}} = a^{\frac{3}{2}}$
- b) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^1} = \sqrt{a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}} = \sqrt{a^2} = a^1 = a$

Câu 7. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0$
- b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;
- c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5})$

Lời giải

$$a) \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0 = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot 9 \cdot 1 = \frac{1}{\frac{9}{16}} \cdot 9 = \frac{16}{9} \cdot 9 = 16$$

$$b) \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 12 \cdot \frac{1}{\frac{4}{9}} = 12 \cdot \frac{9}{4} = 27$$

$$c) \left(2^{-2} \cdot 5^2\right)^{-2} : \left(5 \cdot 5^{-5}\right) = \left(\frac{1}{2^2} \cdot 5^2\right)^{-2} : \left(5 \cdot \frac{1}{5^5}\right) = \left(\frac{5^2}{4}\right)^{-2} : \frac{1}{5^4}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{5^2}{4}\right)^2} \cdot 5^4 = \frac{1}{\frac{5^4}{16}} \cdot 5^4 = \frac{16}{5^4} \cdot 5^4 = 16$$

Câu 8. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$) :

$$a) 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}$$

$$b) \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a}$$

$$c) \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}}$$

Lời giải

$$a) 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 3^{\frac{15}{8}}$$

$$b) \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot a \cdot a} = \sqrt{a \cdot a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{5}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{2}}} = \sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$$

$$c) \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a^1} = a^{\frac{13}{12}-1} = a^{\frac{1}{12}}$$

Câu 9. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Biết rằng $10^\alpha = 2$; $10^\beta = 5$.

Tính $10^{\alpha+\beta}$; $10^{\alpha-\beta}$; $10^{2\alpha}$; $10^{-2\alpha}$; 1000^β ; $0,01^{2\alpha}$.

Lời giải

$$10^{\alpha+\beta} = 10^\alpha \cdot 10^\beta = 2 \cdot 5 = 10$$

$$10^{\alpha-\beta} = 10^\alpha : 10^\beta = 2 : 5 = \frac{2}{5}$$

$$10^{2\alpha} = (10^\alpha)^2 = 2^2 = 4$$

$$10^{-2\alpha} = \frac{1}{10^{2\alpha}} = \frac{1}{(10^\alpha)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$1000^\beta = (10^3)^\beta = (10^\beta)^3 = 5^3 = 125$$

$$0,01^{2\alpha} = (10^{-2})^{2\alpha} = (10^\alpha)^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

Câu 10. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Biết rằng $4^\alpha = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) 16^\alpha + 16^{-\alpha};$$

$$\text{a) } 16^\alpha + 16^{-\alpha} = 16^\alpha + \frac{1}{16^\alpha} = (4^2)^\alpha + \frac{1}{(4^2)^\alpha} = (4^\alpha)^2 + \frac{1}{(4^\alpha)^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{25} + \frac{1}{\frac{1}{25}} = \frac{1}{25} + 25 = \frac{626}{25}$$

Trang 4 Fanpage Nguyễn Bảo Vương <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

$$e) (\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[5]{3^6} + \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = 3\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{3} = 4\sqrt[5]{3}$$

Câu 14. Biết rằng $4^x = 5$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{8^x - 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{8^x - 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= \frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{(2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 2^x 2^{-x} + 2^{-2x})}{2^x - 2^{-x}} = 2^{2x} + 2^x 2^{-x} + 2^{-2x} \\ &= 4^x + 1 + 4^{-x} = 4^x + 1 + \frac{1}{4^x} = 5 + 1 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

Câu 15. Biết rằng $5^x = 10^y = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5^x = 2 \Rightarrow 5 = 2^{\frac{1}{x}}; 10^y = 2 \Rightarrow 10 = 2^{\frac{1}{y}}.$$

$$\text{Từ đó, } 2^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = 2^{\frac{1}{x}} : 2^{\frac{1}{y}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -1.$$

Câu 16. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^0 \quad b) \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}; \quad c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \quad d) (-55)^0; \quad e) 2^{-8} \cdot 2^5; \quad g) \frac{3^4}{(3^{-2})^{-3}}$$

Lời giải

$$a) 1; \quad b) \frac{25}{4}; \quad c) 81; \quad d) 1; \quad e) \frac{1}{8}; \quad g) \frac{1}{9}.$$

Câu 17. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \sqrt[3]{0,001}; \quad b) \sqrt[5]{-32}; \quad c) \sqrt[4]{\frac{81}{16}}; \quad d) -\sqrt[6]{100^3}; \quad e) \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}; \quad g) \sqrt[5]{(2-\sqrt{5})^5}.$$

Lời giải

$$a) 0,1; \quad b) -2; \quad c) \frac{3}{2}; \quad d) -10; \quad e) 2 - \sqrt{3}; \quad g) 2 - \sqrt{5}.$$

Câu 18. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} \quad b) \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} \quad c) \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}} \quad d) \sqrt[3]{64}; \quad e) \sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} \quad g) (-\sqrt[6]{4})^3$$

Lời giải

$$a) \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^3 \cdot 5} = \sqrt[4]{5^4} = 5;$$

$$b) \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3;$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}} = \sqrt[3]{\frac{3}{24}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{2}$$

$$d) \sqrt[3]{64} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2;$$

$$e) \sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3} \cdot 3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4}} = \sqrt[3]{3};$$

$$g) (-\sqrt[6]{4})^3 = -\sqrt[6]{4^3} = -\sqrt[6]{2^{2 \cdot 3}} = -\sqrt[6]{2^6} = -2$$

Câu 19. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5} \quad b) \sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} + 3\sqrt[3]{3} \quad c) \sqrt[4]{\sqrt[5]{16}} + \sqrt[5]{64} + 2\sqrt[5]{2} \quad d) (\sqrt[4]{5})^5 - \sqrt[4]{25}$$

Lời giải

- a) $\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} - 5\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} = -2\sqrt[3]{5}$
 b) $\sqrt[4]{3\sqrt{81}} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{3\sqrt{3^4}} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{3 \cdot 3^2} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{3^3} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$
 c) $\sqrt[4]{5\sqrt{16}} + \sqrt[5]{64} + 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[4]{5\sqrt{2^4}} + \sqrt[5]{2^6} + 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[4]{5 \cdot 2^2} + \sqrt[5]{2^6} + 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} = 5\sqrt[5]{2}$
 d) $(\sqrt[4]{5})^5 - \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^5} - \sqrt[4]{5^2} = 5\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = 4\sqrt[4]{5}.$

Câu 20. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $8^{\frac{2}{3}}$; b) $32^{\frac{2}{5}}$; c) $81^{1,25}$; d) $1000^{-\frac{5}{3}}$ e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$ g) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Lời giải

- a) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$
 b) $32^{\frac{2}{5}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$
 c) $81^{1,25} = (3^4)^{\frac{5}{4}} = 3^5 = 243;$
 d) $1000^{-\frac{2}{3}} = (10^3)^{-\frac{2}{3}} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01;$
 e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$
 g) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$

Câu 21. Biết rằng $5^{2x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}}$.

Lời giải

$$\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}} = \frac{(5^x + 5^{-x})(5^{2x} - 5^x 5^{-x} + 5^{-2x})}{5^x + 5^{-x}} = 5^{2x} - 1 + 5^{-2x} = 3 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Câu 22. Biết rằng $3^\alpha + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}}$ b) $3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}$.

Lời giải

$$a) \left(3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}}\right)^2 = 3^\alpha + 2 \cdot 3^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 3^{\frac{-\alpha}{2}} + 3^{-\alpha} = 3^\alpha + 3^{-\alpha} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

$$\text{Suy ra } 3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}} = \sqrt{5} \left(\text{do } 3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}} > 0 \right).$$

$$b) 3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} = (3^\alpha + 3^{-\alpha})^2 - 2 \cdot 3^\alpha \cdot 3^{-\alpha} = 3^2 - 2 = 7.$$

Câu 23. Biết rằng $4^x = 25^y = 10$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Lời giải

$$4^x = 10 \Rightarrow 10^{\frac{1}{x}} = 4; 25^y = 10 \Rightarrow 10^{\frac{1}{y}} = 25.$$

Suy ra $10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4.25 = 100 = 10^2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$.

Câu 24. Tính:

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b) $\left(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(4^{-4}\right)^{-0,75} + \left(3^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = 4^3 + 3^4 = 145$

b) $\left(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = \left[2^{2(3+\sqrt{3})} - 2^{2(\sqrt{3}-1)}\right] \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$
 $= \left(2^{6+2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = 2^{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}} = 2^6 - 2^{-2} = \frac{255}{4}$.

Câu 25. Viết các biểu thức sau về lũy thừa cơ số a , biết:

a) $A = \sqrt[7]{3 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{3}}}$ với $a = 3$

b) $B = \frac{25\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$ với $a = \sqrt{5}$.

Lời giải

a) $A = a^{\frac{4}{35}}$. b) $B = a^{\frac{5}{3}}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức (sử dụng biến đổi công thức lũy thừa)

Câu 26. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Rút gọn biểu thức: $\left(x^{\sqrt{2}}y\right)^{\sqrt{2}}\left(9y^{-\sqrt{2}}\right)$ (với $x, y > 0$).

Lời giải

$$\left(x^{\sqrt{2}} \cdot y\right)^{\sqrt{2}} \cdot \left(9y^{-\sqrt{2}}\right) = x^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot y^{\sqrt{2}} \cdot 9 \cdot y^{-\sqrt{2}} = 9x^2 \cdot y^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 9x^2$$

Câu 27. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0, b > 0$) :

a) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{7}{6}}$

b) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{4}}:a^{\frac{1}{6}}$

c) $\left(\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right)$.

Lời giải

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}} = a^2$

b) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{4}}$

c) $\left(\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot a^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}a^{-1}b$

Câu 28. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{20}}$; b) $6\sqrt[3]{9x^2} \cdot 3\sqrt[3]{24x}$.

Lời giải

$$a) \sqrt[5]{32x^{15}y^{20}} = \sqrt[5]{2^5 \cdot (x^3)^5 \cdot (y^4)^5} = 2x^3y^4.$$

$$b) 6\sqrt[3]{9x^2} \cdot 3\sqrt[3]{24x} = 18\sqrt[3]{9x^2 \cdot 24x} = 18\sqrt[3]{6^3 \cdot x^3} = 18 \cdot 6 \cdot x = 108x$$

Câu 29. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{48}; \quad b) 8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3} \quad (x > 0, y > 0).$$

Lời giải

$$a) 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{48} = 2\sqrt{3 \cdot 2^2} - 3\sqrt{3 \cdot 3^2} + 2\sqrt{3 \cdot 4^2} \\ = 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

$$b) 8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3} = 8xy - 5xy + 2xy = 5xy.$$

Câu 30. Cho a là số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{24}}; \quad b) a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1};$$

$$c) a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}; \quad d) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}.$$

Lời giải

$$a) \left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{24}} = a^{\sqrt{6 \cdot 24}} = a^{12}.$$

$$b) a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a.$$

$$c) a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2} = a^{-\sqrt{3}} : a^{4-2\sqrt{3}} = a^{-4+\sqrt{3}}$$

$$d) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}} = a$$

Câu 31. Cho a và b là hai số dương, $a \neq b$. Rút gọn biểu thức

$$\text{sau: } A = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right).$$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} \text{ nên}$$

$$B = \frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a-b - a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - b}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} = \frac{b^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)}.$$

$$\text{Ta có } a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) \text{ nên}$$

$$B = \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\text{Do đó } A = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Câu 32. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}}$ b) $\left(4^{\sqrt{27}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ c) $3^{2+2\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}}$ d) $\left(a^{\sqrt{3}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (a > 0, b > 0).$

Lời giải

a) $\frac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}} = 3^{\pi+1-(\pi-1)} = 3^2 = 9$
b) $\left(4^{\sqrt{27}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \left(4^{3\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64};$
c) $3^{2+2\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}} = 3^{2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}} = 3^4 = 81;$
d) $\left(a^{\sqrt{3}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = ab^{-2} = \frac{a}{b^2}.$

Câu 33. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1}$ b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$ c) $\left[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{8}}$ d) $a^{2\sqrt{5}+1} : a^{2\sqrt{5}-2}$
e) $3^{3+\sqrt{2}} \cdot 3^{-1+\sqrt{2}} \cdot 9^{1-\sqrt{2}}$
g) $\left(a^{-\sqrt{3}} b^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}.$

Lời giải

a) $2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1} = 2^{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)} = 2^2 = 4;$
b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = 3^{\sqrt{16}} = 3^4 = 81;$
c) $\left[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{8}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{16}} = 7^{\frac{1}{2} \cdot 4} = 7^2 = 49;$
d) $a^{2\sqrt{5}+1} : a^{2\sqrt{5}-2} = a^{2\sqrt{5}+1-(2\sqrt{5}-2)} = a^3;$
e) $3^{3+\sqrt{2}} \cdot 3^{-1+\sqrt{2}} \cdot 9^{1-\sqrt{2}} = 3^{3+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}} \cdot (3^2)^{1-\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}} \cdot 3^{2-2\sqrt{2}} = 3^4 = 81;$
g) $\left(a^{-\sqrt{3}} b^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{-\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot b^{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{-1} b^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{a}.$

Câu 34. Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)$
b) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right).$

Lời giải

a) $a - \frac{1}{b}$;

b) $a + b$.

Câu 35. Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$

b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$

Lời giải

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$.

b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b$.

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = a$

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$.

Câu 36. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} (a > 0, a \neq 1)$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}} (a > 0, b > 0)$.

Lời giải

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^2 - 1)}{a^{\frac{1}{3}}(a - 1)} = a + 1$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}} = \sqrt[6]{(a^2b)^6} = a^2b$.

Câu 37. Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $A = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$

b) $B = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$

Lời giải

a) $A = ab$. b) $B = \sqrt[3]{ab}$.

Câu 38. Cho a và b là hai số dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{a^{\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{2}}}{b^{-1}}.$$

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{a^{\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} = \frac{(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}+1}}{(b^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}} = \frac{a^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}{b}$.

Thay vào biểu thức A , ta được:

$$A = \frac{a^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}{b} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{2}}}{b^{-1}} = a^{2+\sqrt{2}} \cdot a^{-1-\sqrt{2}} = a^{(2+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})} = a.$$

Vậy $A = a$.

Dạng 3. So sánh biểu thức lũy thừa

Câu 39. So sánh cơ số $a(a > 0)$ với 1, biết rằng:

a) $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$;

b) $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$

Lời giải

a) Do $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ và $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$ nên $a < 1$.

b) Do $\frac{11}{6} < \frac{15}{8}$ và $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$ nên $a > 1$.

Câu 40. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$;

b) $(0, 2)^{\sqrt{16}}$ và $(0, 2)^{\sqrt[3]{60}}$.

Lời giải

a) Ta có: $16^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$. Do $2\sqrt{3} = \sqrt{12}, 3\sqrt{2} = \sqrt{18}, \sqrt{12} < \sqrt{18}$ và $4 > 1$ nên $4^{2\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$ hay $16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$

b) Ta có: $(0,2)^{\sqrt{16}} = (0,2)^4$. Do $4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{60}$ và $0,2 < 1$ nên $(0,2)^4 < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$ hay $(0,2)^{\sqrt{16}} < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$

Câu 41. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) 2^{300} và 3^{200} ;

b) $(\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}$ và $\sqrt[3]{4}$.

Lời giải

a) Ta có: $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$; $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$.

Do $8 < 9$ và $100 > 0$ nên $8^{100} < 9^{100}$ hay $2^{300} < 3^{200}$.

b) Ta có: $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Do $\sqrt{5} > 1 > \frac{1}{2}$ và $-\frac{2}{3} < 0$ nên $(\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ hay $(\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{4}$.

Câu 42. Cho x, y là các số thực dương và số thực a thoả mãn:

$a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$. Chứng minh rằng: $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{\sqrt[3]{y^6} + \sqrt[3]{x^2 y^4}} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{x^4} \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4} \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)} \\ &= \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right) \sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}} = \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Suy ra $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

a) $0 < a < 1$. b) $a > 1$. c) $a < 0$.

d) $a = \frac{8}{\sqrt[4]{27}}$ và $b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

d) Ta có: $a = \frac{8}{\sqrt[4]{27}} = \left(\frac{16}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ và $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \frac{16}{3}$ nên $a > b$.

Câu 46. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.



Trang 12 Fanpage Nguyễn Bảo Vương <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $2m$ gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu $10m$? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

Lời giải

a) Tại $d = 1$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3 \cdot 1} = I_0 \cdot 10^{-0,3}$.

Vậy cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ gấp $10^{-0,3}$ lần I_0

b) Tại $d = 2$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3 \cdot 2}$.

Tại $d = 10$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3 \cdot 10}$

Cường độ ánh sáng tại độ sâu $2m$ gấp

$$10^{-0,3 \cdot 2} : 10^{-0,3 \cdot 10} = 10^{-0,3 \cdot 2 - (-0,3 \cdot 10)} = 10^{0,3 \cdot 8} = 251,19 \text{ lần so với tại độ sâu } 10m$$

Câu 47. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng $1m^2$ và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7}m$. Đồng xu 5000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3}m$. Cần chong bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

Lời giải

Để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng, ta cần chong số lá vàng là:

$$2,2 \cdot 10^{-3} : (1,94 \cdot 10^{-7}) = 11300$$

Câu 48. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để

tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

Lời giải

a) Sau 2 năm: $t = 2$. Ta có: $P(2) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 315$ (triệu đồng)

Sau 2 năm 3 tháng: $t = 2,25$. Ta có: $P(2,25) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2,25}{3}} = 297$ (triệu đồng)

b) Sau 1 năm sử dụng: $P(1) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 397$

Vậy sau 1 năm sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng $397 : 500 \cdot 100$ so với ban đầu

Câu 49. (Vận dụng thực tiễn) Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$,

trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển,

a là một hằng số dương,

d là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét).

a) Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tìm giá trị của hằng số a .

b) Tại độ sâu $15m$ ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Từ giả thiết, ta có $d = 1$ và $I = \frac{95}{100} I_0$.

Thay vào biểu thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được: $a^d = \frac{I}{I_0} = \frac{95}{100}$.

Mà $d=1$ nên $a = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$. Vậy $a = \frac{19}{20}$.

b) Từ giả thiết, ta có $d=15$.

Thay $d=15$ và $a = \frac{19}{20}$ vào công thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được:

$$\frac{I}{I_0} = a^d = \left(\frac{19}{20}\right)^{15} \approx 0,46$$

Như vậy, tại độ sâu 15m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng khoảng 46% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.

Câu 50. Giả sử một lọ nuôi cấy có 100 con vi khuẩn lúc ban đầu và số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi sau mỗi 2 giờ. Khi đó số vi khuẩn N sau t (giờ) sẽ là $N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ (con). Hỏi sau $3\frac{1}{2}$ giờ sẽ có bao nhiêu con vi khuẩn?

Lời giải

Thay $t = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ (giờ) vào công thức ta được số vi khuẩn sau $3\frac{1}{2}$ giờ là

$$N = 100 \cdot 2^{\frac{7}{2}} = 100 \cdot 2^{\frac{7}{4}} \approx 336 \text{ (con)}.$$

Câu 51. Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài L (tính bằng mét) được cho bởi $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$. Nếu một con lắc có chiều dài 19,6m, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Thay $L = 19,6$ vào công thức ta được chu kì dao động của con lắc là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}} = 2\pi\sqrt{\frac{19,6}{9,8}} \approx 8,9 \text{ (giây)}.$$

Câu 52. Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính p theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Theo định luật thứ ba của Kepler, ta có:

$$p^2 = d^3 \text{ hay } p = \sqrt{d^3}.$$

b) Thay $p = 29,46$ vào công thức $p = \sqrt{d^3}$, ta được $d \approx 9,54 \text{ AU}$.

Câu 53. Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008).

- a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hoả là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là bao nhiêu?
- b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).
(Kết quả của câu a và câu b tính theo đơn vị triệu dặm và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

- a) Thay $t = 687$ vào công thức ta được khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} \approx 141,48 \text{ (triệu dặm)}.$$

- b) Thay $t = 365$ vào công thức ta được khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là:

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} \approx 92,81 \text{ (triệu dặm)}.$$

Câu 54. Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h(m)$ dưới một mặt hồ được tính bằng công thức

$$I_h = I_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{h}{4}}, \text{ trong đó } I_0 \text{ là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.}$$

- a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?
- b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $3m$ gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu $6m$?

Lời giải

$$a) \frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,84 = 84\%.$$

$$b) \frac{I_3}{I_6} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4} - \frac{6}{4}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \approx 1,68 \text{ (lần)}.$$

Câu 55. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hoả quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Thời gian để Sao Hoả quay quanh Mặt Trời là:

$$P = d^{\frac{3}{2}} = 1,52^{\frac{3}{2}} \approx 1,874 \text{ (năm Trái Đất)}.$$

Câu 56. Một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

Lời giải

Công thức tính khối lượng của chất phóng xạ đó còn lại sau t năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{25}} \text{ (g)}. \text{ Khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm là:}$$

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{120}{25}} \approx 0,359 \text{ (g)}.$$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 57. Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ là

- A. a^5 . B. $a^{\frac{5}{9}}$. C. $a^{\frac{4}{3}}$. D. a^2 .

Lời giải

Ta có $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5+1}{3}} = a^2$

Câu 58. Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

- A. a^6 . B. $a^{\frac{3}{2}}$. C. $a^{\frac{2}{3}}$. D. $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

Chọn B

♦ Với $a > 0$ ta có $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$.

Câu 59. Cho $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^m + a^n = a^{m+n}$. B. $a^m \cdot a^n = a^{m-n}$. C. $(a^m)^n = (a^n)^m$. D. $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

Lời giải

Chọn C.

Tính chất lũy thừa

Câu 60. Với $a > 0, b > 0, \alpha, \beta$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. B. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. C. $\frac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. D. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Câu 61. Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

- A. $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$. B. $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. C. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. D. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của lũy thừa thì đẳng thức $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$ **Sai**.

Câu 62. Cho các số thực $a, b, m, n (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. B. $(a^m)^n = a^{m+n}$. C. $(a+b)^m = a^m + b^m$. D. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow$ Loại A

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \Rightarrow$ Loại B

$(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2 \Rightarrow$ Loại C

$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow$ Chọn D

Câu 63. Với α là số thực bất kì, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\sqrt{10^\alpha} = (\sqrt{10})^\alpha$. B. $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. C. $(10^\alpha)^2 = (100)^\alpha$. D. $(10^\alpha)^2 = (10)^{\alpha^2}$.

Lời giải

Theo định nghĩa và các tính chất của lũy thừa, ta thấy A, B, C là các mệnh đề đúng.

Xét mệnh đề D: với $\alpha = 1$, ta có: $(10^1)^2 = 100 \neq (10)^{1^2} = 10$ nên mệnh đề D sai.

Câu 64. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

A. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$ B. $Q = b^{\frac{4}{3}}$ C. $Q = b^{\frac{5}{9}}$ D. $Q = b^2$

Lời giải

Chọn B

$$Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$$

Câu 65. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = \sqrt{x}$ B. $P = x^{\frac{1}{8}}$ C. $P = x^{\frac{2}{9}}$ D. $P = x^2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Câu 66. Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{7}{3}}$. B. $a^{\frac{5}{6}}$. C. $a^{\frac{11}{6}}$. D. $a^{\frac{10}{3}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}}.$$

Câu 67. Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x$ B. $P = x^{\frac{11}{6}}$ C. $P = x^{\frac{7}{6}}$ D. $P = x^{\frac{5}{6}}$

Lời giải

Chọn A

$$P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x$$

Câu 68. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = x^{\frac{1}{8}}$ B. $P = \sqrt{x}$ C. $P = x^{\frac{2}{9}}$ D. $P = x^2$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Với } x > 0; P = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Câu 69. Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \sqrt{x}} = x^\alpha$ (với $x > 0$), giá trị của α là

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$P = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{x \cdot \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Câu 70. Cho a là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

- A. $\sqrt[3]{a^2}$. B. $a^{\frac{8}{3}}$. C. $a^{\frac{3}{8}}$. D. $\sqrt[6]{a}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

Câu 71. Cho biểu thức $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $P = x^{-2}$ B. $P = x^{-\frac{1}{2}}$ C. $P = x^{\frac{1}{2}}$ D. $P = x^2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}} = x^{-\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$.

Câu 72. Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^3} \sqrt{x}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{1}{2}}$. B. $P = x^{\frac{7}{12}}$. C. $P = x^{\frac{5}{8}}$. D. $P = x^{\frac{7}{24}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^3} \sqrt{x}} = x^{\frac{5}{8}}$

Câu 73. Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

- A. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. B. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{18}$. C. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. D. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 1}{2 \cdot 3}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 74. Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$ mệnh đề nào dưới đây đúng

- A. $a < c < b$. B. $a < b < c$. C. $b < a < c$. D. $c < a < b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2 = 3^{\sqrt{4}}$, $c = 3^{\sqrt{6}}$ và $\begin{cases} \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} \\ 3 > 1 \end{cases} \Rightarrow b < a < c$.

Câu 75. Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < b < c$. B. $a < c < b$. C. $c < a < b$. D. $b < a < c$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2 < \sqrt{5} < \sqrt{6}$ mà cơ số $3 > 1$ nên $3^2 < 3^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{6}}$ hay $b < a < c$.

Câu 76. Cho $(\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n$. Khi đó

A. $m = n$.

B. $m < n$.

C. $m > n$.

D. $m \neq n$.

Lời giải**Chọn C**

Do $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ nên $(\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n \Leftrightarrow m > n$.

Câu 77. Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

B. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$.

C. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$.

D. $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$.

Lời giải**Chọn A**

Vì $a > 1$; $-\sqrt{3} > -\sqrt{5} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 78. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI?

A. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$.

B. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

C. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$.

D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

Lời giải**Chọn A**

A. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$. Cùng cơ số, $0 < \sqrt{3}-1 < 1$, hàm nghịch biến, số mũ lớn hơn nên bé hơn. Sai

B. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. Cùng cơ số, $2 > 1$, hàm đồng biến, số mũ $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} > (\sqrt{3})^2 = 3$ nên lớn hơn. Đúng

C. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$. Cùng cơ số, $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, hàm nghịch biến, số mũ bé hơn nên lớn hơn. Đúng.

D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$. Cùng cơ số, $0 < 1-\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, hàm nghịch biến, số mũ lớn hơn nên bé hơn. Đúng

Câu 79. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$.

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$.

C. $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$.

D. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100}$.

Lời giải

Ta có:

$\left(\frac{3}{7}\right) < \left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$ (vì $\sqrt{3} > 0$). Phương án A Sai.

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$ (vì $-\pi < 0$). Phương án B Đúng.

$3 < 5 \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > 5^{-\sqrt{2}} \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ (vì $-\sqrt{2} < 0$). Phương án C Sai.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100} \Rightarrow (2^{-2})^{-50} < (2)^{100} \Rightarrow 2^{100} < 2^{100} \text{ (Mệnh đề sai)}. \text{ Phương án D Sai.}$$

Câu 80. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$. B. $(\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$.

C. $(\sqrt{3} - 1)^{2018} > (\sqrt{3} - 1)^{2017}$. D. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

+) $\begin{cases} 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \\ 2017 < 2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$ nên A đúng.

+) $\begin{cases} 0 < \sqrt{3} - 1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)^{2018} < (\sqrt{3} - 1)^{2017}$ nên B sai.

+) $\begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{2} + 1 > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$ nên C đúng.

+) $\begin{cases} 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$ nên D đúng.

Câu 81. Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[2]{a^5} > \sqrt[3]{a^2}$?

A. $a > 0$. B. $0 < a < 1$. C. $a > 1$. D. $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[2]{a^6}.$$

Ta có $\sqrt[2]{a^5} > \sqrt[3]{a^2} \Leftrightarrow \sqrt[2]{a^5} > \sqrt[2]{a^6}$ mà $5 < 6$ vậy $0 < a < 1$.

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 82. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{2}{3}}$ B. $P = x^{\frac{1}{2}}$ C. $P = x^{\frac{13}{24}}$ D. $P = x^{\frac{1}{4}}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có, với } x > 0: P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}.$$

Câu 83. Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\frac{2}{1009}$. B. $\frac{1}{1009}$. C. $\frac{3}{1009}$. D. $\frac{3}{2018^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a} = a^{\frac{3}{2018}} \cdot a^{\frac{1}{2018}} = a^{\frac{4}{2018}} = a^{\frac{2}{1009}}. \text{ Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng } \frac{2}{1009}.$$

Câu 84. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

A. $P = a$.

B. $P = a^3$.

C. $P = a^4$.

D. $P = a^5$.

Lời giải

$$P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5.$$

Câu 85. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$

A. $P = a$

B. $P = a^3$

C. $P = a^4$

D. $P = a^5$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5$$

Câu 86. Cho biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$. Rút gọn P được kết quả:

A. a^5 .

B. a .

C. a^3 .

D. a^4 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{5}+1+2-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5.$$

Câu 87. Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của m, n là

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{21}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{18}$

Lời giải

Chọn C

$$A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}} \right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \Rightarrow m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{3} \Rightarrow m.n = \frac{1}{9}.$$

Câu 88. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 312$.

B. $m^2 + n^2 = 543$.

C. $m^2 - n^2 = -312$.

D. $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot a^{-\frac{5}{7}}} = \frac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}$$

Mà $A = a^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản
 $\Rightarrow m = 19, n = 7$
 $\Rightarrow m^2 - n^2 = 312$

Câu 89. Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$.

- A.** $P = a(a+1)$. **B.** $P = a-1$. **C.** $P = a$. **D.** $P = a+1$.

Lời giải

$$P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}} = \frac{a + a^2}{a + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a.$$

Câu 90. Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ ta được

- A.** $P = ab$. **B.** $P = a+b$. **C.** $P = a^4b + ab^4$. **D.** $P = ab(a+b)$.

Lời giải

$$P = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot a^{\frac{1}{3}}b + ab \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = \frac{ab \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$$

Câu 91. Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.** $P \in (330; 340)$. **B.** $P \in (350; 360)$. **C.** $P \in (260; 370)$. **D.** $P \in (340; 350)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sqrt[5]{8\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}} = 2^{\frac{11}{10}} = 2^{\frac{11}{15}} \\ \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{11}{15} \Rightarrow \begin{cases} m=11 \\ n=15 \end{cases} \Rightarrow P = m^2 + n^2 = 11^2 + 15^2 = 346.$$

Câu 92. Cho $a > 0, b > 0$, giá trị của biểu thức $T = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

- A.** 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Cách 2:

$$\text{Ta có } T = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{(a-b)^2}{4ab} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{(a+b)^2}{4ab} \right]^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{1}{a+b} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(a+b)}{2(ab)^{\frac{1}{2}}} = 1.
\end{aligned}$$

Câu 93. Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$

- A. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$ B. $P = 1$ C. $P = 7 - 4\sqrt{3}$ D. $P = 7 + 4\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}
P &= (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016} = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot [(7 + 4\sqrt{3})(4\sqrt{3} - 7)]^{2016} \\
&= (7 + 4\sqrt{3})(-1)^{2016} = 7 + 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Câu 94. Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2016})$

- A. $M = 2017^{1008} - 1$ B. $M = -2017^{1008} - 1$ C. $M = 2017^{2016} - 1$ D. $M = 1 - 2017^{2016}$

Lời giải

Chọn B

$$f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})} = \frac{1-a}{\sqrt{a}-1} = -1 - \sqrt{a} \text{ nên}$$

$$M = f(2017^{2016}) = -1 - \sqrt{2017^{2016}} = -1 - 2017^{1008}$$

Câu 95. Giá trị của biểu thức $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$ là

- A. -9. B. -10. C. 10. D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0} = \frac{2^{3-1} + 5^{-3+4}}{10^{-3+2} - 1} = \frac{4+5}{10^{-1} - 1} = \frac{9}{\frac{1}{10} - 1} = -10..$$

Câu 96. Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2018})$.

- A. $2017^{2018} + 1$. B. $-2017^{1009} - 1$. C. 2017^{1009} . D. $2017^{1009} + 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left(a^{\frac{3}{8}} - a^{\frac{1}{8}} \right)} = \frac{1-a}{a^{\frac{1}{2}} - 1} = -1 - a^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Do đó } M = f(2017^{2018}) = -1 - (2017^{2018})^{\frac{1}{2}} = -1 - 2017^{1009}.$$

Câu 97. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt[3]{x^4} \sqrt{x^2} \sqrt{x^5}$. Khi đó, giá trị của $f(2, 7)$ bằng

- A. 0,027. B. 27. C. 2,7. D. 0,27.

Lời giải

Chọn C.

$$f(x=2,7) = \sqrt[3]{2,7} \cdot \sqrt{2,7} \cdot \sqrt[5]{2,7^5} = 2,7.$$

Câu 98. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(4+2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017}}{(1+\sqrt{3})^{2019}}$.

- A. $P = -2^{2017}$. B. -1. C. -2^{2019} . D. 2^{2018} .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } P = \frac{(1+\sqrt{3})^{2 \cdot 2018} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017}}{(1+\sqrt{3})^{2019}} = \left[(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) \right]^{2017} = -2^{2017}.$$

Câu 99. Giá trị biểu thức $(3+2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2019}$ bằng

- A. $(\sqrt{2}+1)^{2019}$. B. $(\sqrt{2}-1)^{2017}$. C. $(\sqrt{2}-1)^{2019}$. D. $(\sqrt{2}+1)^{2017}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (3+2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2019} &= \left[(\sqrt{2}+1)^2 \right]^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2019} \\ &= (\sqrt{2}+1)^{2018} \cdot (\sqrt{2}+1)^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}+1)^{2017} \cdot \left[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) \right]^{2019} \\ &= (\sqrt{2}+1)^{2017}. \end{aligned}$$

Câu 100. Cho $a > 0, b > 0$ giá trị của biểu thức $T = 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned}
 T &= 2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{4b} + \frac{b}{4a} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4ab} \right]^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} \frac{(a+b)}{2(ab)^{\frac{1}{2}}} = 1.
 \end{aligned}$$

Câu 101. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017} < (\sqrt{5}+2)^{-2018}$.

B. $(\sqrt{5}+2)^{2018} > (\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

D. $(\sqrt{5}-2)^{2018} < (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5}-2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5}+2 > 1 \\ -2017 > -2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{-2017} > (\sqrt{5}+2)^{-2018} \Rightarrow A \text{ sai}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5}+2 > 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{2018} < (\sqrt{5}+2)^{2019} \Rightarrow B \text{ sai}$$

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5}-2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Câu 102. So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,3}$

A. $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$.

B. $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,3}$.

C. $\sqrt{3}^{0,3} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}$.

D. $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3} < (0,7)^{3,2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $0,2 < \sqrt{3} \Rightarrow (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$ nên loại đáp án

Câu 103. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó khẳng định nào đúng?

A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

B. $0 < a < 1, b > 1$.

C. $a > 1, 0 < b < 1$.

D. $a > 1, b > 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln a > \frac{1}{3} \ln a \Leftrightarrow \frac{1}{6} \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$$

$$b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \ln b > \frac{3}{4} \ln b \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{12} \ln b \Leftrightarrow 0 < b < 1$$

Lưu ý: Ta có thể sử dụng máy tính Casio để thử các đáp án bằng cách cho a, b các giá trị cụ thể.

Câu 104. So sánh ba số $a = 1000^{1001}$, $b = 2^{2^{64}}$ và $c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$?

A. $c < a < b$.

B. $b < a < c$.

C. $c < b < a$.

D. $a < c < b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $1^1 < 1000^{1000}$; $2^2 < 1000^{1000}$... $999^{999} < 1000^{1000}$

$$\Rightarrow c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000} < 1000 \cdot 1000^{1000} \Leftrightarrow c < a$$

Mặt khác: $2^{10} > 1000$

$$\Rightarrow 2^{64} \cdot \ln 2 = \frac{2^4}{10} \cdot (2^{10})^6 \cdot \ln 2^{10} > 1000^6 \cdot \ln 1000 > 1001 \cdot \ln 1000 \Rightarrow 2^{2^{64}} > 1000^{1001} \Leftrightarrow a < b$$

Vậy $c < a < b$.

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ☞ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ☞ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ☞ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

☞ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

☞ **Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <https://www.nbv.edu.vn/>

Nguyễn Bảo Vương