BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

- CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Phương pháp giải: áp dụng định lý

$$\begin{cases} a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \\ a // (\beta), b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

Nhận xét: Thực chất của việc chứng minh 2 mặt phẳng song song là tìm 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng này song song với 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng kia. Vậy:

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \not\subset (\beta), b \subset (\beta) \\ a \cap b = I \\ c \subset (\beta), d \subset (\beta) \\ a // c, b // d \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

Chứng minh 2 mặt phẳng đó cùng song song với mặt phẳng khác.

$$\begin{cases} (\alpha) // (\gamma) \\ (\beta) // (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

Câu 1. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm một số mặt phẳng song song có trong hình chụp căn phòng ở Hình 4.

Hình 4

Lời giải:

Một số cặp mặt phẳng song song là: mặt kệ sách và mặt đất; hai mặt của quyển sách;...

Câu 2. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Chỉ ra các mặt phẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các mặt phẳng song song trong thực tế.

a)

b)

Hình 20

Lời giải

Trong hình a: các mặt tấm pin điện năng lượng mặt trời song song với nhau
Trong hình b: Các mặt của toà nhà song song với nhau
Một số ví dụ khác về mặt phẳng song song: mặt của các bậc cầu thang, mặt phẳng của các bức tường đối diện nhau

Câu 3. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Khi dùng dao cắt các lớp bánh (Hình 11), giả sử bề mặt của các lớp bánh là các mặt phẳng song song và con dao được xem như mặt phẳng (P), nêu kết luận về các giao tuyến tạo bởi (P) với các bề mặt của các lớp bánh. Giải thích.

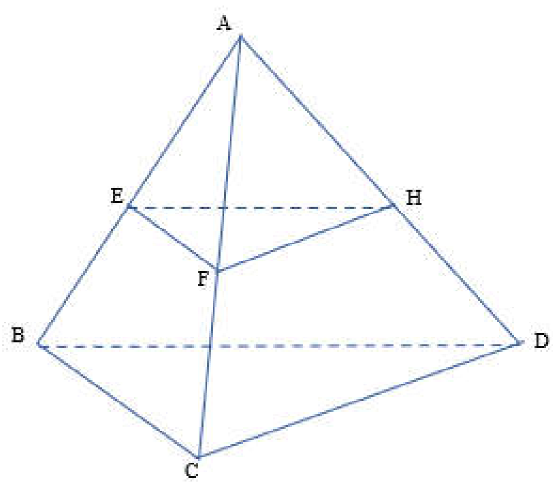
Hình 11

Lời giải

Giao tuyến tạo bởi (P) và các lớp bánh song song với nhau. Bởi vì giao tuyến tạo bởi mặt phẳng (P) và các mặt phẳng song song nhau sẽ song song với nhau.

Câu 4. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$ có E, F, H lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Chứng minh $(EFH)//(BCD)$.

Lời giải:



Ta có EF là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $EF//BC$. Do đó $EF//(BCD)$. Ta có FH là đường trung bình của tam giác ACD, suy ra $FH//CD$. Do đó $EF//(ACD)$. Mặt khác ta có mặt phẳng (EFH) chứa EF và $FH, EF \cap FH = F$. Suy ra $(EFH)//(BCD)$

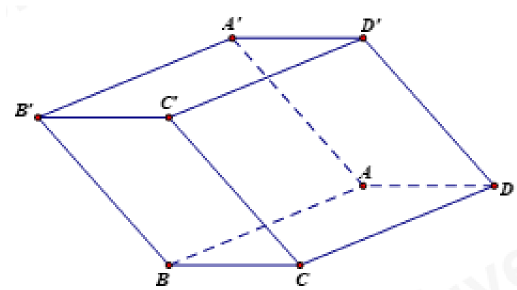
Câu 5. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình lăng trụ $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng:

a) Bốn mặt bên và mặt đáy còn lại của hình lăng trụ là các hình bình hành;

b) Các mặt $AA'C'C$ và $BB'D'D$ là hình bình hành;

c) Bốn đoạn thẳng $A'C, AC', B'D, BD'$ có cùng trung điểm.

Lời giải



Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD, AD//BC$

a) $(ABCD)//\left(A'B'C'D'\right),\left(ABB'A'\right)$ cắt hai mặt phẳng đó lần lượt tại AB và $A'B'$ nên $AB//A'B'$

Mà $AA'//BB'$ nên mặt bên $ABB'A'$ là hình bình hành

Tương tự ta có mặt bên $BCC'B', CDD'C', ADD'A'$ là hình bình hành

Ta có: $CD//C'D', A'B'//AB$ mà $AB//CD$ nên $C'D'//A'B'$

$B'C'//BC, A'D'//AD$ mà $BC//AD$ nên $B'C'//A'D'$

Suy ra mặt đáy $A'B'C'D'$ là hình bình hành

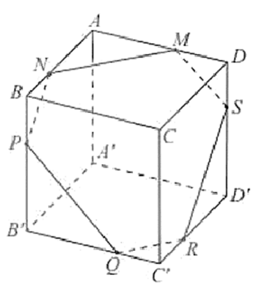
b) $(ABCD)//\left(A'B'C'D'\right),\left(ACC'A'\right)$ cắt hai mặt phẳng đó lần lượt tại AC và $A'C'$ nên $AC//A'C'$

Mà $AA'//CC'$ nên $ACC'A'$ là hình bình hành

Tương tự ta có $BB'D'D$ là hình bình hành

c) Ta có $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AC', A'C$ là cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (1) $BDD'B'$ là hình bình hành nên $BD', B'D$ là cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (2)

Câu 6. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MN, NP, PQ, QR, RS, SM như Hình 18.



Hình 18

Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song với nhau.

Lời giải:

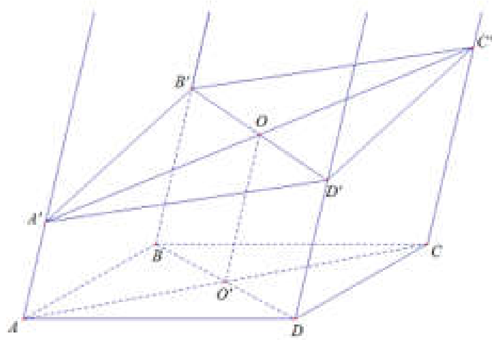
Mặt phẳng (α) cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ lần lượt tại NP và SR nên $NP//SR$.

Mặt phẳng (α) cắt hai mặt phẳng song song $(ADD'A')$ và $(BDD'B')$ lần lượt tại MS và PQ nên $PQ//MS$. Mặt phẳng (α) cắt hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$ lần lượt tại MN và QR nên $MN//QR$

Câu 7. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

$AA' + CC' = BB' + DD'$.

Lời giải:



$AB//CD$ nên $AB//(CDD'C'), AA'//DD'$ nên $DD'//(CDD'C')$

Ta có $(ABB'A')$ đi chứa 2 đường thẳng cắt nhau AB và AA' cùng song song với $(CDD'C')$ nên $(ABB'A')//(CDD'C')$

$AD//BC$ nên $AD//(BCC'B'), AA'//BB'$ nên $AA'//(BCC'B')$

Ta có $(ADD'A')$ đi chứa 2 đường thẳng cắt nhau AD và AA' cùng song song với $(CBB'C')$ nên $(ADD'A')//(CBB'C')$

Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ lần lượt tại $A'B'$ và CD' nên $AB'//CD'$

Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ADD'A')$ và $(CBB'C')$ lần lượt tại $A'D'$ và CB' nên $AD'//CB'$

Suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành, nên $A'C'$ cắt $B'D'$ tại trung điểm O

Gọi O' là giao của AC và BD

Mặt phẳng $(AA'C'C)$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ lần lượt tại AA' và CC' nên $AA'//CC'$

Trong hình thang $ACC'A'$ có OO' là đường trung bình nên $AA' + CC' = 2OO'$

Mặt phẳng $(BDD'B')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ lần lượt tại BB' và DD' nên $BB'//DD'$

Trong hình thang $BDD'B'$ có OO' là đường trung bình nên $BB' + DD' = 2OO'$

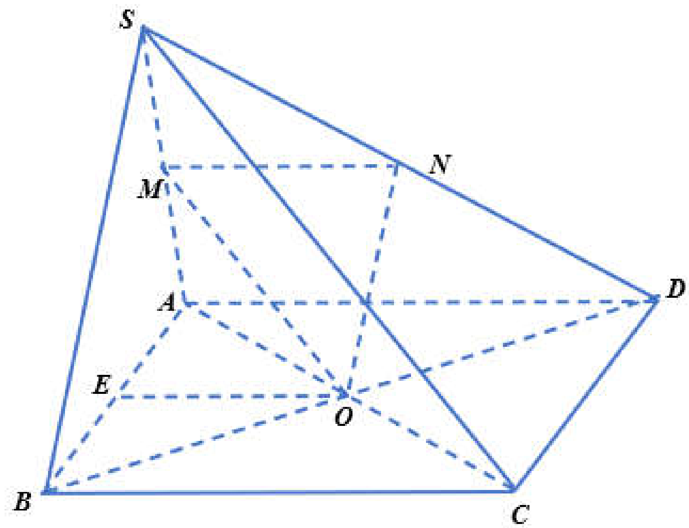
Vậy $AA' + CC' = BB' + DD'$

Câu 8. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh rằng $(OMN)//(SBC)$.

b) Gọi E là trung điểm của AB và F là một điểm thuộc ON. Chứng minh EF song song với (SBC).

Lời giải



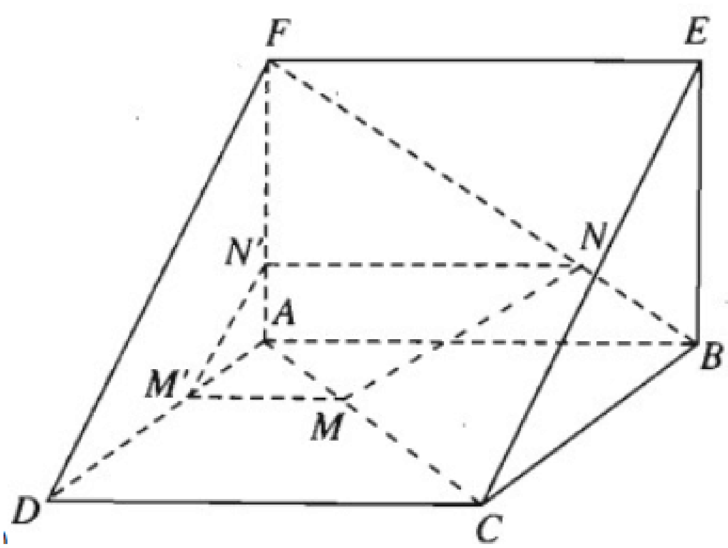
a) Trong tam giác SBD có ON là đường trung bình nên $ON//SB$. Suy ra $MN//(SBC)$
Trong tam giác SAD có MN là đường trung bình nên $MN//AD$. Mà $AD//BC$ nên $MN//BC$. Suy ra $MN//(SBC)$
Mặt phẳng (OMN) chứa hai đường thẳng cắt nhau MN và ON cùng song song với (SBC)
Do đó, $(OMN)//(SBC)$
b) Trong tam giác ABC có OE là đường trung bình nên $OE//BC$. Suy ra $OE//(SBC)$
Mà $(OMN)//(SBC)$ nên $E \in (OMN)$
Ta có: $(OMN)//(SBC); EF \subset (OMN)$ nên $EF//(SBC)$

Câu 9. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a) Chứng minh $(CBE)//(ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF)//(MNN'M')$.

Lời giải:



a) Ta có $AD//BC$ nên $AD//(BEC)$, $AF//BE$ nên $AF//(BEC)$
Mặt phẳng (ADF) đi qua hai đường thẳng cắt nhau AD và AF cùng song song với (CBE) nên $(ADF)//(CBE)$
b) Vì $ABCD$ và $ABEF$ là hình vuông có cạnh bằng nhau nên $AC = BF$

Trong tam giác ADC có $MM'//CD$ nên $\frac{AM'}{AD}=\frac{AM}{AC}$

Trong tam giác ABF có $NN'//AB$ nên $\frac{AN'}{AF}=\frac{BN}{BF}$

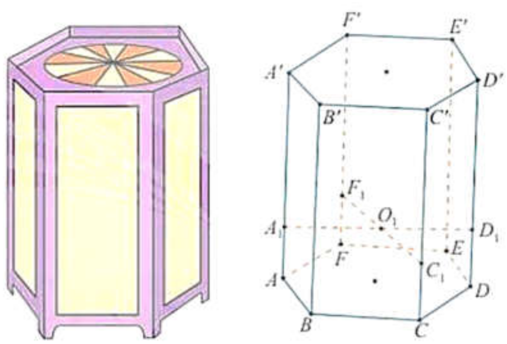
Mà $AM=BN$ nên $\frac{AN'}{AF}=\frac{AM'}{AD}$. Suy ra $M'N'//DF$. Nên $M'N'//(DEF)$

Ta có $MM'//AB//EF$ nên $MM'//(DEF)$

Mặt phẳng $(MNN'M')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau MM' và $M'N'$ cùng song song với (DEF)

Do đó, $(MNN'M')//(DEF)$

Câu 10. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF\cdot A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (Hình 19).



Hình 19

a) Xác định giao tuyến của $mp(A_1D_1, F_1C_1)$ với các mặt bên của lăng trụ.

b) Cho biết $A'A_1=6AA_1$ và $AA'=70\,cm$. Tính CC_1 và C_1C'.

Lời giải:

a) Do mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau A_1D_1 và C_1F_1 và cùng song song với mặt phẳng $(ABCDEF)$

Nên $(A_1C_1D_1F_1)//(ABCDEF)$

Gọi B_1, E_1 lần lượt là giao của mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1)$ với BB' và EE'

Ta có giao tuyến của $(A_1C_1D_1F_1)$ với các mặt bên của lăng trụ là

$A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, F_1A_1$

b) Ta có: $A'A_1=6AA_1; AA'=70$ nên $AA_1=10$

Do $(ACC'A')$ cắt hai mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1)//(ABCDEF)$ lần lượt tại A_1C_1 và AC nên $A_1C_1//AC$

Mà $AA_1//CC_1$ nên tứ giác AA_1C_1C là hình bình hành.

Suy ra $CC_1=AA_1=10$

Mà $CC'=AA'=70$

Nên $C_1C'=70-10=60$

Câu 11. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABEF* có chung cạnh *AB* và không đồng phẳng. *I, J, K* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, CD, EF*. Chứng minh:

a. $(ADF)//(BCE)$ b. $(DIK)//(JBE)$

Lời giải

a. Chứng minh: $(ADF)//(BCE)$

$AF//BE \Rightarrow AF//(BCE)$

$AD//BC \Rightarrow AD//(BCD)$

Mà: $AF, AD \subset (ADF) \Rightarrow (ADF)//(BCE)$

b. Chứng minh $(DIK)//(JBE)$

$IK//BE \Rightarrow IK//(JBE)$

$ID//BJ \Rightarrow ID//(JBE)$

Mà: $IK, ID \subset (DIK) \Rightarrow (DIK)//(JBE)$

Câu 12. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABEF* có chung cạnh *AB* và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi *M, N* thứ tự là trung điểm của *AB, BC* và *I, J, K* theo thứ tự là trọng tâm các tam giác *ADF, ADC, BCE*. Chứng minh $(IJK)//(CDFE)$

Lời giải

Gọi *P, Q, H* lần lượt là trung điểm của *FD, DC, EC*.

Vì *I* là trọng tâm của $\Delta AFD \Rightarrow \dfrac{AI}{AP} = \dfrac{2}{3}$ (1)

Vì *J* là trọng tâm của $\Delta ADC \Rightarrow \dfrac{AJ}{AQ} = \dfrac{2}{3}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{AI}{AP} = \dfrac{AJ}{AQ} \Rightarrow IJ//PQ \Rightarrow IJ//(CDEF)$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có:

$\Rightarrow JK//DH \Rightarrow JK//(CDEF)$

Mà *JH, IJ* cùng thuộc (IJK) $\Rightarrow (IJK)//(CDEF)$

Câu 13. Cho hình chóp *S. ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Gọi *H, I, K* lần lượt là trung điểm của *SA, SB, SC*

a) Chứng minh rằng: $(HIK)//(ABCD)$

b)Gọi *M* là giao điểm của *AI* và *KD, N* là giao điểm của *DH* và *CI*. Chứng minh rằng $(SMN)//(HIK)$

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $(HIK)//(ABCD)$

$HI//AB \Rightarrow HI//(ABCD)$

$KI//BC \Rightarrow KI//(ABCD)$

Mà: $HI, KI \subset (KIH) \Rightarrow (KIH)//(ABCD)$

b) Chứng minh rằng: $(SMN)//(HIK)$

$$\left.\begin{array}{c}(SAB)\cap(SCD)=SM\\ AB\subset(SAB),CD\subset(SCD)\\ AB//CD\end{array}\right\}\Rightarrow AB//CD//SM\,(1)$$

$$\left.\begin{array}{c}(SAD)\cap(SBC)=SN\\ AD\subset(SAD),BC\subset(SBC)\\ BC//AD\end{array}\right\}\Rightarrow BC//AD//SN\,(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow(SMN)//(ABCD)$

Câu 14. Cho hình lập phương *ABC**D.**A'B'C'D'*. Gọi *E, F, G* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AA', BB', CC'*. Chứng minh rằng:

a) $(EFG)//(ABCD)$ Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng *(ABD)* và *(C'D'D)*

b) Tìm giao điểm của *A'C* và *(C'BD)*

Lời giải

a) $(EFG)//(ABCD)$ (học sinh tự giải)

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng *(ABD)* và *(C'D'D)*

Nhận thấy: $(ABD)=(ABCD)$ và $(C'D'D)=(C'D'DC)$

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. M,N,P là trung điểm $A'B',BC,$DD'. Chúng minh $(MNP)//(CB'D')$

Lời giải

Gọi O là trung điểm của $B'C$

*)Tam giác $BB'C$: $NO//=\frac{1}{2}BB'(1)$

*) $BB'//=DD'\Rightarrow D'P//=\frac{1}{2}BB'(2)$

*) từ (1) và $(2)\Rightarrow NO//=D'P\Rightarrow$

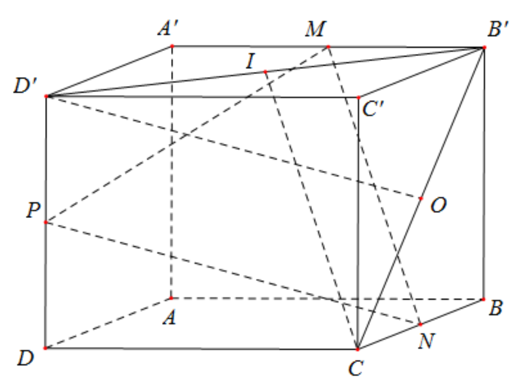
tứ giác $PNOD'$ là hình bình hành

$\Rightarrow PN//D'O(3)$

*)Và I là trung điểm của $B'D'$.

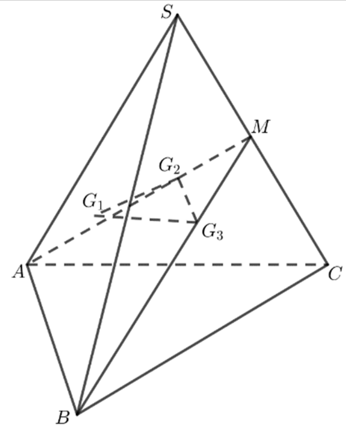
Tương tự: $MN//CI(4)$

*) Từ $(3),(4)\Rightarrow(MNP)//(CB'D')$.



Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có G_1,G_2,G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB,SBC,SAC. Chứng minh $(G_1G_2G_3)//(ABC)$.

Lời giải



*) Gọi M là trung điểm của $SC \Rightarrow \frac{MG_3}{MA} = \frac{MG_2}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_2G_3 // (ABC)$ (1)

*) Ta chứng minh: $G_1G_2 // AC$ (2)

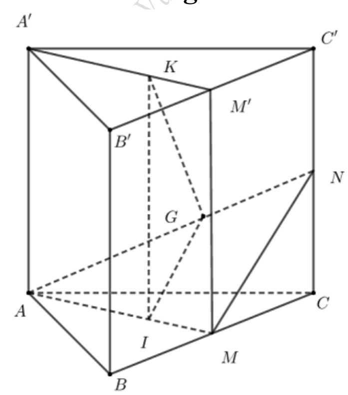
*) Từ $(1),(2) \Rightarrow (G_1G_2G_3) // (ABC)$.

Câu 17. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Chứng minh:

a) $(IKG) // (BCC'B')$.

b) $(A'KG) // (AIB')$.

Lời giải



a) Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C' \Rightarrow KM' // IM$ hoặc $KM' \equiv IM$

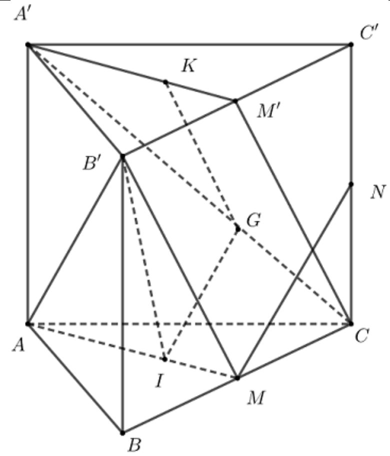
$\Rightarrow$ tứ giác $KIMM'$ là hình bình hành $\Rightarrow IK // MM'$ (1).

Gọi N là trung điểm của CC', theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{AG}{AN} = \frac{1}{3} = \frac{AI}{AM}$

Theo Ta-let $\Rightarrow IG // MN$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow (IGK) // (BCC'B')$

b)



Ta có $A'K//AI$ (1)

*) Nối $AI \cap BC = M \Rightarrow M$ là trung điểm của BC.

*) Nối $A'K \cap B'C' = M' \Rightarrow M'$ là trung điểm của $B'C'$.

*) Theo bổ đề A'G qua C.

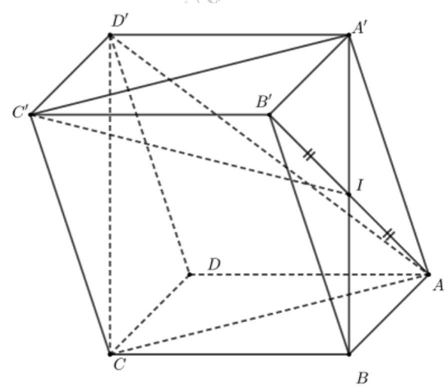
$\Rightarrow (A'GK) \equiv (A'M'C)$, $(AIB') \equiv (B'AM)$

*) $B'C'//(\equiv)BC \Rightarrow B'M'//(\equiv)CM \Rightarrow$ Tứ giác $B'C'CM$ là hình bình hành $\Rightarrow B'M//CM'$ (2)

Từ (1), $(2) \Rightarrow (A'KG)//(AIB')$.

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB'. Chứng minh $C'I//(ACD')$.

Lời giải



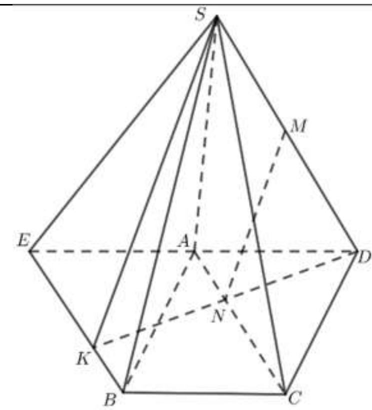
*) Từ C' ta có $C'A'//AC$ (1)

*) Từ I ta có $A'B//CD'$ (2)

*) Từ $(1),(2)$ ta có $\begin{cases}(D'AC)//(BA'C') \\ C'I \in (BA'C')\end{cases} \Rightarrow C'I//(D'AC)$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD, $N \in AC$, điểm E đối xứng với D qua A. Chứng minh $MN//(SEB)$.

Lời giải



Gọi $K = DN \cap EB$

Ta có: $\begin{cases} AE//BC \\ AE = BC \end{cases} \Rightarrow AEBC$ là hình bình hành

$\Rightarrow AC//EB \Rightarrow AN//\text{BE} \Rightarrow N$ là trung điểm của DK

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $SDK \Rightarrow MN//SK, SK \subset (SEB)$.

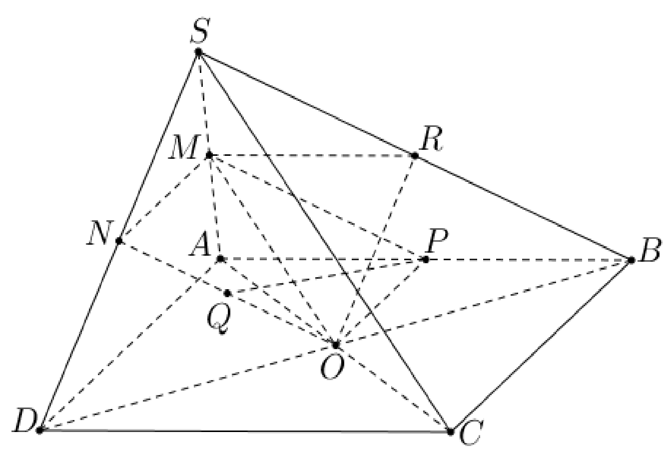
Vậy $MN//(SEB)$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

a) Chứng minh $(SBC)//(OMN)$.

b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh $PQ//(SBC)$ và $(OMR)//(SCD)$.

Lời giải



a) Ta có: MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN//AD$ hay $MN//BC$.

$\begin{cases} MN//BC \\ MN \not\subset (SBC) \Rightarrow MN//(SBC) \ (1) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

Tương tự OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM//SC$.

$\begin{cases} OM//SC \\ OM \not\subset (SBC) \Rightarrow OM//(SBC) (2) \\ SC \subset (SBC) \end{cases}$

$MN \cap OM = M$ trong (OMN) (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $(SBC)//(OMN)$.

b) **Chứng minh** $PQ//(SBC)$

Ta có: OP là đường trung bình của tam giác ABC nên $OP//BC, OP = \frac{1}{2}BC$.

MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN//AD, MN = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác $BC = AD$, $BC//AD$

suy ra $MN//OP$, $MN = OP$ hay $MNOP$ là hình bình hành.

Vậy $PQ \subset (OMN)$, $(OMN)//(SBC)$ nên $PQ//(SBC)$.

Chứng minh $(OMR)//(SCD)$

Ta có: MR là đường trung bình của tam giác SAB nên $MR// AB$ hay $MR//CD$.

$$\begin{cases} MR//CD \\ MR \not\subset (SCD) \Rightarrow MR//(SCD) \text{ (1)} \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

Tương tự OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM// SC$.

$$\begin{cases} OM//SC \\ OM \not\subset (SCD) \Rightarrow OM//(SCD) \text{ (2)} \\ SC \subset (SCD) \end{cases}$$

$MR \cap OM = M$ trong (OMR) (3)

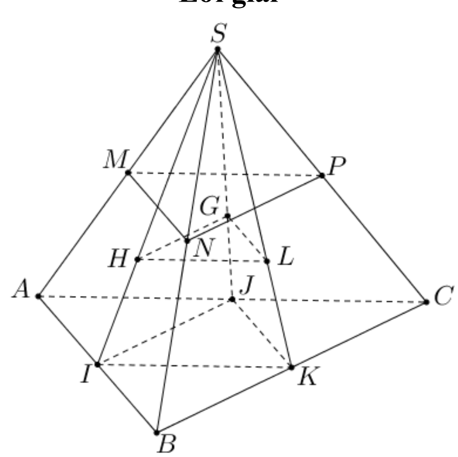
Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $(SCD)//(OMR)$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC.

a) Chứng minh $(MNP)//(ABC)$.

b) Gọi H, G, L lần lượt là trọng tâm tam giác SAB, SAC, SBC. Chứng minh $(HGL)//(MNP)$.

Lời giải



a) Ta có: MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN// AB$.

$\begin{cases} MN//AB \\ MN \not\subset (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN//(ABC)$ (1)

Tương tự MP là đường trung bình của tam giác SAC nên $MP//AC$.

$\begin{cases} MP//AC \\ MP \not\subset (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow MP//(ABC)$ (2)

$MN \cap MP = M$ trong (MNP) (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $(MNP)//(ABC)$.

b) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, AC, BC. Khi đó ta có:

* $HG//IJ$ (vì trong tam giác SIJ có $\frac{SH}{SI}=\frac{SG}{SJ}=\frac{2}{3}$) và $IJ \subset (ABC), HG \not\subset (ABC)$

Do đó $HG//(ABC)$ (4)

* $HL//IK$ (vì trong tam giác SIK có $\frac{SH}{SI}=\frac{SL}{SK}=\frac{2}{3}$) và $IK \subset (ABC), HL \not\subset (ABC)$

Do đó $HL//(ABC)$ (5)

$HG \cap HL = H$ trong (HGL) (6)

Từ $(4),(5),(6)$ suy ra $(HGL)//(MNP)$

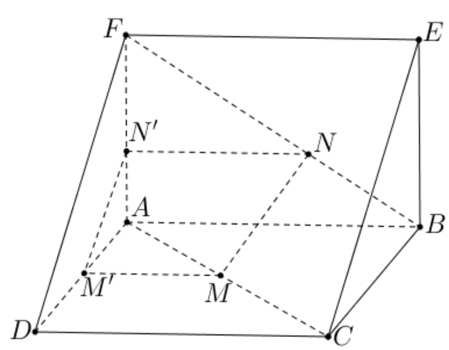
Mà $(ABC)//(MNP)$ nên $(HGL)//(MNP)$ (đpcm).

Câu 22. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF)//(BCE)$.

b) $(DEF)//(MM'N'N)$.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} AD//BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD//(BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF//BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF//(BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF)//(BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hìnhvuông nên $AC = BF \quad (1)$.

Ta có $MM'//CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC} \quad (2)$

$NN'//AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} \quad (3)$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N'//DF$

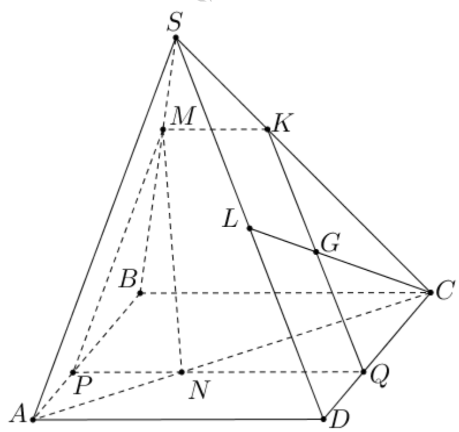
$\Rightarrow DF//(MM'N'N)$.

Lại có $NN'//AB \Rightarrow NN'//EF \Rightarrow EF//(MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF//(MM'N'N) \\ EF//(MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF)//(MM'N'N)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, AC sao cho $\dfrac{BM}{MS} = \dfrac{CN}{NA} = x, \ (0 < x \neq 1)$.Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tìm x để $(MNG)//(SAD)$.

Lời giải



Gọi các giao điểm của (MNG) với các cạnh hình chóp như hình vẽ.

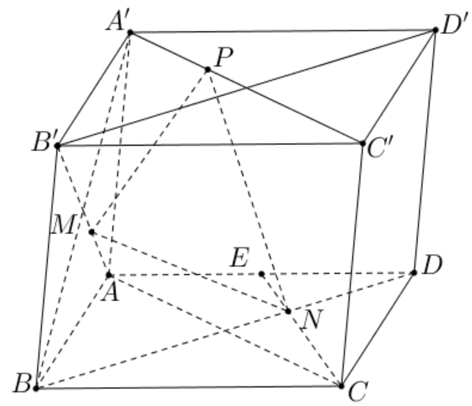
Ta có $\dfrac{BM}{MS} = \dfrac{CN}{NA} = x, \ (0 < x \neq 1)$ nên BC, MN, SA lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MN//(SAD), \ \forall x \in (0 < x \neq 1)$. Do đó

$(MNG)//(SAD) \Leftrightarrow NQ//AD \Leftrightarrow \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{QC}{QD} \Leftrightarrow \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{GC}{GL} = 2$.

Vậy với $x = 2$ thì $(MNG)//(SAD)$.

Câu 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác $AA'B$, ACD, $A'B'D'$. Chứng minh rằng $(MNP)//(BCC'B')$.

Lời giải



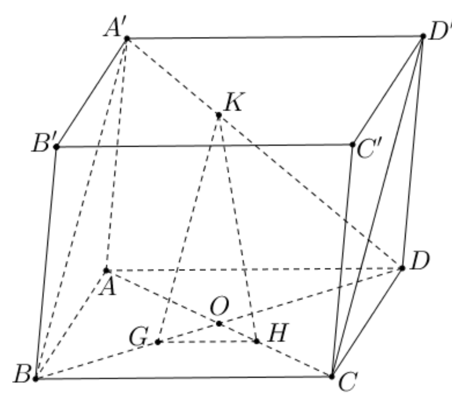
Ta có M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác $AA'B$, ACD nên $\frac{MA}{MB'}=\frac{NE}{NC}=\frac{1}{2}$, suy ra AE, MN, $B'C$ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MN//\left(BCC'B'\right)$ (1).

Tương tự ta có $\frac{MA}{MB'}=\frac{PA'}{PC'}=\frac{1}{2}$, $\frac{MA}{MB'}=\frac{NE}{NC}=\frac{1}{2}$, suy ra AA', MP, $B'C'$ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MP//\left(BCC'B'\right)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $(MNP)//\left(BCC'B'\right)$.

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G, H, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, BCD, $A'AD'$. Chứng minh rằng $(GHK)//\left(A'BCD'\right)$.

Lời giải

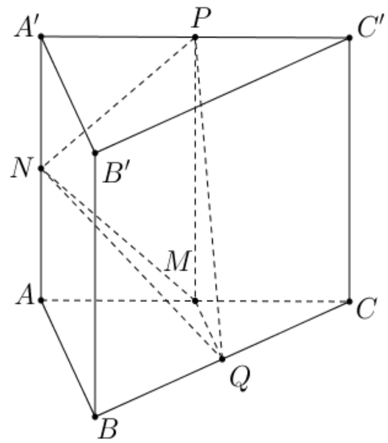


Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có G, H lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, BCD nên $\frac{OG}{OB}=\frac{OH}{OC}$ $\Rightarrow GH//BC\Rightarrow GH//\left(A'BCD'\right)$. Tương tự G, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'AD'$ nên $\frac{DG}{DB}=\frac{DK}{DA'}\Rightarrow KG//A'B\Rightarrow KG//\left(A'BCD'\right)$

Vậy $(GHK)//\left(A'BCD'\right)$.

Câu 26. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, AA', $A'C'$, BC. Chứng minh rằng $(MNQ)//\left(A'B'C\right)$.

Lời giải



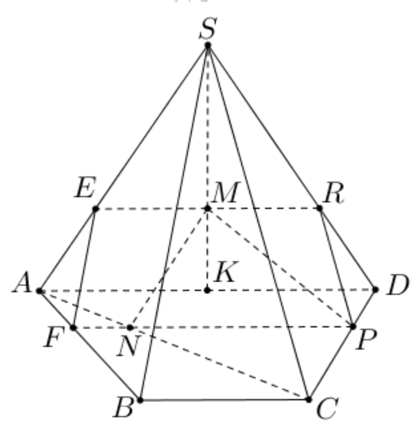
Ta có: $QM \,//\, AB \,//\, A'B'$ (vì QM là đường trung bình trong tam giác ABC)$\Rightarrow QM \,//\, \left(A'B'C\right)$ (1).

Mặt khác $MN \,//\, A'C$ (vì MN là đường trung bình của tam giác ACA')$\Rightarrow MN \,//\, \left(A'B'C\right)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(MNQ\right) // \left(A'B'C\right)$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là AD. Gọi M là trọng tâm tam giác SAD, N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA = \frac{NC}{2}$, P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD = \frac{PC}{2}$. Chứng minh rằng $MN // \left(SBC\right)$ và $\left(MNP\right) // \left(SBC\right)$.

Lời giải



Trong tam giác CAD có: $\begin{cases} NA = \frac{NC}{2} \\ PD = \frac{PC}{2} \end{cases} \Rightarrow NP // AD // BC$

$M \in \left(SAD\right) \cap \left(MNP\right)$.

Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAD\right)$ và $\left(MNP\right)$ là đường thẳng d qua M song song với BC, AD và NP.

Gọi R là giao điểm của d với SD.

Ta có: $\frac{DR}{DS} = \frac{DP}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow PR // \text{SC}$.

$$\begin{cases} NP \not\subset (SBC), PR \not\subset (SBC) \\ NP \cap PR = P \in (MNP) \\ NP // BC, PR // SC \\ BC, SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (MNP) // (SBC).$$

$$\begin{cases} (MNP) // (SBC) \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow MN // (SBC).$$

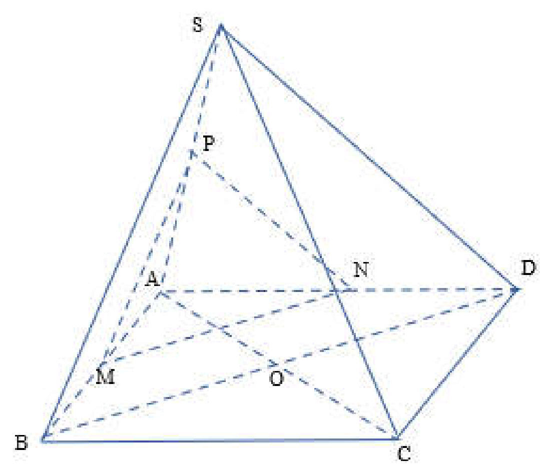
DẠNG 2: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẲNG VỚI HÌNH CHÓP KHI BIẾT MẶT PHẲNG ĐÓ SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG CHO TRƯỚC.

Để xác định thiết diện trong trường hợp này ta sử dụng các tính chất sau

- Khi $(\alpha)//(\beta)$ thì (α) sẽ song song với tất cả các đường thẳng trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng.
- Sử dụng $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ (\beta)\cap(\gamma)=d \\ M \in (\alpha)\cap(\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(\gamma)=d' // d,\ M \in d''$.
- Tìm đường thẳng d nằm trong (β) và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa d, khi đó $(\alpha)// d$ nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa d (nếu có) theo các giao tuyến song song với d.

Câu 28. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo, tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và cắt đoạn thẳng AC. Chứng minh các giao tuyến của (α) với hình chóp tạo thành một tam giác đều.

Lời giải:



Gọi M, N, P lần lượt giao điểm của mặt phẳng (α) với AB, AD và SA

Ta có $(ABCD)$ lần lượt cắt 2 mặt phẳng song song (α) và (SBD) tại MN và BD nên $MN//BD$. Do đó $\frac{MN}{BD}=\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}$

Ta có (SAB) lần lượt cắt 2 mặt phẳng song song (α) và (SBD) tại MP và AB nên $MP//AB$. Do đó $\frac{MP}{SB}=\frac{AM}{AB}$ $\frac{NP}{SD}=\frac{AN}{AB}$

Suy ra: $\frac{MN}{BD}=\frac{MP}{SB}=\frac{NP}{SD}$

Mà tam giác SBD đều nên $SB=BD=SD$

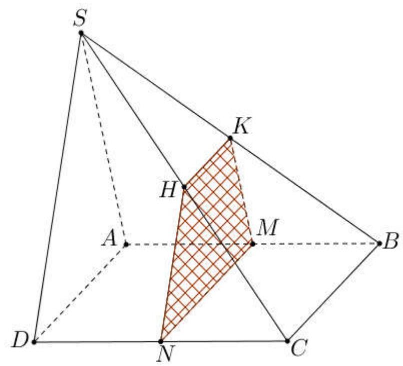
Vậy ta có: $MN = MP = NP$ hay tam giác MNP đều

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).

b) Thiết diện vừa tìm được là hình gì?

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK \,//\, SA$, $K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases} \Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH \,//\, SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện cần tìm là tứ giác $MNHK$.

b) Ba mặt phẳng $(ABCD)$, (SBC) và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC.

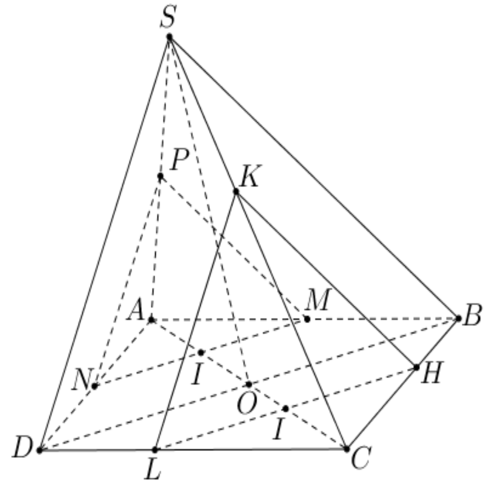
Mà $MN \,//\, BC \Rightarrow MN \,//\, HK$. Vậy thiết diện là một hình thang.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC và $AI = x$ $(0 < x < a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x.

Lời giải



a) *Trường hợp 1.* Xét I thuộc đoạn OA

Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN // BD$, $I \in MN$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (SAD) \cap (SBD) = SD \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = NP // SD$, $P \in SN$.

Vậy thiết diện là tam giác MNP.

Do $\begin{cases} (\alpha) // (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \Rightarrow MP // SB \\ (SAB) \cap (\alpha) = MP \end{cases}$. Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2. Điểm I thuộc đoạn OC, tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL (như hình vẽ).

b) *Trường hợp 1.* I thuộc đoạn OA

Ta có $S_{BCD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$

Do $MN // BD \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a} \Rightarrow S_{MNP} = \left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 S_{BCD} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC, tính tương tự ta có

$S_{MNP} = \left(\dfrac{HL}{BD}\right)^2 \cdot S_{BCD} = \left[\dfrac{2(a-x)}{a}\right]^2 \cdot \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Vậy $S_{td} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}; & I \in (OA) \\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}; & I \in (OC) \end{cases}$.

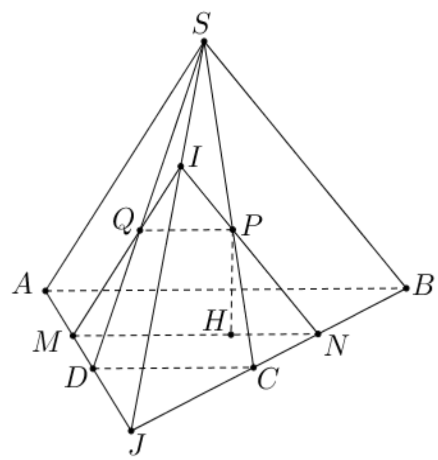
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$. Trên cạnh AD lấy điểm M.

a) Gọi N, P, Q theo thứ tự là giao điểm của mặt phẳng (α) và các cạnh BC, SC, SD. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Thiết diện là hình gì?

b) Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Chứng minh rằng điểm I nằm trên một đường thẳng cố định.

c) Đặt $AM = x$ $(0 < x < a)$. Tìm x để $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α)

$+ \begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (SAD) \cap (SAB) = SA \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = d_1 \quad (M \in d_1, d_1 // SA) \\ M \in (SAD) \cap (\alpha) \end{cases}$. Gọi $Q = d_1 \cap SD$.

$+ \begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = d_2 \ (M \in d_2, d_2 // AB) \\ M \in (ABCD) \cap (\alpha) \end{cases}$. Gọi $N = d_2 \cap BC$.

$+ \begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = d_3 \ (N \in d_3, d_3 // SB) \\ N \in (SBC) \cap (\alpha) \end{cases}$. Gọi $P = d_3 \cap SC$.

Vậy thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Vì $\begin{cases} MQ \subset (SAD) \\ NP \subset (SBC) \\ MQ \cap NP = I \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$.

Gọi $J = AD \cap BC$, khi đó I nằm trên đường thẳng cố định SJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c) Để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn thì điều kiện là $MN + PQ = MQ + NP$.

Ta có $\frac{DM}{DA} = \frac{MQ}{SA} \Leftrightarrow MQ = \frac{DM}{DA}.SA \Leftrightarrow MQ = \frac{a-x}{a}.2a = 2(a-x)$ (do $MNPQ$ là hình thang cân nên ta có $MQ = NP$).

$\frac{AM}{AD}=\frac{PQ}{CD}\Leftrightarrow PQ=\frac{AM}{AD}.CD\Leftrightarrow PQ=\frac{x}{a}.a=x$.

$\frac{MN}{AB}=\frac{JM}{JA}\Leftrightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{JD+DM}{JD+DA}\Leftrightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{\frac{a}{2}+a-x}{\frac{a}{2}+a}=\frac{3a-2x}{3a}\Leftrightarrow MN=\frac{3a-2x}{3a}.3a=3a-2x$.

Vậy: $MN+PQ=MQ+NP\Leftrightarrow 3a-2x+x=4(a-x)\Leftrightarrow x=\frac{a}{3}$.

Với $x=\frac{a}{3}$ thì $MQ=NP=\frac{4a}{3}$, $PQ=\frac{a}{3}$, $MN=\frac{7a}{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của P trên MN.

Ta có $PH=\sqrt{PN^2-HN^2}=\sqrt{PN^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{16a^2}{9}-a^2}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

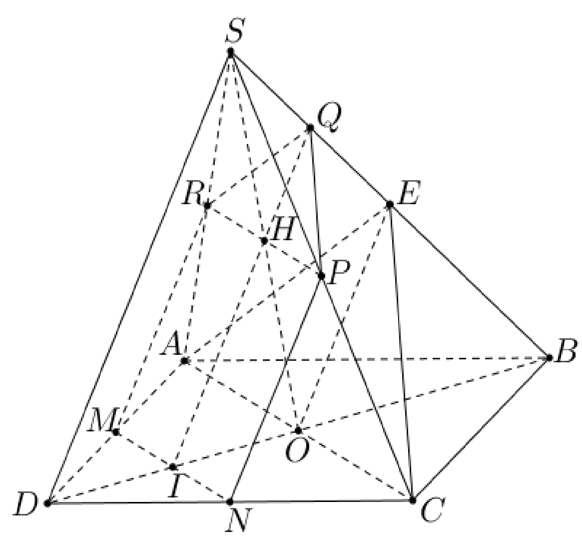
Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác $MNPQ$ là $r=\frac{PH}{2}=\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm của SB. Biết tam giác ACE đều và $AC=OD=a$. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (ACE) và đi qua điểm I trên đoạn OD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x (với $DI=x$). Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

$+\begin{cases}(\alpha)//(ACE)\\(ABCD)\cap(ACE)=AC\Rightarrow(ABCD)\cap(\alpha)=d_1\ (I\in d_1, d_1//AC)\\I\in(ABCD)\cap(\alpha)\end{cases}$. Gọi $\begin{cases}M=d_1\cap AD\\N=d_1\cap CD\end{cases}$.

$+\begin{cases}(\alpha)//(ACE)\\(SBD)\cap(ACE)=OE\Rightarrow(SBD)\cap(\alpha)=d_2\ (I\in d_2, d_2//OE)\\I\in(SBD)\cap(\alpha)\end{cases}$. Gọi $Q=d_2\cap SB$.

+ $\begin{cases}(\alpha)//(ACE)\\(SAB)\cap(ACE)=AE\Rightarrow(SAB)\cap(\alpha)=d_3\,(Q\in d_3,d_3//AE)\\Q\in(SAB)\cap(\alpha)\end{cases}$. Gọi $R=d_3\cap SA$.

+ $\begin{cases}(\alpha)//(ACE)\\(SBC)\cap(ACE)=CE\Rightarrow(SBC)\cap(\alpha)=d_4\,(Q\in d_4,d_4//CE)\\Q\in(SBC)\cap(\alpha)\end{cases}$. Gọi $P=d_4\cap SC$.

Vậy thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

b) + *Tính diện tích thiết diện trên.*

- Ta có $\begin{cases}(MNPQR)//(ACE)\\(SAC)\cap(MNPQR)=PR\Rightarrow PR//AC\\(SAC)\cap(ACE)=AC\end{cases}$

Do đó $QR//AE$, $QP//CE$, $PR//AC$ nên tam giác PQR là tam giác đều.

- Ta có $RP//MN$ (vì cùng song song với AC).

Mặt khác $IQ//OE\Rightarrow IQ//SD$ nên $\begin{cases}SD//(MNPQR)\\(SCD)\supset SD\\(MNPQR)\cap(SCD)=PN\end{cases}\Rightarrow PN//SD$.

Tương tự ta có $MR//SD$. Như vậy $MNPR$ là hình bình hành.

Lại có $EO\perp AC\Rightarrow HI\perp MN$ hay $PN\perp MN$, $RM\perp MN$. Vậy $MNPR$ là hình chữ nhật.

- Ta có $\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{DN}{DC}=\dfrac{DI}{DO}\Leftrightarrow\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{x}{a}\Leftrightarrow MN=x$, suy ra $RP=MN=x$. Tam giác PQR đều cạnh x nên diện tích của nó là $S_1=\dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}$.

- Tam giác ACE đều cạnh a nên $EO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SD=2EO=a\sqrt{3}$.

Ta có $\dfrac{PN}{SD}=\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{OI}{OD}\Leftrightarrow\dfrac{PN}{SD}=\dfrac{a-x}{a}\Leftrightarrow PN=\sqrt{3}(a-x)$.

Vì $MNPR$ là hình chữ nhật nên diện tích của nó là $S_2=PN.MN=\sqrt{3}x(a-x)$.

- Vậy diện tích của thiết diện $MNPQR$ là

$$S_0=S_1+S_2=\sqrt{3}x(a-x)+\frac{\sqrt{3}x^2}{4}=\frac{4\sqrt{3}ax-3\sqrt{3}x^2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}x(4a-3x).$$

+ *Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất?*

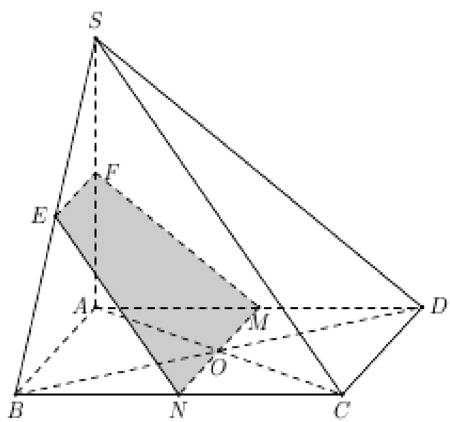
- Ta có $\dfrac{\sqrt{3}x(4a-3x)}{4}=\dfrac{\sqrt{3}\left[3x(4a-3x)\right]}{12}\le\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{3x+4a-3x}{2}\right)^2$

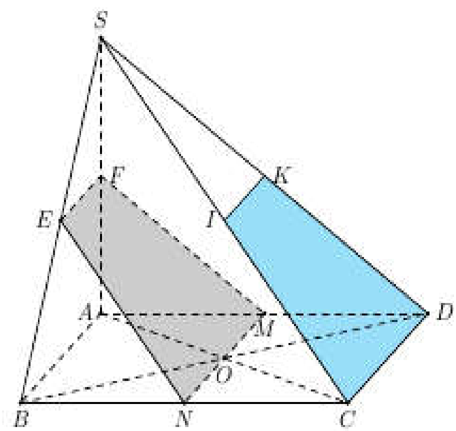
$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}x(4a-3x)}{4}\le\dfrac{\sqrt{3}a^2}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $3x=4a-3x\Leftrightarrow x=\dfrac{2a}{3}$.

- Như vậy diện tích thiết diện lớn nhất là $S_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{3}$ đạt được khi $x=\dfrac{2a}{3}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm giữa hai đường chéo. Tam giác SCD là tam giác đều cạnh $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SCD). Tính diện tích thiết diện tạo thành bởi mặt phẳng (P) và hình chóp.

Lời giải





Do mặt phẳng $(P)//(SCD)$ nên $(P)\cap AD=M$, $(P)\cap BC=N\Rightarrow MN//CD$.

Ta có MN đi qua O nên M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Tương tự như vậy $(P)\cap SB=E$, $(P)\cap SA=F$ suy ra E, F lần lượt là trung điểm SB, SA. Nên thu được thiết diện là tứ giác $MNEF$.

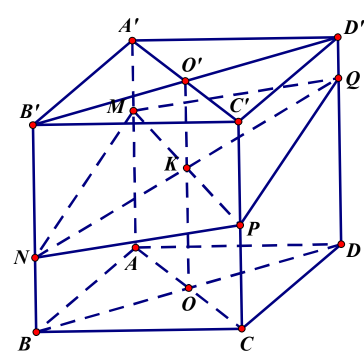
Gọi I, K lần lượt là trung điểm SC, SD.

Khi đó tứ giác $CDKI$ là ảnh qua phép tịnh tiến theo vecto $\overrightarrow{NC}$ của tứ giác $NMFE$.

Vì thế ta có được diện tích thiết diện là $S_{MNEF}=S_{DCIK}=\frac{3}{4}S_{SCD}=\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}.(2a)^2=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\frac{A'M}{AA'}=\frac{1}{3}$, $\frac{B'N}{BB'}=\frac{2}{3}$, $\frac{C'P}{CC'}=\frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Tính tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}(BB'C'C)//(AA'D'D)\\(MNP)\cap(BB'C'C)=NP\\(MNP)\cap(AA'D'D)=MQ\end{cases}\Rightarrow NP//MQ$.

Tương tự: $\begin{cases}(AA'B'B)//(CC'D'D)\\(MNP)\cap(AA'B'B)=MN\Rightarrow MN//PQ\\(MNP)\cap(CC'D'D)=PQ\end{cases}$

Suy ra mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

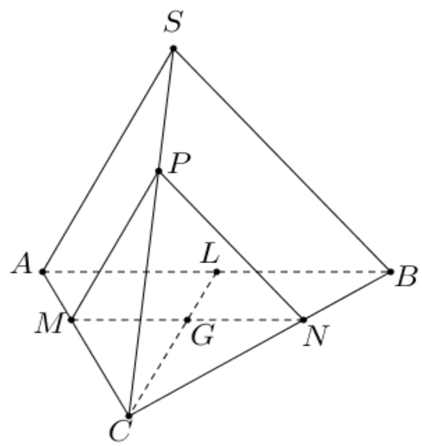
Gọi O, O', K lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', MNPQ$ thì O, O', K thẳng hàng.

Ta có $B'N + D'Q = 2.O'K = A'M + C'P \Rightarrow \frac{B'N}{BB'} + \frac{D'Q}{DD'} = \frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{6}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua G và song song với mặt phẳng (SAB), $(\alpha) \cap SC = P$. Tính tỷ số $\frac{SP}{SC}$.

Lời giải



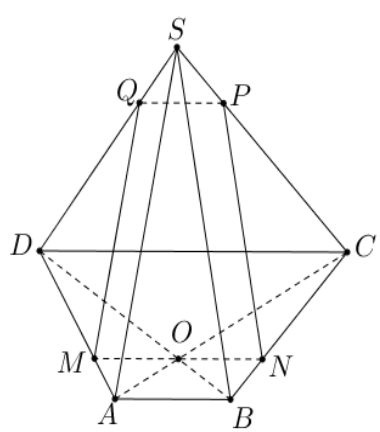
Gọi giao điểm của (α) với CA, CB lần lượt là M, N và gọi trung điểm AB là L. Ta có

$(\alpha)//(SAB) \Rightarrow MN//AB, MP//SA \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{AM}{AC} = \frac{LG}{LC} = \frac{1}{3}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$. Đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn CD bằng hai lần đáy nhỏ AB. Gọi $O = AC \cap BD$, mặt phẳng (α) qua O và song song với mặt phẳng (SAB), $(\alpha) \cap SC = P$.

Tính tỷ số $\frac{SP}{PC}$.

Lời giải



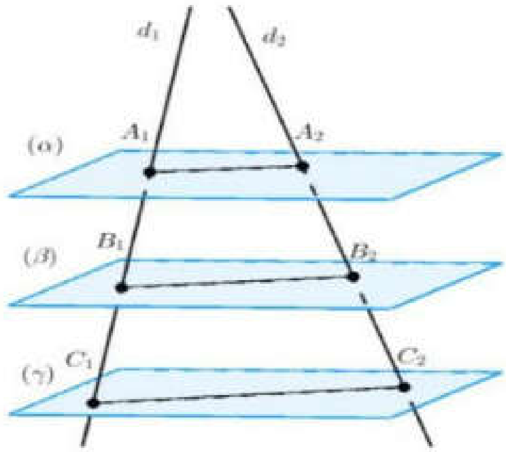
Gọi các giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh hình chóp như hình vẽ. Ta có

$$(\alpha)//(SAB) \Rightarrow PN//SB \Rightarrow \frac{SP}{PC}=\frac{BN}{NC}=\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}.$$

DẠNG 3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ TA-LÉT

Định lí Ta-let trong không gian

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai đường thẳng những đoạn thẳng tỷ lệ.



$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)//(\gamma)\\ d_1\cap(\alpha)=A_1, d_1\cap(\beta)=B_1, d_1\cap(\gamma)=C_1\\ d_2\cap(\alpha)=A_2, d_2\cap(\beta)=B_2, d_2\cap(\gamma)=C_2\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

Định lí đảo của định lí Thales trong không gian.

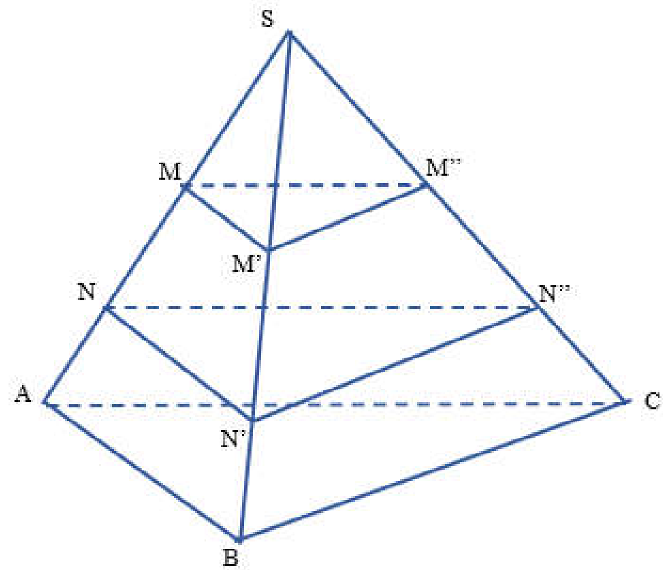
Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm $A_1, B_1, C_1 \in d_1$ và $A_2, B_2, C_2 \in d_2$ sao cho

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

Khi đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng. Hơn nữa, mặt phẳng này không duy nhất

Câu 37. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=9, SB=12, SC=15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM=4, MN=3, NA=2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), lần lượt đi qua M, N, cắt SB theo thứ tự tại M', N' và cắt SC theo thứ tự tại M'', N''. Tính độ dài các đoạn thẳng $SM', M'N', M''N'', N''C$.

Lời giải



Trong tam giác SAB có $MM' // AB$ nên $\frac{SM}{SA} = \frac{SM'}{SB}$. Suy ra $SM' = \frac{16}{3}$

Trong tam giác SAB có $NN' // AB$ nên $\frac{SN}{SA} = \frac{SN'}{SB}$. Suy ra $SN' = \frac{28}{3}$

Do đó $M'N' = SN' - SM' = 4$

Trong tam giác SAC, có $MM'' // AC$ nên $\frac{SM}{SA} = \frac{SM''}{SC}$. Suy ra $SM'' = \frac{20}{3}$

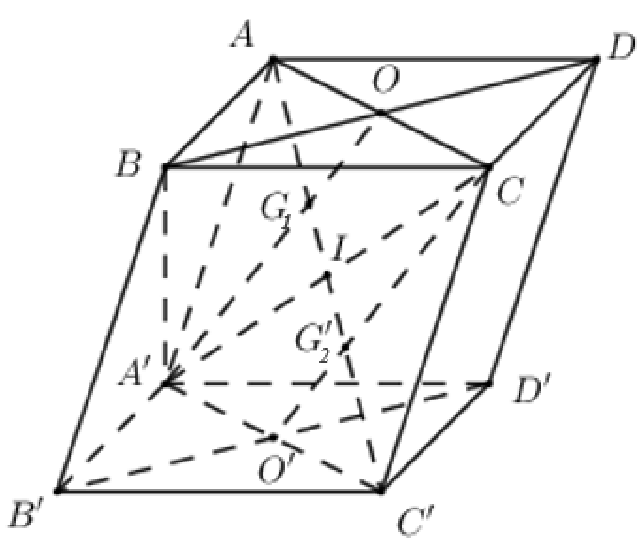
Trong tam giác SAC có $NN'' // AC$ nên $\frac{SN}{SA} = \frac{SN''}{SC}$. Suy ra $SN'' = \frac{35}{3}$

Do đó $M''N'' = SN'' - SM'' = 5$

$N''C = SC - SN'' = \frac{10}{3}$

Câu 38. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$. Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Lời giải:



Gọi O là giao điểm của AC và BD, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$, I là giao điểm của AC' và $A'C$.

Do $ACC'A'$ là hình bình hành nên I là trung điểm của $A'C$

G_1 là trọng tâm tam giác BDA' nên $\frac{A'G_1}{AO}=\frac{2}{3}$

Tam giác $AA'C$ có $A'O$ là trung tuyến, $\frac{A'G_1}{AO}=\frac{2}{3}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác $AA'C$.

Mà I là trung điểm $A'C$ nên $G_1\in AI$ và $AG_1=\frac{2}{3}AI$

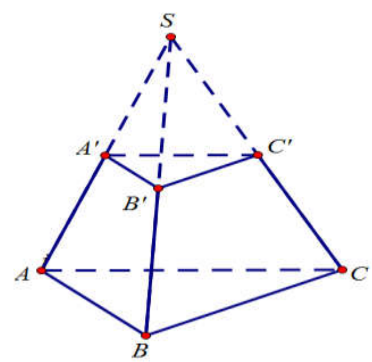
Mà $AI=\frac{1}{2}AC'$ nên $AG_1=\frac{1}{3}AC'$

Tương tự ta có $C'G_2=\frac{1}{3}AC'$

Suy ra G_1,G_2 chia AC' thành 3 đoạn thẳng bằng nhau

Câu 39. Cho hình chóp cụt tam giác $ABC.A'B'C'$ trong đó ABC là đáy lớn. Gọi S là điểm đồng qui của các đường thẳng AA',BB',CC'. Chứng minh $\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}$.

Lời giải



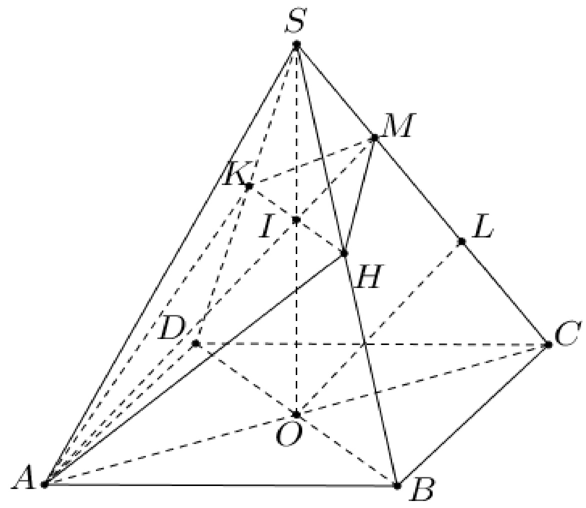
ΔSAB có $A'B//AB$. Định lí Ta – lét trong mặt phẳng cho: $\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}$ (1)

ΔSAC có $A'C'//AC$ nên $\frac{SA'}{SA}=\frac{SC'}{SC}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O, M là một điểm di động trên SC, (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BD. Tìm giao điểm H và K của (α) với SB,SD. Chứng minh rằng $\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}-\frac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

Lời giải



Giả sử AM cắt SO tại I.

(α) qua AM và song song với BD, nên (α) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến HK qua I và $HK//BD$ (H trên SB và K trên SD).

Ta có: $\frac{SB}{SH}=\frac{SD}{SK}=\frac{SO}{SI}\Rightarrow\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}=\frac{2SO}{SI}$.

Dựng $OL//AM$, ta có L là trung điểm CM (vì O là trung điểm của AC) $\Rightarrow LM=LC$.

Ta có: $\frac{SO}{SI}=\frac{SL}{SM}=\frac{SC-LC}{SM}=\frac{SC}{SM}-\frac{LC}{SM}$.

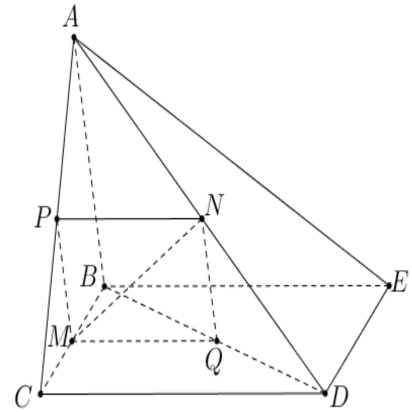
$\Rightarrow\frac{SO}{SI}=\frac{SC}{SM}-\frac{ML}{SM}$ (thay $LC=ML$)

Mà $\frac{ML}{MS}=\frac{OI}{SI}\Rightarrow\frac{SO}{SI}=\frac{SL}{SM}=\frac{SC}{SM}-\frac{IO}{SI}\Rightarrow\frac{SO}{SI}=\frac{SC}{SM}-\frac{SO-SI}{SI}\Rightarrow\frac{2SO}{SI}-\frac{SC}{SM}=1$

Vậy ta có: $\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}-\frac{SC}{SM}=2\frac{SO}{SI}-\frac{SC}{SM}=1$.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ và M,N là các điểm lần lượt di động trên BC, AD sao cho $\frac{BM}{MC}=\frac{AN}{ND}$. Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Lời giải



Áp dụng định lý Ta - lét đảo cho $B, M, C \in BC$ và $A, N, D \in AD$, từ tỉ lệ $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$ ta suy ra AB, MN, CD cùng song song với một mặt phẳng (β) nào đó.

Ta chọn mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD. Mặt phẳng (α) chính là mặt phẳng (ABE) với $E \in (BCD)$ sao cho $(BCDE)$ là hình bình hành.

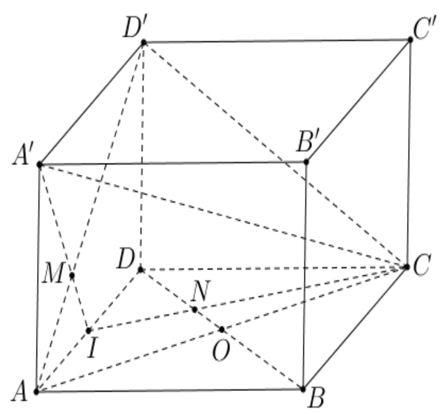
Khi đó $MN // (\alpha) // (\beta)$, mặt phẳng (α) cố định vì AB, CD cố định. Vậy (α) là mặt phẳng cần tìm.

Câu 42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh bằng a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh rằng khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh rằng khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN // A'C$.

Lời giải



a) Từ giả thiết ta có $\frac{AM}{DN} = \frac{MD'}{NB} = \frac{AD'}{DB}$, theo định lí Ta – lét đảo, suy ra AD, MN, $D'B$ luôn song song với một mặt phẳng. Vậy MN luôn song song với một mặt phẳng (P), mà mặt phẳng (P) song song với AD và $D'B$ nên ta chọn mặt phẳng (P) là mặt phẳng $(A'D'CB)$ cố định.

b) Gọi O là giao điểm của DB và AC. Ta có

$$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3},\ DO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \frac{2}{3}DO$$

Suy ra N là trọng tâm của tam giác ADC.

Chứng minh tương tự, ta có M là trọng tâm tam giác $A'AD$. Vậy CN và $A'M$ cắt nhau tại I là trung điểm của AD. Ta có

$$\frac{IM}{IA'}=\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN//A'C.$$

Nhận xét: Trong phần a) có thể giải theo cách khác như sau:

Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với mặt phẳng $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt DB tại N'. Theo định lí

Ta – lét ta có $\frac{AM}{AD'}=\frac{DN'}{DB}$ (*).

Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD'=DB=a\sqrt{2}$. Từ (*) ta có $AD=DN'$

Suy ra $DN'=DN\Rightarrow N'\equiv N\Rightarrow MN\subset(Q)$. Mà $(Q)//(A'D'CB)$ suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

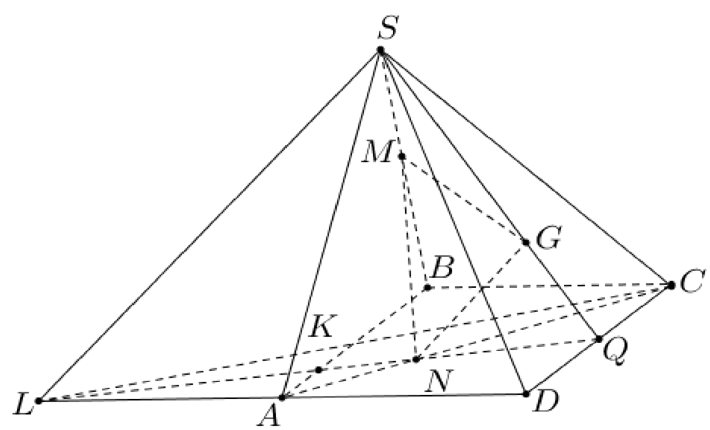
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên SB, AC lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{BM}{MS}=\frac{NC}{NA}=x$, $0<x<1$. Gọi G là trọng tâm ΔSCD.

a) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng cố định khi x thay đổi.

b) Tìm x để $(MNG)//(SAD)$.

c) Tìm x để $NG//(SAB)$.

Lời giải



a) Ta có $\frac{BM}{MS}=\frac{NC}{NA}\Rightarrow BC, MN, SA$ song song với mặt phẳng (P) nào đó. Mà

$BC//AD\Rightarrow AD, MN, SA$ song song với mặt phẳng (P) nào đó.

$AD\cap SA=\{A\}\Rightarrow MN//(P)//(AD,SA)\equiv(SAD)$ - cố định

$\Rightarrow MN//(SAD)$ cố định.

b) Tìm x để $(MNG)//(SAD)$.

$$\left.\begin{array}{l}(MNG)//(SAD)\\ MN//(SAD)\end{array}\right\}\Rightarrow NG//(SAD)(1).$$

$NG \subset (NGQ)$ (Q là trung điểm của DC).

$(NGQ) \equiv (QGL)$ (với $NQ \cap AD = \{L\}$), $(GQL) \equiv (SLQ)$ (vì $QG \equiv SQ$)

$\Rightarrow NG \subset (SLQ) \cap (SAD) = SL \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow NG // SL$. Theo định lí Ta-let ta có:

$\frac{NG}{SL} = \frac{QG}{QS} = \frac{QN}{QL} = \frac{1}{3}$(vì G là trọng tâm ΔSLQ)

Mà Q là trung điểm $DC \Rightarrow N$ là trọng tâm $\Delta LCD \Rightarrow A$ là trung điểm $LD \Rightarrow \frac{NC}{NA} = 2 \Rightarrow x = 2$.

c) Tìm x để $NG // (SAB)$

$NG \subset (NGQ) \equiv (SKQ)$ với $\{K\} = LQ \cap AB$ mà $(SKQ) \cap (SAB) = SK$,

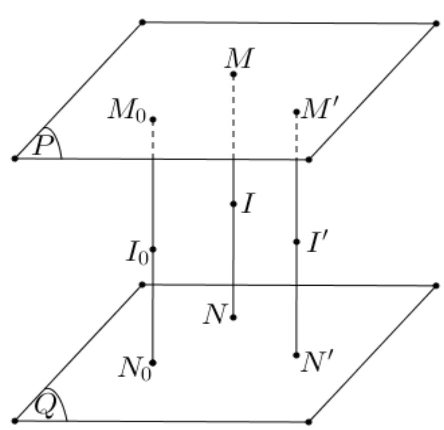
$NG // (SAB)(gt) \Rightarrow NG // SK$,

Theo định lí Talet $\Rightarrow \frac{QN}{NK} = \frac{QG}{GS} = \frac{1}{2}$ mà $AB // CD \Rightarrow \frac{NQ}{NK} = \frac{NC}{NA} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ thì $NG // (SAB)$.

Câu 44. Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P), (Q). Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k, k \neq 0$.

Lời giải



Thuận: Giả sử $M \in (P), N \in (Q)$ và điểm I thuộc đoạn MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$.

Trên hai mặt phẳng (P) và (Q) ta lần lượt lấy hai điểm cố định M_0 và N_0 rồi lấy điểm I_0 thuộc đoạn M_0N_0 sao cho $\frac{M_0I_0}{N_0I_0} = k$. Khi đó I_0 cố định. Suy ra $\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0}$.

$$\Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N_0} = \frac{IM + IN}{I_0M_0 + I_0N_0} = \frac{MN}{M_0N_0}$$

Áp dụng định lí Talet đảo, suy ra $I_0I \subset (R)$, $(R)//(P)$, $(R)//(Q)$, mặt phẳng (R) cố định vì nó đi qua điểm cố định I_0 và song song mặt phẳng cố định (P). Vậy $I \in (R)$ cố định.

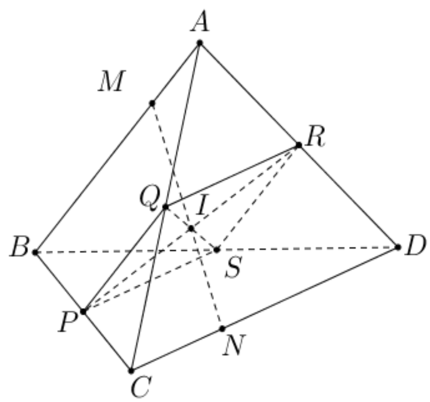
Đảo: Ngược lại, lấy điểm I' bất kì trên mặt phẳng (R), qua I' ta kẻ một đường thẳng cắt $(P),(Q)$ lần lượt tại M', N'. Xét cát tuyến M_0N_0, MN và ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$. Theo định lí Ta – lét ta có $\frac{I'M'}{I_0M_0} = \frac{I'N'}{I_0N_0} = \frac{M'N'}{M_0N_0}$.

Từ đó suy ra I' thuộc $M'N'$ và $\frac{I'M'}{I'N'} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$.

Vậy tập hợp I thuộc đoạn MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$ là mặt phẳng (R) nói trên.

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh AB và CD. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

Lời giải



Giả sử I là trung điểm của MN. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BC, CA, AD và DB.

Vì $\frac{PB}{IM} = \frac{PC}{IN} = \frac{BC}{MN}$ nên theo định lí Ta – lét đảo thì BM, PI, CN cùng song song với một mặt phẳng, mặt phẳng này song song với AB và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua P và song song với mặt phẳng đó thì rõ ràng $I \in (\alpha)$. Mặt phẳng này cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là hình bình hành $PQRS$. Vì M chỉ chạy trên đoạn AB, N chạy trên CD nên điểm I luôn nằm trong tứ diện, tức là I luôn nằm trong hình bình hành $PQRS$.