# BÀI 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

- CHƯƠNG 7. ĐẠO HÀM
- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

# PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Đạo hàm của hàm số  $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$ 

## Kiến thức trọng tâm

Hàm số  $y = x^n$  với  $n \in \mathbb{N}^*$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

**Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = x^5$  tại điểm x = 2 và  $x = -\frac{1}{2}$ .

### Giải

Ta có 
$$(x^5)' = 5x^4$$
. Từ đó,  $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$  và  $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$ .

2. Đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt{x}$ 

## Kiến thức trọng tâm

Hàm số  $y = \sqrt{x}$  có đạo hàm trên khoảng  $(0; +\infty)$  và  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Ví dụ 2.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt{x}$  tại điểm x = 1 và  $x = \frac{1}{4}$ .

#### Giải

Ta có 
$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$$
. Từ đó,  $y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$  và  $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1$ .

# Nhận xét:

a) Cho số thực  $\alpha$ . Hàm số  $y=x^{\alpha}$  được gọi là hàm số luỹ thừa (với tập xác định  $(0;+\infty)$ ). Công thức  $(x^n) = nx^{n-1}$  còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực  $\alpha$  bất kì  $(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}(x>0)$ .

Với 
$$\alpha = \frac{1}{2}$$
, ta nhận được công thức đã biết:  $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x > 0)$ .

b) Ở bài học trước, dùng định nghĩa ta tìm được các công thức đạo hàm:

- 
$$(C)' = 0$$
 (C là hằng số);

$$-\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}(x \neq 0).$$

**Ví dụ 3.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[3]{x}$  tại điểm x = 8.

#### Giải

Với 
$$x > 0$$
, ta có  $y' = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ .

Từ đó, 
$$y'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{2^3})^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}.$$

## 3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác sau:

$$-(\sin x)' = \cos x \qquad -(\cos x)' = -\sin x$$

$$-(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \qquad -(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

**Ví dụ 4.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \cos x$  tại  $x = \frac{\pi}{6}$ .

Giải

Ta có 
$$y' = (\cos x)' = -\sin x$$
. Vậy  $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ .

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

## Kiến thức trọng tâm

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

$$-\left(e^{x}\right)'=e^{x}$$

$$-(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \ne 1)$$

$$-(\ln x)' = \frac{1}{x}(x>0)$$

$$-(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}(x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

Ví dụ 5. Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) 
$$y = e^x \ \text{tai } x = 2 \ln 3$$
;

b) 
$$y = \log_5 x$$
 tại  $x = 2$ .

Giải

a) Ta có 
$$y' = (e^x)' = e^x$$
. Từ đó,  $y'(2 \ln 3) = e^{2 \ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$ .

b) Ta có 
$$y' = (\log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5} (x > 0)$$
. Từ đó,  $y'(2) = \frac{1}{2 \ln 5}$ .

5. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

# Kiến thức trọng tâm

Cho hai hàm số u(x), v(x) có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có:

$$-(u+v)'=u'+v'$$

$$-(u-v)'=u'-v'$$

$$-(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$-\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v\acute{o}i \ v = v(x) \neq 0)$$

# Chú ý:

- Với 
$$u = C$$
 (C là hằng số), công thức (1) trở thành  $(C \cdot v)' = C \cdot v'$ .

- Với 
$$u = 1$$
, công thức (2) trở thành  $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}(v \acute{o}i \ v = v(x) \neq 0)$ .

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = 3x^2 - 4x + 2$$

b) 
$$y = x \sin x$$
;

c) 
$$y = \frac{3x+2}{2x-1}$$

a) 
$$(3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' - (4x)' + (2)' = 3(x^2)' - 4(x)' + 0 = 3.2x - 4.1 = 6x - 4$$
.

b) 
$$(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$
.

c) 
$$\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)' = \frac{(3x+2)' \cdot (2x-1) - (3x+2) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3 \cdot (2x-1) - (3x+2) \cdot 2}{(2x-1)^2}$$
  
=  $\frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^2} = -\frac{7}{(2x-1)^2}$ .

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = x^2 3^x$$

$$b) y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$$

#### Giải

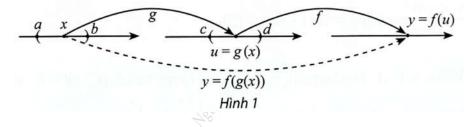
a) 
$$(x^2 3^x)' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = x \cdot 3^x \cdot (2 + x \ln 3)$$
.

b) 
$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + 2x\sin x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}.$$

### 6. Đao hàm của hàm hợp

Cho u = g(x) là hàm số của x xác định trên khoảng (a;b) và lấy giá trị trên khoảng (c;d); y = f(u) là hàm số của u xác định trên khoảng (c;d) và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$ . Ta lập hàm số xác định trên (a;b) và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$  theo quy tắc sau:  $x \mapsto f(g(x))$ 

Hàm số y = f(g(x)) được gọi là hàm hợp của hàm số y = f(u) với u = g(x).



#### Ví dụ 8.

- a) Hàm số  $y = (2x+1)^3$  là hàm hợp của các hàm số nào?
- b) Hàm số  $y = \cos(x^2 + 1)$  là hàm hợp của các hàm số nào?

#### Giải

- a) Hàm số  $y = (2x+1)^3$  là hàm hợp của hàm số  $y = u^3$  với u = 2x+1.
- b) Hàm số  $y = \cos(x^2 + 1)$  là hàm hợp của hàm số  $y = \cos u$  với  $u = x^2 + 1$ .

## Kiến thức trọng tâm

Cho hàm số u = g(x) có đạo hàm tại x là  $u'_x$  và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại u là  $y'_u$  thì hàm hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ .

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = (3x^2 + x)^3$$
;

b) 
$$y = \sin 2x$$
;

c) 
$$y = e^{x^2+1}$$
.

a) Đặt 
$$u = 3x^2 + x$$
 thì  $y = u^3$ . Ta có  $u'_x = 6x + 1$  và  $y'_u = (u^3)' = 3u^2$ .

Suy ra 
$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (6x+1) = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x+1)$$
.

Vậy 
$$y' = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x + 1)$$
.

b) Đặt 
$$u = 2x$$
 thì  $y = \sin u$ . Ta có  $u'_{x} = 2$  và  $y'_{u} = (\sin u)' = \cos u$ .

Suy ra  $y'_{x} = y'_{u} \cdot u'_{x} = \cos u.2 = 2\cos 2x$ .

 $V_{ay} y' = 2\cos 2x$ .

c) Đặt  $u = x^2 + 1$  thì  $y = e^u$ . Ta có  $u'_x = 2x$  và  $y'_u = (e^u)' = e^u$ .

Suy ra  $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2+1}$ .

Vậy  $y' = 2xe^{x^2+1}$ .

## BẢNG ĐẠO HÀM

BANG ĐẠO HAM	
$\left(x^{n}\right)'=nx^{n-1}$	$\left(u^{n}\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(e^{x}\right)'=e^{x}$	$\left(e^{u}\right)' = u' \cdot e^{u}$
$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a > 0  \text{và}  a \neq 1$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$

# 7. Đạo hàm cấp hai

# Kiến thức trọng tâm

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm y' = f'(x) tại mọi  $x \in (a;b)$ .

Nếu hàm số y' = f'(x) lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số y = f(x) tại x, kí hiệu y'' hoặc f''(x).

Ví dụ 10. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

- a)  $y = 3x^2 + 5x + 1$
- b)  $y = \sin x$ .

### Giải

- a) y' = 3.2x + 5 + 0 = 6x + 5, y'' = 6.1 + 0 = 6.
- b)  $y' = \cos x; y'' = -\sin x$ .

# Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai  $f^{''}(t)$  là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình s = f(t).

**Ví dụ 11.** Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình  $s(t) = t^2 - 4t + 3$ , trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 4.

Ta có s'(t) = 2t - 4; s''(t) = 2.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 4 là  $s''(4) = 2m/s^2$ .

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính đạo hàm

**Câu 1.** (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm của hàm số  $y = x^{10}$  tại x = -1 và  $x = \sqrt[3]{2}$ .

## Lời giải

Ta có: 
$$(x^{10})^{'} = 10x^{9}$$

Từ đó 
$$y'(-1) = 10 \cdot (-1)^9 = -10$$
;  $y'(\sqrt[3]{2}) = 10 \cdot (\sqrt[3]{2})^9 = 80$ 

Câu 2. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) 
$$y = \sqrt[4]{x}$$
 tại  $x = 1$ 

b) 
$$y = \frac{1}{x} \tan x = -\frac{1}{4}$$
.

## Lời giải

a) Với 
$$x > 0$$
, ta có:  $y' = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ 

Từ đó: 
$$y'(1) = \frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}} = \frac{1}{4}$$

b) Ta có: 
$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Từ đó, 
$$y'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -16$$

**Câu 3.** (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm của hàm số  $y = \tan x$  tại  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

# Lời giải

Ta có: 
$$y' = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$V_{a}^{2}y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^{2}} = 2$$

Câu 4. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) 
$$y = 9^x \text{ tại } x = 1;$$

b) 
$$y = \ln x \text{ tại } x = \frac{1}{3}$$
.

a) Ta có: 
$$y' = (9^x)' = 9^x \cdot \ln 9$$

Suy ra: 
$$y'(1) = 9^1 \cdot \ln 9 = 9 \cdot \ln 9$$

b) Ta có: 
$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Suy ra: 
$$y'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Câu 5. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = x \log_2 x$ ;
- b)  $y = x^3 e^x$ .

## Lời giải

a) 
$$y' = (x \log_2 x)' = x' \cdot \log_2 x + x \cdot (\log_2 x)' = \log_2 x + x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$$

b) 
$$y' = (x^3 e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 \cdot e^x$$

Câu 6. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = (2x^3 + 3)^2$
- b)  $y = \cos 3x$ ;
- c)  $y = \log_2(x^2 + 2)$ .

### Lời giải

a) 
$$y' = 2 \cdot (2x^3 + 3) \cdot (2x^3 + 3)' = 2 \cdot (2x^3 + 3) \cdot 6x^2 = 12x^2(2x^3 + 3)$$

b) 
$$y' = (3x)' \cdot (-\sin 3x) = -3\sin 3x$$

c) 
$$y' = (x^2 + 2)' \cdot \frac{1}{(x^2 + 2) \cdot \ln 2} = \frac{2x}{(x^2 + 2) \cdot \ln 2}$$

Câu 7. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a)  $y = x^2 x$ ;
- b)  $y = \cos x$ .

## Lời giải

a) 
$$y' = 2x - 1; y'' = 2$$

b) 
$$y' = -\sin x; y'' = -\cos x$$

Câu 8. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3}$$

b) 
$$y = \frac{-2x+3}{x-4}$$
;

c) 
$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$
;

d) 
$$y = \sqrt{5x}$$
.

### Lời giải

a) 
$$y' = 6x^2 - x + 4$$

b) 
$$y' = \left(\frac{-2x+3}{x-4}\right)' = \left(-2 - \frac{5}{x-4}\right)' = \frac{5}{(x-4)^2}$$

c) 
$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \frac{x^2 - x - x + 1 + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{2}{x - 1}$$
. Vây  $y' = 1 - \frac{2}{(x - 1)^2}$ 

d) 
$$y' = (5x)' \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5x}}$$

Câu 9. (SGK - CTST 11 - Tâp 2) Tính đao hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = \sin 3x$
- b)  $y = \cos^3 2x$ ;
- c)  $y = \tan^2 x$ ;
- d)  $y = \cot(4-x^2)$ .

### Lời giải

a) 
$$y' = (3x)' \cdot \cos 3x = 3\cos 3x$$

b) 
$$y' = (\cos 2x)' \cdot 3 \cdot \cos^2 2x = (2x)' \cdot (-\sin 2x) \cdot 3 \cdot \cos^2 2x = -6\sin 2x \cdot \cos 2x$$

c) 
$$y' = (\tan x)' \cdot 2 \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2 \cdot \tan x = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$$

d) 
$$y' = (4 - x^2)' \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = -2x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{2x}{\sin^2 x}$$

Câu 10. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = (x^2 - x) \cdot 2^x$$

b) 
$$y = x^2 \log_3 x$$
;

c) 
$$y = e^{3x+1}$$
.

### Lời giải

a) 
$$y' = (x^2 - x)' \cdot 2^x + (x^2 - x) \cdot (2^x)' = (2x - 1) \cdot 2^x + (x^2 - x) \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

b) 
$$y' = (x^2)' \cdot \log_3 x + x^2 \cdot (\log_3 x)' = 2x \cdot \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3}$$

c) 
$$y' = (3x+1)' \cdot e^{3x+1} = 3 \cdot e^{3x+1}$$

Câu 11. (SGK - CTST 11 - Tập 2) Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) 
$$y = 2x^4 - 5x^2 + 3$$
;

b) 
$$y = xe^x$$
.

### Lời giải

a) 
$$y' = 8x^3 - 10x$$
;  $y'' = 24x^2 - 10$ 

b) 
$$y' = e^x + x \cdot e^x$$
;  $y'' = e^x + e^x + x \cdot e^x = 2e^x + x \cdot e^x$ 

Câu 12. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 1)$$

b) 
$$y = \frac{x-1}{x^2+1}$$

#### Giải

a) Áp dụng các công thức và phép toán đạo hàm, ta có:

$$y' = (\sqrt{x} + 2)' (x^2 + 1) + (\sqrt{x} + 2) (x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x^2 + 1) + (\sqrt{x} + 2)2x$$
$$= \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + 2x(\sqrt{x} + 2)$$

b) Ta có:

$$y' = \frac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

**Câu 13.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Giải

Ta có: 
$$y' = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'$$
$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$$

**Câu 14.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = x^2 e^{-2x}$  và tìm x để y' = 0.

Giải

Ta có: 
$$y' = (x^2)' e^{-2x} + x^2 (e^{-2x})' = 2xe^{-2x} + x^2 e^{-2x} (-2x)'$$
  
=  $2xe^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2(x - x^2)e^{-2x}$ . Do  $e^{-2x} > 0$  nên  $y' = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x) = x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  và  $g(x) = x \ln|2 - x|$ . Tính  $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ .

Giải

Ta có: 
$$f'(x) = 1 + \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}$$

$$g'(x) = \ln|2-x| + x \frac{(2-x)'}{2-x} = \ln|2-x| - \frac{x}{2-x}$$

Thay x = 0 vào các đẳng thức trên, ta được:

$$f'(0) = 1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 3, g'(0) = \ln 2 \text{ và } \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{3}{\ln 2}.$$

Câu 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = (x+1)^2 (x^2-1)$$

b) 
$$y = \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3$$

Lời giải

Dùng quy tắc và công thức đạo hàm của hàm số hợp.

a) 
$$y' = 2(x+1)(x^2-1) + 2x(x+1)^2 = 2(x+1)(2x^2+x-1)$$
.

b) 
$$y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 \left(2x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$
.

Câu 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}$$

b) 
$$y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

a) 
$$y' = \frac{x^2 + 4x - 3}{(x+2)^2}$$

b) 
$$y' = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

**Câu 18.** Cho hàm số 
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$
 và  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$ . Tính  $f'(0) - g'(1)$ .

### Lời giải

Dùng quy tắc tính đạo hàm f'(x), g'(x) và thay giá trị tương ứng. Ta có:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2} = \frac{4}{\left(4 - x^2\right)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2x$$

Do đó, 
$$f'(0) = \frac{1}{2}, g'(1) = \frac{1}{2}$$
 và  $f'(0) - g'(1) = 0$ .

**Câu 19.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 3\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ .

### Lời giải

$$y' = \frac{3}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Câu 20.** Cho hàm số  $f(x) = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ . Tính đạo hàm f'(x) và chứng tổ f'(x) = 0 với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = -2\cos x \sin x - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$= -\sin 2x - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)$$

$$= -\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

$$= -\sin 2x + 2\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x$$

$$= -\sin 2x + \sin 2x = 0$$

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x) = 4\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ . Chứng minh rằng  $|f'(x)| \le 8$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Tìm x để f'(x) = 8.

#### Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = 8\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 8\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 16\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 8\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Từ đó suy ra:  $|f'(x)| = 8 \left| \sin \left( 4x - \frac{2\pi}{3} \right) \right| \le 8, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 8 \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 22.** Biết y là hàm số của x thoả mãn phương trình  $xy = 1 + \ln y$ . Tính y'(0).

## Lời giải

Dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có:

$$y + xy' = (\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' \left(\frac{1}{y} - x\right) = y \Rightarrow y' = \frac{y^2}{1 - xy}$$

Tại x = 0, thay vào phương trình ta được  $1 + \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Vậy 
$$y'(0) = \frac{1}{e^2}$$
.

Câu 23. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \text{ v\'oi } x > 0;$$

b) 
$$y = (1+x-2x^2)\left(2-x^2+\frac{x^3}{3}\right)$$

### Giải

a) 
$$y' = \frac{(1 - \sqrt[3]{x})'(1 + \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x})'}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}(1 + \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{x})\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}$$

$$= -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{2}{(1+\sqrt[3]{x})^2} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$y' = (1+x-2x^2)' \left(2-x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + (1+x-2x^2) \left(2-x^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

$$= (1-2.2x) \left(2-x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + (1+x-2x^2) \left(-2x+3 \cdot \frac{x^2}{3}\right)$$

$$= (1-4x) \left(2-x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + (1+x-2x^2) \left(-2x+x^2\right)$$

$$= 2-10x-2x^2 + \frac{28}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^4$$

Câu 24. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = (\sin x + 2\cos x)(\sin x - 2\cos x + 1)$$
;

b) 
$$y = \frac{\tan x - 1}{\cot x + 2}$$
.

#### Giải

a)

$$y' = (\sin x + 2\cos x)'(\sin x - 2\cos x + 1) + (\sin x + 2\cos x)(\sin x - 2\cos x + 1)'$$

$$= (\cos x - 2\sin x)(\sin x - 2\cos x + 1) + (\sin x + 2\cos x)(\cos x + 2\sin x)$$

$$= \cos x \sin x - 2\cos^2 x + \cos x - 2\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 2\sin x + \sin x \cos x$$

$$+ 2\cos^2 x + 2\sin^2 x + 4\cos x \sin x$$

$$= 10\sin x \cos x + \cos x - 2\sin x$$
b)
$$y' = \frac{(\tan x - 1)'(\cot x + 2) - (\tan x - 1)(\cot x + 2)'}{(\cot x + 2)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan^2 x)(\cot x + 2) + (\tan x - 1)(1 + \cot^2 x)}{(\cot x + 2)^2}$$

$$= \frac{2\cot x + 2\tan x + 2\tan^2 x - \cot^2 x + 1}{(\cot x + 2)^2}$$

## Câu 25. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$$

b) 
$$y = (3 \ln x + 2) (2 \log_3 x - 5)$$
.

#### Giải

a) 
$$y' = \frac{(2^{x} + 1)'(2^{x} - 1) - (2^{x} + 1)(2^{x} - 1)'}{(2^{x} - 1)^{2}} = \frac{2^{x} \ln 2(2^{x} - 1) - 2^{x} \ln 2(2^{x} + 1)}{(2^{x} - 1)^{2}}$$

$$= \frac{2^{x} \ln 2[(2^{x} - 1) - (2^{x} + 1)]}{(2^{x} - 1)^{2}} = \frac{-2^{x+1} \ln 2}{(2^{x} - 1)^{2}}.$$
b)
$$y' = (3 \ln x + 2)'(2 \log_{3} x - 5) + (3 \ln x + 2)(2 \log_{3} x - 5)'$$

$$y' = (3 \ln x + 2)' (2 \log_3 x - 5) + (3 \ln x + 2) (2 \log_3 x)$$

$$= \frac{3}{x} (2 \log_3 x - 5) + \frac{2}{x \ln 3} (3 \ln x + 2)$$

$$= \frac{1}{x} \left( 6 \log_3 x + \frac{6}{\ln 3} \ln x - 15 + \frac{4}{\ln 3} \right)$$

# Câu 26. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = \sqrt{2 + \sin 3x}$$
;

b) 
$$y = \ln^2(3x+2)$$
;

c) 
$$y = \frac{1}{e^{3x} - 1}$$

d) 
$$y = \tan(\cot x)$$
.

a) 
$$y' = \frac{(2+\sin 3x)'}{2\sqrt{2+\sin 3x}} = \frac{\cos 3x \cdot (3x)'}{2\sqrt{2+\sin 3x}} = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{2+\sin 3x}}$$
.

b) 
$$y' = 2 \ln(3x+2) [\ln(3x+2)]' = 2 \ln(3x+2) \frac{(3x+2)'}{3x+2} = \frac{6}{3x+2} \ln(3x+2)$$
.

c) 
$$y' = -\frac{(e^{3x} - 1)'}{(e^{3x} - 1)^2} = -\frac{e^{3x} \cdot (3x)'}{(e^{3x} - 1)^2} = -\frac{3e^{3x}}{(e^{3x} - 1)^2}.$$

d) 
$$y' = \frac{(\cot x)'}{\cos^2(\cot x)} = \frac{-1}{\sin^2 x \cos^2(\cot x)}$$
.

Câu 27. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = \frac{-3x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x^3}{3}$$

b) 
$$y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9);$$

c) 
$$y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 1}$$

d) 
$$y = \frac{1 - 2x}{x + 1}$$

e) 
$$y = xe^{2x+1}$$
;

g) 
$$y = (2x+3)3^{2x+1}$$
;

h) 
$$y = x \ln^2 x$$
;

i) 
$$y = \log_2(x^2 + 1)$$
.

Lời giải

a) 
$$y' = -3x - \frac{2}{x^2} + x^2$$
;

b) 
$$y' = 2x(3x^4 + 8x^2 - 41)$$
;

c) 
$$y' = \frac{3x^2 + 2x - 2}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$$

d) 
$$y' = -\frac{3}{(x+1)^2}$$
.

e) 
$$y' = (2x+1)e^{2x+1}$$

g) 
$$y' = 2.3^{2x+1}[(2x+3)\ln 3 + 1];$$

h) 
$$y' = \ln^2 x + 2 \ln x$$
;

i) 
$$y' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$$
.

Câu 28. Cho hàm số

$$f(x) = 3x^3 - 4\sqrt{x}$$

Tính  $f(4); f'(4); f(a^2); f'(a^2)$  (a là hằng số khác 0).

Lời giải

Ta có 
$$f'(x) = 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$
.

$$f(4) = 184, f'(4) = 143, f(a^2) = 3a^6 - 4|a|; f'(a^2) = 9a^4 - \frac{2}{|a|}.$$

Câu 29. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = (1+x^2)^{20}$$
;

b) 
$$y = \frac{2+x}{\sqrt{1-x}}$$

a) 
$$y' = 40x(1+x^2)^{19}$$
;

b) 
$$y' = \frac{-x+4}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$
.

Câu 30. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) 
$$y = \frac{x}{\sin x - \cos x}$$
;

b) 
$$y = \frac{\sin x}{x}$$
;

c) 
$$y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

d) 
$$y = \cos(2\sin x)$$
.

Lời giải

a) 
$$y' = \frac{\sin x - \cos x - x(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$
;

b) 
$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$
;

c) 
$$y' = \cos^3 x$$
;

d) 
$$y' = -2\cos x \cdot \sin(2\sin x)$$
.

**Câu 31.** Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm  $x_0 = 1$ :

a) 
$$f(x) = x^6$$

b) 
$$g(x) = (2x-1)(x+1)$$
;

c) 
$$h(x) = \frac{1-x}{3x+5}$$

d) 
$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e) 
$$m(x) = 2^{3x+1}$$

g) 
$$n(x) = \log_3(2x+1)$$
.

#### Giải

a) Ta có: 
$$f'(x) = 6x^5$$
.

Đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm  $x_0 = 1$  là:  $f'(1) = 6 \cdot 1^5 = 6$ .

b) Ta có: g'(x) = (2x-1)'(x+1) + (2x-1)(x+1)' = 2(x+1) + (2x-1) = 4x+1. (Ta có thể tính

$$g'(x) = [(2x-1)(x+1)]' = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1$$
.

Đạo hàm của hàm số g(x) tại điểm  $x_0 = 1$  là: g'(1) = 4.1 + 1 = 5.

c) Ta có:

$$h'(x) = \frac{(1-x)'(3x+5) - (1-x)(3x+5)'}{(3x+5)^2} = \frac{(-1)(3x+5) - 3(1-x)}{(3x+5)^2} = \frac{-8}{(3x+5)^2}.$$
 Đạo hàm của hàm số  $h(x)$  tại

điểm 
$$x_0 = 1$$
 là:  $h'(1) = \frac{-8}{(3.1+5)^2} = \frac{-1}{8}$ .

d) Ta có: 
$$k'(x) = -\frac{(\sqrt{x})'}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$
.

Đạo hàm của hàm số k(x) tại điểm  $x_0 = 1$  là:  $k'(1) = -\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}} = \frac{-1}{2}$ .

e) Ta có: 
$$m'(x) = (3x+1)' \cdot 2^{3x+1} \ln 2 = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x+1}$$
.

Đạo hàm của hàm số m(x) tại điểm  $x_0 = 1$  là:  $m'(1) = 3 \ln 2 \cdot 2^{3 \cdot 1 + 1} = 48 \ln 2$ .

g) Ta có: 
$$n'(x) = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$$
.

Đạo hàm của hàm số n(x) tại điểm  $x_0 = 1$  là:  $n'(1) = \frac{2}{(2.1+1) \ln 3} = \frac{2}{3 \ln 3}$ .

**Câu 32.** Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

a) 
$$f(x) = 2\sin x$$

b) 
$$g(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
.

### Giải

a) Ta có:  $f'(x) = 2(\sin x)' = 2\cos x$ .

Đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  là:  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ .

b) Ta có: 
$$g'(x) = -\frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Đạo hàm của hàm số g(x) tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  là:  $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = -1$ .

**Câu 33.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x$ . Giải bất phương trình f'(x) < 0.

### Giải

Ta có:  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .

Khi đó,  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ .

Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là (-1;1).

**Câu 34.** Cho hàm số f(x) có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số g(x) được xác định bởi g(x) = -3 - 2f(x). Biết f'(5) = 1. Tính g'(5).

#### Giải

Ta có: 
$$g'(x) = (-3)' - (2f(x))' = 0 - 2 \cdot f'(x) = -2f'(x)$$
.

Suy ra 
$$g'(5) = -2f'(5) = (-2).1 = -2$$
.

**Câu 35.** Cho hàm số f(x) có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định và f'(5) = 1. Tính đạo hàm của hàm số g(x) = f(1+2x) tại x = 2.

#### Giải

Ta có: 
$$g'(x) = (1+2x)' \cdot f'(1+2x) = 2f'(1+2x)$$
.

Suy ra 
$$g'(2) = 2f'(5) = 2.1 = 2$$
.

**Câu 36.** Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm  $x_0 = 2$ :

a) 
$$f(x) = e^{x^2 + 2x}$$

b) 
$$g(x) = \frac{3^x}{2^x}$$

c) 
$$h(x) = 2^x \cdot 3^{x+2}$$

d) 
$$k(x) = \log_3(x^2 - x)$$
.

a) Ta có: 
$$f'(x) = (x^2 + 2x)' e^{x^2 + 2x} = (2x + 2)e^{x^2 + 2x}$$
.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $f'(2) = (2 \cdot 2 + 2)e^{2^2 + 2 \cdot 2} = 6e^8$ .

b) Ta có: 
$$g'(x) = \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^x \right]' = \left( \frac{3}{2} \right)^x \ln \frac{3}{2}$$
.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $g'(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \ln \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \ln \frac{3}{2}$ .

c) Ta có: 
$$h(x) = 2^x \cdot 3^x \cdot 9 = 9 \cdot 6^x$$
.

Suy ra  $h'(x) = 9 \ln 6 \cdot 6^{x}$ .

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $h'(2) = 9 \ln 6.6^2 = 324 \ln 6$ .

d) Ta có: 
$$k'(x) = \frac{(x^2 - x)'}{(x^2 - x) \ln 3} = \frac{2x - 1}{x(x - 1) \ln 3}$$
.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $k'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2(2 - 1) \ln 3} = \frac{3}{2 \ln 3}$ .

Câu 37. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) 
$$f(x) = 2\cos(\sqrt{x})$$
;

b) 
$$g(x) = \tan(x^2)$$
;

c) 
$$h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x)$$

d) 
$$k(x) = \sin^2 x + e^x \cdot \sqrt{x}$$
.

## Lời giải

a) 
$$f'(x) = 2(\sqrt{x})'[-\sin(\sqrt{x})] = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$
.

b) 
$$g'(x) = \frac{(x^2)'}{\cos^2(x^2)} = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$
.

c) Ta có: 
$$h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x) = \cos(6x)$$
.

Suy ra  $h'(x) = (6x)'[-\sin(6x)] = -6\sin(6x)$ .

d) 
$$k'(x) = (\sin^2 x)' + (e^x)' \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot (\sqrt{x})' = 2\sin x \cos x + e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$$
.

**Câu 38.** Cho hàm số  $f(x) = 2^{3x-6}$ . Giải phương trình  $f'(x) = 3 \ln 2$ .

## Lời giải

Ta có: 
$$f'(x) = (3x-6)'.2^{3x-6} \ln 2 = 3 \ln 2.2^{3x-6}$$
. Khi đó,  $f'(x) = 3 \ln 2 \Leftrightarrow 3 \ln 2.2^{3x-6} = 3 \ln 2 \Leftrightarrow 2^{3x-6} = 1 \Leftrightarrow 3x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

**Câu 39.** Giải bất phương trình f'(x) < 0, biết:

a) 
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$
;

b) 
$$f(x) = -\log_5(x+1)$$
.

a) Ta có: 
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
.

Khi đó, 
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$
.

b) Ta có: 
$$f'(x) = -\frac{(x+1)'}{(x+1)\ln 5} = \frac{-1}{(x+1)\ln 5}$$
.

Khi đó, 
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x+1)\ln 5} < 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$
.

**Câu 40.** Cho hàm số f(x) có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số g(x) được xác định bởi  $g(x) = [f(x)]^2 + 2xf(x)$ . Biết f'(0) = f(0) = 1. Tính g'(0).

### Lời giải

Ta có: 
$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f(x) + 2xf'(x)$$
.

Vậy 
$$g'(0) = 2f(0)f'(0) + 2f(0) + 2.0.f'(0) = 4$$
.

Câu 41. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a)  $y = xe^{2x}$ ;
- b)  $y = \ln(2x+3)$ .

### Lời giải

a) Ta có: 
$$y' = x'e^{2x} + x(e^{2x})' = e^{2x} + xe^{2x}(2x)' = (1+2x)e^{2x}$$

$$y'' = (1+2x)'e^{2x} + (1+2x)(e^{2x})' = 2e^{2x} + (1+2x)e^{2x}(2x)' = (4+4x)e^{2x}$$

Vậy hàm số  $y = xe^{2x}$  có đạo hàm cấp hai là  $y'' = 4(1+x)e^{2x}$ .

b) Ta có: 
$$y' = \frac{(2x+3)'}{2x+3} = \frac{2}{2x+3}$$
.

$$y'' = \left(\frac{2}{2x+3}\right)' = -\frac{2}{(2x+3)^2}(2x+3)' = -\frac{4}{(2x+3)^2}.$$
 Vậy hàm số  $y = \ln(2x+3)$  có đạo hàm cấp hai là:  

$$y'' = -\frac{4}{(2x+3)^2}.$$

**Câu 42.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hàm số  $f(x) = x^2 e^x$ . Tính f''(0).

## Lời giải

Ta có: 
$$f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = (2x + x^2) e^x$$
 và

$$f''(x) = (2x + x^2)'e^x + (2x + x^2)(e^x)' = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$$
. Thay  $x = 0$  ta được  $f''(0) = 2$ .

Câu 43. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a)  $y = \ln(x+1)$ ;
- b)  $y = \tan 2x$ .

### Lời giải

a) Ta có: 
$$y' = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$
 và  $y'' = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$ .

b) Ta có: 
$$y' = \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x} = 2(1 + \tan^2 2x)$$
 và

$$y'' = 4 \tan 2x (\tan 2x)' = 8 \tan 2x (1 + \tan^2 2x).$$

**Câu 44.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hàm số  $P(x) = ax^2 + bx + 3$  (a,b là hằng số). Tìm a,b biết P'(1) = 0 và P''(1) = -2.

## Lời giải

Ta có: P'(x) = 2ax + b và P''(x) = 2a. Do P'(1) = 0 và P''(1) = -2 nên 2a + b = 0 và 2a = -2. Từ đó, ta tìm được a = -1, b = 2.

**Câu 45.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hàm số  $f(x) = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ . Chứng minh rằng  $\left|f''(x)\right| \le 4$  với moi x.

### Lời giải

Ta có

$$f'(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'$$
$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos 2x \text{ và } f''(x) = -2(2x)'\sin 2x = -4\sin 2x.$$

Từ đó, ta có:  $|f''(x)| = 4 |\sin 2x| \le 4$  với mọi x.

Câu 46. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) 
$$y = \sqrt{2} \cos \left( 4\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

b) 
$$y = x^2 e^{-x}$$

#### Giải

a) Ta có:

$$y' = -\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -4\pi\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$y'' = -4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

b) Ta có:

$$y' = (x^{2})' e^{-x} + x^{2} (e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^{2}e^{-x}$$

$$y'' = (2x - x^{2})' e^{-x} + (2x - x^{2})(e^{-x})'$$

$$= (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^{2})e^{-x}$$

$$= (x^{2} - 4x + 2)e^{-x}$$

**Câu 47.** Cho hàm số  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ . Tính f''(0).

#### Giải

Ta có:

$$f'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)'}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + \frac{\left(1 + x^2\right)}{2\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$f''(x) = -\frac{\left(\sqrt{1 + x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1 + x^2}\right)^2} = -\frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{\left(1 + x^2\right)'}{2\sqrt{1 + x^2}} = -\frac{x}{\left(1 + x^2\right)\sqrt{1 + x^2}}$$

Thay x = 0 vào biểu thức trên ta được f''(0) = 0.

Câu 48. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) 
$$y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$$

b) 
$$y = \frac{2x+1}{x-1}$$

Lời giải

a) 
$$y'' = 3x^2 - 4$$

b) 
$$y'' = \frac{6}{(x-1)^3}$$

Câu 49. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) 
$$y = \ln |2x - 1|$$
;

b) 
$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Lời giải

a) 
$$y'' = -\frac{4}{(2x-1)^2}$$
;

b) 
$$y' = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y'' = 2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = \frac{2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

**Câu 50.** Cho hàm số  $f(x) = xe^{x^2} + \ln(x+1)$ .

Tính f'(0) và f''(0).

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = (6x+4x^3)e^{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

Thay x = 0 ta được f'(0) = 2 và f''(0) = -1.

**Câu 51.** Cho  $f(x) = (x^2 + a)^2 + b(a, b \text{ là tham số})$ . Biết f(0) = 2 và f''(1) = 8, tìm a và b.

### Lời giải

Tính đạo hàm cấp hai ta được  $f''(x) = 12x^2 + 4a$ . Từ đó có f''(1) = 12 + 4a = 8 nên a = -1. Mặt khác,  $f(0) = a^2 + b = 2$ . Thay a = -1 ta được b = 1. Vậy a = -1, b = 1 là các giá trị cần tìm.

Câu 52. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) 
$$y = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$$
;

b) 
$$y = \cos^2 x$$
.

a) 
$$y' = 3.3x^2 - 2x + 3 = 9x^2 - 2x + 3$$
,  $y'' = 9.2x - 2 = 18x - 2$ .

b) Đặt 
$$u = \cos x$$
 thì  $y = u^2$ .

Ta có 
$$u'_x = -\sin x$$
 và  $y'_u = 2u$ .

Suy ra 
$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot (-\sin x) = -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$$
.  $y'' = -(2x)' \cdot \cos 2x = -2\cos 2x$ .

Câu 53. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) 
$$y = x \sin 2x$$
;

b) 
$$y = \cos^2 x$$
;

c) 
$$y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$$
.

Lời giải

a) 
$$y'' = 4\cos 2x - 4x\sin 2x$$
;

b) 
$$y'' = -2\cos 2x$$
;

c) 
$$y'' = 12x^2 - 18x + 2$$
.

**Câu 54.** Cho hàm số  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ .

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm  $x_0 = 0, x_0 = 1$ .

#### Giải

a) Ta có: 
$$f'(x) = 2x + 2$$
 và  $f''(x) = (2x + 2)' = 2$ .

b) Vì 
$$f''(x) = 2$$
 nên  $f''(0) = f''(1) = 2$ .

**Câu 55.** Cho hàm số  $g(x) = \cos x$ .

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

#### Giải

a) Ta có: 
$$g'(x) = -\sin x, g''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$
.

b) Vì 
$$g''(x) = -\cos x$$
 nên  $g''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 56.** Cho hàm số  $h(x) = \ln x, x > 0$ .

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại  $x_0 = \sqrt{2}$ .

## Giải

a) Ta có: 
$$h'(x) = \frac{1}{x}, h''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

b) Vì 
$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
 nên  $h''(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 57.** Cho hàm số  $k(x) = \sin x \cdot \cos x$ .

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ .

#### Giải

a) Ta có: 
$$k(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$
, suy ra  $k'(x) = \cos 2x$ ,  $k''(x) = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$ .

b) Vì 
$$k''(x) = -2\sin 2x$$
 nên  $k''(\frac{\pi}{3}) = -2\sin(2\cdot\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ .

**Câu 58.** Cho hàm số  $f(x) = x^2 - 4x$ . Giải phương trình f'(x) = f''(x).

#### Giải

Ta có: 
$$f'(x) = 2x - 4$$
,  $f''(x) = 2$ .

Khi đó, ta có phương trình

$$f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu 59. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

$$a) f(x) = \frac{1}{3x+5}$$

b) 
$$g(x) = 2^{x+3x^2}$$

Lời giải

a) Ta có: 
$$f'(x) = -\frac{(3+5)^{'}}{(3x+5)^{2}} = \frac{-3}{(3x+5)^{2}}$$
,

$$f''(x) = \frac{(-3)'(3x+5)^2 - \left[(3x+5)^2\right]'(-3)}{(3x+5)^4} = \frac{18}{(3x+5)^3}.$$

b) Ta có: 
$$g'(x) = (x+3x^2)' \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2} = (6x+1) \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2}$$
,

$$g''(x) = \ln 2 \left[ (6x+1)' \cdot 2^{x+3x^2} + (6x+1) \cdot \left( 2^{x+3x^2} \right)' \right]$$
$$= 6 \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2} + \left[ (6x+1) \ln 2 \right]^2 \cdot 2^{x+3x^2}.$$

**Câu 60.** Cho hàm số  $f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$ .

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

## Lời giải

a) Ta có: 
$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$
.

Khi đó, 
$$f'(x) = \frac{1}{4}(4x)'\cos 4x = \cos 4x$$
,  $f''(x) = (4x)'(-\sin 4x) = -4\sin 4x$ .

b) Vì 
$$f''(x) = -4\sin 4x$$
 nên  $f''(\frac{\pi}{6}) = -4\sin(4\cdot\frac{\pi}{6}) = -2\sqrt{3}$ .

**Câu 61.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5$ . Giải bất phương trình  $f'(x) - f''(x) \ge 0$ .

## Lời giải

Ta có: 
$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$
,  $f''(x) = 6x + 8$ .

Khi đó, 
$$f'(x) - f''(x) = 3x^2 + 8x - 6x - 8 \ge 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \le -2 \\ x \ge \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

# Dạng 2. Ứng dụng

**Câu 62.** (SGK - CTST 11 - Tập 2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$  tại điểm có hoành độ bằng 4.

Ta có: 
$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Khi 
$$x = 4$$
 thì  $y = \sqrt{4} = 2$ 

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 4 là: 
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm (4;2) là: 
$$y-2=\frac{1}{4}(x-4)$$
. Hay  $y=\frac{1}{4}x+1$ 

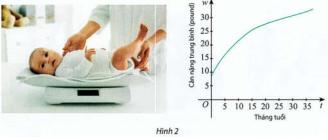
**Câu 63.** (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là  $s(t) = 4,9t^2$ , trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc t = 3.

## Lời giải

v(t) = s'(t) = 9.8t. Gia tốc rơi của hòn sỏi là v'(t) = 9.8t

**Câu 64.** (SGK - CTST 11 - **Tập 2**) Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số  $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$ , trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn:

https://www.cdc.gov/growthcharts/data/who/GrChrt\_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



Lời giải

Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái là:  $w'(t) = 0,002274t^2 - 0,1192t + 1,82$ Khi t = 10, ta có:  $w'(10) = 0,002274.10^2 - 0,1192.10 + 1,82 = 0,8554$ 

**Câu 65.** (SGK - CTST 11 - Tập 2) Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là  $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$  và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số x(t) = 20t + 40. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

## Lời giải

Tốc độ tăng của chi phí theo thời gian là

$$C'(t) = C'(x) \cdot x'(t) = \left(\sqrt{5x^2 + 60}\right)' \cdot (20t + 40)'$$

$$= \left(5x^2 + 60\right)' \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20 = 10x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20$$

$$= 100x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x^2 + 60}} = 100(20t + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20t + 40)^2 + 60}}$$
Khi  $t = 4$  thì  $C'(4) = 100(20.4 + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20.4 + 40)^2 + 60}} = 44,7$ 

**Câu 66.** (SGK - CTST 11 - Tập 2) Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức  $s(t) = 0.81t^2$ , trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao 200m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm t = 2 sau khi thả vật đó, tính:

- a) Quãng đường vật đã rơi;
- b) Gia tốc của vât.

### Lời giải

a) Khi 
$$t = 2$$
 thì  $s(t) = 0.81.2^2 = 3.24(m)$ 

b) Ta có: v(t) = s'(t) = 1,62tGia tốc của vât là v'(t) = 1,62

**Câu 67.** Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là  $v_0(m/s)$  (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức  $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$  (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

### Lời giải

Tại thời điểm vật chạm đất:  $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 (t > 0)$ .

Giải phương trình ta được  $t = \frac{2v_0}{g}$ .

Vận tốc của vật khi chạm đất là  $v = h'\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -v_0$ .

Câu 68. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức

 $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ , trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiều? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

## Lời giải

Vận tốc của hạt sau t giây là:  $v(t) = s'(t) = 4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ .

Vận tốc cực đại của hạt là:  $v_{\text{max}} = 4\pi\sqrt{2} \approx 17.8 \, \text{m/s}$ , đạt được khi:

$$\left|\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1 \text{ hay } t = \frac{5}{24} + \frac{k}{4}, k \in \mathbb{N}.$$

**Câu 69.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$ , trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 2.

#### Giải

Ta có s'(t) = -2.2t + 15 = -4t + 15, suy ra s''(t) = -4.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 2 lần lượt là s'(2) = 7 m/s và  $s''(2t) = -4 m/s^2$ .

**Câu 70.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là  $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$  (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

#### Giải

Ta có P'(x) = -2.200x + 12800 = -400x + 12800.

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm là  $P^{'}(12) = -400.12 + 12800 = 8000$ .

**Câu 71.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là P(x) = 200(x-2)(17-x) (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

#### Lời giải

Ta có P'(x) = -400x + 3800.

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm là P'(30) = -8200.

**Ví dụ 6.** Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P):  $y = x^2 + 2x + 1$  tại giao điểm của nó với trục tung.

Gọi  $A(0; y_0)$  là giao điểm của (P) và trục tung, suy ra  $y_0 = y(0) = 1$ .

Ta có: y' = 2x + 2, do đó y'(0) = 2.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = 2(x-0)+1 hay y = 2x+1.

**Câu 72.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-2}$  có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -5.

#### Giải

Gọi  $A(x_0; y_0)$  là tiếp điểm.

Ta có: 
$$y'(x_0) = -5 \Leftrightarrow \frac{-5}{(x_0 - 2)^2} = -5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = 1 \\ x_0 = 3. \end{bmatrix}$$

- Với  $x_0=1$  ta được  $y_0=-3$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y=-5x+2.
- Với  $x_0 = 3$  ta được  $y_0 = 7$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = -5x + 22.

**Câu 73.** Cho hàm số  $y = x^3 + 2$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x - 1$ .

### Giải

Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm.

Ta có:  $y'(x) = 3x^2$ .

Do tiếp tuyến cần tìm vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x - 1$  nên ta có:

$$y'(x_0)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \end{bmatrix}$$
 Từ đó, ta có:  $y'(x_0) = 3$ .

- Với  $x_0 = -1$  ta được  $y_0 = 1$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = 3x + 4.
- Với  $x_0 = 1$  ta được  $y_0 = 3$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = 3x.

**Câu 74.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ , trong đó t > 0, t tính bằng giây, s(t) tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 3(s).

#### Giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t(s) là:  $v(t) = s'(t) = t^2 - 4t + 4$ .

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 3(s) là:

$$v(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1(m/s).$$

**Câu 75.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = 6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ , trong đó t > 0, t tính

bằng giây, s(t) tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{6}(s)$ .

## Giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t(s) là:  $v(t) = s'(t) = 18\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{6}(s)$  là:

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 18\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -9\sqrt{2}(cm/s).$$

**Câu 76.** Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động  $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$ , trong đó  $t \ge 0,t$  (s) là thời gian chuyển động, s(m) là độ cao so với mặt đất.

- a) Sau bao lâu kể từ khi bắn thì viên đan đat được đô cao 1962 m?
- b) Tính vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao 1962m.
- c) Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng 98 m/s thì viên đạn đang ở độ cao bao nhiều mét so với mặt đất?

#### Giải

a) Khi viên đạn đạt được độ cao 1962 m, ta có phương trình:

 $1962 = 2 + 196t - 4,9t^2 \Leftrightarrow t = 20$ . Vậy sau 20s kể từ lúc bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1962m.

b) Vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm t là: v(t) = s'(t) = 196 - 9.8t.

Viên đạn đạt được độ cao 1962 m vào thời điểm t = 20 (s) kể từ lúc bắn, khi đó vận tốc tức thời của viên đạn là: v(20) = 196 - 9, 8.20 = 0 (m/s).

c) Viên đạn có vận tốc tức thời bằng 98m/s thì ta có phương trình:

 $v(t) = 196 - 9.8t = 98 \Leftrightarrow t = 10$ . Khi đó viên đạn đang ở độ cao là:  $s(10) = 2 + 196 \cdot 10 - 4.9 \cdot 10^2 = 1472(m)$ .

**Câu 77.** Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78690000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam sau *x* năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau:

 $f(x) = 7,869e^{0.017x}$  (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người/năm) sau x năm kể từ năm 2001 được xác định bởi hàm số f'(x).

- a) Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001.
- b) Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), nêu ý nghĩa của kết quả đó.

#### Giải

a) Ta có:

$$f'(x) = 7,869 \cdot (0,017x)' \cdot e^{0,017x} = 7,869 \cdot 0,017 \cdot e^{0,017x} = 0,133773e^{0,017x}.71$$

Vậy hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001 là:

$$f'(x) = 0.133773e^{0.017x}$$
. b) Ta có:  $x = 2023 - 2001 = 22$ .

Tốc độ gia tăng dân số Việt Nam vào năm 2023 là:

$$f'(22) = 0,133773e^{0,017.22} \approx 0,2$$
 (chục triệu người/năm)

Theo kết quả trên thì dân số nước ta tăng thêm khoảng 2 triệu người trong năm 2023.

**Câu 78.** Trong thuyết động học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất p(Pa), thể tích  $V(m^3)$ , nhiệt độ T(K), số mol n(mol) liên hệ với nhau theo phương trình:

$$pV = nRT$$
, trong đó  $R = 8.31(J/mol.K)$  là hằng số.

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi  $p = 10^5 Pa$ . Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

### Giải

Thay  $p = 10^5$ , n = 8, R = 8, 31 vào phương trình trên ta có:

 $10^5 V = 8.8,31T \Leftrightarrow V = 6,648 \cdot 10^{-4} T$ . Khi đó  $V^{'}(T) = 6,648 \cdot 10^{-4}$ . Vậy tốc độ thay đổi thể tích của khối khí lúc có nhiệt độ T là  $6,648 \cdot 10^{-4} \left( m^3 / K \right)$ .

**Câu 79.** Cho hàm số  $y = x^2 + 3x$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có:

- a) Hoành độ bằng -1;
- b) Tung độ bằng 4.

- a) y = x 1.
- b) y = 5x 1 hoặc y = -5x 16.

**Câu 80.** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x+2}$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) trong mỗi trường hợp sau:

- a) d song song với đường thẳng y = 5x 2;
- b) d vuông góc với đường thẳng y = -20x + 1.

## Lời giải

Ta có: 
$$y'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$$
.

a) Vì 
$$d$$
 song song với đường thẳng  $y = 5x - 2$  nên  $\frac{5}{(x+2)^2} = 5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = -3 \end{bmatrix}$ 

Với x = -1 thì y(-1) = -4, phương trình tiếp tuyến d là: y = 5x + 1.

Với x = -3 thì y(-1) = 6, phương trình tiếp tuyến d là: y = 5x + 21.

b) Vì 
$$d$$
 vuông góc với đường thẳng  $y = -20x + 1$  nên  $\frac{5}{(x+2)^2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -12 \\ x = 8. \end{bmatrix}$ 

Với 
$$x = -12$$
 thì  $y(-12) = \frac{3}{2}$ , phương trình tiếp tuyến  $d$  là:  $y = \frac{1}{20}x + \frac{21}{10}$ .

Với 
$$x = 8$$
 thì  $y(8) = \frac{1}{2}$ , phương trình tiếp tuyến  $d$  là:  $y = \frac{1}{20}x + \frac{1}{10}$ .

**Câu 81.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$ , trong đó t > 0, t tính bằng giây, s(t) tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 5(s).

## Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là:  $v(t) = s'(t) = t^2 - 6t + 8$ . Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 5(s) là:

$$v(5) = 5^2 - 6.5 + 8 = 3(m/s).$$

**Câu 82.** Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của dây xác định bởi hàm số  $Q(t) = 10^{-5} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)$ , trong đó t > 0, t tính bằng giây, Q tính bằng

Coulomb. Tính cường độ dòng điện tức thời I(A) trong mạch tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{1500}(s)$ , biết I(t) = Q'(t).

# Lời giải

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm t (s) là:

$$I(t) = Q'(t) = 10^{-5} \cdot 2000 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right) = 0,02 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{1500}$  (s) là:

$$I\left(\frac{\pi}{1500}\right) = 0.02\cos\left(2000 \cdot \frac{\pi}{1500} + \frac{\pi}{3}\right) = 0.01(A).$$

**Câu 83.** Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1038229 người. Tính đến năm 2015, dân số của tỉnh đó là 1153600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức  $S(N) = Ae^{Nr}$  (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số S'(N). Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

#### Lời giải

Tính từ năm 2010 đến năm 2015, chọn năm 2010 làm mốc, ta có:

 $1153600 = 1038229.e^{5r} \Rightarrow r \approx 0,021.$ 

Khi đó, ta có:  $S(N) \approx 1038229.e^{0.021N}$ , suy ra tốc độ gia tăng dân số vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 là:

 $S'(N) \approx 0.021.1038229 \cdot e^{0.021N} = 21802.809 \cdot e^{0.021N}$ .

Tốc độ gia tăng dân số tỉnh D vào năm 2023 (sau 13 năm từ năm 2010) là:

 $S'(13) \approx 21802,809 \cdot e^{0,021.13} \approx 28647 \text{ (nguời/năm)}.$ 

**Câu 84.** Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình

 $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$ , trong đó s(m) là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t(s) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh  $(0 \le t \le 4)$ .

- a) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là  $70\,km\,/\,h$ .
- b) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?

# Lời giải

a) Vận tốc tức thời của ô tô tại thời điểm t(s) là: v(t) = s'(t) = 20 - 5t.

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh (t = 0(s)) là:

$$v(0) = 20 - 5.0 = 20(m/s)$$
. Ta có:  $20m/s = 72km/h > 70km/h$ .

Suy ra ô tô trên đã chạy quá tốc độ giới hạn cho phép.

b) Khi xảy ra va chạm, ô tô đã đi được 20,4 m kể từ khi đạp phanh nên

$$20,4 = 20t - \frac{5}{2}t^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1,2 \\ t = 6,8 \end{bmatrix}$$
 Vì  $0 \le t \le 4$  nên  $t = 1,2$  (s).

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm (t = 1, 2(s)) là:

$$v(1,2) = 20 - 5 \cdot 1, 2 = 14(m/s).$$

**Câu 85.** Trong kinh tế học, xét mô hình doanh thu y (đồng) được tính theo số sản phẩm sản xuất ra x (chiếc) theo công thức y = f(x).

Xét giá trị ban đầu  $x = x_0$ . Đặt  $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0)$  và gọi giá trị đó là giá trị y-cận biên của x tại  $x = x_0$ . Giá trị  $Mf(x_0)$  phản ánh lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mốc sản phẩm  $x_0$ .

Xem hàm doanh thu y = f(x) như là hàm biến số thực x.

Khi đó  $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0)$ . Như vậy, đạo hàm  $f'(x_0)$  cho chúng ta biết (xấp xỉ) lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mốc sản phẩm  $x_0$ . Tính doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm nếu hàm doanh thu là  $y = 10x - \frac{x^2}{100}$  tại mốc sản phẩm  $x_0 = 10000$ .

## Lời giải

Ta có: 
$$y'(x) = 10 - \frac{x}{50}$$
.

Vậy doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mốc sản phẩm  $x_0 = 10000$  là:  $y'(10000) = 10 - \frac{10000}{50} = -190$  (đồng).

**Câu 86.** Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau:  $x(t) = 4\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ , ở đó x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t = 5 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



#### Giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là  $v(t) = x'(t) = -\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot 4\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -8\pi\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ .

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t

là 
$$a(t) = v'(t) = -8\pi \left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Tại thời điểm t = 5 giây, gia tốc của vật là

$$a(5) = -16\pi^2 \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\frac{\pi}{3} \approx -79\left(\frac{cm}{s^2}\right).$$

**Câu 87.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một vật chuyển động thẳng có phương trình  $s = 2t^2 + \frac{1}{2}t^4$  (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc của vật tại thời điểm t = 4 giây.

#### Lời giải

Ta có:  $s'(t) = 4t + 2t^3$ . Gia tốc của vật tại thời điểm t giây là:  $a(t) = s''(t) = 4 + 6t^2$ . Tại thời điểm t = 4 giây, gia tốc của vật là:  $a(4) = 4 + 6 \cdot 4^2 = 100 \left( \frac{m}{s^2} \right)$ .

**Câu 88.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi  $s(t) = 10 + 0.5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$ , trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm t = 5 giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Ta có:  $s'(t) = 0.5 \left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = \pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$ . Gia tốc của hạt tại thời điểm t giây là:

$$a(t) = s''(t) = -\pi \left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)' \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = -2\pi^2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right).$$

Tại thời điểm t = 5 giây, gia tốc của hạt là:  $a(5) = -2\pi^2 \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -11, 6\left(\frac{cm}{s^2}\right)$ .

**Câu 89.** Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức  $s(t) = 15 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ ,

trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm t=3 giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

## Lời giải

Gia tốc của hạt tại thời điểm t là:  $a(t) = s''(t) = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ . Tại thời điểm t = 3 giây, gia tốc của hạt là:

$$a = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right) \approx -111,7 \, m \, / \, s^2$$

**Câu 90.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$ , trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 2.

#### Giải

Ta có s'(t) = -2.2t + 15 = -4t + 15, suy ra s''(t) = -4.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm t=2 lần lượt là s'(2) = 7 m/s và  $s''(2t) = -4 m/s^2$ .

**Câu 91.** Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình  $s = 100 + 2t - t^2$  trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

- a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0?
- b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm t = 3s.

# Lời giải

a) 
$$s'(t) = 2 - 2t$$

$$s'(t) = 0 \Rightarrow 2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$$
.

Vận tốc chất điểm bằng 0 khi t = 1s.

b) Khi t = 3s.

$$s'(3) = 2 - 2.3 = -4(m/s);$$

$$s''(3) = -2 \Rightarrow a(3) = -2 m / s^2$$
.

Vậy khi t = 3s thì vận tốc của vật là -4m/s. Gia tốc của vật là  $-2m/s^2$ .

**Câu 92.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s(t) = -2t^3 + 75t + 3$ , trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 3.

# Lời giải

Ta có 
$$s'(t) = -6t^2 + 75$$
 suy ra  $s''(t) = -12t$ .

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 3 là s'(3) = 21 và s''(3) = -36.

**Câu 93.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4$ , trong đó t > 0, t tính bằng giây, s(t) tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 3(s).

#### Giải

Ta có: 
$$s'(t) = t^2 - 6t + 5$$
.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t(s) là:

s''(t) = 2t - 6. Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 3(s) là:

$$s''(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0 (m/s^2).$$

**Câu 94.** Một chất điểm có phương trình chuyển động  $s(t) = 6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ , trong đó t > 0, t tính bằng giây, s(t) tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{6}(s)$ .

#### Giải

Ta có: 
$$s'(t) = 18\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$$
.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t(s) là:  $s''(t) = -54 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{6}(s)$  là:

$$s''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -54\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -27\sqrt{2}\left(cm/s^2\right).$$

**Câu 95.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$ , trong đó t > 0, t tính bằng giây, s(t) tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm:

- a) Tại thời điểm t = 5(s).
- b) Tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng -1m/s.

## Lời giải

Ta có: 
$$s'(t) = t^2 - 6t + 8$$
,  $s''(t) = 2t - 6$ .

- a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 5 (s) là:  $s''(5) = 4(m/s^2)$ .
- b) Theo giả thiết,  $s'(t) = t^2 6t + 8 = -1 \Leftrightarrow t = 3$  (s).

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 3 (s) là:  $s''(3) = 0 (m/s^2)$ .

**Câu 96.** Một chất điểm có phương trình chuyển động  $s(t) = 3\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ , trong đó t > 0, t tính bằng giây, s(t) tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{2}(s)$ .

#### Lời giải

Ta có: 
$$s''(t) = -3\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$
.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{2}$  (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-3}{2}\left(\frac{cm}{s^2}\right).$$

Theo dõi Fanpage: Nguyễn Bảo Vương 🍲 https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Hoặc Facebook: Nguyễn Vương 🏲 https://www.facebook.com/phong.baovuong

Tham gia ngay: Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIÊU TOÁN) \* https://www.facebook.com/groups/703546230477890/

Án sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

\* https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view\_as=subscriber

Tải nhiều tài liệu hơn tại: https://www.nbv.edu.vn/

Agyith Bio Vitable