

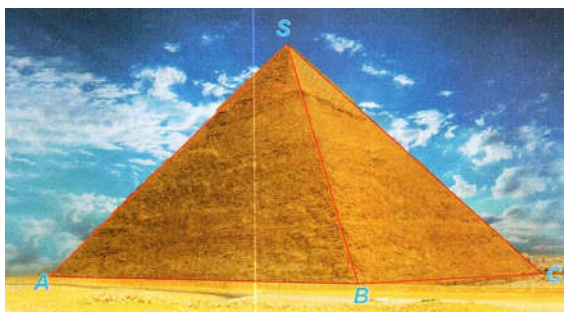
## CHỦ ĐỀ 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

### LỜI GIẢI THAM KHẢO

#### HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

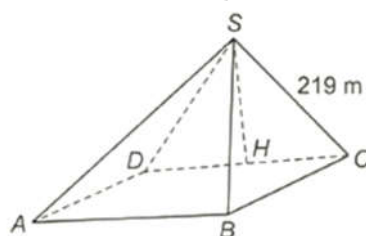
**Câu 1.** Kim tự tháp Kheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). (Theo britannica.com). Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên  $SC$  và cạnh đáy  $AB$  của kim tự tháp (H.7.4).



Hình 7.4

**Lời giải**

Gọi  $H$  là trung điểm của  $CD$  thì  $CH = 115m$ .

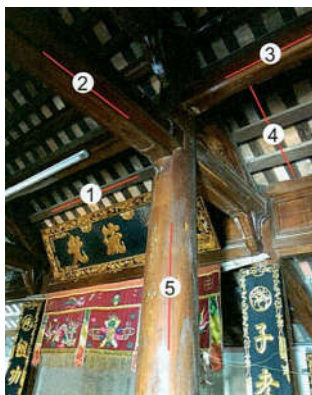


Hình 7.1

Vì  $DC \parallel AB$  nên  $(SC; AB) = (SC; CD) = \widehat{SCH}$ .

Ta có:  $\cos \widehat{SCH} = \frac{CH}{SC} = \frac{115}{219} \Rightarrow \widehat{SCH} \approx 58,3^\circ$ .

**Câu 2.** Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện: hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4,5 như trong Hình 7.8, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



Hình 7.8

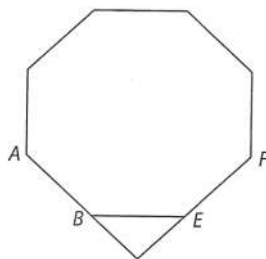
**Lời giải**

Những cặp đường thẳng sau vuông góc với nhau: hoành (1) và quá giang (2); hoành (1) và rui (4); hoành (1) và cột (5); quá giang (2) và xà cái (3); quá giang (2) và cột (5); xà cái (3) và rui (4); xà cái (3) và cột (5).

**Câu 3.** Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh  $AB$  và  $CD$  được thể hiện trên hình sau:



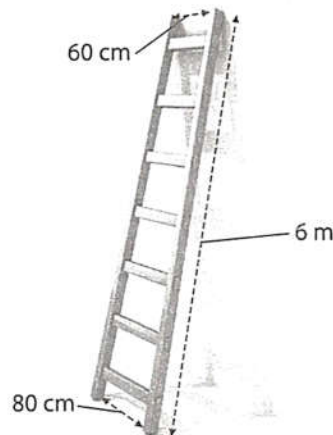
**Giải.** (H.7.3)



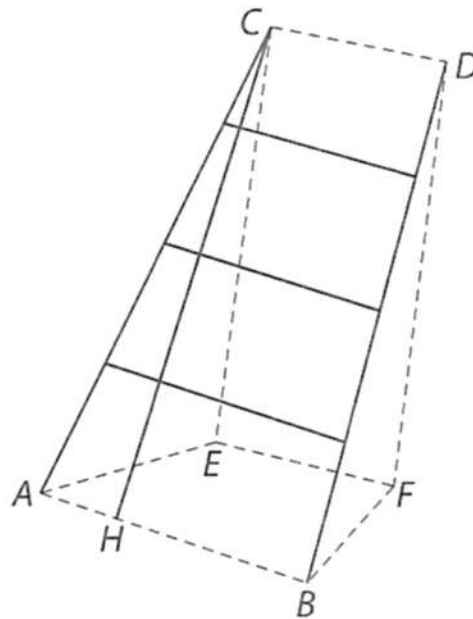
Hình 7.3

Ta có:  $CD \parallel EF$  nên  $(AB, CD) = (AB, EF)$ , với  $AB$ ,  $EF$  là hai cạnh của một hình bát giác đều. Góc ngoài của một bát giác đều bằng  $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$  nên  $(AB, EF) = 90^\circ$ , suy ra  $(AB, CD) = 90^\circ$ .

**Câu 4.** Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao  $6\text{ m}$ , hai chân thang cách nhau  $80\text{ cm}$ , hai ngọn thang cách nhau  $60\text{ cm}$ . Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



**Lời giải**



Hình 7.25

Gọi  $A, B$  là hai điểm tại hai vị trí chân thang và  $C, D$  là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang,  $EF$  là đường chân tường.

Ta có  $EF \parallel AB$  nên  $(EF, AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$ .

Kẻ  $CH$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ , khi đó

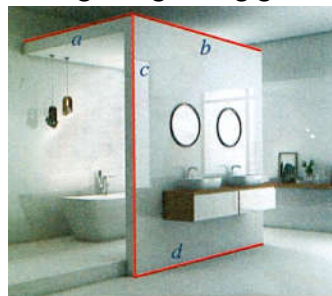
$$AH = \frac{AB - CD}{2} = 10(\text{cm}) = 0,1(\text{m}). \text{ Tam giác } ACH \text{ vuông tại } H \text{ nên}$$

$$\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{0,1}{6} = \frac{1}{60},$$

$$\text{suy ra } \widehat{CAH} \approx 89,05^\circ.$$

Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang bằng khoảng  $89,05^\circ$ .

**Câu 5.** Hình 6 gợi nên hình ảnh 5 cặp đường thẳng vuông góc. Hãy chỉ ra 5 cặp đường thẳng đó.

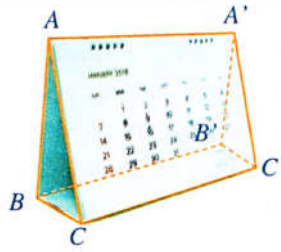


Hình 6

**Lời giải**

Các cặp đường thẳng vuông góc là:  $a$  và  $b$ ;  $a$  và  $c$ ;  $b$  và  $c$ ;  $c$  và  $d$ ;  $a$  và  $b$

**Câu 6.** Trong Hình 7 cho  $ABB'A'$ ,  $BCC'B'$ ,  $ACC'A'$  là các hình chữ nhật.



Hình 7

Chứng minh rằng  $AB \perp CC'$ ,  $AA' \perp BC$ .

### Lời giải

- Chứng minh  $AB \perp CC'$

+ Do  $ABB'A'$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow AB \perp BB'$  (1)

+ Do  $BCC'B'$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow BB' \parallel CC'$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AB \perp CC'$  (đpcm)

Chứng minh tương tự:

+ Do  $BCC'B'$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow BC \perp CC'$

+ Do  $AA'C'C$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow AA' \parallel CC'$

Từ đó  $\Rightarrow AA' \perp BC$  (đpcm)

**Câu 7.** Bạn Hoa nói rằng: "Nếu hai đường thẳng phân biệt  $a$  và  $b$  cùng vuông góc với đường thẳng  $c$  thì  $a$  và  $b$  vuông góc với nhau". Bạn Hoa nói đúng hay sai? Vì sao?

### Lời giải

Bạn Hoa nói sai. Vì

+ TH1:  $a, b, c$  cùng nằm trong một mặt phẳng.

Theo quan hệ từ vuông góc tới song song:  $\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$

+ TH2:  $a, b, c$  nằm khác mặt phẳng. Nếu  $a$  và  $b$  cùng vuông góc với  $c$  thì  $a, b$  nằm chéo nhau

**Câu 8.** Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều  $ABCDEF$  song song với mặt bàn và có cạnh  $AB$  song song với cạnh bàn  $a$  (Hình 5).



Hình 5

Tính số đo góc hợp bởi đường thẳng  $a$  lần lượt với các đường thẳng  $AF$ ,  $AE$  và  $AD$ .

### Lời giải

Vì  $a \parallel AB$  nên góc giữa  $a$  và  $AF$  là góc giữa  $AB$  và  $AF$  và bằng  $120^\circ$

Vì  $a \parallel AB$  nên góc giữa  $a$  và  $AE$  là góc giữa  $AB$  và  $AE$  và bằng  $90^\circ$

Vì  $a \parallel AB$  nên góc giữa  $a$  và  $AD$  là góc giữa  $AB$  và  $AD$  và bằng  $60^\circ$

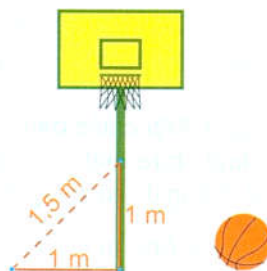
**ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG**

**Câu 9.** Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

**Lời giải**

Quả dọi vuông góc với mặt phẳng nước.

**Câu 10.** Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột  $1m$  đến một điểm trên cột, cách chân cột  $1m$  được kết quả là  $1,5m$  (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?



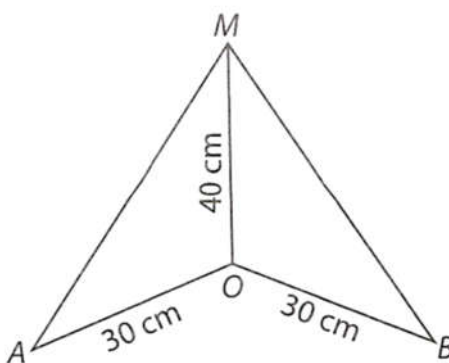
Hình 7.27

**Lời giải**

Đo chính xác thì cột không vuông góc với mặt sân vì nếu vuông góc với mặt sân thì theo định lý Pythagore, cạnh huyền bằng  $\sqrt{2}m$ , không phải  $1,5m$ .

**Câu 11.** Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi  $O$  là điểm đặt chân cột trên mặt sân và  $M$  là điểm trên cột cách chân cột  $40cm$ . Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm  $A$  và  $B$  đều cách  $O$  là  $30cm$  ( $A, B, O$  không thẳng hàng). Người ta đo độ dài  $MA$  và  $MB$  đều bằng  $50cm$ . Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

**Giải.** (H.7.6)



Hình 7.6

Ta có:  $50^2 = 40^2 + 30^2$  nên  $MA^2 = MO^2 + OA^2$  và  $MB^2 = MO^2 + OB^2$ . Do đó, tam giác  $MOA$  và tam giác  $MOB$  vuông tại  $O$ , hay  $MO \perp OA$ ,  $MO \perp OB$ . Suy ra  $MO \perp (OAB)$ . Vậy chiếc cột vuông góc với mặt sân.

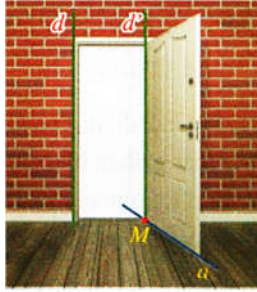
**Câu 12.** Một cây cột được dựng trên một sân phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sân hay không? Vì sao?

**Lời giải**

Vì dây dọi song song với cây cột và dây dọi vuông góc với mặt phẳng sân nên cây cột vuông góc với mặt phẳng sân.

**Câu 13.** Hình 17 mô tả một cửa gỗ có dạng hình chữ nhật, ở đó nẹp cửa và mép dưới cửa lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng  $d$  và  $a$ . Điểm  $M$  là vị trí giao giữa mép gắn bản lề và mép dưới của cửa. Hãy

giải thích tại sao khi quay cánh cửa, mép dưới cửa là những đường thẳng  $a$  luôn nằm trên mặt phẳng đi qua điểm  $M$  cố định và vuông góc với đường thẳng  $d$ .

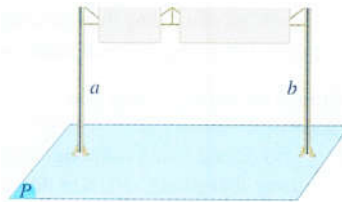


Hình 17

**Lời giải:**

Vì sàn nhà là một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng  $d$ . Mà đường thẳng  $a$  luôn nằm trên mặt phẳng đó nên đường thẳng  $d$  luôn vuông góc với đường thẳng  $a$ .

**Câu 14.** Quan sát Hình 30 (hai cột của biển báo, mặt đường), cho biết hình đó gợi nên tính chất nào về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.



Hình 30

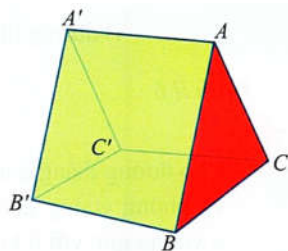
**Lời giải**

Hình 30 gợi nên tính chất:

Hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

**Câu 15.** Một cái lều có dạng hình lăng trụ  $ABC \cdot A'B'C'$  có cạnh bên  $AA'$  vuông góc với đáy (Hình 24). Cho biết  $AB = AC = 2,4m$ ;  $BC = 2m$ ;  $AA' = 3m$ .



Hình 24

a) Tính góc giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$ ;  $A'B'$  và  $AC$ .

b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác  $ABB'$  trên mặt phẳng  $(BB'C'C)$ .

**Lời giải**

a) Vì  $AA' \parallel BB'$  nên góc giữa  $AA'$  và  $BC$  là góc giữa  $BB'$  và  $BC$

Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên  $BB' \perp BC$ . Do đó,  $\widehat{B'BC} = 90^\circ$

Vì  $A'B' \parallel AB$  nên góc giữa  $A'B'$  và  $AC$  là góc giữa  $AB$  và  $AC$

$$\text{Ta có: } \cos \widehat{BAC} = \frac{2,4^2 + 2,4^2 - 2^2}{2 \cdot 2,4 \cdot 2,4} = \frac{47}{72}$$

$$\text{Nên } \widehat{BAC} = 49,2^\circ$$

b) Kẻ  $AH \perp BC$ . Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên  $BB' \perp AH$

Ta có  $AH \perp BB'$ ,  $AH \perp BC$  nên  $AH \perp (BCC'B')$

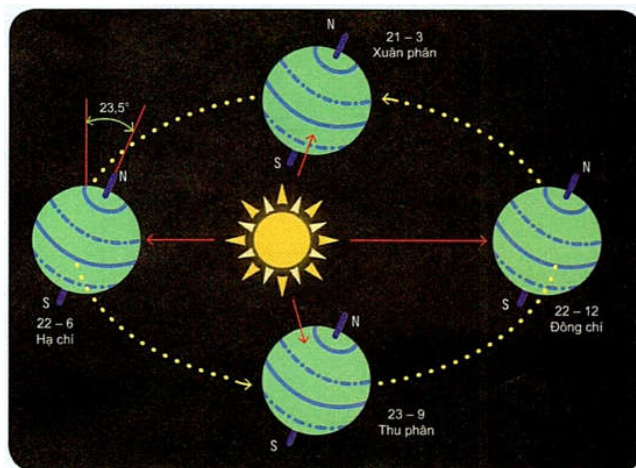


Hình chiếu vuông góc của  $ABB'$  lên  $(BB'C'C)$  là  $HBB'$ .

$$\text{Ta có: } S_{HBB'} = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot BB' = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot BB' = \frac{3}{2}$$

## PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

**Câu 16.** Tâm Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Trong quá trình chuyển động, Trái Đất lại quay quanh trục Bắc Nam. Trục này có phương không đổi và luôn tạo với mặt phẳng chứa quỹ đạo một góc khoảng  $66,5^\circ$ . (Theo nationalgeographic.org).



Hình 7.41

- Giải thích vì sao hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo  $(P)$  cũng có phương không đổi.
- Giải thích vì sao có hai thời điểm trong năm mà tại đó hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng  $(P)$  thuộc đường thẳng nối tâm Mặt Trời và tâm Trái Đất.

### Lời giải

a) Gọi  $a, b$  là hai vị trí của trục Trái Đất,  $a \parallel b$ . Gọi  $a', b'$  tương ứng là hình chiếu của  $a, b$  trên  $(P)$ . Hai mặt phẳng  $(a, a')$  và  $(b, b')$  chứa hai phương tương ứng song song với nhau đó là các phương cùng vuông góc với  $(P)$  (phương chiếu) và  $a \parallel b$ . Vì vậy, hai mặt phẳng  $(a, a')$  và  $(b, b')$  song song với nhau hoặc trùng nhau. Do đó, hai giao tuyến của chúng với  $(P)$  là  $a'$  và  $b'$  cũng song song hoặc trùng nhau.

Lưu ý. Kết luận ở câu a thực chất được rút ra từ tính chất sau của phép chiếu song song: Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song có phương khác phương chiếu thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

b) Hình chiếu của trục Trái Đất lên mặt phẳng  $(P)$  có phương cố định. Gọi  $m$  là đường thẳng đi qua tâm Mặt Trời và có phương cố định nói trên. Khi đó, hình chiếu của trục Trái Đất xuống  $(P)$  thuộc đường thẳng  $m$  khi và chỉ khi tâm Trái Đất ở vị trí là giao của  $m$  với đường elip quỹ đạo của Trái Đất. Như vậy có hai vị trí thuộc quỹ đạo, ứng với hai thời điểm trong năm mà hình chiếu của trục Trái Đất trên  $(P)$  thuộc đường thẳng  $m$  (nối tâm Trái Đất và tâm Mặt Trời).

**Câu 17.** Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Hai máy bay cất cánh và bay thẳng với cùng độ lớn vận tốc trong 5 phút đầu, với các góc cất cánh lần lượt là  $10^\circ, 15^\circ$ . Hỏi sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay nào ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) lớn hơn?

**Chú ý.** Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

### Lời giải

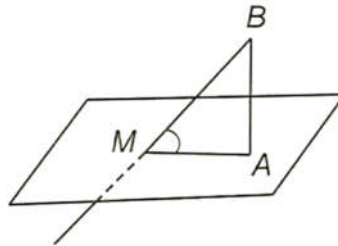
$$\text{Vì } AM = A'M', BM = AM \cdot \sin 10^\circ < A'M' \cdot \sin 15^\circ = B'M'.$$

**Câu 18.** Hãy nêu cách đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm.

**Chú ý.** Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời lúc giữa trưa với mặt phẳng nằm ngang tại vị trí đó được gọi là góc Mặt Trời. Giữa trưa là thời điểm ban ngày mà tâm Mặt Trời thuộc mặt phẳng chứa kinh tuyến đi qua điểm đang xét. Góc Mặt Trời ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất.

**Lời giải**

Lấy một cột  $AB$ , bóng của cột  $AB$  là  $AM$ .



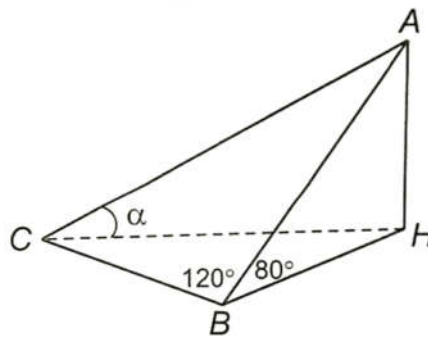
Hình 7.14

Khi đó  $\tan \widehat{BAM} = \frac{AB}{AM}$ .

Từ đó tính được góc  $\widehat{BAM}$ .

**Câu 19.** Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột  $AB$  có chiều dài bằng  $10m$  và tạo với mặt đất góc  $80^\circ$ . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng  $BC$  của cây cột trên mặt đất dài  $12m$  và tạo với cây cột một góc bằng  $120^\circ$  (tức là  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ ). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

**Lời giải**



Hình 7.42

Ta tính được  $AC = 2\sqrt{91}m$ .

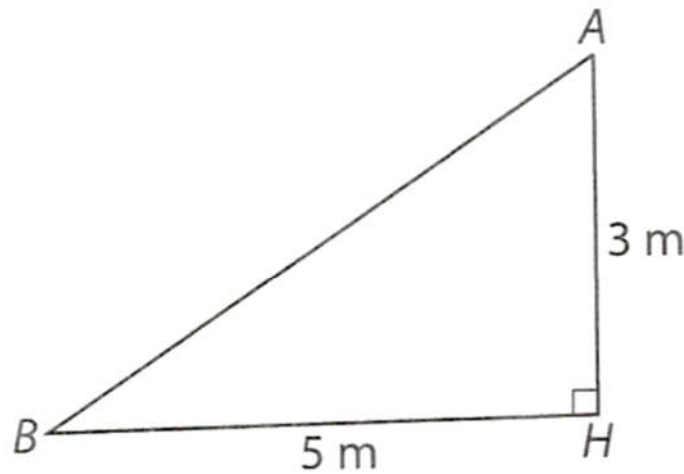
Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên mặt đất, ta tính được:  $AH = 10 \sin 80^\circ (m)$ .

Góc cần tìm là  $\alpha = \widehat{ACH} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{10 \sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \alpha \approx 31^\circ$ .

**Câu 20.** Một chiếc cột cao  $3m$  được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài  $5m$ . Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

**Giải.** (H.7.9)





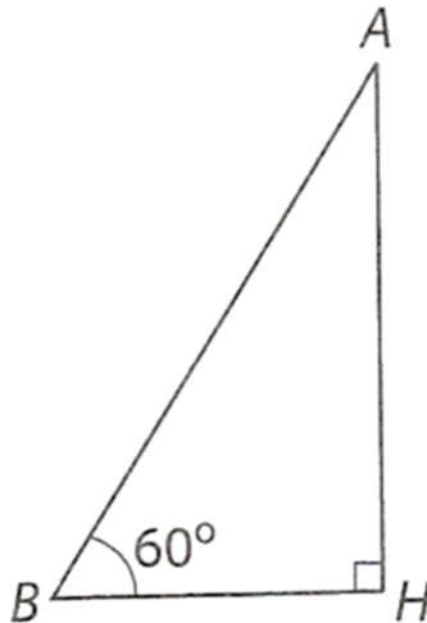
Hình 7.9

Góc giữa tia nắng mặt trời  $AB$  và mặt đất là góc  $ABH$ . Ta có:  $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{3}{5}$ , suy ra

$$\widehat{ABH} \approx 30,96^\circ.$$

**Câu 21.** Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc  $60^\circ$ . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài  $10m$ . Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

**Lời giải**



Hình 7.37

Gọi  $A$  là vị trí con diều,  $B$  là vị trí đầu dây diều trên mặt đất,  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên mặt đất.

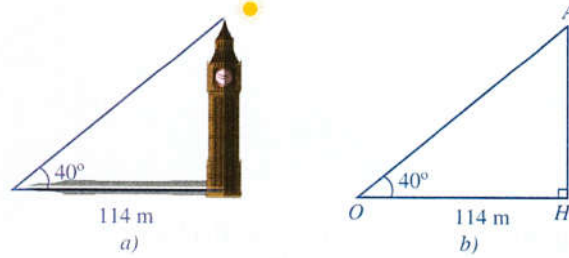
Tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$ , góc  $ABH$  bằng  $60^\circ$  và  $AB = 10m = 1000cm$ .

Ta có:  $AH = AB \cdot \sin 60^\circ \approx 866(cm)$ .

**Câu 22.** Bài toán đo chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp.

Để ước lượng chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp, người ta đo góc giữa tia nắng chiếu qua đỉnh tháp và mặt đất, đo chiều dài của bóng tháp trên mặt đất, từ đó ước lượng được chiều cao của tháp. Giả

sử khi tia nắng tạo với mặt đất một góc  $40^\circ$ , chiều dài của bóng tháp là  $114\text{ m}$  (Hình 34a). Tính chiều cao của tháp theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 34

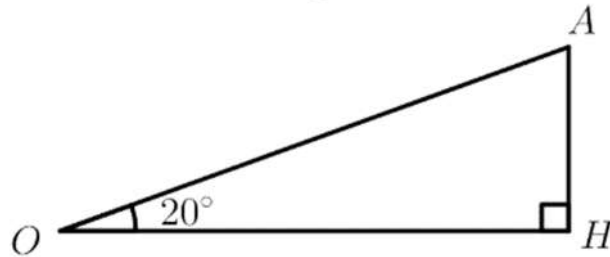
### Giải

Xét Hình 34b, độ dài  $AH$  chỉ chiều cao của tháp, độ dài  $OH$  chỉ chiều dài của bóng tháp, độ lớn của góc  $AOH$  chỉ số đo góc giữa tia nắng và mặt đất. Vì tam giác  $OAH$  vuông tại  $H$  nên

$$AH = OH \cdot \tan \widehat{AOH} = 114 \cdot \tan 40^\circ \approx 95,7(m).$$

**Câu 23.** Giả sử ở những giây đầu tiên sau khi cất cánh, máy bay chuyển động theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc  $20^\circ$  và có tốc độ  $200\text{ km/h}$ . Tính độ cao của máy bay so với mặt đất theo đơn vị mét sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 2 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

### Lời giải



$$\text{Đổi } 200\text{ km/h} = \frac{500}{9}\text{ m/s}$$

Mô hình hoá như hình vẽ, với  $OA$  là quãng đường máy bay bay được sau 2 giây,  $OH$  là độ cao của máy bay so với mặt đất khi máy bay bay được sau 2 giây, độ lớn của góc  $\widehat{AOH}$  chỉ số đo góc giữa máy bay với mặt đất.

$$\text{Sau 2 giây máy bay bay được quãng đường là: } \frac{500}{9} \cdot 2 = \frac{1000}{9} (m)$$

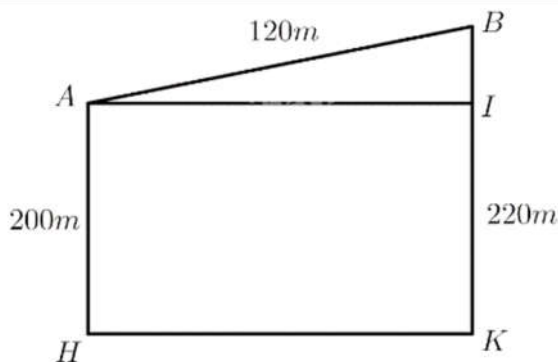
Vì tam giác  $OAH$  vuông tại  $H$  nên ta có:

$$AH = OA \cdot \sin \widehat{AOH} = \frac{1000}{9} \cdot \sin 20^\circ \approx 38,0(m)$$

Vậy độ cao của máy bay so với mặt đất là 38 mét sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 2 giây.

**Câu 24.** Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là  $100\%$ , tương ứng với góc  $90^\circ$  (độ dốc  $10\%$  tương ứng với góc  $9^\circ$ ). Giả sử có hai điểm  $A, B$  nằm ở độ cao lần lượt là  $200\text{ m}, 220\text{ m}$  so với mực nước biển và đoạn dốc  $AB$  dài  $120\text{ m}$ . Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

### Lời giải



Mô hình hoá như hình vẽ, với  $AB$  là chiều dài con dốc,  $AH$  là độ cao của điểm  $A$  so với mặt nước biển,  $BK$  là độ cao của điểm  $B$  so với mặt nước biển,  $BI$  là chiều cao của con dốc, độ lớn của góc  $\widehat{BAI}$  chỉ độ dốc.

Ta có:  $AH = 200, BK = 220, AB = 120$ .

$AHKB$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow IK = AH = 200 \Rightarrow BI = BK - IK = 220 - 200 = 20$

Vì tam giác  $ABI$  vuông tại  $I$  nên ta có:

$$\sin \widehat{ABI} = \frac{BI}{AB} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \Rightarrow \widehat{ABI} \approx 9,59^\circ \text{ tương ứng với } 10,66\%$$

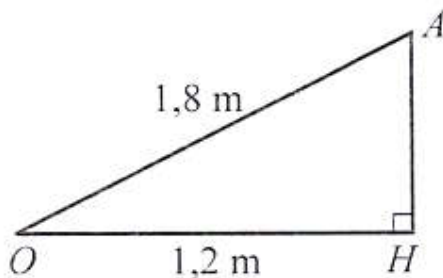
Vậy độ dốc của con dốc đó là 10,66%.

**Câu 25.** Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình 20 có các ống hấp nhiệt chân không dài 1,8m được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 20

Lời giải



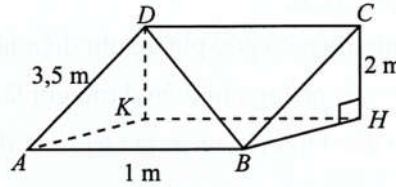
Hình 71

Vẽ  $OA$  biểu diễn cho ống hấp nhiệt chân không,  $OH$  biểu diễn bóng nắng (hình chiếu vuông góc do tia nắng chiếu vuông góc với mặt sân) của ống đó trên mặt sân. Như vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân bằng  $\widehat{AOH}$ . Ta có:

$$\cos \widehat{AOH} = \frac{OH}{OA} = \frac{1,2}{1,8} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{AOH} \approx 48^\circ.$$

Vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân thượng bằng khoảng  $48^\circ$ .

**Câu 26.** Một tấm ván hình chữ nhật  $ABCD$  được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu  $2m$ . Cho biết  $AB = 1m$ ,  $AD = 3,5m$ . Tính góc giữa đường thẳng  $BD$  và đáy hố.



Hình 3

Lời giải

Ta có:  $DK = CH = 2$ ,  $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \frac{\sqrt{33}}{2}$ ,  $BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$ ,  $\tan \widehat{DBK} = \frac{DK}{KB}$ .

Nên  $\widehat{DBK} = 43,4^\circ$

Góc giữa đường thẳng  $BD$  và đáy hố là  $43,4^\circ$

## HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

**Câu 27.** Trong cửa sổ ở Hình 7.56, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính  $80cm$ , bản lề được đính ở điểm chính giữa  $O$  của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng  $d$ ; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi  $d = 40cm$ .



Hình 7.56

Lời giải

Gọi  $I, J$  lần lượt là tâm của nửa hình tròn khung cửa và nửa hình tròn cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau, do đó chúng cũng song song với giao tuyến  $m$  (qua  $O$ ) của hai mặt phẳng tương ứng chứa khung và cánh cửa.

Vì  $O$  là trung điểm của các cung tròn khung cửa và cánh cửa nên  $OI$  vuông góc với đường kính khung cửa,  $OJ$  vuông góc với đường kính cánh cửa. Vậy  $OI, OJ$  cùng vuông góc với  $m$ . Do đó  $\widehat{IOJ}$  là một góc phẳng nhị diện của nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa.

Ta có  $m \perp OI, m \perp OJ$  nên  $m \perp IJ$ . Vậy  $IJ$  cũng vuông góc với các đường kính cánh cửa và khung cửa.

Do đó  $IJ = 40cm$ . Mặt khác  $OI = OJ = 40cm$ , suy ra tam giác  $OIJ$  đều và  $\widehat{IOJ} = 60^\circ$ . Vậy để khoảng cách  $d$  giữa đường kính cánh cửa và đường kính khung cửa bằng  $40cm$  thì góc nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa có số đo là  $60^\circ$ .

**Câu 28.** Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắp các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.



Hình 7.65

**Lời giải**

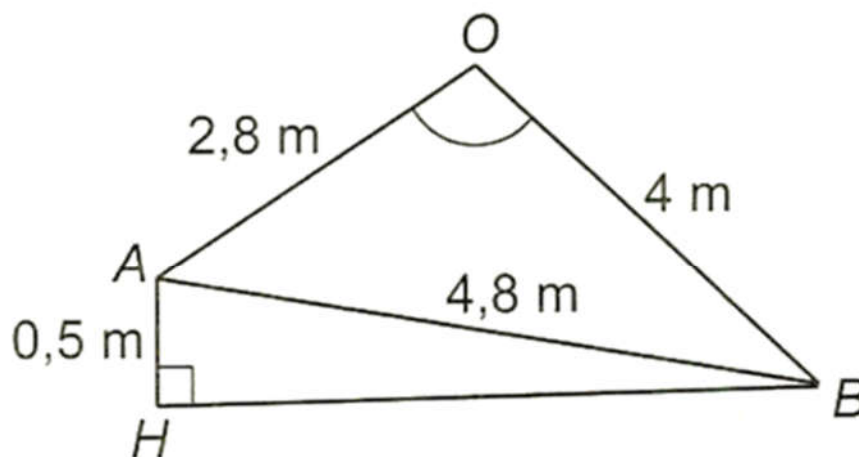
Vận dụng kiến thức về hình hộp chữ nhật để tạo dựng hình thực tế. Thùng có đáy và các mặt bên là các hình chữ nhật. Điều đó cũng kéo theo rằng miệng thùng là một hình chữ nhật (có các cạnh tương ứng song song và bằng cạnh đáy) thuộc mặt phẳng song song với đáy. Vì các cạnh bên của song song với nhau nên thùng là một hình lăng trụ. Mặt khác, mỗi cạnh bên của thùng đều vuông góc với đáy (vì vuông với hai cạnh kề của đáy). Do đó thùng là lăng trụ đứng, hơn nữa, có đáy là hình chữ nhật nên thùng có dạng hình hộp chữ nhật.

**Câu 29.** Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử  $AB = 4,8m$ ;  $OA = 2,8m$ ;  $OB = 4m$ .



Hình 7.72

- Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- Chứng minh rằng mặt phẳng  $(OAB)$  vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- Điểm  $A$  ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm  $B$  là  $0,5m$ . Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa  $OB$ ) so với mặt đất.

**Lời giải**

Hình 7.23

$$a) \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{1}{28} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 88^\circ.$$

b) Mặt phẳng  $(OAB)$  vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên mặt phẳng  $(OAB)$  vuông góc với mặt phẳng đất.

$$c) \sin \widehat{ABH} = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 6^\circ; \cos \widehat{OBA} = \frac{13}{16} \Rightarrow \widehat{OBA} \approx 36^\circ. \text{ Do đó } \widehat{OBH} = \widehat{ABH} + \widehat{OBA} \approx 42^\circ.$$

**Câu 30.** Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà, mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá  $\frac{1}{12}$ . Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

**Lời giải**

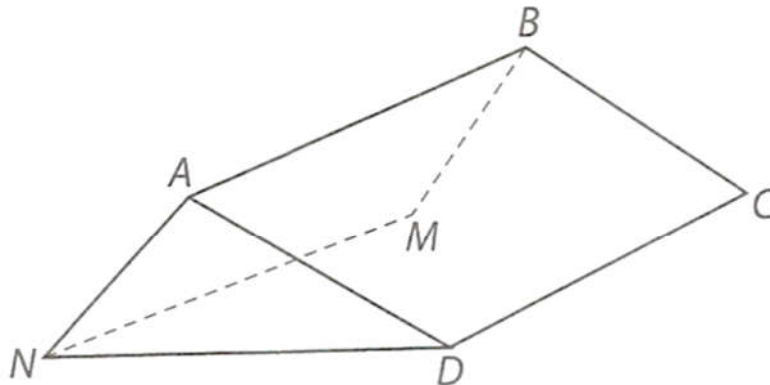
$$\text{Ta có: } \tan \alpha \leq \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \leq 4,76^\circ.$$

**Câu 31.** Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật  $ABCD, ABMN$ ,  $AD = 4m, AN = 3m, DN = 5m$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



**Giải.** (H.7.13)

Xét tam giác  $ADN$  có:  $AN^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = DN^2$  nên tam giác  $AND$  vuông tại  $A$ . Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(ABMN)$  bằng góc  $DAN$ . Vậy góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà bằng  $90^\circ$ .



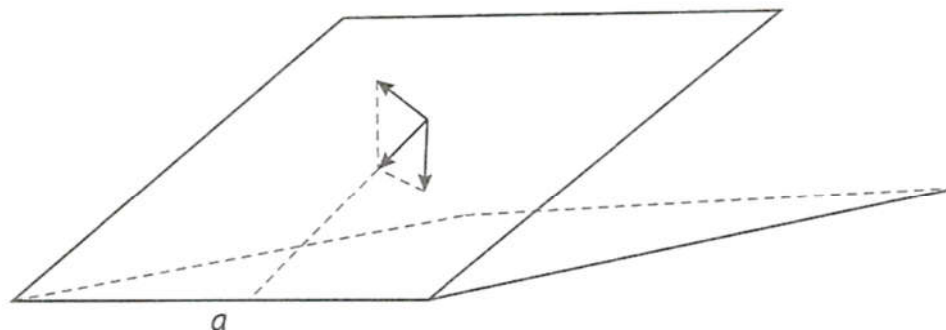
Hình 7.13

**Câu 32.** Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.



**Lời giải**

Gọi  $a$  là giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng nằm nghiêng. Phương của lực hút trái đất vuông góc với mặt phẳng nằm ngang, phương của phản lực vuông góc với mặt phẳng nghiêng nên phương của hai lực nói trên đều vuông góc với đường thẳng  $a$ , do đó đường thẳng  $a$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  chứa hai phương của hai lực đó. Vì tổng hợp lực của trọng lực và phản lực là một lực có phương nằm trên mặt phẳng  $(P)$  nên phương đó vuông góc với  $a$ . Do đó, viên bi lăn dọc theo đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $a$ .

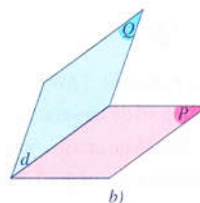


Hình 7.45

**Câu 33.** Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát Hình 40 và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



a)



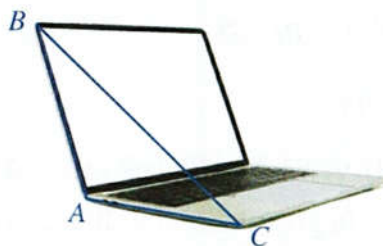
b)

Hình 40

**Giải**

Giả sử nửa mặt phẳng  $(P)$  (minh họa mặt phẳng nằm ngang) và nửa mặt phẳng  $(Q)$  (minh họa mái nhà) cắt nhau theo giao tuyến  $d$  (Hình 40b). Khi đó góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $d$ , hai mặt lần lượt là  $(P)$  và  $(Q)$  phản ánh độ dốc của mái. Độ dốc đó cũng được phản ánh bởi góc phẳng nhị diện  $xOy$  của góc nhị diện trên (Hình 40a).

**Câu 34.** Trong Hình 42, máy tính xách tay đang mở gợi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính đó, biết tam giác  $ABC$  có độ dài các cạnh là  $AB = AC = 30\text{ cm}$  và  $BC = 30\sqrt{3}\text{ cm}$ .



Hình 42

**Lời giải**

Gọi  $d$  là đường thẳng chứa bản lề của máy tính.

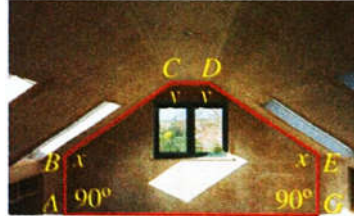
$$d \perp AB, d \perp AC$$

Vậy  $\widehat{BAC}$  là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện cần tính.

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có: } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{30^2 + 30^2 - (30\sqrt{3})^2}{2 \cdot 30 \cdot 30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$$

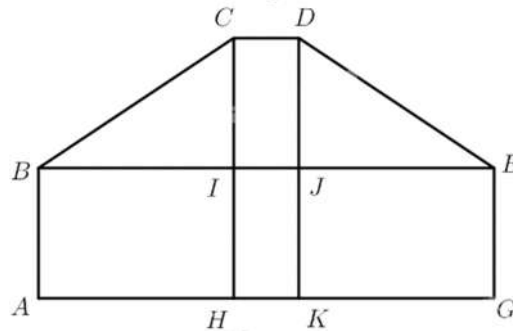
Vậy độ mở của màn hình máy tính bằng  $120^\circ$ .

**Câu 35.** Trong Hình 43, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là  $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$  trong cùng mặt phẳng. Lục giác  $ABCDEG$  nằm trong mặt phẳng đó có  $AB = GE = 2m, BC = DE, \widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$ ,  $\widehat{B} = \widehat{E} = x, \widehat{C} = \widehat{D} = y$ . Biết rằng khoảng cách từ  $C$  và  $D$  đến  $AG$  là  $4m, AG = 12m, CD = 1m$ . Tìm  $x, y$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 43

Lời giải



Kẻ  $CH \perp AG (H \in AG), DK \perp AG (K \in AG)$

Gọi  $I = BE \cap CH, J = BE \cap DK$ .

$ABEG$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow BE = AB = 12$

$CDKH, CDJI$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow HK = IJ = CD = 1$

$ABIH, EGKJ$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow IH = JK = AB = 2$

$$AH = GK = BI = EJ = \frac{AG - HK}{2} = \frac{12 - 1}{2} = 5,5$$

$$CH = d(C, AG) = 4 \Rightarrow CI = CH - IH = 4 - 2 = 2$$

$$\triangle BCI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} = \frac{2}{5,5} = \frac{4}{11} \Rightarrow \widehat{CBI} \approx 19,98^\circ$$

$$\Rightarrow x = \widehat{ABI} + \widehat{CBI} = 90^\circ + 19,98^\circ = 110,0^\circ$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - x = 180^\circ - 110,0^\circ = 70,0^\circ$$

**Câu 36.** Quan sát ba mặt phẳng  $(P), (Q), (R)$  ở Hình 57, chỉ ra hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy sử dụng kí hiệu để viết những kết quả đó.



Hình ảnh mô phỏng vệ tinh LOTUSat-1

(Nguồn: JICA Việt Nam)

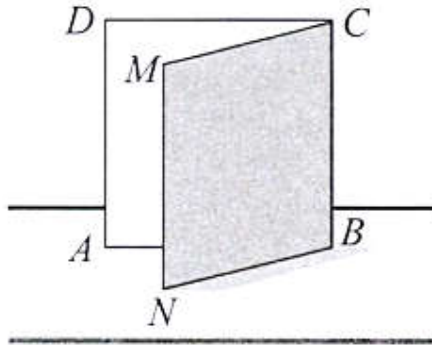
Hình 57

## Lời giải

$$(P) \perp (R), (Q) \perp (R)$$

**Câu 37.** Hình 19 minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật  $BCMN$  và khung cửa có dạng hình chữ nhật  $ABCD$ , ở đó  $AB = BN$ . Góc mở cửa là góc nhị diện  $[A, BC, N]$ . Biết chiều rộng  $BN$  của cửa là  $1,2m$ . Khi góc mở cửa có số đo bằng  $60^\circ$  thì khoảng cách giữa  $A$  và  $N$  bằng bao nhiêu?

**Giải** (hình 19)



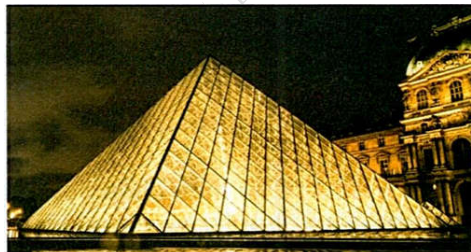
Hình 19

Vì  $AB \perp BC$  và  $NB \perp BC$  nên góc  $ABN$  là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện  $[A, BC, N]$ .

Vì góc mở cửa bằng  $60^\circ$  nên số đo góc nhị diện  $[A, BC, N]$  bằng  $60^\circ$ , suy ra  $\widehat{ABN} = 60^\circ$ .

Xét tam giác  $ABN$  cân tại  $B$  có  $BA = BN = 1,2m$  và  $\widehat{ABN} = 60^\circ$ . Khi đó tam giác  $ABN$  đều, suy ra  $AN = 1,2m$ , hay khoảng cách giữa  $A$  và  $N$  bằng  $1,2m$ .

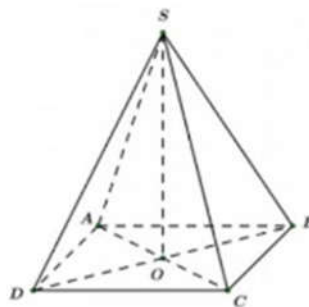
**Câu 38.** Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là  $21,6m$  và cạnh đáy dài  $34m$ . Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.



Hình 29

(Nguồn: [https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre\\_Pyramid](https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid))

## Lời giải

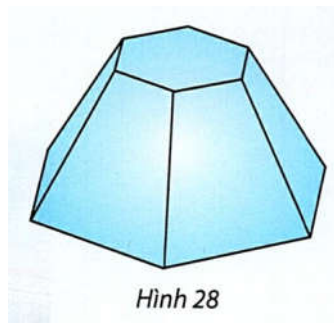


Ta có :  $SO = 21,6$ ;  $AB = CB = 34$

$$OA = 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

$$SA = \sqrt{(17\sqrt{2})^2 + 21,6^2} = 32,32(m)$$

**Câu 39.** Một người cần sơn tất cả các mặt của một cái bục để đặt tượng có dạng hình chóp cắt lục giác đều có cạnh đáy lớn  $1m$ , cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng  $0,7m$ . Tính tổng diện tích cần sơn.



Hình 28

**Lời giải**

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } \frac{3\sqrt{3} \cdot 1^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy nhỏ là: } \frac{3\sqrt{3} \cdot 0,7^2}{2} = \frac{147\sqrt{3}}{20}$$

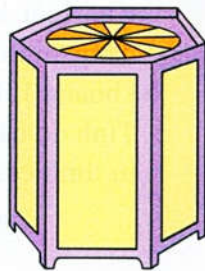
Một mặt bên của hình chóp cắt là hình thang cân có đáy lớn là  $1m$ , đáy nhỏ là  $0,7m$  và cạnh bên là  $0,7m$

$$\text{Chiều cao của mặt bên là: } \sqrt{0,7^2 - \left(\frac{1-0,7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{187}}{20}$$

$$\text{Diện tích một mặt bên là: } \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{187}}{20} \cdot (0,7+1) = 0,58(m^2)$$

$$\text{Tổng diện tích cần sơn là: } \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{147\sqrt{3}}{20} + 6 \cdot 0,58 = 18,8(m^2)$$

**Câu 40.** Một chiếc lồng đèn kéo quân có dạng hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy bằng  $10cm$  và cạnh bên bằng  $30cm$  (Hình 20). Tính tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn đó.



Hình 20

**Lời giải**

$$\text{Tổng diện tích các mặt bên của lồng đèn đó: } 6 \cdot 10 \cdot 30 = 1800(cm^2)$$

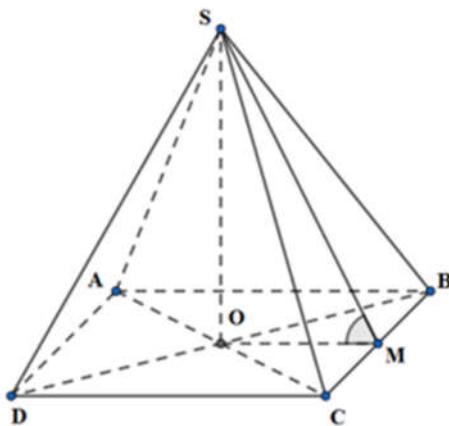
**Câu 41.** Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao  $98m$  và cạnh đáy  $180m$ . Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.



Hình 8

(Nguồn: [https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis\\_Pyramid](https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis_Pyramid))

**Lời giải**



Kẻ  $SM \perp BC$

Mà  $BC \perp SO$  nên  $BC \perp (SOM)$ . Suy ra  $BC \perp OM$

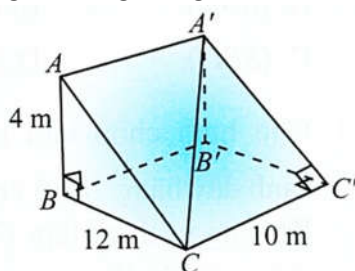
Do đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là  $\widehat{SMO}$

Ta có:  $SO = 98; OM = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90$

$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = 1,1$ . Suy ra  $\widehat{SMO} = 47,4^\circ$

Vậy góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là  $47,4^\circ$

**Câu 42.** Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình 9.



Hình 9

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng  $CA'$  và  $(CC'B'B)$ .

b) Tính số đo góc nhị diện cạnh  $CC'$ .

**Lời giải**

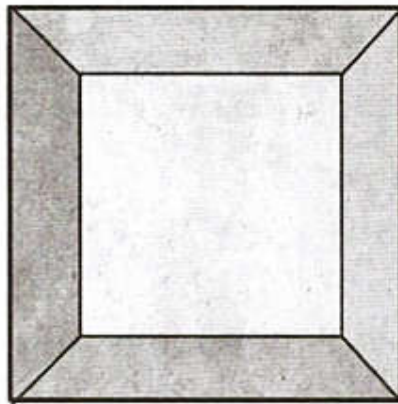
a) Góc giữa  $CA'$  và  $(CC'B'B)$  là  $\widehat{A'CB'}$

Ta có:  $CB' = \sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$ ,  $\tan \widehat{A'CB'} = \frac{A'B'}{CB'} = 0,256$ . Nên  $\widehat{A'CB'} = 14,36^\circ$

b) Góc nhị diện cạnh  $CC'$  là  $\widehat{ACB}$

Ta có:  $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$ . Nên  $\widehat{ACB} = 18,4^\circ$ .

**Câu 43.** Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng  $2m$ , đáy nhỏ có cạnh bằng  $1m$  và cạnh bên bằng  $2m$  (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.

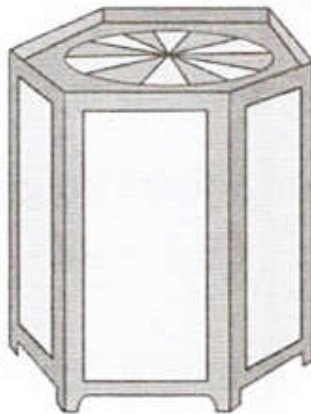


Hình 14

Lời giải

$$S_{tp} = 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{(2+1)}{2} + 4 + 1 = 5 + 3\sqrt{5} \approx 16,62 (m^2).$$

**Câu 44.** Một hộp đèn treo trên trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (hình 15), cạnh đáy bằng 10cm và cạnh bên bằng 50cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

Lời giải

$$\frac{S_{xq}}{S_{\text{day}}} = \frac{6 \cdot 50 \cdot 10}{6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55.$$

## KHOẢNG CÁCH

**Câu 45.** Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung khổng lồ chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,28m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc.

Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng  $15^\circ$  so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

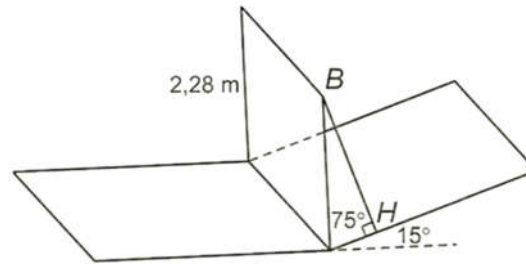
Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21m đi qua hay không?





Hình 7.82. Tại đầu một số cầu vượt ta có thể bắt gặp khung không chế chiều cao.

**Lời giải**

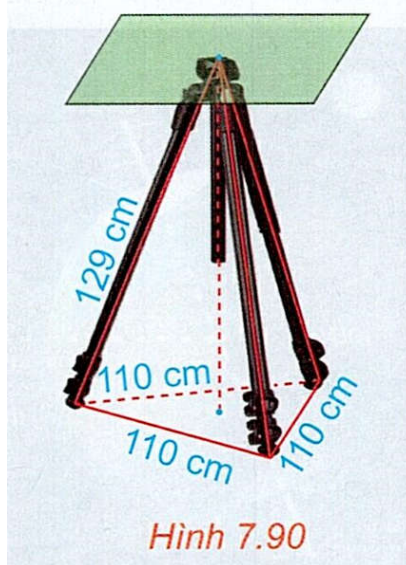


Hình 7.26

Gọi  $B$  là một điểm nằm trên thanh ngang và  $H$  là hình chiếu vuông góc xuống mặt dốc. Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng dốc là  $BH = 2,28 \cdot \sin 75^\circ \approx 2,2(m)$ .

Do đó, không cho phép xe cao 2,21 m đi qua.

**Câu 46.** Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110 cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129 cm.



Hình 7.90

**Lời giải**

Chiều cao của giá đỡ là  $\sqrt{129^2 - \left(\frac{110 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 112(cm)$ .

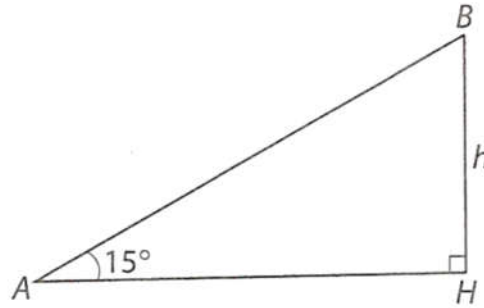
**Câu 47.** Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

**Lời giải**

Sợi dây của quả dọi có phương vuông góc với đáy bể và vuông góc với mặt nước.

**Câu 48.** Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc  $500 \text{ km/h}$  và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc  $15^\circ$ . Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

**Giải.** (H.7.16)



Hình 7.16

Sau 2 phút, máy bay đi được quãng đường là

$$AB = \frac{500}{60} \cdot 2 = \frac{50}{3} (\text{km}). \text{ Sau 2 phút, máy bay ở độ cao là}$$

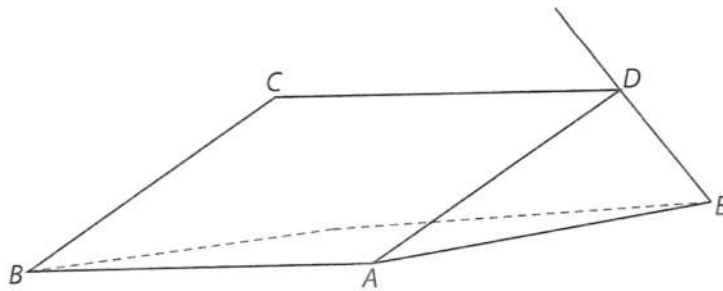
$$h = AB \cdot \sin 15^\circ \approx 4,3 (\text{km}).$$

**Câu 49.** Trên một mái nhà nghiêng  $30^\circ$  so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?

**Lời giải**

Gọi  $AB$  là giao tuyến của mặt phẳng mái nhà và mặt phẳng nằm ngang,  $AD$  là đường thẳng nằm trên mái nhà và vuông góc với  $AB$ , đường thẳng  $DE$  là chiếc cột vuông góc với mái nhà, đường thẳng  $AE$  nằm trên mặt phẳng nằm ngang, khi đó tam giác  $ADE$  vuông tại  $D$ , đường thẳng  $AE$  là hình chiếu vuông góc của  $DE$  trên mặt phẳng nằm ngang, mà góc  $DAE$  bằng  $30^\circ$  nên góc giữa hai đường thẳng  $DE$  và  $AE$  bằng  $60^\circ$ .

Vậy góc giữa đường thẳng  $DE$  (chiếc cột) và mặt phẳng nằm ngang bằng góc giữa hai đường  $DE$  và  $AE$  bằng  $60^\circ$ .



Hình 7.51

**Câu 50.** Người ta dựng các cột đèn vuông góc với mặt đường, trong đó mỗi cột đèn gọi nên hình ảnh một đường thẳng. Khoảng cách giữa hai chân cột đèn liên tiếp đo được là  $5 \text{ m}$ . Tại sao có thể nói khoảng cách giữa hai cột đèn đó là  $5 \text{ m}$ ?

**Lời giải**

Các cột đèn được dựng thẳng đứng và vuông góc với mặt đường thì chúng song song với nhau. Do đó, đoạn thẳng nối hai chân cột chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song. Vậy ta có thể nói khoảng cách giữa hai cột đèn đó là  $5 \text{ m}$ .

**Câu 51.** Hình 76 gọi nên hình ảnh hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau. Cột gỗ cao  $4,2 \text{ m}$ . Khoảng cách giữa  $(P)$  và  $(Q)$  là bao nhiêu mét?

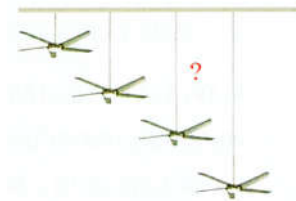


Hình 76

**Lời giải**

Vì hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau nên khoảng cách giữa  $(P)$  và  $(Q)$  bằng khoảng cách cột gỗ. Vậy khoảng cách giữa  $(P)$  và  $(Q)$  bằng 4,2 m.

**Câu 52.** Một quạt trần có bề dày của thân quạt là 20 cm. Người ta muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn nhà là 2,5 m. Hỏi phải làm cán quạt dài bao nhiêu? Cho biết trần nhà cao 3,6 m.

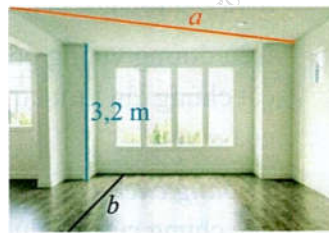


Hình 3

**Lời giải**

Cán quạt dài:  $3,6 - 2,5 - 0,2 = 0,9(m)$

**Câu 53.** Một căn phòng có trần cao 3,2 m. Tính khoảng cách giữa một đường thẳng  $a$  trên trần nhà và đường thẳng  $b$  trên sàn nhà.

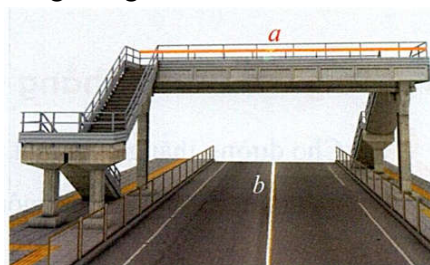


Hình 10

**Lời giải**

$$d(a, b) = 3,2m$$

**Câu 54.** Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình 22) có mặt sàn cầu cách mặt đường 3,5 m, khoảng cách từ đường thẳng  $a$  nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 0,8 m. Gọi  $b$  là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .



Hình 22

**Lời giải**

$$d(a, b) = 3,5 + 0,8 = 4,3$$

## THỂ TÍCH

**Câu 55.** Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng  $30\text{cm}$ ,  $60\text{cm}$ , cạnh bên của sọt dài  $50\text{cm}$ . Tính thể tích của sọt.



Hình 7.98

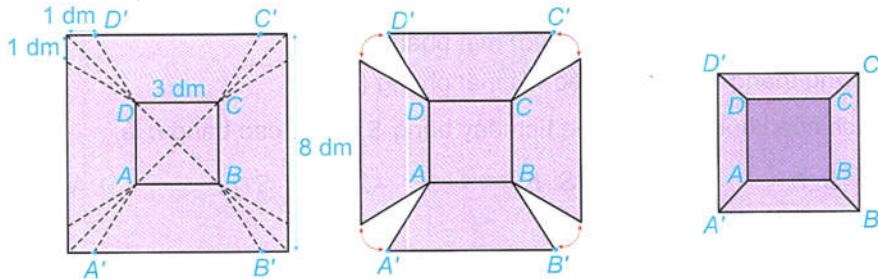
**Lời giải**

Diện tích mặt đáy lớn là  $S_1 = 60^2 (\text{cm}^2)$ , diện tích mặt đáy nhỏ là  $S_2 = 30^2 (\text{cm}^2)$ .

Chiều cao là  $h = \sqrt{50^2 - \frac{30^2}{2}} = 5\sqrt{82} (\text{cm})$ . Do đó  $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) \approx 95082 (\text{cm}^3)$ .

**Câu 56.** Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh  $8\text{dm}$ , bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

- Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.
- Tính cạnh bên của thùng.
- Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?



Hình 7.99

**Lời giải**

a) Vì  $AB \parallel A'B' \Rightarrow AB \parallel (A'B'C'D)$ ,  $AD \parallel A'D' \Rightarrow AD \parallel (A'B'C'D)$ . Do đó  $(ABCD) \parallel (A'B'C'D)$ .

b) Cạnh bên của hình chóp cụt bằng  $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2} (\text{dm})$ .

c) Xét mặt chứa đường chéo của hình vuông, nó là hình thang cân có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp cụt và tính ra được  $h = \sqrt{\frac{34}{4} - \frac{18}{4}} = 2 (\text{dm})$ .

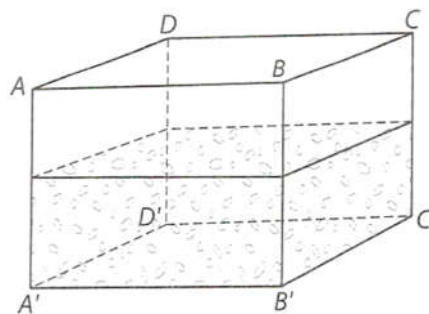
Thể tích cần tìm là  $V = 42$  lít.

**Câu 57.** Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ ,  $AB = 5\text{m}$ ,  $AA' = 3\text{m}$ ,  $AD = 4\text{m}$ .

Đáy bể là hình chữ nhật  $A'B'C'D'$  được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang.

- Giải thích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.
- Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là  $40\text{m}^3$ .

**Giải.** (H.7.20)



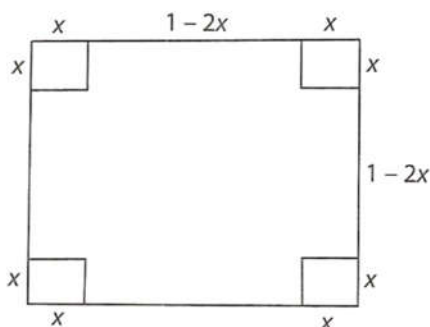
Hình 7.20

a) Vì mặt phẳng chứa bề mặt nước song song với mặt đáy nên phần nước trong bể là khối hình lăng trụ đứng, có đáy  $A'B'C'D'$  là hình chữ nhật nên phần nước trong bể là khối hộp chữ nhật.

b) Mức nước trong bể là  $h = \frac{40}{4 \cdot 5} = 2(m)$ .

**Câu 58.** Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh  $1m$  để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp chữ nhật nhận được có thể tích lớn nhất?

**Lời giải**



Hình 7.59

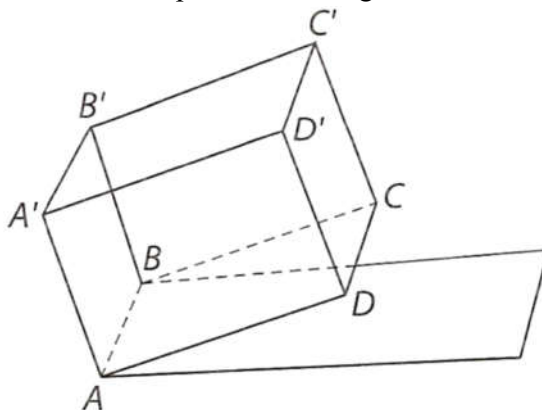
Gọi  $x(m)$  là chiều dài cạnh hình vuông nhỏ tại mỗi góc của tấm tôn được cắt bỏ đi (với  $0 < x < \frac{1}{2}$ ). Thể tích hình hộp chữ nhật nhận được là

$$V = (1-2x)^2 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot (1-2x) \cdot (1-2x) \cdot 4x \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1-2x+1-2x+4x}{3} \right)^3 = \frac{2}{27}$$

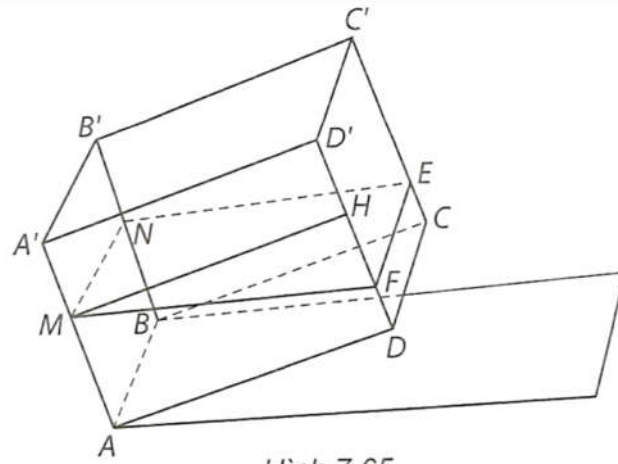
Dấu "=" xảy ra khi  $1-2x = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$ .

Vậy để thể tích chiếc thùng là lớn nhất thì các cạnh của hình vuông được cắt bỏ đi là  $\frac{1}{6}m$ .

**Câu 59.** Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  được đặt trên một mái nhà nghiêng so với mặt đất nằm ngang góc  $10^\circ$ ,  $AB = 1m$ ,  $AD = 1,5m$ ,  $AA' = 1m$ . Đáy bể là hình chữ nhật  $ABCD$ . Các điểm  $A, B$  cùng ở độ cao  $5m$  (so với mặt đất), các điểm  $C, D$  ở độ cao lớn hơn so với độ cao của các điểm  $A, B$ . Khi nước trong bể phẳng lặng người ta đo được khoảng cách giữa đường mép nước ở mặt phẳng  $(ABB'A')$  và mặt đáy của bể là  $80cm$ . Tính thể tích của phần nước trong bể.



**Lời giải**



Hình 7.65

Gọi  $MN$  là đường mép nước ở trên mặt  $(ABB'A')$ ,  $EF$  là đường mép nước trên mặt  $(CDD'C')$ . Khi đó  $ABNM.DCEF$  là một hình chóp cắt. Kẻ  $MH$  vuông góc với  $DD'$  tại  $H$  thì  $HF = MH \cdot \tan 10^\circ = \tan 10^\circ (m)$ .

Suy ra  $DF = DH - HF = AM - HF = 0,8 - \tan 10^\circ \approx 0,62(m)$ .

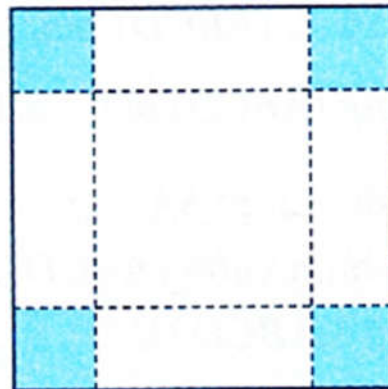
Ta có:  $S_1 = S_{DCEF} = DF \cdot CD \approx 0,62(m^2)$ ;  $S_2 = S_{ABNM} = AB \cdot AM = 0,8(m^2)$ .

Vậy thể tích phần nước trong bể là

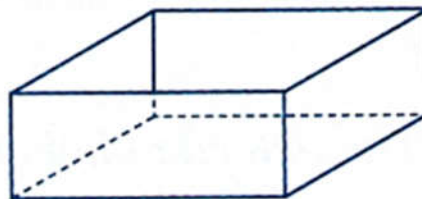
$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot (0,62 + 0,8 + \sqrt{0,62 \cdot 0,8}) \approx 0,71(m^3)$$

**Câu 60.** Từ một tấm bìa hình vuông (Hình 92a), người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $6cm$ , rồi gấp hình hộp chữ nhật (Hình 92b). Tính cạnh của tấm bìa ban đầu, biết rằng thể tích của chiếc hộp bằng  $600cm^3$ .

**Giải**



a)



b)

Hình 92

Giả sử tấm bìa ban đầu có cạnh  $x(cm)$  ( $x > 12$ ). Khi đó:



Đáy của chiếc hộp là hình vuông cạnh  $x-12(cm)$  nên diện tích của đáy chiếc hộp là  $(x-12)^2 (cm^2)$ .

Mà chiều cao của chiếc hộp là  $6cm$ , suy ra thể tích của chiếc hộp bằng  $(x-12)^2 \cdot 6 (cm^3)$ .

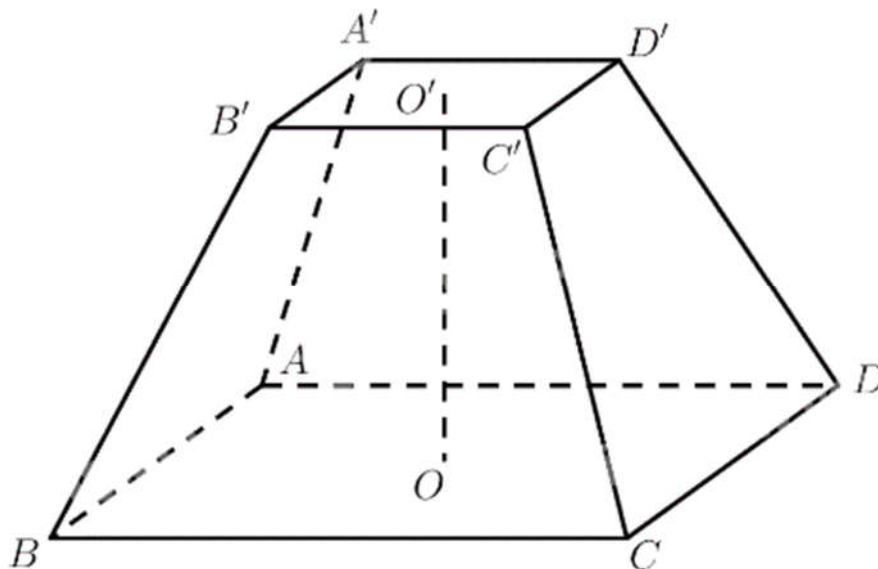
Theo đề bài, thể tích của chiếc hộp bằng  $600cm^3$  nên  $(x-12)^2 \cdot 6 = 600 \Leftrightarrow (x-12)^2 = 100$ .

Với  $x > 12$  ta có:  $x-12=10 \Leftrightarrow x=22(cm)$ .

Vậy độ dài cạnh của tấm bìa ban đầu là  $22cm$ .

**Câu 61.** Một thùng đựng rác có dạng khối chóp cắt tứ giác đều với hai cạnh đáy lần lượt dài  $2dm$  và  $3dm$ , chiều cao bằng  $4dm$ . Tính thể tích của thùng đựng rác.

**Lời giải**



Diện tích đáy lớn là:  $S = AB^2 = 3^2 = 9$

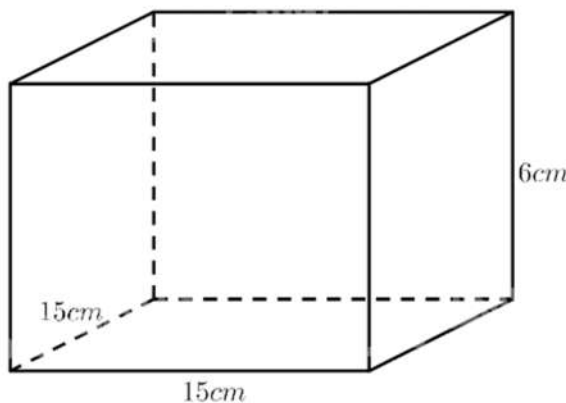
Diện tích đáy bé là:  $S' = 2^2 = 4$

Thể tích hình chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 4(9 + \sqrt{9 \cdot 4} + 4) = \frac{76}{3} \approx 25,3 (dm^3)$$

**Câu 62.** Một chiếc bánh chưng có dạng khối hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là  $15cm$ ,  $15cm$  và  $6cm$ . Tính thể tích của chiếc bánh chưng đó.

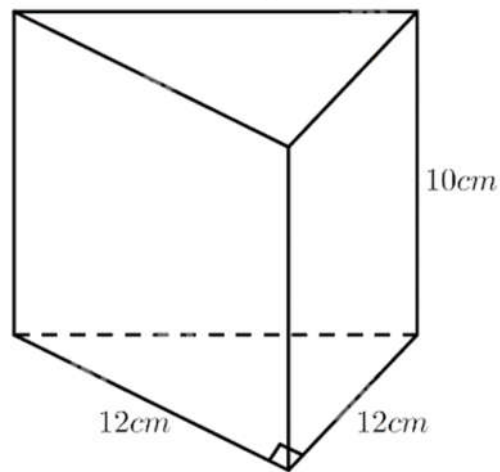
**Lời giải**



Thể tích của chiếc bánh chưng đó là:  $V = 15 \cdot 15 \cdot 6 = 1350 (cm^3)$ .

**Câu 63.** Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao  $10cm$  và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng  $12cm$ . Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là  $3g/cm^3$ .

Lời giải



Diện tích đáy của miếng pho mát là:  $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 (cm^2)$ .

Thể tích của miếng pho mát là:  $V = Sh = 72 \cdot 10 = 720 (cm^3)$ .

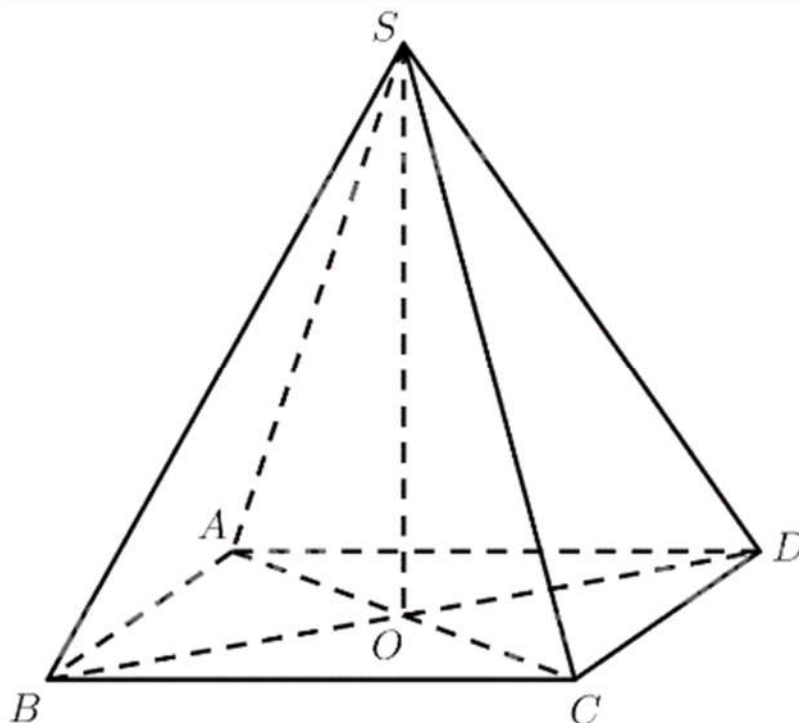
Khối lượng của miếng pho mát là:  $m = D \cdot V = 3 \cdot 720 = 2160 (g)$ .

**Câu 64.** Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (Hình 97). Tính theo  $a$  thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng  $a$ .



Hình 97

Lời giải



Mô hình hoá đèn đá muối bằng hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ .

Gọi  $O$  là tâm của đáy.

$$\Delta SAC \text{ cân } S \Rightarrow SO \perp AC$$

$$\Delta SBD \text{ cân } S \Rightarrow SO \perp BD$$

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

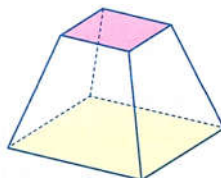
$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = a^2$$

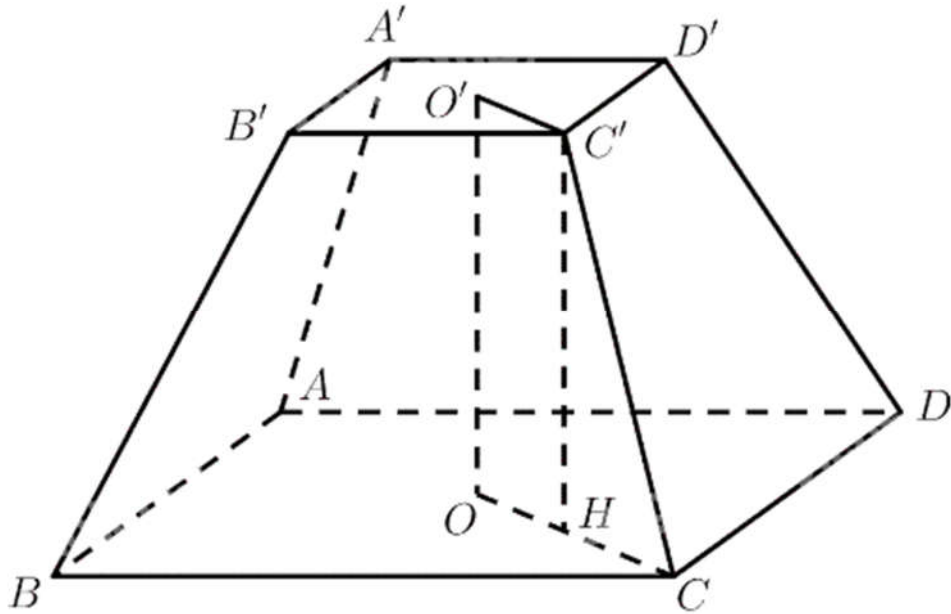
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

**Câu 65.** Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 98). Cạnh đáy dưới dài  $5m$ , cạnh đáy trên dài  $2m$ , cạnh bên dài  $3m$ . Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là  $1470000$  đồng/ $m^3$ . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.



Hình 98

**Lời giải**



Mô hình hoá chân tháp bằng cắt chóp tứ giác đều  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  với  $O, O'$  là tâm của hai đáy.

Vậy  $AB = 5, A'B' = 2, CC' = 3$ .

$ABCD$  là hình vuông

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2}AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông } \Rightarrow A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow C'O' = \frac{1}{2}A'C' = \sqrt{2}$$

Kẻ  $C'H \perp OC (H \in OC)$

$$OHC'O' \text{ là hình chữ nhật } \Rightarrow OH = O'C' = \sqrt{2}, OO' = C'H \Rightarrow CH = OC - OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta CC'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OO' = C'H = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } S = AB^2 = 5^2 = 25 (m^2)$$

$$\text{Diện tích đáy bé là: } S' = A'B'^2 = 2^2 = 4 (m^2)$$

Thể tích hình chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} (m^3)$$

$$\text{Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là: } \frac{39\sqrt{2}}{2} \cdot 1470000 \approx 40538432 \text{ (đồng).}$$

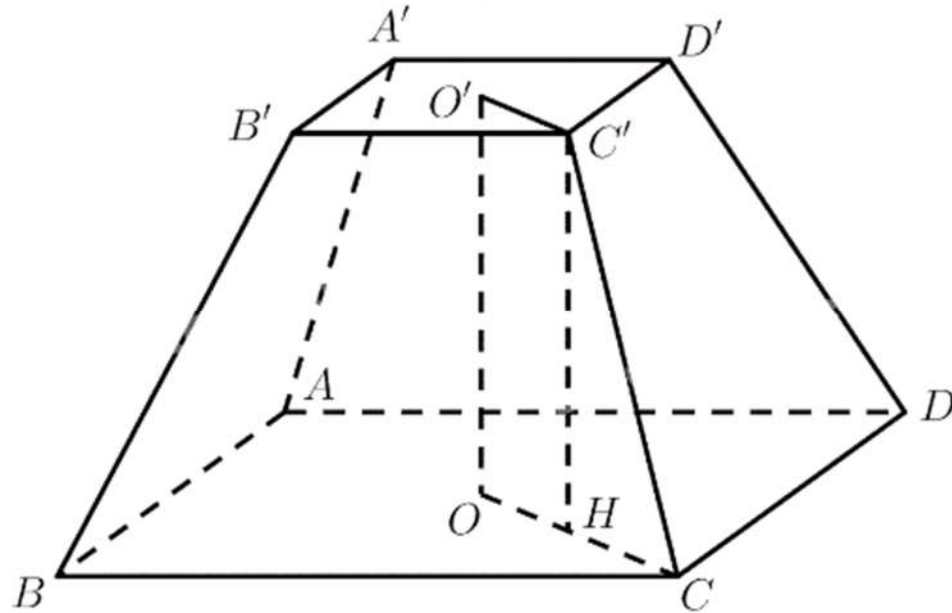
**Câu 66.** Đền Kukulcan (Hình 101) là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm ngôi đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cắt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là  $55,3m$ , chiều cao là  $24m$ , góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là khoảng  $47^\circ$ .

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 101

Tính thể tích phần thân của đền có dạng khối chóp cắt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**



Mô hình hoá phần thân của đền bằng cắt chóp tứ giác đều  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  với  $O, O'$  là tâm của hai đáy.

Vậy  $AB = 55,3; OO' = 24; (\angle C'C, (ABCD)) = 47^\circ$ .

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 55,3\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2}AC = 27,65\sqrt{2}$$

$$\text{Kè } C'H \perp OC (H \in OC) \Rightarrow C'H \parallel OO' \Rightarrow C'H \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow (\angle C'C, (ABCD)) = (\angle C'C, CH) = \widehat{HCC'} = 47^\circ$$

$$OHC'O' \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow OO' = C'H = 24, CH = O'C'$$

$$\triangle C'C'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow CH = \frac{C'H}{\tan \widehat{HCC'}} = \frac{24}{\tan 47^\circ} \approx 22,38$$

$$O'C' = OH = CO - CH \approx 16,72 \Rightarrow A'C' = 2O'C' = 33,44$$

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông} \Rightarrow A'B' = \frac{A'C'}{\sqrt{2}} \approx 23,65$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } S = AB^2 = 55,3^2 = 3058,09 (m^2)$$

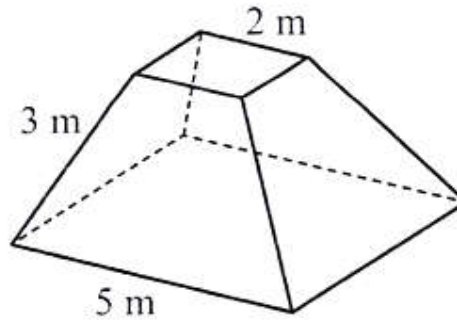
$$\text{Diện tích đáy bé là: } S' = A'B'^2 = 23,65^2 = 545,2225 (m^2)$$

Thể tích hình chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 24(3058,09 + \sqrt{3058,09 \cdot 545,2225} + 545,2225) \approx 39156,53 (m^3)$$

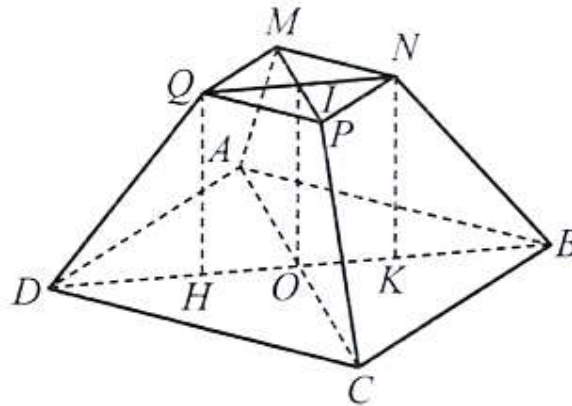
Vậy thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cắt tứ giác đều đó là  $39156,53 (m^3)$

**Câu 67.** Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài  $5m$ , cạnh đáy trên dài  $2m$ , cạnh bên dài  $3m$ . Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là  $1470000$  đồng  $/m^3$ . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

**Giải.** (Hình 47)



Hình 47

Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều  $ABCD.MNPQ$  với  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $5m$ ,  $MNPQ$  là hình vuông cạnh  $2m$ ,  $AM = BN = CP = DQ = 3m$ .

Vì  $DQ, NB$  cắt nhau nên  $D, Q, N, B$  đồng phẳng. Mà  $(ABCD) \parallel (MNPQ)$  nên  $NQ \parallel BD$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $MP$  và  $NQ$ ,  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Khi đó  $IO \perp (MNPQ)$ ,  $IO \perp (ABCD)$ .

Xét hình thang  $QNBD$ , gọi  $H$  là hình chiếu của  $Q$  trên  $BD$ ,  $K$  là hình chiếu của  $N$  trên  $BD$ . Vì

$IO \perp BD$ ,  $QH \perp BD$ ,  $NK \perp BD$  trong  $(QNBD)$  nên  $IO \parallel QH \parallel NK$ .

Suy ra  $QH \perp (MNPQ)$ ,  $QH \perp (ABCD)$  nên  $QH$  bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có  $QH = NK = IO$  và  $QD = NB$ . Suy ra  $\triangle QHD = \triangle NKB$  nên ta có  $HD = BK$ .

Bên cạnh đó,  $QNKH$  là hình chữ nhật nên  $QN = HK$ . Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} HD &= \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m). \end{aligned}$$

Xét tam giác  $QHD$  vuông tại  $H$  có:

$$QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m).$$

Diện tích của hai đáy là:  $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25 (m^2)$ ,



$$S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}.$$

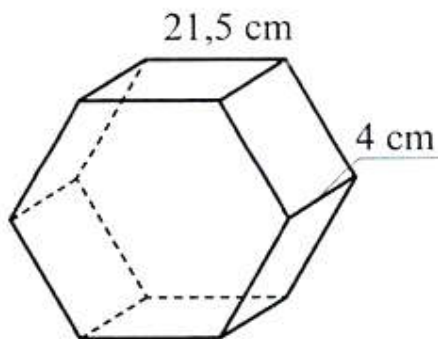
Suy ra thể tích của khối chóp cắt đều là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}QH \left( S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}} + S_{MNPQ} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} \text{ (m}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$$1470000 \cdot \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 40538000 \text{ (đồng)}.$$

**Câu 68.** Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là  $4\text{ cm}$  và cạnh lục giác dài  $21,5\text{ cm}$ . Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimet khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

#### Lời giải

Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh  $21,5\text{ cm}$ . Khi đó diện tích đáy của

viên gạch bằng:  $6 \cdot \frac{(21,5)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{5547\sqrt{3}}{8} \text{ (cm}^2\text{)}$ . Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích viên gạch, tức

$$\text{là: } 4 \cdot \frac{5547\sqrt{3}}{8} \approx 4803,8 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

**Câu 69.** Một chì neo câu cá có dạng khối chóp cắt tứ giác đều được làm hoàn toàn bằng chì có khối lượng  $137\text{ g}$ . Biết cạnh đáy nhỏ và cạnh đáy lớn của khối chóp cắt đều dài lần lượt  $1\text{ cm}$  và  $3\text{ cm}$ , khối lượng riêng của chì bằng  $11,3\text{ g/cm}^3$ . Tính chiều cao của chì neo câu cá đó theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

#### Lời giải

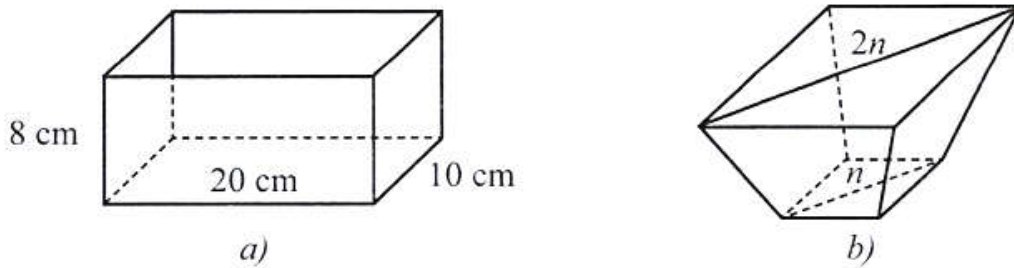
Thể tích của chì neo câu cá bằng  $V = \frac{137}{11,3} \text{ (cm}^3\text{)}$ .

Vậy chiều cao của chì neo câu cá bằng

$$h = \frac{3V}{1^2 + \sqrt{1^2 \cdot 3^2} + 3^2} = \frac{3 \cdot \frac{137}{11,3}}{13} \approx 2,8 \text{ (cm)}.$$

**Câu 70.** Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài  $20\text{ cm}$ , chiều rộng  $10\text{ cm}$ , chiều cao  $8\text{ cm}$  (Hình 50a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cắt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài  $n\text{ (cm)}$ , miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài  $2n\text{ (cm)}$  (Hình 50b). Sau khi đổ, mực

nước ở khay thứ hai cao bằng  $\frac{2}{3}$  chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi  $\frac{1}{4}$  so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimet khối.



Hình 50

### Lời giải

Thể tích nước có trong khay thứ nhất trước khi đổ bằng  $20 \cdot 10 \cdot 8 = 1600 (cm^3)$ .

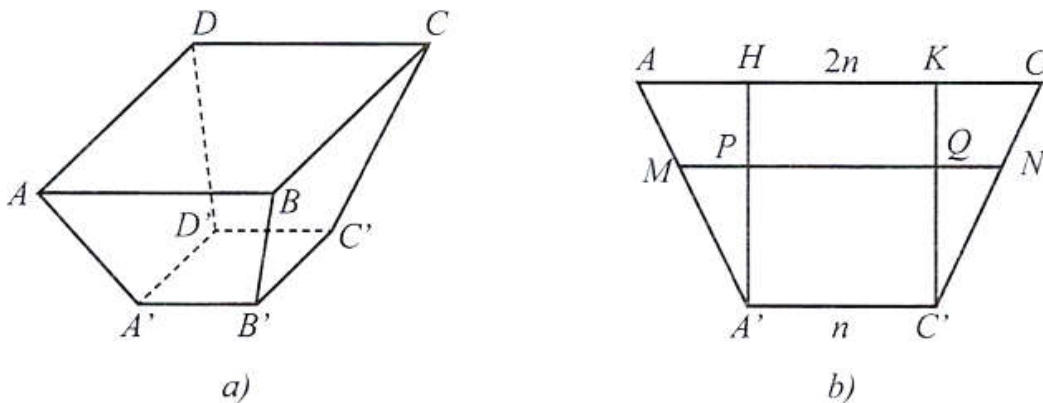
Sau khi đổ, thể tích nước có trong khay thứ hai bằng

$$1600 \cdot \frac{1}{4} = 400 (cm^3)$$

Gọi chiều cao của khay thứ hai là  $h(cm)$ .

Giả sử khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  (Hình 87a).

Xét hình thang  $ACC'A'$ , lấy  $MN$  song song với  $AC$ ;  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A', C'$  trên  $AC$ ;  $P, Q$  lần lượt là giao điểm của  $A'H$  và  $MN$ ,  $C'K$  và  $MN$  (Hình 87b).



Hình 87

Theo giả thiết, mực nước (ngang với  $MN$ ) trong khay thứ hai cao bằng  $\frac{2}{3}$  chiều cao của khay đó, suy ra

$$\frac{A'P}{A'H} = \frac{C'Q}{C'K} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MP}{AH} = \frac{NQ}{CK} = \frac{2}{3}.$$

Ta có:  $AH = CK = \frac{n}{2}$ ,  $HK = n$ , nên  $MN = \frac{5}{3}n$ . Thể tích của nước trong khay thứ hai bằng thể tích khối chóp cụt tứ giác đều với đáy lớn nhận  $MN$  là đường chéo và đáy nhỏ nhận  $A'C'$  là đường chéo, chiều cao bằng  $\frac{2}{3}h$ . Vì thể tích nước trong khay thứ hai bằng  $400 cm^3$  nên ta có

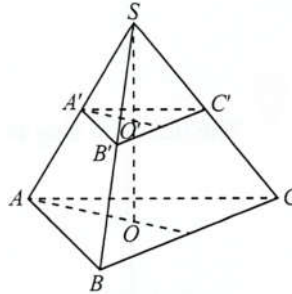
$$\frac{1}{3} \left[ \frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}} \right] \cdot \frac{2}{3}h = \frac{49}{81}n^2h = 400 \Rightarrow n^2h = \frac{32400}{49}.$$

Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng

$$V = \frac{h}{3} \left[ \frac{(2n)^2}{2} + \sqrt{\frac{(2n)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}} \right] = \frac{7}{6}n^2h = \frac{7}{6} \cdot \frac{32400}{49} = \frac{5400}{7} (cm^3)$$

**Câu 71.** Cắt khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  với cạnh đáy bằng  $a$  và chiều cao  $2a$  bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành.

**Giải**



Hình 19

Gọi  $ABC \cdot A'B'C'$  là khối chóp cắt đều được tạo thành,  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của hai đáy  $ABC$  và  $A'B'C'$  (Hình 19). Ta có:

$$\text{Chiều cao của khối chóp cắt đều là } h = OO' = \frac{SO}{2} = \frac{2a}{2} = a;$$

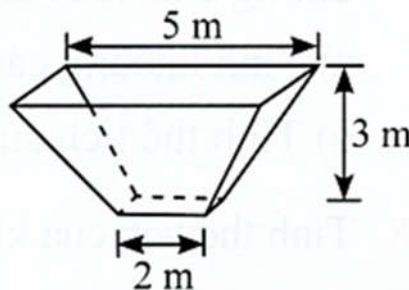
$$\text{Tam giác đều } ABC \text{ có diện tích: } S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{Tam giác đều } A'B'C' \text{ có cạnh } A'B' = \frac{AB}{2} \text{ nên có diện tích: } S' = \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{S}{4}.$$

Do đó, thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3}a\left(S + \frac{S}{2} + \frac{S}{4}\right) = \frac{7aS}{12} = \frac{7a}{12} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}.$$

**Câu 72.** Tính thể tích của một bồn chứa có dạng khối chóp cắt đều có kích thước được cho như trong Hình 20.

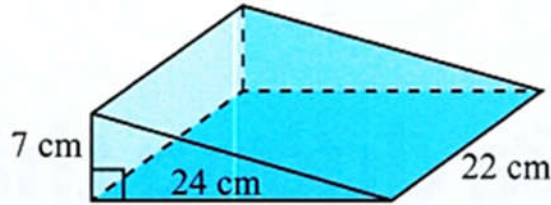


Hình 20

**Lời giải**

$$\text{Thể tích hình chóp cắt là: } V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(5^2 + \sqrt{5^2 \cdot 2^2} + 2^2\right) = 13(m^3)$$

**Câu 73.** Tính thể tích cái nệm hình lăng trụ đứng có kích thước như trong Hình 21.

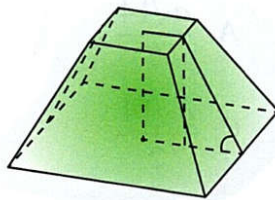


Hình 21

Lời giải

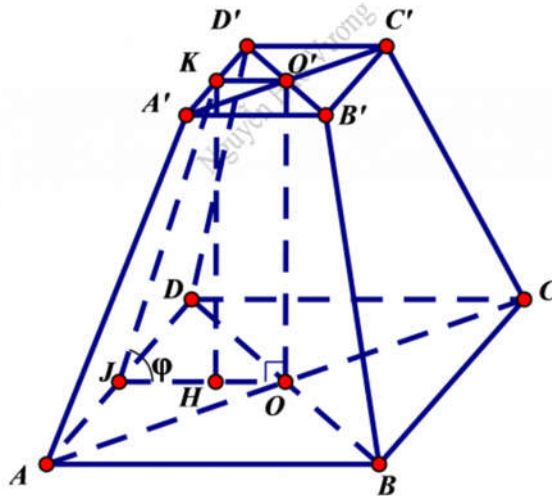
Thể tích cái nôm là  $V = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 22 = 1848 (cm^3)$

**Câu 74.** Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có hai cạnh đáy là  $14m$  và  $10m$ . Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng  $135^\circ$ . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.



Hình 10

Lời giải



Ta có:  $OJ = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ ;  $O'K = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ , suy ra  $OH = 5$ ,  $JH = 7 - 5 = 2$ .

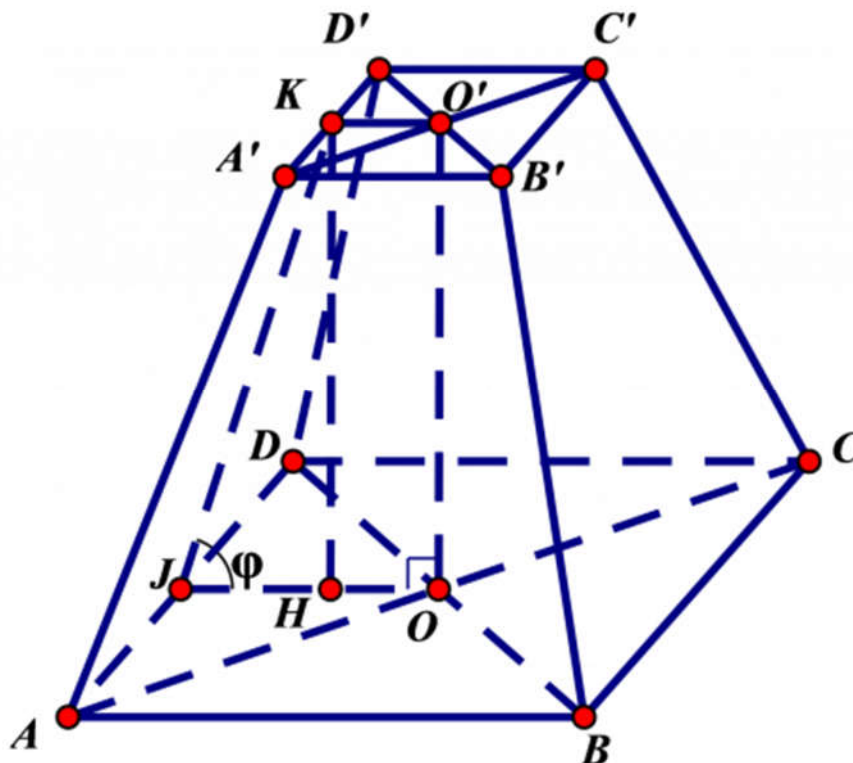
Mặt bên tạo với đáy nhỏ 1 góc  $\widehat{O'KJ} = 135^\circ$  nên  $\widehat{KJH} = 45^\circ$ ,  $KH = O'O' = JH \cdot \tan 45^\circ = 2$

Thể tích khối chóp cắt là:  $V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (10^2 + \sqrt{10^2 \cdot 14^2} + 14^2) = 290,7 (m^3)$

**Câu 75.** Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng  $2a$ , cạnh đáy nhỏ bằng  $a$ , chiều cao  $h = 2a$  và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng  $\frac{a}{2}$ .

- Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.
- Tính thể tích chân cột nói trên theo  $a$ .

Lời giải



a) Kẻ  $OJ \perp AD, O'K \perp A'D', KH \perp OJ$

Ta có:  $O'K = OH = \frac{a}{2}$

$OJ = \frac{2a}{2} = a, JH = OJ - OH = \frac{a}{2}, KH = OO' = 2a$

Góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là  $\widehat{KIH}$

$\tan \widehat{KIH} = \frac{KH}{JH} = 4$ . Vậy  $\widehat{KIH} = 76^\circ$

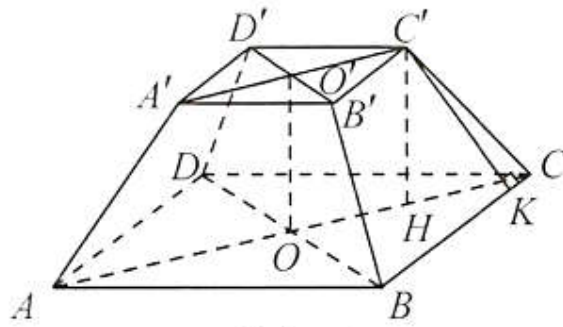
b) Thể tích chân cột là:  $\frac{1}{3} \cdot 2a \left( a^2 + \sqrt{a^2 \cdot (2a)^2} + (2a)^2 \right) - 2a \cdot \pi \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \left( \frac{14}{3} - \frac{\pi}{2} \right) a^3$

**Câu 76.** Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng  $80\text{ cm}$ , đáy nhỏ có cạnh bằng  $40\text{ cm}$  và cạnh bên bằng  $80\text{ cm}$ .



Hình 12

Lời giải



Hình 10

Ta có:  $OC = 40\sqrt{2}$ ,  $O'C' = 20\sqrt{2}$ , suy ra  $CH = 20\sqrt{2}$ .

Trong tam giác vuông  $C'CH$ , ta có:

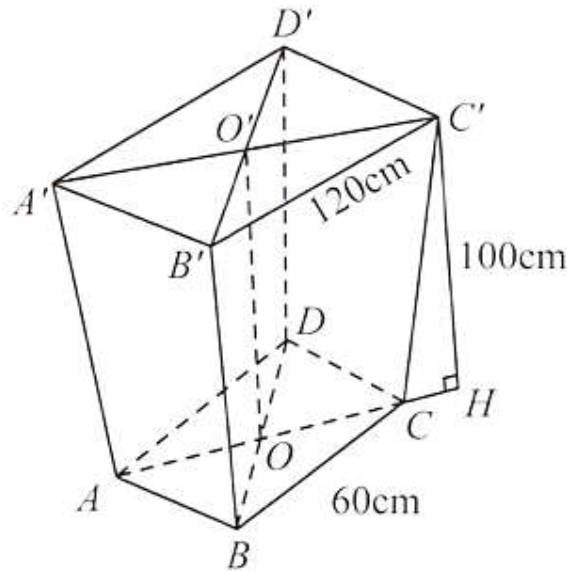
$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = 20\sqrt{14}. \text{ Nên } OO' = C'H = 20\sqrt{14}.$$

Thể tích của cái sọt đựng đồ là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 20\sqrt{14} \cdot (6400 + \sqrt{6400 \cdot 1600} + 1600) \approx 279377,08 \text{ cm}^3.$$

**Câu 77.** Một thùng đựng rác có dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Đáy và miệng thùng có độ dài lần lượt là  $60 \text{ cm}$  và  $120 \text{ cm}$ , cạnh bên của thùng dài  $100 \text{ cm}$ . Tính thể tích của thùng.

Lời giải



Hình 9

Kẻ  $C'H \perp AC (H \in AC)$ .

$$\text{Có } O'C' = \frac{\sqrt{120^2 + 120^2}}{2} = 60\sqrt{2}.$$

$$OC = \frac{\sqrt{60^2 + 60^2}}{2} = 30\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow CH = O'C' - OC = 30\sqrt{2}.$$

Áp dụng công thức  $V = \frac{h}{3} (S + \sqrt{SS'} + S')$ , với



$$h = C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{100^2 - (30\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{82},$$

$$S = 120^2, S' = 60^2.$$

Ta có:

$$V = \frac{10\sqrt{82}}{3}(120^2 + 120 \cdot 60 + 60^2) = 84000\sqrt{82} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương**  <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương**  <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

**Tham gia ngay: Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)**   
<https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

**Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương**  
 [https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber)

 **Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <https://www.nbv.edu.vn/>

Nguyễn Bảo Vương