BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

- CHƯƠNG 3. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1: Dãy số có giới hạn 0

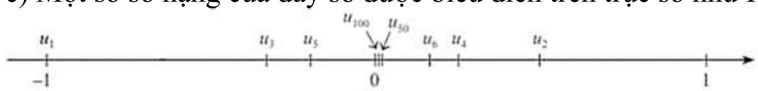
Câu 1. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

a) Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng sau:

n	10	20	50	100	1000
$\lvert u_n\rvert$	0,1	0,05	0,02	?	?

b) Với n như thế nào thì $\lvert u_n\rvert$ bé hơn $0,01;0,001$?

c) Một số số hạng của dãy số được biểu diễn trên trục số như Hình 1.



Hình 1

Lời giải:

a)

n	10	20	50	100	1000
$\lvert u_n\rvert$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001

b) Với $n>100$ thì $\lvert u_n\rvert<0,01$

Với $n>1000$ thì $\lvert u_n\rvert<0,001$

c) Khi điểm n trở nên rất lớn thì khoảng cách từ điểm u_n đến điểm 0 trở nên rất gần

Câu 2. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{1}{n^2}$;

b) $\lim\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

Lời giải:

a) $\lim\frac{1}{n^2}=0$

b) Do $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}<1$. Nên $\lim\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$

Câu 3. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Ở trên ta đã biết $\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=\lim\frac{3n^2+1}{n^2}=1$.

a) Tìm các giới hạn $\lim 3$ và $\lim\frac{1}{n^2}$.

b) Từ đó, nêu nhận xét về $\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)$ và $\lim 3+\lim\frac{1}{n^2}$.

Lời giải:

a) $\lim 3=3$ và $\lim\frac{1}{n^2}=0$

b) $\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=\lim 3+\lim\frac{1}{n^2}$

Câu 4. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0

a. $u_n=\dfrac{(-1).\cos n}{n^4}$ b. $\dfrac{(-1)^n\sin^2(2n-1)}{\sqrt[3]{n^2}}$

c. $\dfrac{1}{n(2n+3)}$ d. $\dfrac{(-1)^n\sin n+1}{n^2}$

Lời giải:

a. $|u_n|=\left|\dfrac{(-1)^n.\cos n}{n^4}\right|\le\dfrac{1}{n^4}$

mà $\lim\dfrac{1}{n^4}=0\Rightarrow\lim u_n=0$

b. $\left|\dfrac{-1^n\sin^2(2n-1)}{\sqrt[3]{n^2}}\right|\le\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

$m\mu\lim\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=0\Rightarrow\lim\dfrac{-1^n\sin^2(2n-1)}{\sqrt[3]{n^2}}=0$

c. $\left|\dfrac{1}{n(2n+3)}\right|=\left|\dfrac{1}{2n^2+3n}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$

mà $\lim\dfrac{1}{n^2}=0\Rightarrow\lim\dfrac{1}{n(2n^2+3)}=0$

d. $\left|\dfrac{(-1)^n\sin n+1}{n^2}\right|\le\dfrac{2}{n^2}$

mà $\lim\dfrac{2}{n^2}=0\Rightarrow\lim\dfrac{(-1)^n\sin n+1}{n}=0$

Câu 5. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0

a. $u_n=(0,99)^{2n}$ b. $u_n=\dfrac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2n+1}$

c. $u_n=\dfrac{(\cos(2n-1))^{2n}}{5^n}$ d. $u_n=\dfrac{2.\sin n^2}{n^4+1}$

Lời giải:

a. $u_n(0,99)^{2n}=(0,99^2)^n$

có $0,99^2<1\Rightarrow\lim(0,99^2)^n=0$

b. $u_n=\dfrac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2n+1}$

$\Rightarrow\left|\dfrac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2^n+1}\right|\le\dfrac{1}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Có $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow\lim\dfrac{(-1)^n.\cos(n+1)}{2^n+1}=0$

c. $u_n=\dfrac{(\cos(2n-1))^{2n}}{5^n}$

$\left|\dfrac{\left(\cos\left(2n-1\right)\right)^{2n}}{5^n}\right| \le \dfrac{1}{5^n} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

Có $\lim\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\dfrac{\left(\cos\left(2n-1\right)\right)^{2n}}{5^n} = 0$

d. $u_n = \dfrac{2.\sin n^2}{n^4+1}$

$\left|\dfrac{2.\sin n^2}{n^4+1} \le \dfrac{2}{n^4}\right|$

Có $\lim\dfrac{2}{n^4} = 0 \Rightarrow \lim\dfrac{2.\sin n^2}{n^4+1} = 0$

Câu 6. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$

a. Chứng minh rằng: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{2}{3}$ với mọi n

b. Chứng minh rằng: $u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. Chứng minh dãy số có giới hạn 0

Lời giải:

a. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{n+1}{3n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3n}$ là dãy số giảm.

$\Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3n} \le \dfrac{2}{3}$

b. Có : $u_n = \dfrac{n}{3^n} \le \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. Theo b. Ta có

$|u_n| = \dfrac{n}{3^n} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$m\mu \lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

Câu 7. Chứng minh rằng hai dãy số $(u_n),(v_n)$ với $u_n = \dfrac{1+\cos n^2}{2n+1}$; $v_n = \dfrac{n+\sin 2n}{n^2+n}$ có giới hạn 0

Lời giải:

Ta có: $0 \le u_n \le \dfrac{2}{2n+1} \le \dfrac{1}{n}$

$0 \le v_n \le \dfrac{n+1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n}$

Do đó, $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = 0$

Câu 8. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0

a. $u_n = \dfrac{\sqrt{5^n}}{3^n+1}$ b. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}$ c. $u_n = \dfrac{n+\cos\dfrac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}$ d. $\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}$

Lời giải:

a. $0<u_n=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{3^n}=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$ với mọi n

Vì $0<\frac{\sqrt{5}}{3}<1$ nên $\lim\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=0$. Do đó $\lim u_n=0$

b. $\left|u_n\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$ với mọi n

Vì $\lim\frac{1}{2n}=0$ từ đó suy ra $\lim u_n=0$

c. $0\le u_n\le\frac{n+1}{\sqrt{n}\left(n+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ với mọi n

Sử dụng định lí kẹp ta có $\lim u_n=0$

d.Vì $\left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}\right|=\frac{\left|\sin n\right|}{n\sqrt{n}+1}\le\frac{1}{n}$ với mọi n và $\lim\frac{1}{n}=0$ nên $\lim\frac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}=0$

Câu 9. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0 : $u_n=\frac{n^n\left(n+2\right)^n}{\left(2n+2\right)^{2n}}$

Lời giải:

$u_n=\frac{n^n\left(n+2\right)^2}{\left(2n+2\right)^{2n}}=\frac{\left(n^2+2n\right)^n}{2^{2n}\left(n+1\right)^{2n}}\le\frac{\left(n+1\right)^{2n}}{2^{2n}\left(n+1\right)^{2n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

Mà $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=0$ nên $\lim u_n=0$

Câu 10. Chứng minh rằng:

a. $\lim 2\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0$

b. $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

Lời giải:

a. $2\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+n}\le\frac{2}{n+n}=\frac{1}{n}$

b. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\le\frac{1}{2\sqrt{n}}$

Từ đó suy ra $\lim=0$

Câu 11. **(*)** Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0 : $u_n=\frac{15^n}{2^n\left(9^n+25^n\right)}$

Lời giải:

$u_n=\frac{15^n}{2^n\left(9^n+25^n\right)}=\frac{3^n.5^n}{2^n\left(3^{2n}+5^{2n}\right)}\le\frac{\frac{3^{2n}+5}{2}}{2^n\left(3^{2n}+5^{2n}\right)}=\frac{1}{2^{n+1}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Mà $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow$ đ.p.c.m

Dạng 2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

Câu 12. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n=\frac{2n+1}{n}$

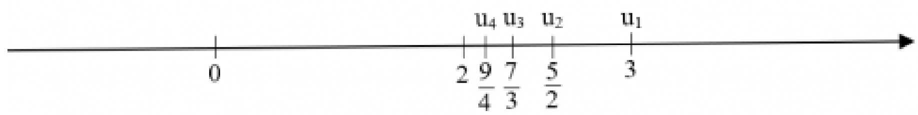
a) Cho dãy số $\left(v_n\right)$ với $v_n=u_n-2$. Tìm giới hạn $\lim v_n$.

b) Biểu diễn các điểm u_1, u_2, u_3, u_4 trên trục số. Có nhận xét gì về vị trí của các điểm u_n khi n trở nên rất lớn?

Lời giải:

a) $v_n = u_n - 2 = \dfrac{2n+1}{n} - 2 = \dfrac{1}{n}$. Suy ra $\lim v_n = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

b)



Khi n trở nên rất lớn thì các điểm u_n trở nên rất gần điểm 2

Câu 13. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

b) $\lim\left(\dfrac{1-4n}{n}\right)$

Lời giải:

a) Đặt $u_n = 2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Ta có: $u_n - 2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Suy ra $\lim(u_n - 2) = \lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

Vậy $\lim u_n = 2$ hay $\lim\left(2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 2$

b) Đặt $v_n = \dfrac{1-4n}{n} = \dfrac{1}{n} - 4$ hay $v_n + 4 = \dfrac{1}{n}$

Suy ra: $\lim(v_n + 4) = \lim\dfrac{1}{n} = 0$

Vậy $\lim\limits_{n} = -4$ hay $\lim\left(\dfrac{1-4n}{n}\right) = -4$

Câu 14. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2n^2+3n}{n^2+1}$

b) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+3}}{n}$.

Lời giải:

a) Ta có: $\dfrac{2n^2+3n}{n^2+1} = 2 + \dfrac{3n-2}{n^2+1} = 2 + \dfrac{\dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$

Từ đó: $\lim\dfrac{2n^2+3n}{n^2+1} = \lim 2 + \dfrac{\lim\dfrac{3}{n} - \lim\dfrac{2}{n^2}}{\lim 1 + \lim\dfrac{1}{n^2}} = 2 + \dfrac{0+0}{1+0} = 2$

b) Ta có: $\frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}=\frac{\sqrt{4n^2+3}}{\sqrt{n^2}}=\sqrt{\frac{4n^2+3}{n^2}}=\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}$

Từ đó: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}=\lim\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}=\sqrt{\lim\left(4+\frac{3}{n^2}\right)}=\sqrt{\lim 4+\lim\frac{3}{n^2}}=\sqrt{4+0}=2$

Câu 15. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{-2n+1}{n}$

b) $\lim\frac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$

c) $\lim\frac{4}{2n+1}$

d) $\lim\frac{n^2-2n+3}{2n^2}$.

Lời giải:

a) $\lim\frac{-2n+1}{n}=\lim\left(-2+\frac{1}{n}\right)=\lim(-2)+\lim\frac{1}{n}=-2+0=-2$

b) $\lim\frac{\sqrt{16n^2-2}}{n}=\lim\sqrt{\frac{16n^2-2}{n^2}}=\sqrt{\lim\left(16-\frac{2}{n^2}\right)}=\sqrt{\lim 16-\lim\frac{2}{n^2}}=\sqrt{16-0}=4$

c) $\lim\frac{4}{2n+1}=\lim\frac{\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{0}{2+0}=0$

d) $\lim\frac{n^2-2n+3}{2n^2}=\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}\right)=\lim\frac{1}{2}-\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{3}{2n^2}=\frac{1}{2}-0+0=\frac{1}{2}$

Câu 16. Cho dãy số (v_n) với $v_n=\frac{1}{n^3}+2$. Bằng định nghĩa hãy chứng minh rằng $\lim v_n=2$.

Lời giải

Ta có: $\lim(v_n-2)=\lim\left(\frac{1}{n^3}+2-2\right)=\lim\frac{1}{n^3}=0$

Vậy $\lim v_n=2$

Câu 17. Chứng minh rằng: $\lim\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+5\right)=5$

Lời giải

Ta có $\lim\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+5-5\right]=\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$

Theo định nghĩa suy ra điều phải chứng minh

Câu 18. Chứng minh rằng $\lim\frac{6n+2}{n+5}=6$

Lời giải

Ta có $\lim\left(\frac{6n+2}{n+5}-6\right)=\lim\frac{-28}{n+5}=0$ do $\left(\left|\frac{28}{n+5}\right|<\frac{28}{n}\right)$

Theo định nghĩa suy ra điều phải chứng minh

Câu 19. Chứng minh: $\lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}=-2$.

Lời giải

Với $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a>\sqrt{\frac{9}{a^2}-1}$, ta có:

$$\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}+2\right|=\left|\frac{1-2n+2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|<\left|\frac{1-2n+2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}\right|=\frac{3}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{3}{\sqrt{n_a^2+1}}<a \text{ với } \forall n>n_a.$$

Suy ra $\lim\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}+2\right|=0 \Rightarrow \lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}=-2$.

Câu 20. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{n+1}{n^2-2}$. b. $\lim \frac{n(n+1)}{(n+4)^3}$. c. $\lim \frac{3n^3-2n+5}{2n^2+5n-3}$. d. $\lim \frac{2n^3}{n^4+3n^2+1}$.

Lời giải

a. $\lim \frac{n+1}{n^2-2}=\lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}=0$.

b. $\lim \frac{n(n+1)}{(n+4)^3}=\lim \frac{n^2+n}{(n+4)^3}=\lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}=0$.

c. $\lim \frac{3n^3-2n+5}{2n^2+5n-3}=\lim \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}=\frac{3}{2}$.

d. $\lim \frac{2n^3}{n^4+3n^2+1}=\lim \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=0$.

Câu 21. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$. b. $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$. c. $\lim \frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$. d. $\lim \frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

Lời giải

a. $\lim \frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}=\lim \frac{\frac{3^n}{5^n}-\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}-1}=-1$.

b. $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}=\lim \frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{4}{3^n}+1}=1$.

c. $\lim \frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim \frac{4.\frac{3^n}{7^n}+7}{2.\frac{5^n}{7^n}+1}=7$.

d. $\lim \frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim \frac{4.\frac{4^n}{8^n}+36.\frac{6^n}{8^n}}{\frac{5^n}{8^n}+1}=0$.

Câu 22. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{1-\sin n\pi}{n+1}$.

b. $\lim \frac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}$.

Lời giải

a. Ta có: $\left|\frac{1-\sin n\pi}{n+1}\right| \le \frac{2}{n}$ mà $\lim \frac{2}{n}=0 \Rightarrow \lim \frac{1-\sin n\pi}{n+1}=0$.

b. Ta có: $\left|\frac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}\right| \le \frac{2}{n^2}$ mà $\lim \frac{2}{n^2}=0 \Rightarrow \lim \frac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}=0$.

Câu 23. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{n\sqrt{n}-1}{n+n\sqrt{n}}$.

b. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2}+2}{n+\sqrt{n}}$.

c. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+3n^2+2}}{\sqrt{n^2-4n+5}}$.

Lời giải

a. $\lim \frac{n\sqrt{n}-1}{n+n\sqrt{n}}=\lim \frac{n^{\frac{3}{2}}-1}{n+n^{\frac{3}{2}}}=\lim \frac{1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+1}=1$.

b. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2}+2}{n+\sqrt{n}}=\lim \frac{n^{\frac{2}{3}}+2}{n+n^{\frac{1}{2}}}=\lim \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=0$.

c. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+3n^2+2}}{\sqrt{n^2-4n+5}}=\lim \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}=1$.

Câu 24. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \sqrt[3]{\frac{8n^2-3n}{n^2}}$.

b. $\lim \frac{2n^2-3n-1}{-n^2+2}$.

c. $\lim \left(n-1-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Lời giải

a. $\lim \sqrt[3]{\frac{8n^2-3n}{n^2}}=\lim \sqrt[3]{8-\frac{3}{n}}=\sqrt[3]{8}=2$.

b. $\lim \frac{2n^2-3n-1}{-n^2+2}=\lim \frac{2-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{-1+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{-1}=-2$.

c. $\lim \left(n-1-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim \frac{-2n}{n-1+\sqrt{n^2+1}}=\lim \frac{-2}{1-\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-1$.

Câu 25. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{2n^3+2n-1}{3n^3-n+3}$.

b. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{4n^2+1}+n-1}$.

c. $\lim \dfrac{4+2^n+3^{n+2}}{(-2)^{n+1}+5.3^n}$.

d. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$.

Lời giải

a. $\lim \dfrac{2n^3+2n-1}{3n^3-n+3}=\lim \dfrac{2+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{3-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{2}{3}$.

b. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{4n^2+1}+n-1}=\lim \dfrac{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+n}{\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)}+n-1}=\lim \dfrac{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n}{n\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+n-1}=\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+1-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{2}{3}$.

c. $\lim \dfrac{4+2^n+3^{n+2}}{(-2)^{n+1}+5.3^n}=\lim \dfrac{4+2^n+9.3^n}{-2.(-2)^n+5.3^n}=\lim \dfrac{4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+9}{-2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+5}=\dfrac{9}{5}$.

d. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim \dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}-n}=\lim \dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=1$.

Câu 26. Tìm các giới hạn sau:

a. $u_n=\dfrac{2n^5-7n^2-3}{n-3n^5}$.

b. $u_n=\dfrac{2n^2-n+4}{\sqrt{2n^4-n^2+1}}$.

c. $u_n=\dfrac{7.2^n+4^n}{2.3^n+4^n}$.

Lời giải

a. $\lim u_n=\lim \dfrac{2n^5-7n^2-3}{n-3n^5}=\lim \dfrac{2-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{3}{n^5}}{\dfrac{1}{n^4}-3}=-\dfrac{2}{3}$.

b. $\lim u_n=\lim \dfrac{2n^2-n+4}{\sqrt{2n^4-n^2+1}}=\lim \dfrac{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}}=\sqrt{2}$.

c. $\lim u_n=\lim \dfrac{7.2^n+4^n}{2.3^n+4^n}=\lim \dfrac{7.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}{2.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}=1$.

Câu 27. Tìm các giới hạn sau:

a. $u_n=\dfrac{n^3-n^2\sin 3n-1}{2n^4-n^2+7}$.

b. $u_n=\dfrac{5.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

c. $u_n=\sqrt{\dfrac{n^6+3n^3-3}{2n^6+n^5+2}}$.

Lời giải

a. Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{n^3 - n^2 \sin 3n - 1}{2n^4 - n^2 + 7} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}\sin 3n - \dfrac{1}{n^4}}{2 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{7}{n^4}} = 0$.

b. Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{5.2^n - 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim \dfrac{5.2^n - 3^n}{2.2^n + 3.3^n} = \lim \dfrac{5.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1}{2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3} = -\dfrac{1}{3}$.

c. Ta có: $\lim u_n = \lim \sqrt{\dfrac{n^6 + 3n^3 - 3}{2n^6 + n^5 + 2}} = \lim \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{3}{n^6}}{2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^6}}} == \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 28. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n\right)$ **b)** $\lim\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}\right)$

c) $\lim\left(3n - \sqrt{9n^2 + 1}\right)$ **d)** $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 2n} - n\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n\right) = \lim \dfrac{4n^2 + 5n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 5n} + 2n} = \lim \dfrac{5n}{\sqrt{4n^2 + 5n} + 2n} = \lim \dfrac{5}{\sqrt{4 + \dfrac{5}{n}} + 2} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim \dfrac{2n + 1 - n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim \dfrac{n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim \dfrac{\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} + 1} = +\infty$

c) $\lim\left(3n - \sqrt{9n^2 + 1}\right) = \lim \dfrac{9n^2 - 9n^2 - 1}{3n + \sqrt{9n^2 + 1}} = \lim \dfrac{-1}{3n + \sqrt{9n^2 + 1}} = 0$

d) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 2n} - n\right) = \lim \dfrac{n^3 - 2n - n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3 - 2n\right)^2} + n\sqrt[3]{n^3 - 2n} + n^2}$

$= \lim \dfrac{-2n}{\sqrt[3]{\left(n^3 - 2n\right)^2} + n\sqrt[3]{n^3 - 2n} + n^2} = \lim \dfrac{-2}{\sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{2}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \dfrac{2}{n^2}} + 1} = -\dfrac{2}{3}$

Câu 29. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(n - \sqrt{n^2 + 2n - 3}\right)$ **b)** $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - n + 1\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(n - \sqrt{n^2 + 2n - 3}\right) = \lim \dfrac{n^2 - n^2 - 2n + 3}{n + \sqrt{n^2 + 2n - 3}} = \lim \dfrac{-2n + 3}{n + \sqrt{n^2 + 2n - 3}} = \lim \dfrac{-2 + \dfrac{3}{n}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{n^2}}} = -1$

b) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-n+1\right)=\lim\frac{n^2+2n-1-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n-1}=\lim\frac{4n-2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n-1}$

$=\lim\frac{4-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}=\frac{4}{1+1}=2$

Câu 30. Tìm giới hạn: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+2n}-n+1}{\sqrt{9n^2+n}-2n}$

Lời giải

$\lim\frac{\sqrt{4n^2+2n}-n+1}{\sqrt{9n^2+n}-2n}=\lim\frac{\left[4n^2+2n-(n-1)^2\right]\left(\sqrt{9n^2+n}+2n\right)}{\left(9n^2+n-4n^2\right)\left(\sqrt{4n^2+2n}+n-1\right)}$

$=\lim\frac{\left[3n^2+4n-1\right]\left(\sqrt{9n^2+n}+2n\right)}{\left(5n^2+n\right)\left(\sqrt{4n^2+2n}+n-1\right)}=\lim\frac{\left(3-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{9+\frac{1}{n}}+2\right)}{\left(5+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{4+\frac{2}{n}}+1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{3.5}{5.3}=1$

Câu 31. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(3n-5-\sqrt{9n^2+1}\right)$ **b)** $\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+1}-\sqrt{4n^2-n+5}\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(3n-5-\sqrt{9n^2+1}\right)=\lim\frac{(3n-5)^2-\left(9n^2+1\right)}{3n-5+\sqrt{9n^2+1}}=\lim\frac{-30n+24}{3n-5+\sqrt{9n^2+1}}=\lim\frac{-30+\frac{24}{n}}{3-\frac{5}{n}+\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}=-5$ **b)**

$\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+1}-\sqrt{4n^2-n+5}\right)=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+1}-2n+2n\sqrt{4n^2-n+5}\right)$

$=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(8n^3+1\right)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+1}+4n^2}+\lim\frac{n-5}{2n+\sqrt{4n^2-n+5}}$

$=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(8n^3+1\right)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+1}+4n^2}+\lim\frac{1-\frac{5}{n}}{2+\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}$

$=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Câu 32. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$ **b)** $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$

$$= \lim \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} = \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = 1$$

b) $$\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$= \lim \frac{n+2-n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}} == \lim \frac{2}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

Câu 33. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$ **b)** $\lim \frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$ **c)** $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

Lời giải

a) $$\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right) = \lim \frac{n^2+1-n^2+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}} = \lim \frac{3}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}} = 0$$

b) $$\lim \frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n} = \lim \frac{2n^2+2}{n\left(\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} = \lim \frac{2+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

c) $$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right) = \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2} = \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1} = -\frac{2}{3}$$

Câu 34. Tìm giới hạn

a. $\lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right]$

b. $\lim\left[1-0,1+0,1^2-0,1^3+\ldots+(-1)^n.0,1^n\right]$

Lời giải

a. $$\lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right] = \lim \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

b. $$\lim\left[1-0,1+0,1^2-0,1^3+\ldots+(-1)^n.0,1^n\right]$$

$$= \lim\left[1+(-0,1).\frac{1-(-0,1)^n}{1+0,1}\right] = 1+(-0,1).\frac{1}{1,1} = 10/11$$

Câu 35. Tìm giới hạn

a. $\lim \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$, b. $\lim \frac{n\sqrt{2+4+\ldots+2n}}{3n^2+n-2}$. c. $\lim \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}$.

Lời giải

a. $$\lim \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

b. $\lim \dfrac{n\sqrt{2+4+\ldots+2n}}{3n^2+n-2}=\lim \dfrac{n\sqrt{n(n+1)}}{3n^2+n-2}=\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{1}{3}$.

c. $\lim \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}=\lim \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+3n)}=\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{6}{n}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 36. Tìm giới hạn

a. $\lim \left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1).(2n+1)}\right]$.

b. $\lim \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{(n+1)}}\right]$.

Lời giải

a. $\lim \left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1).(2n+1)}\right]=\lim \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

$=\lim \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

b.

$$\lim \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{(n+1)}}\right]$$
$$=\lim \left[\dfrac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2.1}+\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3.2}+\ldots+\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1).n}\right]$$
$$=\lim \left[\sqrt{1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=\lim\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=1$$

Câu 37. Tìm giới hạn

a. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}}$

b. $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2-4}}{3n+2}$

c. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{3n^3+n^2+n+2}}{\sqrt{4n^2-4n+5}}$.

d. $\lim \dfrac{n(n+1)}{(n+4)^3}$.

Lời giải

a. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}}=\lim \dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n^2}}{\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{n^2}}=\lim \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{n^3+1}{n^6}}+\sqrt{\dfrac{n}{n^2}}}{\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2}}}=0$

b. $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2-4}}{3n+2}=\lim \dfrac{\sqrt{3-\dfrac{4}{n^2}}}{3+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{3n^3+n^2+n+2}}{\sqrt{4n^2-4n+5}}=\lim \dfrac{\sqrt[3]{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}}{\sqrt{4-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

d. $\lim \dfrac{n(n+1)}{(n+4)^3}=\lim \dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^3}=0$.

Câu 38. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1=-5 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n} \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Đặt $v_n=u_n-1$ ta có $0<v_{n+1}\le \dfrac{1}{2}v_n$ với mọi n.

Do đó $v_2\le \dfrac{1}{2}v_1, v_3\le \dfrac{1}{2}v_2\le \dfrac{1}{4}v_1$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $0<v_n\le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}v_1=9.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Vì $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ nên từ đó suy ra $\lim v_n=0$.

Vậy $\lim u_n=1$

Câu 39. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1=-1 \\ u_{n+1}=u_n+3, \forall n\in N, \text{n}\ge 1 \end{cases}$

Tính $\lim \dfrac{u_n}{5n+2020}$.

Lời giải

Ta có (u_n) là cấp số cộng có $u_1=-1, d=3$, $u_n=u_1+(n-1)d=-1+(n-1)3=3n-4$.

$$\Rightarrow \lim \frac{u_n}{5n+2020}=\lim \frac{3n-4}{5n+2020}=\lim \frac{3-\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{2020}{n}}=\frac{3}{5}$$

Câu 40. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{3}{2}; \forall n\in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Đặt $u_n=v_n+3\ \forall n\in \mathbb{N}^*$, thì $v_1=u_1-3=-2$.

Khi đó $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow v_{n+1}+3=\dfrac{1}{2}(v_n+3)+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n; \forall n\in \mathbb{N}^*$ nên dãy (v_n) là một cấp số nhân với $v_1=-2; q=\dfrac{1}{2}$, suy ra $v_n=-2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\Rightarrow u_n=3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$

Câu 41. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+2)u_n + 2}{n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn $\lim \dfrac{u_n}{n^2}$.

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{(n+2)u_n + 2}{n} \Leftrightarrow nu_{n+1} = (n+2)u_n + 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $u_n = v_n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $v_1 = 1 + 1 = 2$ và

$$nu_{n+1} = (n+2)u_n + 2 \Leftrightarrow nv_{n+1} = (n+2)v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{v_n}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{v_n}{n(n+1)} = \frac{v_1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow v_n = n(n+1) \Rightarrow u_n = n(n+1) - 1 = n^2 + n - 1$$

Vậy $\lim \dfrac{u_n}{n^2} = \lim \dfrac{n^2 + n - 1}{n^2} = 1$

Câu 42. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim \dfrac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2 n}} + ... + \sqrt{u_{4^{2018} n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2 n}} + ... + \sqrt{u_{2^{2018} n}}}$.

Lời giải

Đặt $u_n = v_n + n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $v_1 = u_1 - 1 = 0$.

Khi đó $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} + (n+1)^2 = v_n + n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow v_n = v_1 = 0 \Rightarrow u_n = n^2$.

Do đó $\lim \dfrac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2 n}} + ... + \sqrt{u_{4^{2018} n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2 n}} + ... + \sqrt{u_{2^{2018} n}}} = \lim \dfrac{n + 4n + 4^2 n + \cdots + 4^{2018} n}{n + 2n + 2^2 n + \cdots + 2^{2018} n}$

$$= \frac{1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{2018}}{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2018}} = \frac{\dfrac{1 - 4^{2019}}{1 - 4}}{\dfrac{1 - 2^{2019}}{1 - 2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^{2019} - 1}{2^{2019} - 1} = \frac{2^{2019} + 1}{3}.$$

Câu 43. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $\lim (u_n - 2)$

Lời giải

Ta có : $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_2 - u_1) + u_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} + ... + \dfrac{1}{2} + 1$.

Dãy $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}, ..., \dfrac{1}{2}, 1$ là một cấp số nhân có n số hạng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$ nên

$u_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. Vậy $\lim (u_n - 2) = \lim \left[-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = 0$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3.2^{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính $\lim \dfrac{u_n}{(2n+1)2^{n-1}}$

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = 2u_n + 3.2^{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{u_n}{2^n} + 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta được dãy (v_n) thỏa mãn $v_1 = 1; v_{n+1} = v_n + 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra dãy (v_n) là CSC

$\Rightarrow v_n = 1 + (n-1)3 = 3n - 2 \Rightarrow u_n = (3n-2)2^n$

$$\lim \frac{u_n}{(2n+1)2^{n-1}} = \lim \frac{(3n-2)2^n}{(2n+1)2^{n-1}} = \lim \frac{(3n-2)2}{(2n+1)} = 3$$

Câu 45. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{2nu_n}{n+3}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

. Tính $L = \lim \left(\dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_2}{2^2} + \cdots + \dfrac{u_n}{2^n} \right)$

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{2nu_n}{n+3} \Leftrightarrow (n+1)(n+2)(n+3)u_{n+1} = 2n(n+1)(n+2)u_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $v_n = n(n+1)(n+2)u_n$ ta được dãy (v_n) thỏa mãn $v_1 = 4; v_{n+1} = 2v_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (v_n) là một cấp số nhân, $v_n = 4.2^{n-1} = 2^{n+1}$. Vậy $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$.

Từ đó $\dfrac{u_n}{2^n} = \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$.

$$L = \lim \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \cdots + \frac{u_n}{2^n} \right) = \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

Câu 46. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Ta có: $u_1 = 2; u_2 = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{2+1}{2}$; $u_3 = \dfrac{3+1}{3}; u_4 = \dfrac{4+1}{4}$.

Từ đó dự đoán $u_n = \dfrac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*)

Chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp :

Với $n = 1 \rightarrow u_1 = 2$ (đúng).

Gỉa sử (*) đúng với $n = k \, (k \geq 1)$ nghĩa là $u_k = \dfrac{k+1}{k}$

Ta chứng minh (*) đúng khi $n=k+1$.Nghĩa là ta phải chứng mính : $u_{k+1}=\dfrac{k+2}{k+1}$

Thật vậy theo bài ra và giả thiết quy nap ta có $u_{k+1}=2-\dfrac{1}{u_k}=2-\dfrac{1}{\dfrac{k+1}{k}}=\dfrac{k+2}{k+1}$ đúng ,

nghĩa là (*)cũng đúng với $n=k+1$.

Vậy $u_n=\dfrac{n+1}{n};\forall n\in N^*$. Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{n+1}{n}=1$. Vậy $\lim u_n=1$.

Câu 47. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases}u_1=1;u_2=2\\ u_{n+2}=\dfrac{2u_nu_{n+1}}{u_n+u_{n+1}};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+2}=\dfrac{2u_nu_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{u_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}\right);\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ thì $v_1=1;v_2=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $\dfrac{1}{u_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}\right)\Leftrightarrow v_{n+2}=\dfrac{1}{2}(v_{n+1}+v_n)\Leftrightarrow v_{n+2}+\dfrac{1}{2}v_{n+1}=v_{n+1}+\dfrac{1}{2}v_n;\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow v_{n+1}+\frac{1}{2}v_n=v_2+\frac{1}{2}v_1=1\Rightarrow v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n+1;\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow v_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{3}{2}$$

Câu 48. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases}u_1=2019\\ u_{n+1}=\dfrac{3}{u_n+2};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Giải sử dãy (u_n) có giới hạn L, giải phương trình $L=\dfrac{3}{L+2}$ ta được nghiệm dương $L=1$.

Ta chứng minh $\lim u_n=1$.

Thật vậy ta có $|u_n-1|=\left|\dfrac{3}{u_{n-1}+2}-1\right|=\dfrac{|u_{n-1}-1|}{|u_{n-1}+2|}<\dfrac{1}{2}|u_{n-1}-1|\Rightarrow|u_n-1|<\dfrac{1}{2^{n-1}}|u_1-1|=1009\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow 0\le|u_n-1|<1009\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Vì $\lim 1009\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ nên $\lim u_n=1$.

Câu 49. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{3-\sqrt{3+u_n}}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Giải sử dãy (u_n) có giới hạn L, giải phương trình $L = \sqrt{3-\sqrt{3+L}}$ ta được nghiệm $L = 1$.

Ta chứng minh $\lim u_n = 1$.

Thật vậy ta có $|u_n - 1| = \left|\sqrt{3-\sqrt{3+u_{n-1}}} - 1\right| = \dfrac{\left|2-\sqrt{3+u_{n-1}}\right|}{\left|\sqrt{3-\sqrt{3+u_{n-1}}}+1\right|} = \dfrac{|u_{n-1}-1|}{\left|\sqrt{3-\sqrt{3+u_{n-1}}}+1\right|\left|2+\sqrt{3+u_{n-1}}\right|} < \dfrac{1}{2}|u_{n-1}-1|$

$\Rightarrow |u_n - 1| < \dfrac{1}{2^{n-1}}|u_1 - 1| = \dfrac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 0 \le |u_n - 1| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Vì $\lim \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ nên $\lim u_n = 1$.

Câu 50. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{3}u_n; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Ta chứng minh $0 < u_n \le \dfrac{1}{2}; \forall n \in \mathbb{N}^* (1)$ bằng quy nạp.

Ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}$ nên (1) đúng.

Giả sử $0 < u_n \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_n^2 + \dfrac{1}{3}u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}$

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ta có $0 < u_n \le \dfrac{1}{2}; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n + \dfrac{1}{3} \le \dfrac{5}{6} \Rightarrow 0 < u_{n+1} \le \dfrac{5}{6}u_n; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n \le \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} u_1$

Vì $\lim \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} u_1 = 0$ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp suy ra $\lim u_n = 0$

Câu 51. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+1} - 1 = \sqrt[3]{u_n} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{\sqrt[3]{u_n^2} + \sqrt[3]{u_n} + 1} < \dfrac{u_n - 1}{3}; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n - 1 < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(u_1 - 1); \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì $\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(u_1 - 1) = 0$ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp suy ra $\lim(u_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim u_n = 1$

Câu 52. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

Ta chứng minh quy nạp được $1 \le u_n < 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \dfrac{6+u_n-u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n} > 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$(vì $6+u_n-u_n^2 > 0, \forall u_n \in [1;3)$) . Suy ra dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn. Đặt $\lim u_n = L, (0 \le L \le 3)$, giải phương trình $L = \sqrt{6+L}$ ta được $L = 3$. Vậy $\lim u_n = 3$.

Câu 53. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tính $\lim u_n$.

Lời giải

Từ công thức xác định dãy (u_n) suy ra $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh (u_n) là dãy số bị chặn trên bởi 2 bằng phương quy nạp

Thật vậy ta có $u_1 = 1 < 2$. Giả sử $u_n < 2$ thì $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3} - 2 = \dfrac{2u_n-4}{u_n+3} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 2$ nên $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta chứng minh dãy (u_n) tăng .

Thật vậy $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3} - u_n = \dfrac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* (\text{Vì } 0 < u_n < 2)$

Dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên nên có giới hạn.

Đặt $\lim u_n = L \quad (0 \le L \le 2)$, giải phương trình $L = \dfrac{2(2L+1)}{L+3}$ ta được nghiệm dương $L = 2$

Vậy $\lim u_n = 2$.

Câu 54. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3+12u_n}{3u_n^2+4}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Lời giải

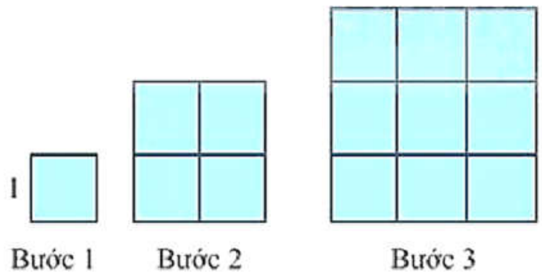
Ta có $u_{n+1} - 2 = \dfrac{(u_n-2)^3}{3u_n^2+4}$ .Vì $u_1 - 2 > 0$ suy ra $u_n - 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(4-u_n^2)}{3u_n^2+4} < 0$. Dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn.

Đặt $\lim u_n = L, (L \ge 2)$, giải phương trình $L = \dfrac{L^3+12L}{3L^2+4}$ ta được $L = 2$. Vậy $\lim u_n = 2$.

Dạng 3: Dãy số có giới hạn vô hạn

Câu 55. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Dựng một dãy hình vuông bằng cách ghép từ các hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1 đơn vị độ dài) theo các bước như Hình 4. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình vuông dựng được ở bước thứ n.



Hình 4

a) Với n như thế nào thì u_n vượt quá $10000; 1000000$?

b) Cho hình có diện tích S. Với n như thế nào thì u_n vượt quá S?

Lời giải:

Ta có: $u_n = n^2$

a) $u_n > 10000$ khi $n > 100$, $u_n > 1000000$ khi $n > 1000$

b) $u_n > S$ khi $n > \sqrt{S}$

Câu 56. Tìm giới hạn

a. $\lim\left(n^3 + n^2 + n + 1\right)$

b. $\lim\left(-n^2 + n\sqrt{n} - 1\right)$

c. $\lim\left(n - \sin 2n\right)$

d. $\lim\dfrac{1}{n + \cos^2 n}$

Lời giải

a. $\lim\left(n^3 + n^2 + n + 1\right) = \lim n^3.\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right) = +\infty$.

b. $\lim\left(-n^2 + n\sqrt{n} - 1\right) = \lim n^2.\left(-1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^2}\right) = -\infty$.

c. Ta có: $\left(n - \sin 2n\right) \ge n - 1$ mà $\lim\left(n - 1\right) = +\infty \Rightarrow \lim\left(n - \sin 2n\right) = +\infty$.

d. $\lim\dfrac{1}{n + \cos^2 n} = 0$

Câu 57. Tìm giới hạn

a. $\lim\left(\sqrt[3]{1 + 2n - n^3} - n\right)$

b. $\lim\left(n + \sqrt{n^2 - n + 1}\right)$

Lời giải

a. $\lim\left(\sqrt[3]{1 + 2n - n^3} - n\right) = \lim\left[\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{2}{n^2} - 1\right)} - n\right] = \lim\left(-2n\right) = -\infty$

b. $\lim\left(n + \sqrt{n^2 - n + 1}\right) = \lim\left(n + n\sqrt{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}\right) = \lim 2n = +\infty$

Câu 58. Tìm giới hạn

a. $\lim\dfrac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$

b. $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$

c. $\lim\frac{n\sqrt{n}+\sqrt[3]{n^2+2}+n^3}{n^2+n\sqrt{n}-12}$ d. $\lim\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2}$

Lời giải

a. $\lim\frac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}=\lim\frac{n^2+n-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}{4+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^3}}=\lim\frac{n^2+n}{4}=+\infty$.

b. $\lim\frac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}=\lim\frac{\sqrt[3]{n^3-7-\frac{5}{n^2}+\frac{8}{n^3}}}{1+\frac{12}{n}}=+\infty$.

c. $\lim\frac{n\sqrt{n}+\sqrt[3]{n^2+2}+n^3}{n^2+n\sqrt{n}-12}=\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt[3]{\frac{n^2+2}{n^6}}+n}{1+\frac{1}{\perp n}-12/n^2}=+\infty$.

d. $\lim\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2}=\lim\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n^2+3n\sqrt{n}+2}=\frac{1}{4}\lim\frac{n^2(n+1)^2}{n^2+3n\sqrt{n}+2}=+\infty$.

Câu 59. Tìm giới hạn

a. $\lim\frac{3^n-4^{n+1}}{2^{n+3}+3^n}$ b. $\lim\sqrt{2^n-n+1}$ c.

$\lim\left(4^n+2.3^n-3.2^n-1\right)$

Lời giải

a. $\lim\frac{3^n-4^{n+1}}{2^{n+3}+3^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-4}{8.\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=-\infty$.

b. $\lim\sqrt{2^n-n+1}=\lim\sqrt{2^n\left(1-\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)}=+\infty$.

c. $\lim\left(4^n+2.3^n-3.2^n-1\right)=\lim 4^n\left[1+2\left(\frac{3}{4}\right)^n-3\left(\frac{2}{4}\right)^n-\frac{1}{4^n}\right]=+\infty$

Câu 60. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n=-n^4-50n+11$ b. $u_n=\sqrt[3]{7n^2-n^3}$

c. $u_n=\sqrt{5n^2-3n+7}$ d. $u_n=\sqrt{2n^3+n^2-2}$

Lời giải

a. $-\infty$

b. $-\infty$.

c. $+\infty$.

d. $u_n=\sqrt{2n^3+n^2-2}=n\sqrt{n}\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$

$\lim\left(n\sqrt{n}\right)=+\infty;\lim\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\sqrt{2}>0\Rightarrow\lim(u_n)=+\infty$

Câu 61. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n = \dfrac{3n-n^3}{2n+15}$.

b. $u_n = \dfrac{\sqrt{2n^4-n^2+7}}{4n+5}$.

c. $u_n = \dfrac{2n^2-15n+11}{\sqrt{3n^2-n+3}}$.

d. $u_n = \dfrac{(2n+1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3+7n^2-5}}$.

Lời giải

a. $-\infty$.

b. $+\infty$

c. $+\infty$.

d.

$$u_n = \frac{(2n+1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3+7n^2-5}} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{7}{n^4}-\frac{5}{n^6}}}$$

$$\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right) = -6<0; \lim\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{7}{n^4}-\frac{5}{n^6}} = 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty$$

Câu 62. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim(1,001)^n$

b. $\lim\left(3.2^n-5^{n+1}+10\right)$.

c. $\lim\dfrac{3^n-11}{1+7.2^n}$

d. $\lim\dfrac{2^{n+1}-2.5^n+3}{3.2^n+7.4^n}$.

Lời giải

a. $+\infty$.

b. $3.2^n-5^{n+1}+10 = 5^n.\left[3.\left(\frac{2}{5}\right)^n-5+\frac{10}{5^n}\right]$.

$$\lim 5^n = +\infty; \lim\left[3.\left(\frac{2}{5}\right)^n-5+\frac{10}{5^n}\right] = -5<0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty.$$

c. $+\infty$.

d.

$$\frac{2^{n+1}-2.5^n+3}{3.2^n+7.4^n} = \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^n-3+\frac{3}{5^n}}{3.\left(\frac{2}{5}\right)^n+7.\left(\frac{4}{5}\right)^n}.$$

$$\lim\left[2\left(\frac{2}{5}\right)^n-3+\frac{3}{5^n}\right] = -3<0; \lim\left[3.\left(\frac{2}{5}\right)^n+7.\left(\frac{4}{5}\right)^n\right] = 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty$$

Câu 63. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Lời giải

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ là số nhỏ nhất trong n số $1;\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ldots;\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Do đó: $u_n \ge \dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} = n.\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Và $\lim\sqrt{n} = +\infty$ nên từ đó suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Câu 64. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{2n-3^n}{n+2^n}$ b. $\lim\left(100n-7-2^n\right)$

Lời giải

a. $u_n=\dfrac{2n-3^n}{n+2^n}=\dfrac{\dfrac{2n}{3^n}-1}{\dfrac{n}{3^n}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

$\lim\dfrac{n}{3^n}=0\Rightarrow\lim\left[\dfrac{n}{3^n}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]=0;\lim\left(\dfrac{2n}{3^n}-1\right)=-1\Rightarrow\lim u_n=-\infty$.

b. $-\infty$

Câu 65. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n=\dfrac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}$ b. $u_n=\dfrac{13.3^n-5n}{3.2^n+5.4^n}$

Lời giải

a. $u_n=\dfrac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}=\dfrac{2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1+\dfrac{11}{3^n}}{9+8.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{4}{3^n}}$

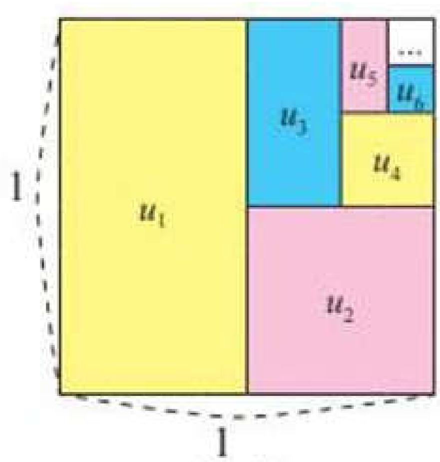
$\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0;\lim\dfrac{1}{3^n}=0\Rightarrow\lim u_n=-\dfrac{1}{9}$

b. $u_n=\dfrac{13.3^n-5n}{3.2^n+5.4^n}=\dfrac{13.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{5n}{4^n}}{3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+5}$

$\lim\dfrac{5n}{4^n}=5\lim\dfrac{n}{4^n}=5.0=0;\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0;\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow\lim u_n=0$

Dạng 4. Tính tổng của dãy số

Câu 66. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Từ một hình vuông có cạnh bằng 1, tô màu một nửa hình vuông, rồi tô màu một nửa hình còn lại, và cứ tiếp tục như vậy (xem Hình 2).



Hình 2

a) Xác định diện tích u_k của phần hình được tô màu lần thứ $k(k=1,2,3,\ldots)$.

b) Tính tổng diện tích S_n của phần hình được tô màu sau lần tô thứ $n(n=1,2,3,\ldots)$.

c) Tìm giới hạn $\lim S_n$ và so sánh giới hạn này với diện tích hình vuông ban đầu.

Lời giải:

a) $u_k=\dfrac{1}{2^k}$

b) $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$

c) $\lim S_n=\lim\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim 1-\lim\dfrac{1}{2^n}=1-0=1$

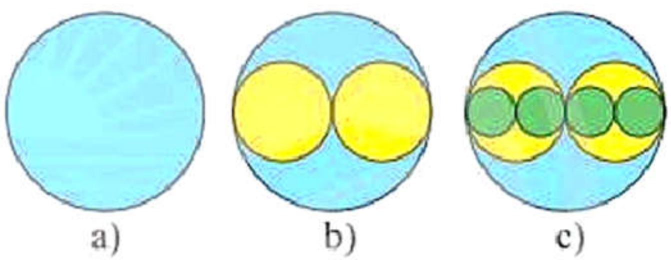
Ta thấy $\lim S_n$ bằng diện tích hình vuông ban đầu

Câu 67. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\ldots$.

Lời giải:

$$\lim\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\ldots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

Câu 68. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kinh $R(cm)$ như Hình $3a$.



Hình 3

Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kinh $\dfrac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\dfrac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình $3c$. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.

Lời giải:

Tổng diện tích các hình tròn là: $S=R^2+2\cdot\left(\dfrac{R}{2}\right)^2+4\cdot\left(\dfrac{R}{4}\right)^2+\ldots=R^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\right)$

Ta có: $\lim\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$

Vậy $S=2R^2$

Câu 69. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau:

a) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\ldots$;

b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\ldots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\ldots$

Lời giải:

a) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\ldots=\frac{\frac{-1}{2}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{-1}{3}$

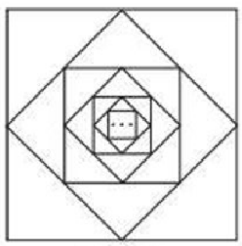
b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\ldots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

Câu 70. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,444\ldots$ dưới dạng một phân số.

Lời giải:

$0,444\ldots=\frac{4}{9}$

Câu 71. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính $a_n, S_n (n=1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

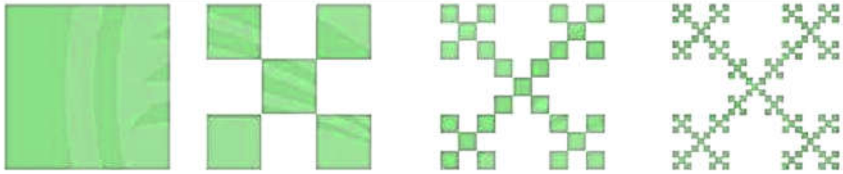
b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và $Q_n (n=1,2,3,\ldots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Lời giải:

a) $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$; $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

b) $p_n=4\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$; $Q_n=4+4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+4\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+4\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}=4\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\approx 13,66$

Câu 72. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau: Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình $6a$). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình $6b$). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình $6c$). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình $H_n (n=1,2,3,\ldots)$.



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5.5=5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3^2};\ldots.$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ chu vi $\lim p_n$).

Lời giải:

a) $S_n=5^n\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)^2=\frac{5^n}{9^n}=\left(\frac{5}{9}\right)^n$; $\lim S_n=\lim\left(\frac{5}{9}\right)^n=0$

b) $p_n=5^n\cdot 4\cdot\frac{1}{3^n}=4\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n$; $\lim p_n=\lim 4\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$

Câu 73. Cho hình vuông cạnh bằng a. Người ta lấy bốn trung điểm các cạnh của hình vuông trên để được hình vuông nhỏ hơn nằm bên trong hình vuông bên ngoài. Quy trình làm như vậy diễn ra tới vô hạn. Tính diện tích tất cả hình vuông có trong bài toán.

Lời giải

Ta có hình vuông ngoài cùng có cạnh là a nên diện tích $S_1=a^2$. Hình vuông thứ hai chỉ có cạnh là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên có diện tích là $S_2=\frac{a^2}{2}$. Cứ tiếp tục như vậy ta có:

Hình vuông thứ ba có diện tích $S_3=\frac{a^2}{4}$, hình vuông thứ tư có diện tích là $S_4=\frac{a^2}{8}\ldots$

Vì thế dãy số $S_1;S_2;S_3;\ldots$ lập thành cấp số nhân lùi vô hạn (S_n) có $\begin{cases}S_1=a^2\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$ nên tổng diện tích các hình vuông có trong bài toán là $S=S_1+S_2+\ldots=a^2\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$.

Câu 74. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\frac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

Lời giải

Gọi u_1 là số hạng đầu, q là công bội và S là tổng của cấp số nhân đã cho. Khi đó $S=\frac{u_1}{1-q}$.

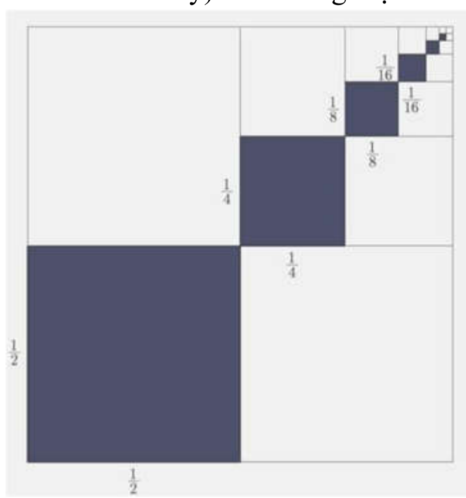
Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q}=12 \\ u_1(1-q)=\dfrac{3}{4} \\ u_1>0 \end{cases}$.

Nhân 2 phương trình của hệ trên với nhau ta được $u_1^2=9$, mà $u_1>0 \Rightarrow u_1=3$.

Thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được $q=\dfrac{3}{4}$.

Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1=3$ và công bội $q=\dfrac{3}{4}$.

Câu 75. Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, 4, …n,… trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó.Giả sử quy trình tô màu của chuột Mickey có thể tiến ra vô hạn (như hình vẽ dưới đây). Tính tổng diện tích mà chuột Mickey phải tô màu.



Lời giải

Ta có cạnh của hình vuông thứ nhất là $\dfrac{1}{2}$ nên diện tích $S_1=\dfrac{1}{4}$.

Cạnh hình vuông thứ hai là $\dfrac{1}{4}$ nên diện tích $S_2=\dfrac{1}{16}$,…

Cứ tiếp tục như vậy thì ta có được $S_1;S_2;S_3;...$ lập thành cấp số nhân lùi vô hạn có $S_1=\dfrac{1}{4}$, $q=\dfrac{1}{4}$ nên ta có tổng diện tích chuột Mickey cần tô màu là $S=S_1+S_2+S_3+...=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$ (đvdt).

Câu 76. Từ độ cao 63m của tháp nghiêng Pi-sa ở Italia, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được ngay trước đó. Tính độ dài hành trình của quả bóng từ thời điểm ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất.

Lời giải

Ta thấy:

Ban đầu bóng cao 63m nên chạm đất lần 1 bóng di chuyển quãng đường $S_1=63(m)$.

Từ lúc chạm đất lần một đến chạm đất lần hai bóng di chuyển được quãng đường là

$S_2 = 2S_1.\frac{1}{10} = 2.63.\frac{1}{10} = \frac{63}{5}$ (do độ cao lần hai bằng $\frac{1}{10}$ độ cao ban đầu).

Từ lúc chạm đất lần hai đến chạm đất lần ba bóng di chuyển được quãng đường là $S_3 = S_2\frac{1}{10}$ (do độ cao lần ba bằng $\frac{1}{10}$ độ cao lần hai)... Cứ tiếp tục như vậy kéo dài ra vô tận thì ta có được tổng quãng đường mà bóng cao su đã di chuyển là

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... = S_1 + S_2 + S_2.\frac{1}{10} + S_2.\left(\frac{1}{10}\right)^2 + ... = S_1 + S_2\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 63 + \frac{63}{5}.\frac{10}{9} = 77(m).$$

Vậy quãng đường di chuyển của bóng là $77m$.

Câu 77. Tính tổng $M = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{5^{10}}$

Lời giải

Ta có

$$M = \frac{1}{5^{10}} + ... + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow M + 1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} + ... + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} + 1$$

$$\Leftrightarrow (M+1)\left(\frac{1}{5}-1\right) = \left(\frac{1}{5}-1\right)\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{10} + ... + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} + 1\right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{5}(M+1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{11} - 1 \Leftrightarrow M + 1 = \frac{5.5^{10}-1}{4.5^{10}} \Leftrightarrow M = \frac{5^{10}-1}{4.5^{10}} = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}\right]$$

Câu 78. Cho tổng: $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Tính S_{30}

Lời giải

Ta có $2S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + ... + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

Trong đó

$$\frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}; \frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}; \frac{2}{3.4.5} = \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5};$$

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Khi đó

$$2S_n = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}\right) + ... + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow S_n = \frac{n^2+3n}{2(n+1)(n+2)}$$

Vậy $S_{30} = \frac{30^2+3.30}{2.(30+1)(30+2)} = \frac{495}{992}$

Câu 79. Cho tổng $S_n = \frac{5}{1.2} + \frac{5}{2.3} + \frac{5}{3.4} + ... + \frac{5}{n(n+1)}$. Tính $S_4^2 + S_6^2$

Lời giải

Ta có

$$S_n=\frac{5}{1.2}+\frac{5}{2.3}+\frac{5}{3.4}+...+\frac{5}{n(n+1)}=5\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=5\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5n}{n+1}$$

Suy ra $S_4=4; S_6=\frac{30}{7}$. Vậy $S_4^2+S_6^2=16+\frac{900}{49}=\frac{1684}{49}$

Câu 80. Cho tổng: $S=\frac{9-1}{9}+\frac{9^2-1}{9^2}+\frac{9^3-1}{9^9}+...+\frac{9^9-1}{9^9}$. Tính 8S

Lời giải

Ta có

$$S=\frac{9-1}{9}+\frac{9^2-1}{9^2}+\frac{9^3-1}{9^3}+...+\frac{9^9-1}{9^9}\Leftrightarrow S=9-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+...+\frac{1}{9^9}\right)$$

$$\Leftrightarrow S=10-\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+...+\frac{1}{9^9}\right)\Leftrightarrow S=10-\frac{9^{10}-1}{8.9^9}=\frac{71.9^9+1}{8.9^9}\Rightarrow 8S=71+\frac{1}{9^9}$$