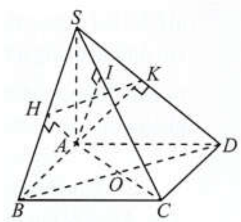
BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

- CHƯƠNG 8. QUAN HỆ VUÔNG GÓC
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Câu 1. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, O là giao điểm của AC và BD, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD.



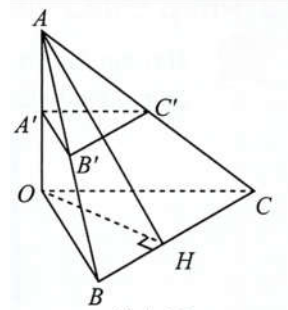
Hình 8

Chứng minh rằng:
a) $CB \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAD)$;
b) $HK \perp AI$.

Lời giải

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC, SA \perp CD$
Ta có CB vuông góc với hai đường thẳng AB và SA cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SAB) nên $CB \perp (SAB)$
Ta có CD vuông góc với hai đường thẳng AD và SA cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SAD) nên $CD \perp (SAD)$
b) Vì $BC \perp (SAB); AH \in (SAB)$ nên $BC \perp AH$
Ta có AH vuông góc với hai đường thẳng SB và BC cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SBC) nên $AH \perp (SBC)$
Mà $SC \in (SBC)$. Suy ra $AH \perp SC$
Vì $CD \perp (SAD); AK \in (SAD)$ nên $CD \perp AK$
Ta có AK vuông góc với hai đường thẳng SD và CD cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SCD) nên $AK \perp (SCD)$
Mà $SC \in (SCD)$. Suy ra $AK \perp SC$
Ta có SC vuông góc với hai đường thẳng AK và AH cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (AHK) nên $SC \perp (AHK)$
Mà $HK \in (AHK)$ nên $SC \perp HK$
vì $SA \perp (ABCD); DB \in (ABCD)$ nên $SA \perp DB$
Mà $HK // BD$ nên $HK \perp SA$
Ta có HK vuông góc với hai đường thẳng SA và SC cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SAC) nên $HK \perp (SAC)$
Mà $AI \in (SAC)$ nên $HK \perp AI$

Câu 2. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) và có A', B', C' lần lượt là trung điểm của OA, AB, AC. Vẽ OH là đường cao của tam giác OBC.



Hình 15

Chứng minh rằng:

a) $OA \perp \left(A'B'C'\right)$;

b) $B'C' \perp (OAH)$.

Lời giải

a) Tam giác AOB có $A'B'$ là đường trung bình nên $A'B' // AB$ hay $A'B' // (OBC)$

Tam giác AOC có $A'C'$ là đường trung bình nên $A'C' // AC\ hay\ A'C' // (OBC)$

Suy ra $\left(A'B'C'\right) // (OBC)$

Mà $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp \left(A'B'C'\right)$

b) Vì $OA \perp (OBC); BC \in (OBC)$ nên $OA \perp CB$

Ta có đường thẳng BC vuông góc với hai đường thẳng OH và OA cắt nhau cùng thuộc (AOH) nên $BC \perp (OAH)$

Mà tam giác ABC có $B'C'$ là đường trung bình nên $B'C' // BC$

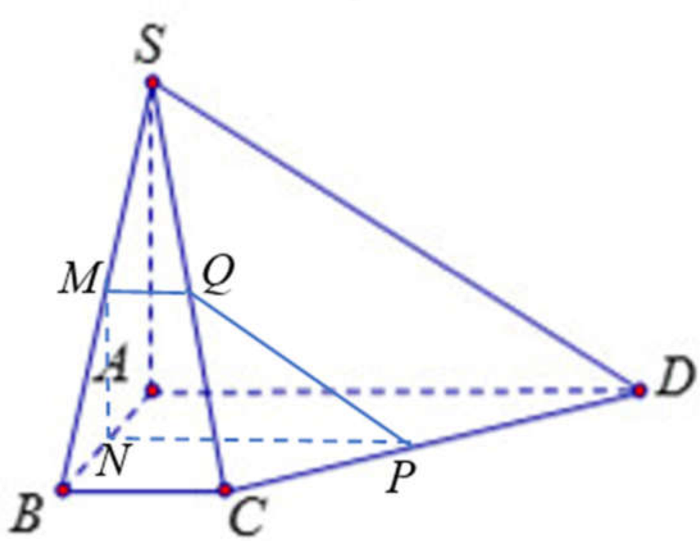
Suy ra $B'C' \perp (AOH)$

Câu 3. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với AB là cạnh góc vuông và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cho M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SB, AB, CD, SC. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp (MNPQ)$;

b) $MQ \perp (SAB)$.

Lời giải



a) Tam giác SAB có MN là đường trung bình nên $MN // SA$

Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $MN \perp (ABCD)$. Suy ra $MN \perp AB$

Hình thang $ABCD$ có NP là đường trung bình nên $NP // BC // AD$. Mà $BC \perp AB$ nên $NP \perp AB$

Ta có AB vuông góc với hai đường thẳng MN và NP cắt nhau cùng thuộc $(MNPQ)$ nên $AB \perp (MNPQ)$

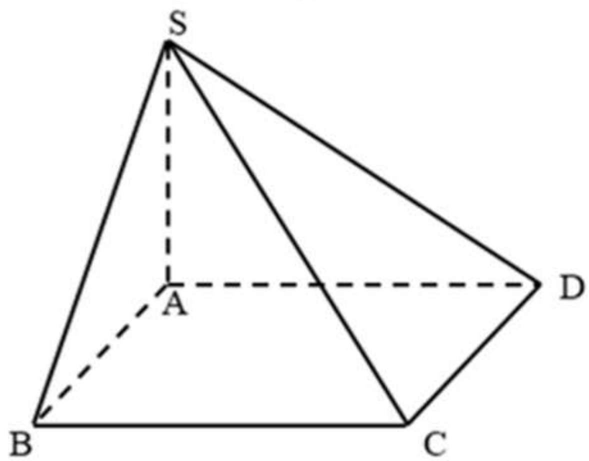
b) Vì $AB \perp (MNPQ); MQ \in (MNPQ)$ nên $AB \perp MQ$

Tam giác SBC có MQ là đường trung bình nên $MQ // BC$. Mà $SA \perp BC$ nên $SA \perp MQ$

Ta có MQ vuông góc với hai đường thẳng SA và AB cắt nhau cùng thuộc (SAB) nên $MQ \perp (SAB)$

Câu 4. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm C, đường thẳng CD và tam giác SCD trên mặt phẳng (SAB).

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AD; SA \perp BC$

Ta có: $CB \perp AB, CB \perp SA$ nên $CB \perp (SAB)$

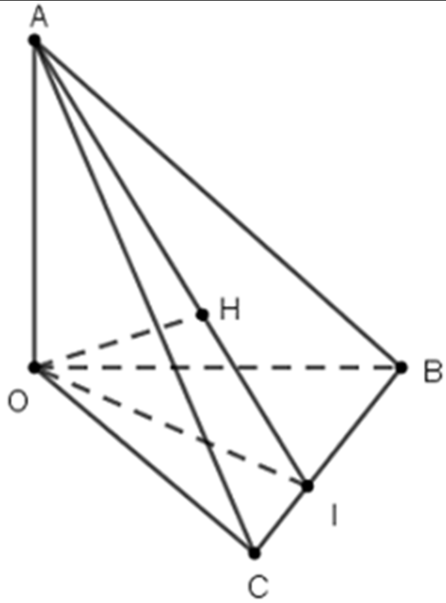
Vậy hình chiếu vuông góc của C lên (SAB). Ta có $DA \perp AB, DA \perp SA \Rightarrow DA \perp (SAB)$

Vậy hình chiếu vuông góc của D lên (SAB) là điểm A

Suy ra hình chiếu vuông góc của CD lên (SAB) là AB; hình chiếu vuông góc của tam giác SCD lên (SAB) là tam giác SAB.

Câu 5. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Vẽ đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H. Chứng minh $AH \perp BC$.

Lời giải



Vì $OA \perp OB, OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$. Suy ra $OA \perp BC$

$OH \perp (ABC); BC \in (OBC)$ nên $BC \perp OH$

Ta có BC vuông góc với hai đường thẳng AH và OA cắt nhau cùng thuộc (OAH) nên $BC \perp (OAH)$

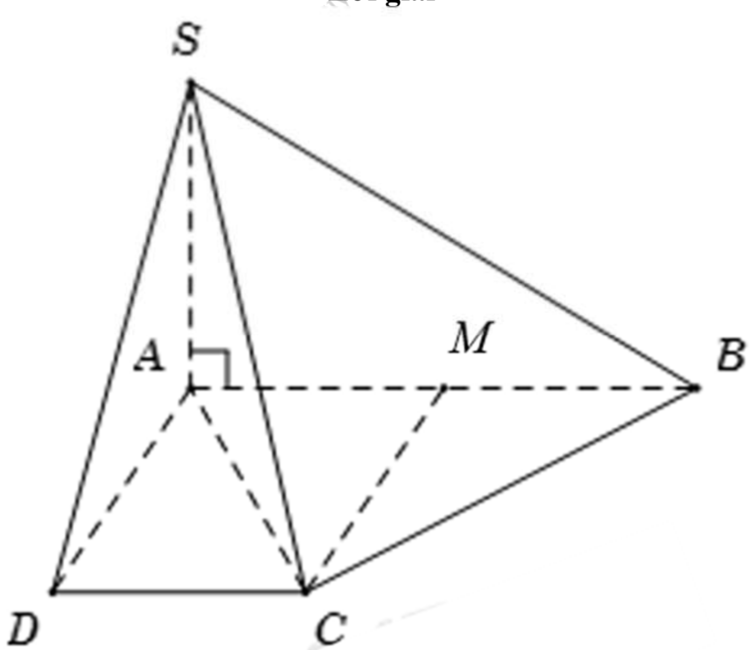
Suy ra $BC \perp AH$

Câu 6. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2CD$.

a) Chứng minh $CD \perp (SAD)$.

b) Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $CM \perp (SAB)$.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$

Ta có: $DC \perp AD; DC \perp SA$ nên $DC \perp (SAD)$

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CM$

Ta có: $AB = 2CD$ nên $AM = CD$. Suy ra $AMCD$ là hình chữ nhật nên $CM \perp AB$

Mà $CM \perp SA$

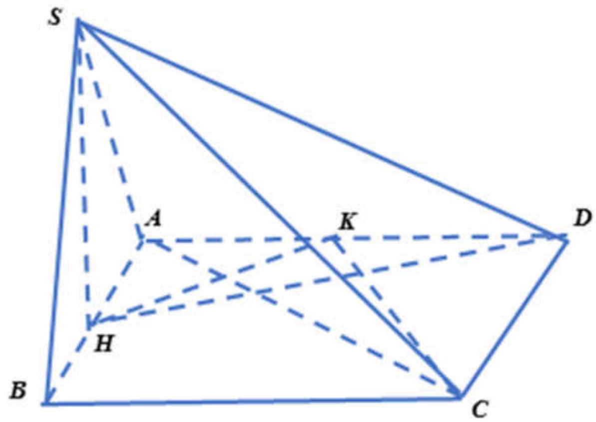
Suy ra: $CM \perp (SAB)$

Câu 7. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình vuông $ABCD$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của AB,AD. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại H, lấy điểm S. Chứng minh rằng:

a) $AC\perp(SHK)$;

b) $CK\perp(SDH)$.

Lời giải



a) Tam giác ABD có HK là đường trung bình nên $HK//BD$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp BD$. Suy ra $AC\perp HK$ vì $SH\perp(ABCD)$ nên $SH\perp AC$

Ta có: $AC\perp SH, AC\perp HK$ nên $AC\perp(SHK)$

b) Ta có tam giác AHD và tam giác DKC bằng nhau nên $DH\perp CK$ Mà $SH\perp(ABCD)$ nên $SH\perp CK$

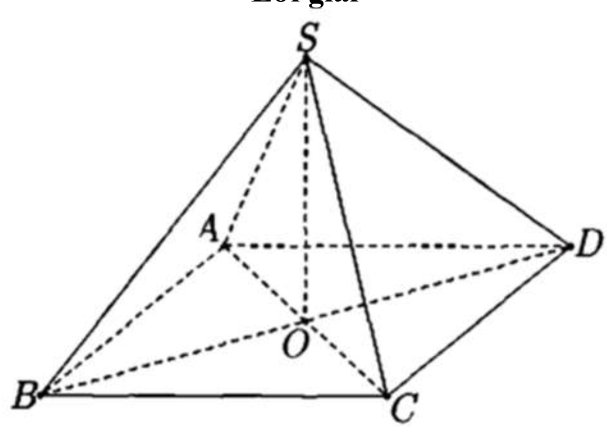
Suy ra $CK\perp(SDH)$

Câu 8. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, có các cạnh bên đều bằng $2a$.

a) Tính góc giữa SC và AB.

b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SAB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) $AB//CD$ nên góc giữa SC và AB là góc giữa SC và $CD:\widehat{SCD}$

$$\cos\widehat{SCD}=\frac{(2a)^2+a^2-(2a)^2}{2.2a\cdot a}=\frac{1}{4}$$

Suy ra $\widehat{SCD}=75,5^\circ$

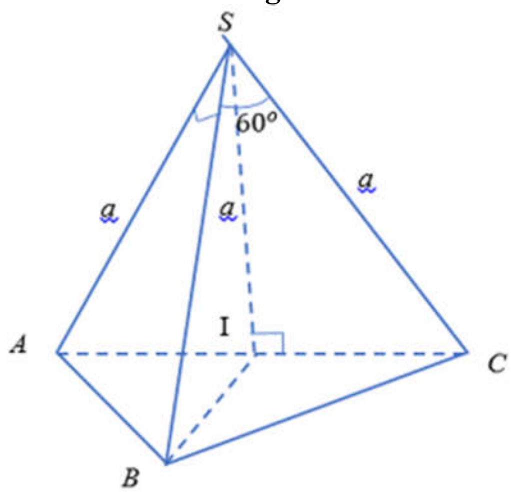
b) Kẻ $SO\perp(ABCD)$. Do các cạnh bên của hình chóp bằng nhau nên O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có: $AO\perp OB; AC=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a=2a; AO=BO=\frac{1}{2}\cdot 2a=a$

Hình chiếu vuông góc của tam giác SAB là tam giác OAB có diện tích là $\frac{1}{2}\cdot a\cdot a=\frac{1}{2}\cdot a^2$

Câu 9. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a, \widehat{ASB}=90^\circ$, $\widehat{BSC}=60^\circ$ và $\widehat{ASC}=120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Chứng minh $SI\perp(ABC)$.

Lời giải



Tam giác SAB vuông tại S
có: $AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=a\sqrt{2}$

Tam giác SBC có: $SB=SC=a, \widehat{BSC}=60^\circ$ nên tam giác SBC đều. Suy ra $BC=a$

Tam giác SAC có: $AC=\sqrt{SA^2+SC^2-2SA\cdot SC\cdot\cos\widehat{ASC}}=a\sqrt{3}$. Tam giác ABC có $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B. Mà I là trung điểm AC nên $BI=\frac{AC}{2}=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ Tam giác SAC cân cạnh a có SI là trung tuyến nên $SI\perp AC$. Suy ra: $SI=\sqrt{SA^2-AI^2}=\frac{a}{2}$.

Tam giác SIB có $SI^2+IB^2=SB^2$ nên tam giác SIB vuông tại I. Ta có: $SI\perp IB; SI\perp AC$ nên $SI\perp(ABC)$

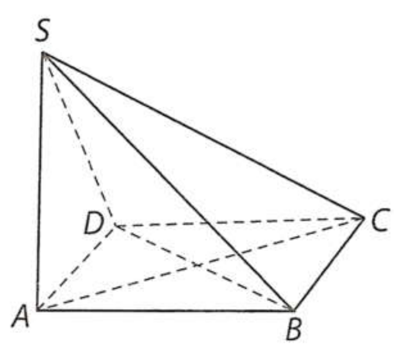
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $BC\perp(SAB)$;

b) $BD\perp(SAC)$.

Lời giải

(H.7.4)



Hình 7.4

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$, mà $BC \perp AB$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AB nên $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BD$, mà $BD \perp AC$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AC nên $BD \perp (SAC)$.

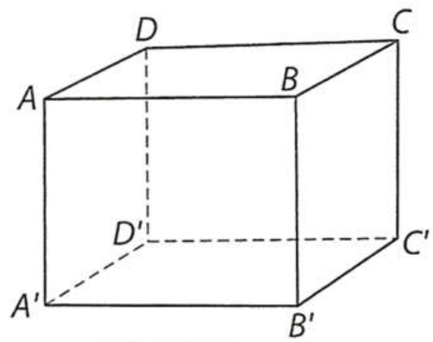
Câu 11. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $AA' \perp \left(A'B'C'D'\right)$;

b) $BB' \perp (ABCD)$.

Lời giải

(H.7.5)



Hình 7.5

a) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $(ABCD) // \left(A'B'C'D'\right)$ nên $AA' \perp \left(A'B'C'D'\right)$.

b) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $AA' // BB'$ nên $BB' \perp (ABCD)$.

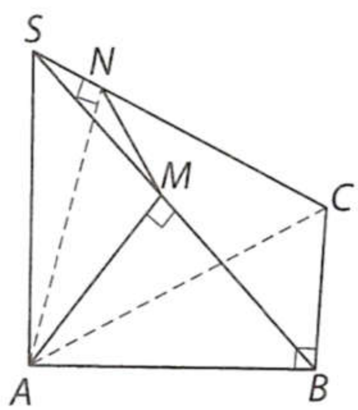
Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Kẻ AM vuông góc với SB tại M và AN vuông góc với SC tại N. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$;

b) $AM \perp (SBC)$;

c) $SC \perp (AMN)$.

Lời giải



Hình 7.26

a) Ta có: $BC \perp AB$ và $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$, suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AM$, mà $AM \perp SB$, suy ra $AM \perp (SBC)$.

c) Vì $AM \perp (SBC)$ nên $AM \perp SC$, mà $AN \perp SC$, suy ra $SC \perp (AMN)$.

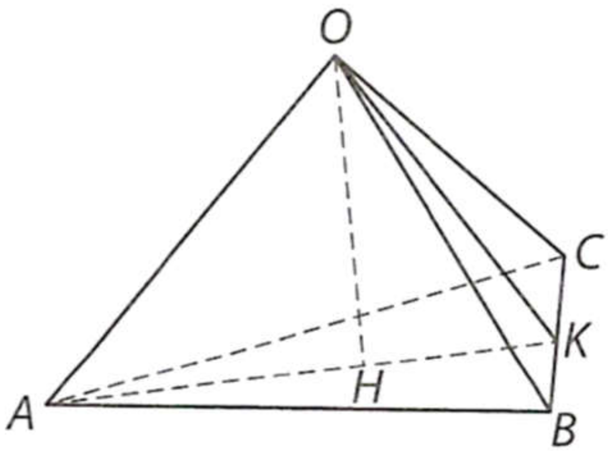
Câu 13. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (OAH)$;

b) H là trực tâm của tam giác ABC;

c) $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Lời giải



Hình 7.27

a) Vì $OA \perp OB, OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$, suy ra $OA \perp BC$.

Vì $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp BC$, suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Vì $BC \perp (OAH)$ nên $BC \perp AH$. Tương tự, $CA \perp BH$, do đó H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Gọi K là giao điểm của AH và BC, ta có: $OK \perp BC$ và $OA \perp OK$ nên OK là đường cao của tam giác vuông OBC và OH là đường cao của tam giác vuông OAK.

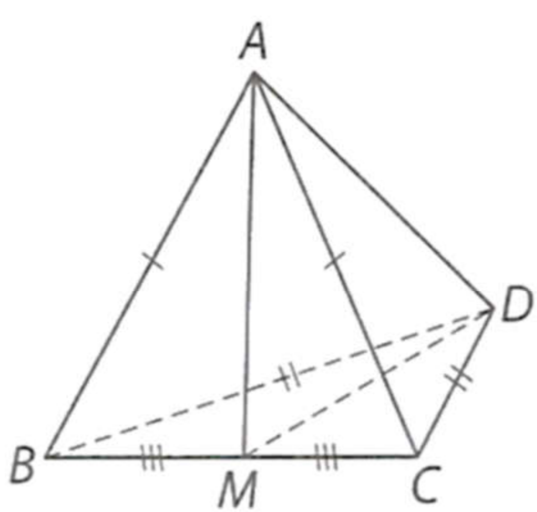
Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông OBC và OAK, ta có:

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OK^2}$ và $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Từ đó suy ra: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC$ và $DB=DC$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.

Lời giải



Hình 7.28

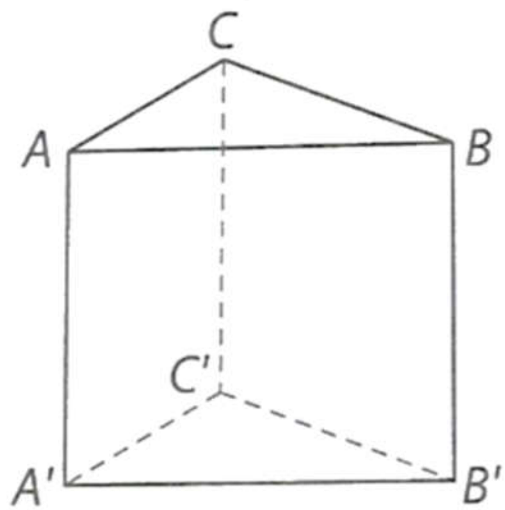
Gọi M là trung điểm của BC, ta có: $BC \perp AM, BC \perp MD$. Do đó $BC \perp (AMD)$, suy ra $BC \perp AD$.

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp \left(A'B'C'\right)$;

b) $B'C' \perp \left(ABB'A'\right)$.

Lời giải



Hình 7.29

a) Vì $AA' \perp (ABC), AA' // BB'$ và $(ABC) // (A'B'C')$ nên $BB' \perp (A'B'C')$.

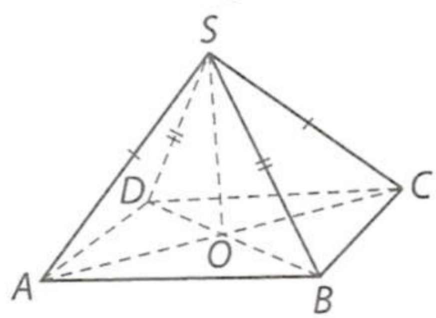
b) Vì $BC \perp AB, BC \perp BB'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, mà $BC // B'C'$, suy ra $B'C' \perp (ABB'A')$.

Câu 16. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$;

b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



Hình 7.30

a) Vì O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC và BD, suy ra $SO \perp AC, SO \perp BD$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.

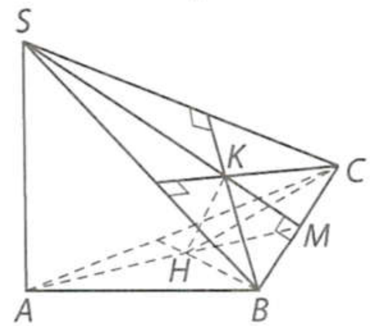
b) Vì $AC \perp BD, AC \perp SO$ nên $AC \perp (SBD)$. Tương tự, ta được $BD \perp (SAC)$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAH)$ và các đường thẳng AH, BC, SK đồng quy;

b) $SB \perp (CHK)$ và $HK \perp (SBC)$.

Lời giải



Hình 7.31

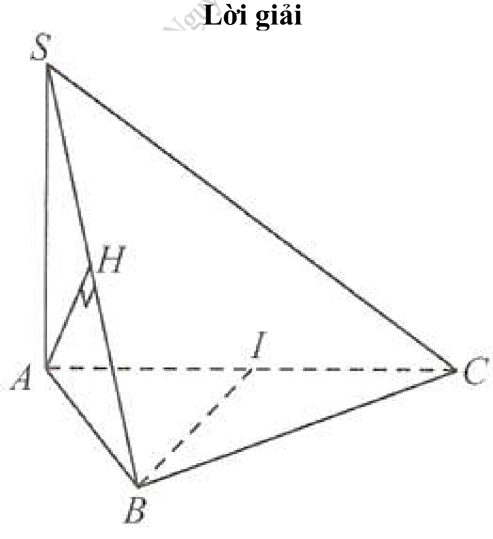
a) Vì $BC \perp SA, BC \perp AH$ nên $BC \perp (SAH)$. Gọi M là giao điểm của AH và BC, ta có: $BC \perp (SAM)$, suy ra $BC \perp SM$, mà K là trực tâm của tam giác SBC nên SM đi qua K. Do đó, SK, AH, BC đồng quy tại M.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp CH$, mà $CH \perp AB$, suy ra $CH \perp (SAB)$. Do đó $CH \perp SB$, lại có $SB \perp CK$ nên
$SB \perp (CHK)$. Từ đó ta có $SB \perp HK$, tương tự, ta chứng minh được
$SC \perp (BHK)$, suy ra $SC \perp HK$. Do đó $HK \perp (SBC)$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi I là trung điểm của AC. Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$. Chứng minh rằng:

a) SA vuông góc với các cạnh đáy;
b) $BC \perp (SAB)$;
c) $BI \perp (SAC)$, từ đó suy ra $BI \perp SC$;
d) $AH \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AH \perp SC$.

Lời giải



Hình 7

a) Vì $SA \perp (ABC)$ và AB, BC, CA cùng nằm trong (ABC) nên $SA \perp AB, SA \perp BC, SA \perp CA$.

b) Ta có $BC \perp AB$ (vì ΔABC vuông tại B) và $BC \perp SA$ (chứng minh trên), suy ra $BC \perp (SAB)$.

c) Do ΔABC vuông cân tại B và I là trung điểm của AC nên $BI \perp AC$ (1).
Ta có $SA \perp (ABC)$ và $BI \subset (ABC)$, suy ra $SA \perp BI$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BI \perp (SAC)$, suy ra $BI \perp SC$.

d) Theo giả thiết ta có $AH \perp SB$ (3).
Theo câu b) ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$.(4)

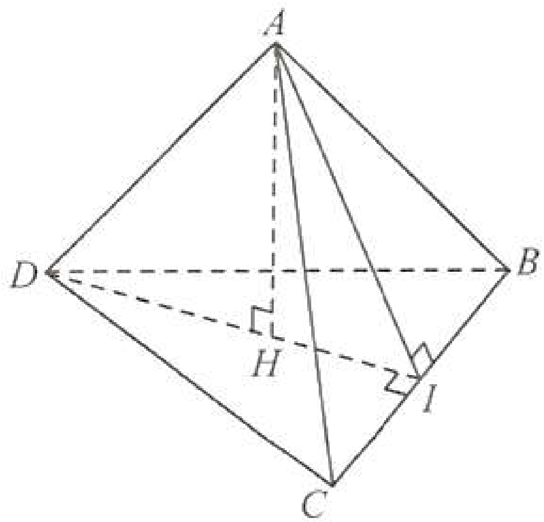
Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và BCD là các tam giác cân tại A và D. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $BC \perp AD$.

b) Kẻ AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải



Hình 9

a) Tam giác ABC cân tại A và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.(1)

Tam giác DCB cân tại D và I là trung điểm của BC nên $DI \perp BC$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AID)$, suy ra $BC \perp AD$.

b) Ta có $AH \perp DI$ và $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (ADI)$, $AH \subset (ADI)$), suy ra $AH \perp (BCD)$.

Câu 20. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, SB = AB$ và $SB \perp (ABC)$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC, AB. Chứng minh rằng:

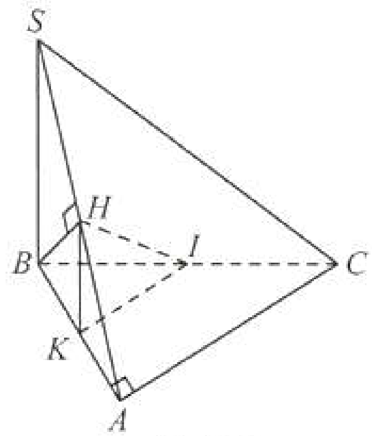
a) $AC \perp (SAB)$;

b) $BH \perp (SAC)$;

c) $KI \perp SA$;

d) $AB \perp IH$.

Lời giải



Hình 10

a) Ta có $AC \perp AB$ (vì ΔABC vuông tại A) và $AC \perp SB$ (vì $SB \perp (ABC)$), suy ra $AC \perp (SAB)$.

b) Vì $SB = AB$ nên ΔSAB cân tại B. Mà H là trung điểm của SA, suy ra $BH \perp SA$.(1)

Ta cũng có $AC \perp (SAB)$ và $BH \subset (SAB)$, suy ra $AC \perp BH$.(1)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$.

c) ΔABC có K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC nên KI là đường trung bình của ΔABC, suy ra $KI // AC$. Ta lại có $AC \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp SA$.

d) ΔSAB có H, K lần lượt là trung điểm của SA, AB nên HK là đường trung bình của ΔSAB, suy ra $HK // SB$. Mặt khác $SB \perp AB$, suy ra $HK \perp AB$.(3)

Ta có $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp AB$.(4)

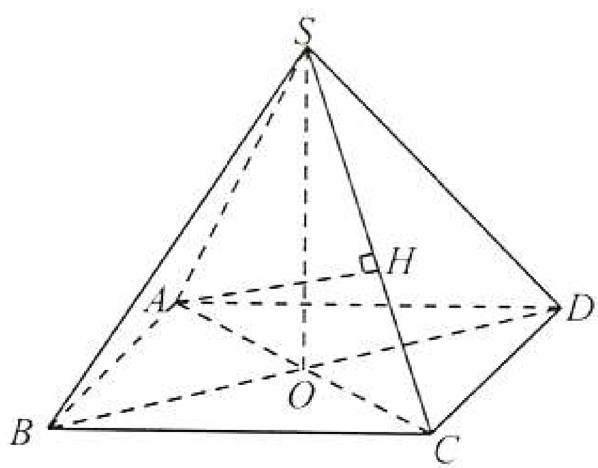
Từ (3) và (4) suy ra $AB \perp (HIK)$, suy ra $AB \perp IH$.

Câu 21. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng $SA = SB = SC = SD, SO = 2a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác SAC.

Lời giải



Hình 1

a) Ta có $SA = SC$, suy ra ΔSAC cân tại S, suy ra $SO \perp AC$.(1)

Ta có $SB = SD$, suy ra ΔSBD cân tại S, suy ra $SO \perp BD$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC = 2a, OC = a$,

$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = 3a$.

Vẽ đường cao AH của tam giác SAC. Ta có:

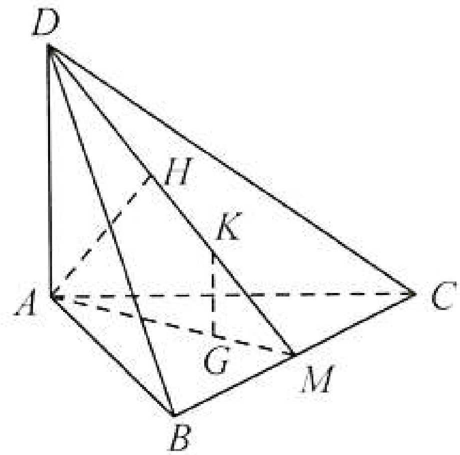
$$AH=\frac{SO\cdot AC}{SC}=\frac{2a\sqrt{2}\cdot 2a}{3a}=\frac{4a\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA\perp(ABC), ABC$ là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH\perp MD$ tại H.

a) Chứng minh rằng $AH\perp(BCD)$.

b) Gọi G,K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh rằng $GK\perp(ABC)$.

Lời giải



Hình 3

a) Ta có $BC\perp DA, BC\perp AM$, suy ra

$BC\perp(ADM)$, suy ra $BC\perp AH$. Ta lại có $AH\perp DM$, suy ra $AH\perp(BCD)$.

b) Ta có $\frac{MK}{MD}=\frac{MG}{MA}=\frac{1}{3}$, suy ra $GK//AD$.

Ta lại có $AD\perp(ABC)$, suy ra $GK\perp(ABC)$.

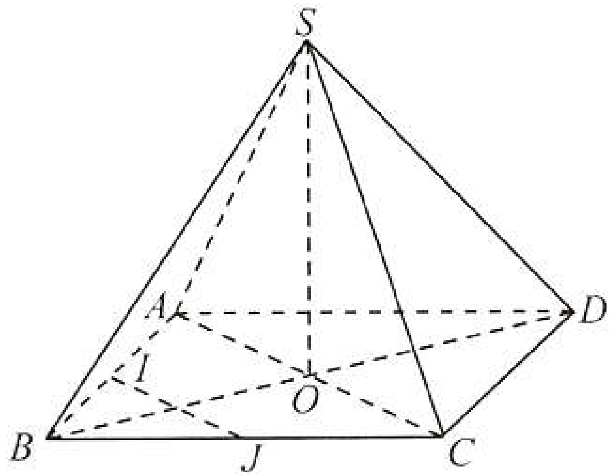
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, O là giao điểm của hai đường chéo, $SA=SC, SB=SD$.

a) Chứng minh rằng $SO\perp(ABCD)$.

b) Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BA,BC. Chứng minh rằng $IJ\perp(SBD)$.

c) Chứng minh rằng $BD\perp(SAC)$.

Lời giải

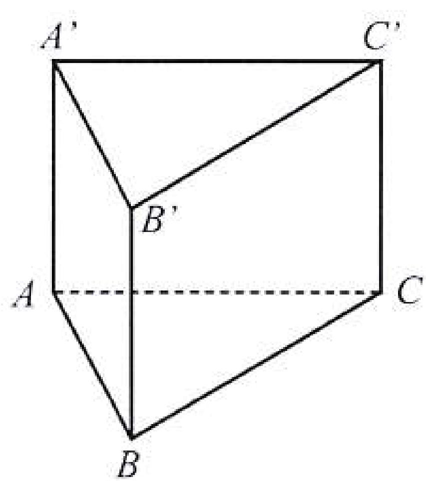


Hình 4

a) Ta có $SA = SC$, suy ra ΔSAC cân tại S, suy ra $SO \perp AC$.(1)
Tương tự ta có $SO \perp BD$.(2)
Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.
b) Ta có $AC \perp BD$ và $AC \perp SO$, suy ra $AC \perp (SBD)$.
Ta có IJ là đường trung bình của ΔABC nên suy ra $IJ // AC$, suy ra $IJ \perp (SBD)$.
c) Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$, suy ra $BD \perp (SAC)$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ (Hình 7). Chứng minh rằng:
a) $BB' \perp \left(A'B'C'\right)$;
b) $AA' \perp \left(A'B'C'\right)$.

Lời giải



Hình 7

a) Vì $BB' // AA'$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $BB' \perp \left(A'B'C'\right)$.
b) Vì $\left(A'B'C'\right) // (ABC)$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp \left(A'B'C'\right)$.

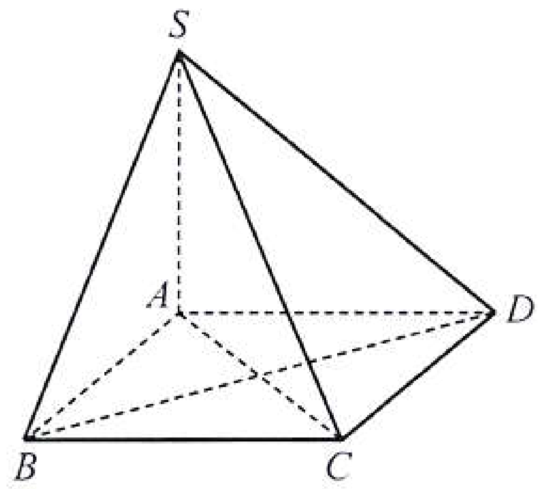
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $BC \perp (SAB)$;

a) Nếu $ABCD$ là hình thoi thì $SC \perp BD$.

Lời giải

(Hình 8)



Hình 8

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

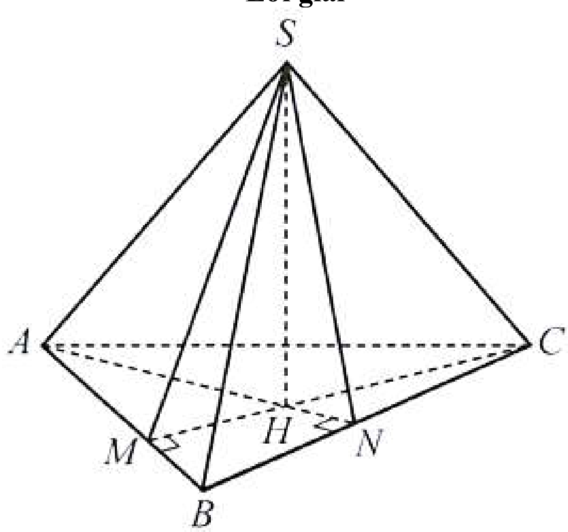
Mà $BC \perp BA$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật, BA cắt SA trong mặt phẳng (SAB). Suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Mà $BD \perp AC$ nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có $BD \perp SC$.

Câu 26. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 90^{\circ}$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.

Lời giải



Hình 55

Gọi AN, CM là hai đường cao của tam giác ABC. Khi đó, H là giao điểm của AN và CM.

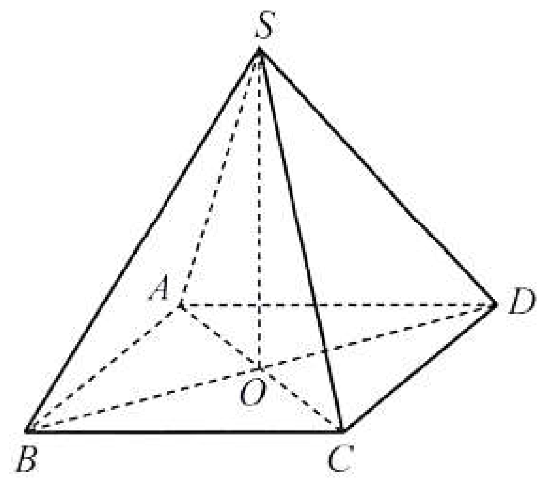
Theo giả thiết, $SA \perp SB, SA \perp SC$ mà SB, SC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên $SA \perp (SBC)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $SA \perp BC$.

Ngoài ra, $AH \perp BC$ và SA, AH cắt nhau trong mặt phẳng (SAH) nên $BC \perp (SAH)$.

Mà $SH \subset (SAH)$ nên $BC \perp SH$.
Tương tự, ta có: $AB \perp SH$.
Bên cạnh đó, AB, BC cắt nhau trong mặt phẳng (ABC) nên $SH \perp (ABC)$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC, SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải



Hình 56

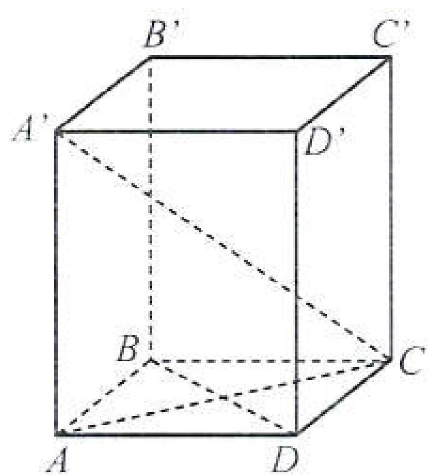
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC, BD.
Xét tam giác SAC cân tại S có SO là đường trung tuyến, nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp AC$
Xét tam giác SBD cân tại S có SO là đường trung tuyến, nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp BD$
Mà AC, BD cắt nhau trong mặt phẳng $(ABCD)$.
Do đó $SO \perp (ABCD)$.

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi, $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp \left(A'B'C'D'\right)$;

b) $BD \perp A'C$.

Lời giải



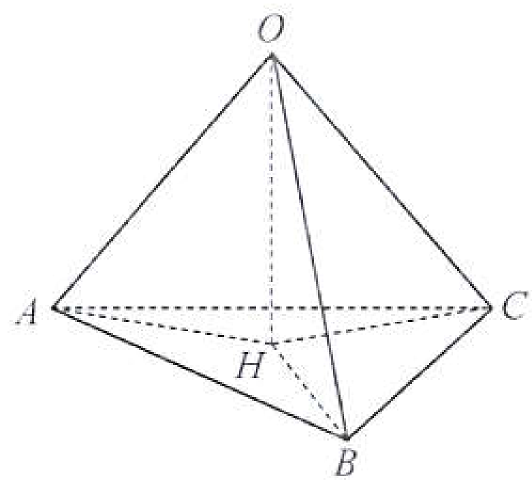
Hình 57

a) Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA' // BB'$. Mà $AA' \perp (ABCD)$ nên $BB' \perp (ABCD)$. Ngoài ra, ta cũng có $(ABCD) // \left(A'B'C'D'\right)$ nên $BB' \perp \left(A'B'C'D'\right)$.

b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Do $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$. Theo định lí ba đường vuông góc suy ra $BD \perp A'C$.

Câu 29. Cho hình chóp $O.ABC$ và điểm H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA sao cho $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = \widehat{OHC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng H thuộc mặt phẳng (ABC).

Lời giải

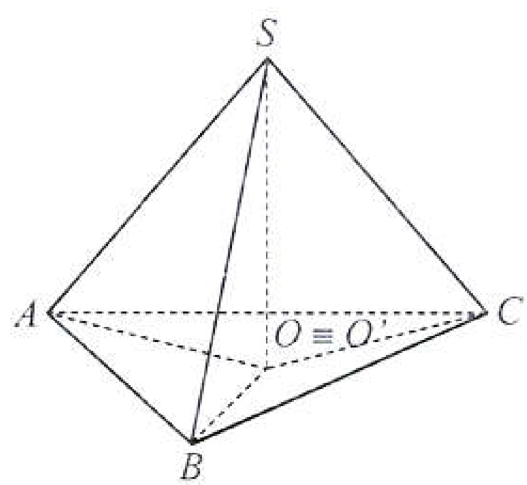


Hình 58

Vì H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA nên HA, HB, HC đôi một cắt nhau.
Theo giả thiết, $OH \perp HA, OH \perp HB$ mà HA, HB cắt nhau nên $OH \perp (HAB)$. Tương tự, $OH \perp (HBC)$.
Vì (HAB) và (HBC) cùng đi qua H và vuông góc với OH nên hai mặt phẳng đó trùng nhau.
Suy ra H thuộc mặt phẳng (ABC).

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $SO \perp (ABC)$.

Lời giải

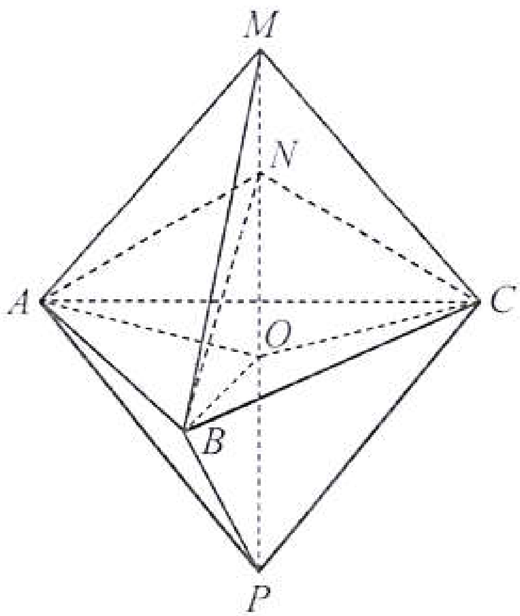


Hình 59

Gọi O' là hình chiếu của S trên (ABC). Khi đó, $SO' \perp (ABC)$. Mà $O'A, O'B, O'C$ dều nằm trên (ABC) nên $SO' \perp OA, SO' \perp OB, SO' \perp OC$.
Xét ba tam giác $SO'A, SO'B, SO'C$ vuông tại O' có $SA = SB = SC$ và SO' chung nên ba tam giác đó bằng nhau. Do đó, $O'A = O'B = O'C$.
Suy ra O' là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC hay O' trùng O. Vậy $SO \perp (ABC)$.

Câu 31. Cho tam giác ABC và các điểm M,N,P đôi một phân biệt thoả mãn $MA=MB=MC, NA=NB=NC, PA=PB=PC$. Chứng minh rằng M,N,P thẳng hàng.

Lời giải

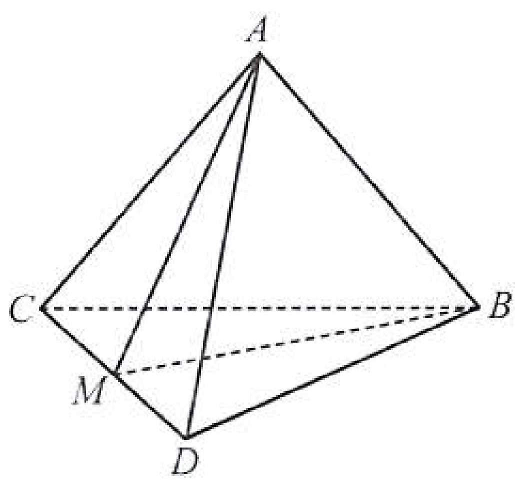


Hình 60

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.
Giả sử ba điểm M,N,P đều không thuộc mặt phẳng (ABC), áp dụng kết quả Bài 16 cho ba hình chóp $M.ABC, N.ABC, P.ABC$ ta có $MO\perp(ABC), NO\perp(ABC), PO\perp(ABC)$. Do đó ba đường thẳng MO, NO, PO trùng nhau hay M, N,P thẳng hàng.
Giả sử trong ba điểm M,N,P có một điểm nằm trên (ABC). Khi đó, theo giả thiết ta có điểm đó trùng O. Như vậy, cùng với kết quả trên ta có ba điểm M,N,P thẳng hàng.

Câu 32. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh $AB\perp CD$.

Lời giải



Hình 61

Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên hai tam giác ACD và BCD là các tam giác đều.
Suy ra $AM\perp CD, BM\perp CD$.

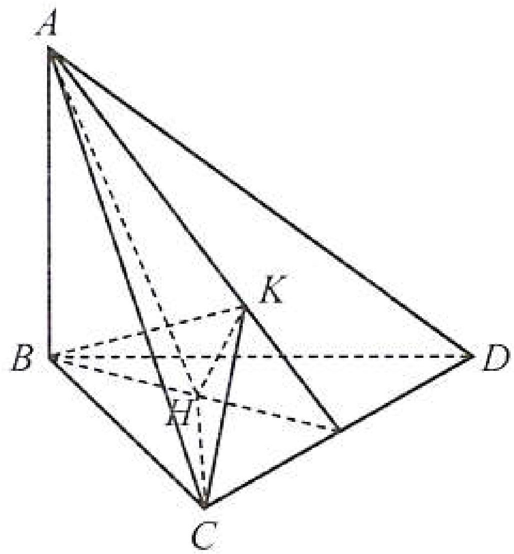
Mà AM, BM cắt nhau trong mặt phẳng (ABM) nên $CD \perp (ABM)$. Ngoài ra, $AB \subset (ABM)$. Do đó, ta có $AB \perp CD$.

Câu 33. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng:

a) $AD \perp CH$;

b*) $HK \perp (ACD)$.

Lời giải



Hình 62

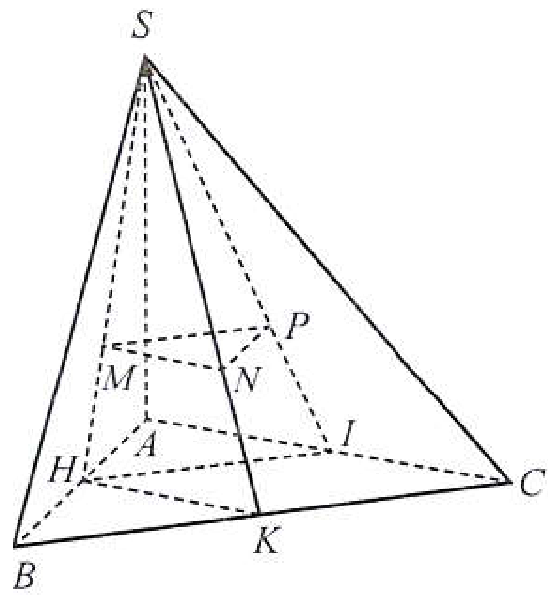
a) Vì $AB \perp (BCD), CH \subset (BCD)$ nên $AB \perp CH$.

Do H là trực tâm của tam giác (BCD) nên $CH \perp BD$. Mà AB, BD cắt nhau trong mặt phẳng (ABD) nên $CH \perp (ABD)$. Ngoài ra, $AD \subset (ABD)$ nên $AD \perp CH$.

b*) Vì K là trực tâm của tam giác (ACD) nên $CK \perp AD$. Mà CK, CH cắt nhau trong mặt phẳng (CHK) nên $AD \perp (CHK)$. Ngoài ra, $HK \subset (CHK)$ nên $AD \perp HK$. Áp dụng kết quả của Ví dụ 7 trang 93, ta có $CD \perp HK$. Bên cạnh đó, AC, CD cắt nhau trong mặt phẳng (ACD) nên $HK \perp (ACD)$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác SAB, SBC, SCA. Chứng minh rằng $SA \perp (MNP)$.

Lời giải

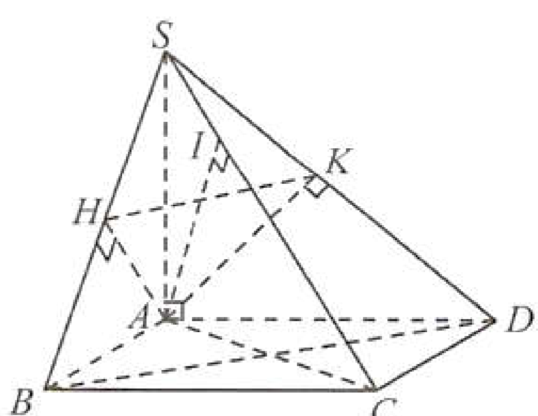


Hình 63

Gọi H, K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Theo giả thiết ta có:
$\frac{SM}{SH}=\frac{SN}{SK}=\frac{SP}{SI}=\frac{2}{3}$. Do đó, trong tam giác SHK có $MN//HK$, trong tam giác SHI có $MP//HI$. Mà $HK \subset (ABC)$, $HI \subset (ABC)$ nên $MN//(ABC), MP//(ABC)$.
Ngoài ra, MN, MP cắt nhau trong mặt phẳng (MNP) nên $(MNP)//(ABC)$. Mà $SA \perp (ABC)$. Vậy $SA \perp (MNP)$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.
Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD. Chứng minh rằng:
a) $BC \perp$ (SAB), $CD \perp$ (SAD), $BD \perp (SAC)$.
b) $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK).
c) $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Lời giải



Hình 8

a) Ta có $BC \perp AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BC$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SAB)$.
Ta có $CD \perp AD$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp CD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $CD \perp (SAD)$.
Ta có $BD \perp AC$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BD \perp (SAC)$.

b) Ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$. Mặt khác $AH \perp SB$, suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$.(1)

Tương tự ta có $AK \perp CD$ và $AK \perp SD$, suy ra $AK \perp (SCD)$, suy ra $AK \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK)$.

Ta có $SC \perp (AHK)$ và $AI \perp SC$, suy ra $I \in (AHK)$.

c) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{SAB} = 90^0 \\ \widehat{SAD} = 90^0 \end{cases}$

Xét ΔSAB và ΔSAD, ta có:

SA là cạnh chung;

$\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$;

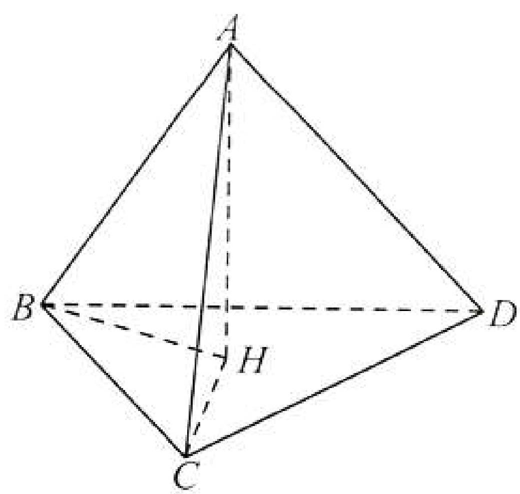
$AB = AD$.

Suy ra $\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c), suy ra $SB = SD, SH = SK$. Suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Vậy $HK // BD$.

Theo câu a) ta có $BD \perp (SAC)$, suy ra $HK \perp (SAC)$. Ta lại có $AI \subset (SAC)$, suy ra $HK \perp AI$.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔBCD và $AD \perp BC$.

Lời giải



Hình 2

Ta có $CD \perp AB$ và $CD \perp AH$, suy ra $CD \perp (ABH)$, suy ra $CD \perp BH$.

Tương tự ta cũng có $BD \perp CH$.

Vậy H là trực tâm của ΔBCD.

Ta có H là trực tâm của ΔBCD, suy ra $BC \perp DH$. Ta lại có $BC \perp AH$, suy ra $BC \perp (AHD)$, suy ra $BC \perp AD$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 37. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Làm thế nào để dựng cột chống một biển báo vuông góc với mặt đất?

Hình 9

Lời giải

Chân cột chống biển báo là hai đường thẳng cắt nhau. Ta dựng cột chống vuông góc với hai đường thẳng đó sẽ được cột chống biển báo vuông góc với mặt đất.

Câu 38. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một kệ sách có bốn trụ chống và các ngăn làm bằng các tấm gỗ (Hình 18). Làm thế nào dùng một êke để kiểm tra xem các tấm gỗ có vuông góc với mỗi trụ chống và song song với nhau hay không? Giải thích cách làm.


Hình 18

Lời giải

Ta dùng êke để kiểm tra từng mặt phẳng tấm gỗ có vuông góc với trụ chống không. Nếu có thì các tấm gỗ này song song với nhau

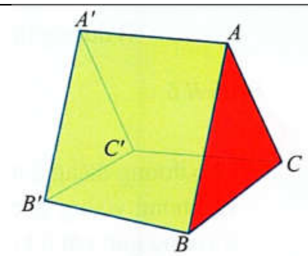
Câu 39. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Nêu cách tìm hình chiếu vuông góc của một đoạn thẳng AB trên trần nhà xuống nền nhà bằng hai dây dọi.

Lời giải

Thả sợi dây rọi từ điểm A trên trần nhà và đánh dấu điểm A' nơi đầu nhọn quả dọi chạm sàn. Thả sợi dây rọi từ điểm B trên trần nhà và đánh dấu điểm B' nơi đầu nhọn quả dọi chạm sàn. Ta có $A'B'$ là hình chiếu vuông góc của AB trên trên nền nhà.

Câu 40. **(SGK - CTST 11 - Tập 2)** Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình 24).

Cho biết $AB = AC = 2,4m; BC = 2m; AA' = 3m$.



Hình 24

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và $BC; A'B'$ và AC.

b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $\left(BB'C'C\right)$.

Lời giải

a) Vì $AA'//BB'$ nên góc giữa AA' và BC là góc giữa BB' và BC

Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên $BB' \perp BC$. Do đó, $\widehat{B'BC} = 90^\circ$

Vì $A'B'//AB$ nên góc giữa $A'B'$ và AC là góc giữa AB và AC

Ta có: $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{2,4^2 + 2,4^2 - 2^2}{2.2,4.2,4} = \dfrac{47}{72}$

Nên $\widehat{BAC} = 49,2^\circ$

b) Kẻ $AH \perp BC$. Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên $BB' \perp AH$

Ta có $AH \perp BB', AH \perp BC$ nên $AH \perp \left(BCC'B'\right)$

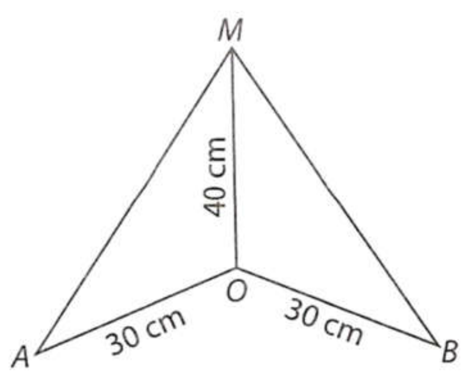
Hình chiếu vuông góc của ABB' lên $\left(BB'C'C\right)$ là HBB'.

Ta có: $S_{HBB'} = \dfrac{1}{2} \cdot HB \cdot BB' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{BC}{2} \cdot BB' = \dfrac{3}{2}$

Câu 41. Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột $40\,cm$. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B đều cách O là $30\,cm$ (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng $50\,cm$. Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

Lời giải

(H.7.6)



Hình 7.6

Ta có: $50^2 = 40^2 + 30^2$ nên $MA^2 = MO^2 + OA^2$ và $MB^2 = MO^2 + OB^2$. Do đó, tam giác MOA và tam giác MOB vuông tại O, hay $MO \perp OA$, $MO \perp OB$. Suy ra $MO \perp (OAB)$. Vậy chiếc cột vuông góc với mặt sân.

Câu 42. Một cây cột được dựng trên một sàn phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sàn hay không? Vì sao?

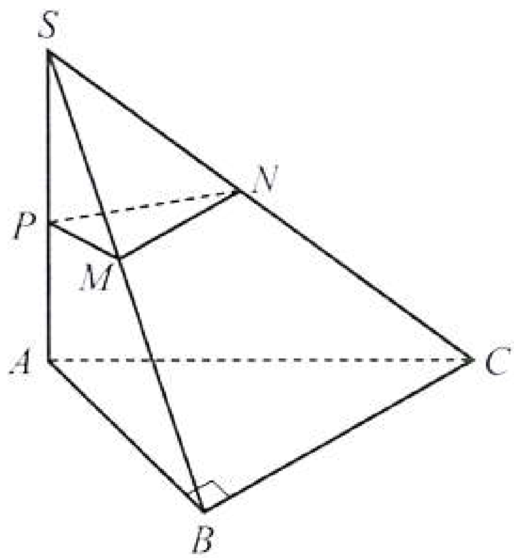
Lời giải

Vì dây dọi song song với cây cột và dây dọi vuông góc với mặt phẳng sàn nên cây cột vuông góc với mặt phẳng sàn.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC), BC \perp AB$. Lấy hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và điểm P nằm trên cạnh SA. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác vuông.

Lời giải

(Hình 9)



Hình 9

Vì $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp AB, AB$ và SA cắt nhau trong mặt phẳng (SAB). Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC nên $MN // BC$. Suy ra $MN \perp (SAB)$.

Mà $PM \subset (SAB)$ nên $MN \perp PM$.

Vậy tam giác MNP vuông tại M.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng:

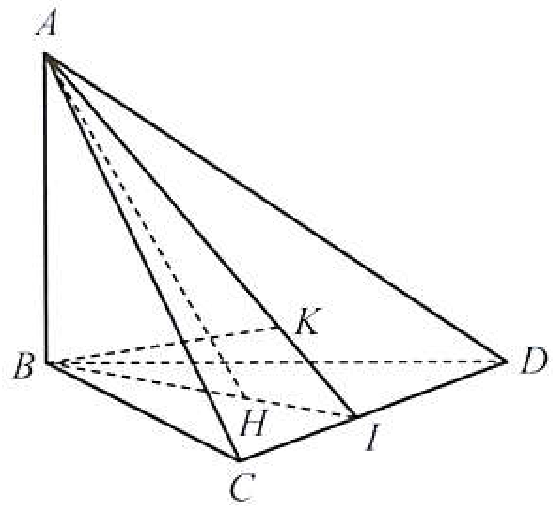
a) $CD \perp (ABH)$ và $CD \perp (ABK)$;

b) Bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

Lời giải

(Hình 12)



Hình 12

a) Vì $AB \perp (BCD)$ và $CD \subset (BCD)$ nên $AB \perp CD$. Mà $BH \perp CD$ vì H là trực tâm của tam giác BCD và AB, BH cắt nhau trong mặt phẳng (ABH) nên $CD \perp (ABH)$.

Tương tự ta chứng minh được $CD \perp (ABK)$.

b) Vì hai mặt phẳng (ABH) và (ABK) cùng đi qua điểm A và vuông góc với CD nên hai mặt phẳng này trùng nhau. Vậy bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của BH và CD. Khi đó, ba điểm A, K, I đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABHK)$ và (ACD). Suy ra A, K, I thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

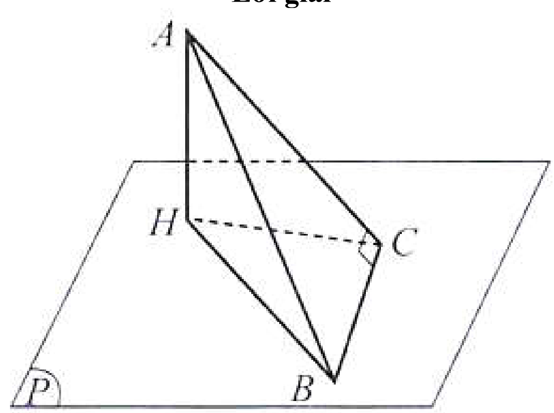
Câu 45. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ thoả mãn $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Lời giải

Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Chứng minh tương tự Bài 16 , ta có $OA = OB = OC = OD$. Suy ra O là tâm đường tròn đi qua bốn đỉnh tứ giác $ABCD$.

Câu 46. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B sao cho B thuộc (P) và A không thuộc (P). Điểm C chuyển động trên mặt phẳng (P) thoả mãn $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng C chuyển động trên một đường tròn cố định trong (P).

Lời giải

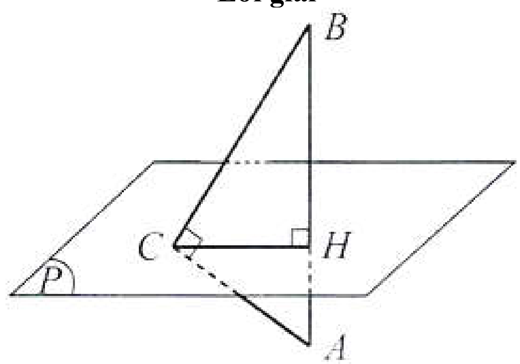


Hình 64

Gọi H là hình chiếu của A trên (P). Khi đó H cố định và HC là hình chiếu của AC trên (P). Vì $BC \perp AC$ nên theo Định lí ba đường vuông góc ta có $BC \perp HC$. Do đó C chuyển động trên đường tròn đường kính HB cố định nằm trong (P).

Câu 47. Cho đoạn thẳng AB và mặt phẳng (P) sao cho $(P) \perp AB$ và (P) cắt đoạn thẳng AB tại điểm H thoả mãn $HA = 4\,cm, HB = 9\,cm$. Điểm C chuyển động trong mặt phẳng (P) thoả mãn $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng điểm C thuộc đường tròn tâm H bán kính $6cm$ trong mặt phẳng (P).

Lời giải



Hình 65

Vì $AC \perp CB$ nên A, B, C không thẳng hàng. Do $AB \perp (P), HC \subset (P)$ nên $AB \perp HC$. Ta có ΔHBC đồng dạng ΔHCA nên $HC^2 = HA\,.\,HB$, suy ra $HC = \sqrt{4.9} = 6(cm)$. Vậy C thuộc đường tròn tâm H bán kính $6cm$ trong (P).