BÀI 3. CẤP SỐ NHÂN

- CHƯƠNG 2. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY (u_n) LÀ CẤP SỐ NHÂN.

Chứng minh $\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n.q$ trong đó q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $T = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

* T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.

* T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

Câu 1. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Cho ba số tự nhiên m, n, p theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba số $2^m, 2^n, 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Lời giải

Vì 3 số $m,\ n,\ p$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng.
Gọi d là công sai của cấp số công. Ta có: $n = m + d, p = n + d$
Ta có: $2^n = 2^{m+d} = 2^m \cdot 2^d$ và $2^p = 2^{n+d} = 2^n.2^d$
Vậy $2^m, 2^n, 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội là 2^d

Câu 2. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Lời giải

Dân số qua các năm là:
$u_{2011} = P$
$u_{2012} = P + aP = P(1+a) = u_{2011} \cdot (1+a)$
$u_{2013} = P(1+a) + aP(1+a) = P(1+a)^2 = u_{2012} \cdot (1+a)$
…..
$u_{n+1} = u_n(1+a)$
Vậy dân số các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là $1+a$

Câu 3. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân.

Hình 1

Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là $415\,Hz$ và $466\,Hz$ (theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt nhạc)). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Do tần số của ba phím Sol, La, Si tạo thành cấp số nhân nên gọi tần số 3 phím lần lượt là: a, aq, aq^2
Ta có: $a = 415$ và $aq^2 = 466$. Nên $q = 1,06$
Suy ra: $aq = 440$
Vậy tần số của phím La là $440\,Hz$

Câu 4. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Viết công thức số hạng tổng quát u_n theo số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau:

a) $5;10;20;40;80;\ldots$

b) $1;\frac{1}{10};\frac{1}{100};\frac{1}{1000};\frac{1}{10000};\ldots$

Lời giải

a) $u_n = 5.2^{n-1}$

b) $u_n = 1\cdot\frac{1}{10}^{n-1}$

Câu 5. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chi còn một nửa (theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/ Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải

a) Sau $690 = 138.5$ ngày, tức là sau 5 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là: $20.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1,25(\text{ gam })$

b) Sau $7314 = 138.53$ ngày, tức là sau 53 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là: $20.\left(\frac{1}{2}\right)^{52} = 4,44.10^{-15}$ (gam)

Câu 6. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

a) $u_n = 3(-2)^n$;

b) $u_n = (-1)^{n+1}\cdot 7^n$;

c) $\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

Lời giải

a) $u_n = 3(-2)^n = (-6)\cdot(-2)^n$

Vậy dãy trên là cấp số nhân có công bội là -2

b) $u_n = (-1)^{n+1}\cdot 7^n = 7\cdot(-7)^{n-1}$

Vậy dãy trên là cấp số nhân có công bội là -7

c) $\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

Dãy trên không phải cấp số nhân

Câu 7. Xét trong các dãy số số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bối của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$ b). $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$ c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$

Lời giải

a). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-1)^{n+1}.5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n.5^{3n+2}}=-1.5^3=-125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=-125$.

c). Ta có $u_2=u_1^2=4$, $u_3=u_2^2=16$, $u_4=u_3^2=256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1}=\frac{4}{2}=2$ và

$\frac{u_4}{u_3}=\frac{256}{16}=16\Rightarrow\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{9}{u_n}}{\frac{9}{u_{n-1}}}=\frac{u_{n-1}}{u_n}\Rightarrow u_{n+1}=u_{n-1},\forall n\geq 2$. Do đó có:

$u_1=u_3=u_5=....=u_{2n+1}....$ (1)

Và $u_2=u_4=u_6=....=u_{2n}=...$ (2)

Theo đề bài có $u_1=3\Rightarrow u_2=\frac{9}{u_1}=3$ (3)

Từ (1), (2),(3) suy ra $u_1=u_2=u_3=u_4=u_5=....=u_{2n}=u_{2n+1}....$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=1$.

Câu 8. Chứng minh rằng dãy số $(v_n): v_n=(-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Lời giải

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(-1)^{n+1}3^{2(n+1)}}{(-1)^n3^{2n}}=-9,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy $(v_n): v_n=(-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Câu 9. Giá trị của a để $\frac{-1}{5}$; a; $\frac{-1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

Lời giải

Ta có: $a^2=\left(-\frac{1}{5}\right).\left(-\frac{1}{125}\right)=\frac{1}{625}\Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{25}$

Câu 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=4u_n+9\end{cases},\forall n\geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n=u_n+3,\forall n\geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

Vì có $v_n=u_n+3$ (1) $\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}+3$ (2).

Theo đề $u_{n+1}=4u_n+9\Rightarrow u_{n+1}+3=4(u_n+3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1}=4v_n,\forall n\geq 1\Rightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q=4$ và số hạng đầu $v_1=u_1+3=5$.

Câu 11. Cho x, 3, y theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4=y\sqrt{3}$. Tìm x, y.

Lời giải

Ta có: $x.y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{x}$

Thay vào $x^4 = y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 = \frac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^5 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Kết luận $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG ĐẦU CÔNG BỘI, XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG THỨ K, TÍNH TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN:

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1, giải hệ phương trình này tìm được q và u_1.

Để xác định số hạng thứ k, ta sử dụng công thức: $u_k = u_1.q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

Câu 12. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

a) $u_1 = 10^5; q = 0,1; n = 5$

b) $u_1 = 10; u_2 = -20; n = 5$.

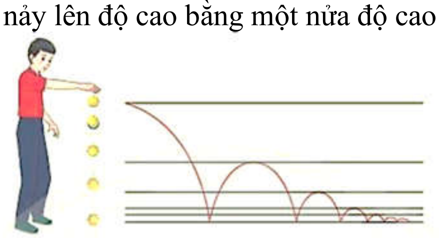
Lời giải

a) $S_5 = \frac{10^5 \cdot \left(1 - 0,1^5\right)}{1 - 0,1} = 11110$

b) $u_2 = -20 = u_1 .\ q$. Suy ra $q = -2$, $S_5 = \frac{10.\left(1-(-2)^5\right)}{1-(-2)} = 110$

Câu 13. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong bài toán ở **hoạt động khởi động** đầu bài học:

Hoạt động khởi động. Một quả bóng rơi từ một vị trí có độ cao $120cm$. Khi chạm đất, nó luôn nảy lên độ cao bằng một nửa độ cao của lần rơi trước đó.



Gọi $u_1 = 120$ là độ cao của lần rơi đầu tiên và $u_2; u_3; \ldots; u_n; \ldots$ là độ cao của các lần rơi kế tiếp. Tính tổng các độ cao của quả bóng sau 10 lần rơi đầu tiên.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 120; q = \frac{1}{2}$

$$S_{10} = \frac{120.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 239,8$$

Câu 14. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 - u_1 = 15 \\ u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 \cdot q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 5 \end{cases}$

Câu 15. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

Lời giải

a) Gọi số đo 4 góc lần lượt là: $u_1; u_1.q; u_1 \cdot q^2; u_1 \cdot q^3$

Ta có: $u_1 \cdot q^3 = 8u_1 \Leftrightarrow q = 2$

$u_1 + 2u_1 + 4u_1 + 8u_1 = 360. \Leftrightarrow u_1 = 24$

Vậy số đo các góc là: $24^\circ; 48^\circ; 96^\circ; 192^\circ$

b) Ta có: $u_1 = -2; u_8 = 256 = u_1 \cdot q^7$

Suy ra: $q = -2$

Vậy $u_{15} = (-2) \cdot (-2)^{14} = -32768$

Câu 16. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Lời giải

Vì ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có:

$\frac{1}{b} = \frac{2}{b-a} + d \Leftrightarrow b - a = 2b + db(b-a) \Leftrightarrow (bd-1)a = (bd+1)b \Leftrightarrow \frac{bd+1}{bd-1} = \frac{a}{b}$

$\frac{2}{b-c} = \frac{1}{b} + d \Leftrightarrow 2b = b - c + qb(b-c) \Leftrightarrow (1+bd)c = b(bd-1) \Leftrightarrow \frac{bd+1}{bd-1} = \frac{b}{c}$

Suy ra: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Gọi $b = a.q$

Ta có: $\frac{a}{aq} = \frac{aq}{c} \Leftrightarrow c = aq^2 \Leftrightarrow c = bq$

Vậy a, b, c lần lượt là cấp số nhân có công bội là q

Câu 17. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Tính các tổng sau:

a) $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$

b) $S_n = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ chu so } 9}$.

Lời giải

a) $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow S_n = \frac{3n\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{2}$$

b) $S_n = 9+99+999+\ldots+999\ldots9$ (n ch? s? 9)

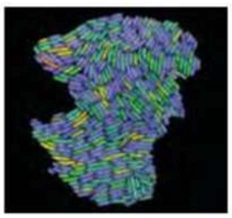
$$S_n = (10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+\ldots+\left(10^n-1\right)$$

$$S_n = \left(10+10^2+10^3+\ldots+10^n\right)-n$$

$$S_n = \frac{n\left(1-10^n\right)}{1-10}-n$$

$$S_n = \frac{n\left(10^n-1\right)}{9}-n$$

Câu 18. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Lời giải

Tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút là: $S_{20} = \dfrac{20\cdot\left[1-2^{20}\right]}{1-2} = 20971500$

Câu 19. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là $0,75\%$.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022 ?

Lời giải

Dân số của thành phố từ năm 2022 lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $1+0,0075=1,0075$

Dân số của thành phố vào năm n là: $u_n = 2,1.1,0075^{n-2022}$

a) $u_{2032} = 2,1.1,0075^{2032-2022} = 2,26$

b) Khi $u_n = 2.u_{2022} \Leftrightarrow 1,0075^{n-2022} = 2 \Leftrightarrow n = 2115$

Vậy đến năm 2115, dân số thành phố gấp đôi so với năm 2022

Câu 20. **(SGK-CTST 11-Tập 1)** Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là $9m$.

(Hình 3)

a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.

b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

Lời giải

Độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ nhất là $u_1 = 9$

Độ cao các lần nảy lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = 0,6; u_n = 9.0,6^{n-1}$

a) $u_3 = 9.0,6^{3-1} = 3,24$

b) $S_5 = \dfrac{5 \cdot \left[1-0,6^5\right]}{1-0,6} = 11,528$

Câu 21. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^4\right) = 51 & (*) \\ u_1 q\left(1+q^4\right) = 102 & (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1 q\left(1+q^4\right)}{u_1\left(1+q^4\right)} = \dfrac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{51}{1+q^4} = \dfrac{51}{17} = 3.$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 135 \\ u_1.q^3 + u_1 q^4 + u_1 q^5 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 135 & (*) \\ u_1 q^3\left(1+q+q^2\right) = 40 & (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1 q^3\left(1+q+q^2\right)}{u_1\left(1+q+q^2\right)} = \dfrac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{8}{27} \Leftrightarrow q = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{135}{1+q+q^2} = \dfrac{1215}{19}.$

Kết luận có công bội $q = \dfrac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \dfrac{1215}{19}$.

c) $\begin{cases} u_2=6 \\ S_3=43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=6 \\ u_1+u_2+u_3=43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=6 \\ u_1+u_1q+u_1q^2=43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=6 \quad (*) \\ u_1\left(1+q+q^2\right)=43 \quad (**) \end{cases}$. Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{u_1q}{u_1\left(1+q+q^2\right)}=\frac{6}{43}$

$\Leftrightarrow 43q=6\left(1+q+q^2\right) \Leftrightarrow 6q^2-37q+6=0 \Leftrightarrow q=6 \vee q=\frac{1}{6}$

Với $q=6 \Rightarrow u_1=1$. Với $q=\frac{1}{6} \Rightarrow u_1=36$.

Kết luận $\begin{cases} q=6 \\ u_1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q=\frac{1}{6} \\ u_1=36 \end{cases}$

Câu 22. Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1+u_5=51 \\ u_2+u_6=102 \end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.
b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?
c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

a). Ta có $\begin{cases} u_1+u_5=51 \\ u_2+u_6=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q^4=51 \\ u_1q+u_1q^5=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4)=51 & (*) \\ u_1q(1+q^4)=102 & (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)}=\frac{102}{51} \Leftrightarrow q=2 \Rightarrow u_1=3$.

b). Có $S_n=3069 \Leftrightarrow u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=3069 \Leftrightarrow 3.\frac{1-2^n}{1-2}=3069 \Leftrightarrow 2^n=1024 \Rightarrow n=10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

c).Có $u_k=12288 \Leftrightarrow u_1.q^{k-1}=12288 \Leftrightarrow 3.2^{k-1}=12288 \Leftrightarrow 2^{k-1}=4096=2^{12}$

$\Rightarrow k-1=12 \Leftrightarrow k=13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

Câu 23. Cho cấp số nhân (u_n). Tìm u_1 và q, biết rằng:

1) $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=\frac{35}{2} \\ u_1u_5=25 \\ u_i>0\left(i=1,...,5\right) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65 \\ u_1+u_7=325. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_2+u_4+u_6=-42 \\ u_3+u_5=20 \end{cases}$

4) $u_1+u_6=165; u_3+u_4=60$. 5). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85. \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0 \\ u_1^3+u_3^3=189 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_1u_2u_3=1728 \\ u_1+u_2+u_3=63 \end{cases}$

9). $\begin{cases} u_1+u_3=3 \\ u_1^2+u_3^2=5 \end{cases}$ 10). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=7 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=21 \end{cases}$

Lời giải

1). $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=\dfrac{35}{2} \\ u_1u_5=25 \\ u_i>0\left(i=1,,,5\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q+u_1.q^2+u_1.q^3=\dfrac{35}{2} & (1) \\ u_1.u_1.q^4=25 & (2) \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow\left(u_1.q^2\right)=5^2\Leftrightarrow u_1.q^2=5\Rightarrow u_1=\dfrac{5}{q^2}$ thay vào (1) được:

$\dfrac{5}{q^2}\left(q+q^2+q^3\right)=\dfrac{35}{2}\Leftrightarrow 2\left(1+q+q^2\right)=79\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2 \quad\vee\quad q=\dfrac{1}{2}$.

Với $q=2\Rightarrow u_1=\dfrac{5}{4}$. Với $q=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u_1=20$.

2). $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65 \\ u_1+u_7=325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1q^2+u_1q^4=65 \\ u_1+u_1q^6=325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1-q^2+q^4\right)=65 & (1) \\ u_1\left(1+q^6\right)=325 & (2) \end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(2)}{(1)}\Leftrightarrow\dfrac{1+q^6}{1-q^2+q^4}=\dfrac{325}{65}\Leftrightarrow\dfrac{\left(1+q^2\right)\left(1-q^2+q^4\right)}{1-q^2+q^4}=5\ \left(vi\ 1+q^6=1+\left(q^2\right)^3\right)$

$\Leftrightarrow 1+q^2=5\Leftrightarrow q^2=4\Leftrightarrow q=\pm 2.$

Với $q=2\Rightarrow u_1=\dfrac{65}{1-2^2+2^4}=5$. Với $q=-2\Rightarrow u_1=\dfrac{65}{1-(-2)^2+(-2)^4}=5.$

3). $\begin{cases} u_2+u_4+u_6=-42 \\ u_3+u_5=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q+u_1.q^3+u_1.q^5=-42. \\ u_1.q^2+u_1.q^4=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q\left(1+q^2+q^4\right)=-42 & (1) \\ u_1.q\left(1+q^2\right)=20 & (2) \end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(1)}{(2)}\Leftrightarrow\dfrac{1+q^2+q^4}{q\left(1+q^2\right)}=-\dfrac{21}{10}\Leftrightarrow 10+10q^2+10q^4=-21q-21q^3$

$\Leftrightarrow 10q^4+21q^3+10q^2+21q+10=0\Leftrightarrow 10q^2+21q+10+\dfrac{21}{q}+\dfrac{10}{q^2}=10$

$\Leftrightarrow 10\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)+21\left(1+\dfrac{1}{q}\right)+10=0\quad(*)$

Đặt: $t=q+\dfrac{1}{q}\Rightarrow t^2=\left(q+\dfrac{1}{q}\right)^2\Leftrightarrow q^2+\dfrac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện $|t|\geq 2$

$(*)\Leftrightarrow 10\left(t^2-2\right)+21t+10=0\Leftrightarrow 10t^2+21t-10=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{5}{2}\vee t=\dfrac{2}{5}$ (loại).

Với $t=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow q+\dfrac{1}{q}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0\Leftrightarrow q=-\dfrac{1}{2}\quad\vee\ q=-2$

- Nếu $q=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow u_1=\dfrac{20}{q^2+q^4}=\dfrac{20}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4}=64$
- Nếu $q=-2\Rightarrow u_1=\dfrac{20}{q^2+q^4}=\dfrac{20}{2^2+2^4}=1.$

4). $u_1+u_6=165;\ u_3+u_4=60.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 165 \\ u_1 q^2 + u_1 q^3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^5\right) = 165 \quad (1) \\ u_1 q^2\left(1+q\right) = 60 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q^5}{q^2(1+q)} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{(1+q)\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right)}{q^2(1+q)} = \frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow 4\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right) = 11q^2 \Leftrightarrow 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4q^4}{q^2} - \frac{4q^3}{q^2} - \frac{7q^2}{q^2} - \frac{4q}{q^2} + \frac{4}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0 \quad (*)$

Đặt: $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2.$ Điều kiện: $|t| \geq 2.$

$(*) \Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right) - 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{3}{2}$ (loại).

Với $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee \mathrm{q} = \frac{1}{2}$

- với $q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^5} = \frac{165}{1^2+2^5} = 5$ • với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^2} = \frac{165}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 160.$

5). $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2 q^2 + u_1^2 q^4 + u_1 q^6 = 85. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right) = 15 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right) = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1+q+q^2+q^3\right)^2 = 15^2 \quad (1) \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right) = 85 \quad (2). \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\left(1+q+q^2+q^3\right)^2}{1+q^2+q^4+q^6} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{\left[(1+q)+q^2(1+q)\right]^2}{\left(1+q^2\right)+q^4\left(1+q^2\right)} = \frac{45}{17}$

$\Leftrightarrow \frac{\left[(1+q)\left(1+q^2\right)\right]^2}{\left(1+q^2\right)+\left(1+q^4\right)} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{\left(1+2q+q^2\right)\left(1+q^2\right)}{1+q^4} = \frac{45}{17}$

$\Leftrightarrow 17\left(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4\right) = 45\left(1+q^4\right)$

$\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{34q^3}{q^2} - \frac{34q^2}{q^2} - \frac{34q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0$ (vì dễ dàng thấy $q \neq 0$)

$\Leftrightarrow 28q^2 - 34q - 34 - \frac{34}{q} + 28 = 0 \Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \quad (*)$

Đặt $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện: $|t| \geq 2.$

$(*) \Leftrightarrow 14\left(t^2-2\right) - 17t - 17 = 0 \Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7}$ (loại)

Với $t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee \mathrm{q} = \frac{1}{2}$

- với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 1.$ • với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{15}{1+q+q^2+q^3} = 8.$

6). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=13 & (*) \\ u_1q^3\left(1+q+q^2\right)=351 & (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3=27 \Rightarrow q=3 \Rightarrow u_1=\dfrac{13}{1+q+q^2}=\dfrac{13}{1+3+9}=1.$

7). $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0 \\ u_1^{\,3}+u_3^{\,3}=189. \end{cases}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1q-5\sqrt{5}u_1q^4=0 \\ u_1^{\,3}+\left(u_1q^2\right)^3=189. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=5\sqrt{5}q^3 \Rightarrow q^3=\dfrac{8}{5\sqrt{5}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow q=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1^{\,3}\left(1+q^6\right)=189 \Rightarrow u_1^{\,3}=\dfrac{189}{1+q^6}=125 \Rightarrow u_1=5. \end{cases}$

8). $\begin{cases} u_1u_2u_3=1728 \\ u_1+u_2+u_3=63 \end{cases}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.u_1.q.u_1.q^2=1728 \\ u_1+u_1q+u_1q^2=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u_1q\right)^3=12^3 \\ u_1\left(1+q+q^2\right)=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=12 \\ u_1\left(1+q+q^2\right)=63 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{12}{q} \\ \dfrac{12}{q}\left(1+q+q^2\right)=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{12}{q} \\ 12q^2-51q+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=4 \Rightarrow u_1=3 \\ q=\dfrac{1}{4} \Rightarrow u_1=48. \end{array}\right.$

9). $\begin{cases} u_1+u_3=3 \\ u_1^{\,2}+u_3^{\,2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^2\right)=3 \\ u_2\left(1+q^4\right)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^{\,2}\left(1+q^2\right)^2=9 & (*) \\ u_1^{\,2}\left(1+q^4\right)=5 & (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \dfrac{\left(1+q^2\right)^2}{1+q^4}=\dfrac{9}{5}$. Đặt: $t=q^2, t\ge 0$.

$\Leftrightarrow 5(1+t)^2=9\left(1+t^2\right) \Leftrightarrow 4t^2-10t+4=0 \Leftrightarrow t=2 \ \vee \ \mathrm{t}=\dfrac{1}{2}$

Với $t=2 \Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$

$\bullet q=\sqrt{2} \Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=1$ $\bullet q=-\sqrt{2} \Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=1$

Với $t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow q=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\bullet q=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=2$ $\bullet q=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=2.$

10). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=7 \\ u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=7 \\ u_1^{\,2}+\left(u_1q\right)^2+\left(u_1q^2\right)^2=21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=7 \\ u_1^{\,2}\left(1+q^2+q^4\right)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^{\,2}\left(1+q+q^2\right)^2=49 & (*) \\ u_1^{\,2}\left(1+q^2+q^4\right)=21 & (**) \end{cases}$. Lấy $\dfrac{(*)}{(**)}$ được:

$\frac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4}=\frac{49}{21} \Leftrightarrow 21\left(1+q^2+q^4+2q+2q^2+2q^3\right)=49\left(1+q^2+q^4\right)$

$\Leftrightarrow 21\left(1+2q+3q^2+2q^3+q^4\right)=49\left(1+q^2+q^4\right) \Leftrightarrow 28q^4-42q^3-14q^2-42q+28=0.$

$\Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2}-\frac{42q^3}{q^2}-\frac{14q^2}{q^2}-\frac{42q}{q^2}+\frac{28}{q^2}=0 \Leftrightarrow 28q^2-42q-14-\frac{42}{q}+\frac{28}{q^2}=0$

$\Leftrightarrow 28\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-42\left(q+\frac{1}{q}\right)-14=0 \quad (2)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$

$(2) \Leftrightarrow 28\left(t^2-2\right)-42t-14=0 \Leftrightarrow 28t^2-42t-70=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \vee t=-1$ (loại)

Với $t=\frac{5}{2} \Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\frac{1}{2}$

- $q=2 \Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=1$ • $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=4$

Câu 24. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4-u_2=72 \\ u_5-u_3=144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65 \\ u_1+u_7=325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3+u_5=90 \\ u_2-u_6=240 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1.u_2.u_3=64 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{7}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=30 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_4-u_2=72 \\ u_5-u_3=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3-u_1q=72 \\ u_1q^4-u_1q^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q\left(q^2-1\right)=72 & (1) \\ u_1q^2\left(q^2-1\right)=144 & (2) \end{cases}$

Lấy (2):(1) được: $q=2$, thay $q=2$ vào (1) được $u_1=12$

c) $\begin{cases} u_3+u_5=90 \\ u_2-u_6=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2+u_1q^4=90 \\ u_1q-u_1q^5=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2\left(1+q^2\right)=90 & (1) \\ u_1q\left(1-q^4\right)=240 & (2) \end{cases}$

Lấy $\frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{u_1q\left(1-q^4\right)}{u_1q^2\left(1+q^2\right)}=\frac{240}{90} \Leftrightarrow \frac{\left(1-q^2\right)\left(1+q^2\right)}{q\left(1+q^2\right)}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1-q^2}{q}=\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 3q^2+8q-3=0 \Leftrightarrow q=\frac{1}{3} \vee q=-3$

Với $q=\frac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1=729$.

Với $q=-3$ thay vào (1) được $u_1=1$.

d) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1.u_2.u_3=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=14 \\ u_1u_1qu_1q^2=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=14 & (1) \\ \left(u_1q\right)^3=64 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow u_1q=4 \Rightarrow u_1=\frac{4}{q}$, thay vào (1) được $\frac{4}{q}\left(1+q+q^2\right)=14$

$\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\frac{1}{2}$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=2$. Với $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=8$.

e) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=21 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1q}+\frac{1}{u_1q^2}=\frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=21 & (1) \\ \frac{q^2+q+1}{u_1q^2}=\frac{7}{12} & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 1+q+q^2=\frac{21}{u_1}$, thay vào (2): $\frac{21}{u_1}\cdot\frac{1}{u_1q^2}=\frac{7}{12} \Leftrightarrow \left(u_1q\right)^2=36 \Leftrightarrow u_1q=\pm 6$

Với $u_1=\frac{6}{q}$ thay vào (1): $\frac{6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\frac{1}{2}$

Nếu $q=2 \Rightarrow u_1=3$. Nếu $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=12$

Với $u_1=-\frac{6}{q}$ thay vào (1):

$-\frac{6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \Leftrightarrow 2q^2+9q+2=0 \Leftrightarrow q=\frac{-9+\sqrt{65}}{4} \vee q=\frac{-9-\sqrt{65}}{4}$

Nếu $q=\frac{-9+\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1=\frac{27+3\sqrt{65}}{2}$. Nếu $q=\frac{-9-\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1=\frac{27-3\sqrt{65}}{2}$

f) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=30 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=30 \\ u_1^2+u_1^2q^2+u_1^2q^4+u_1^2q^6=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q\right)\left(1+q^2\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)^2=900 & (1) \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 & (2) \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\frac{45}{17}$, quy đồng rút gọn được:

$14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0 \Leftrightarrow 14q^2-17q-17-\frac{17}{q}+\frac{14}{q^2}=0$

$\Leftrightarrow 14\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-17\left(q+\frac{1}{q}\right)-17=0$. Đặt $t=q+\frac{1}{q}$, điều kiện $|t|\geq 2$

$\Leftrightarrow 14t^2-17t-45=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \vee t=-\frac{9}{7}$ (loại).

Với $t=\frac{5}{2} \Rightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\frac{1}{2}$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=2$. Với $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=16$

Câu 25. Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}1+b=2a\\ b^2=a^4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+b=2a\,(1)\\ b=\pm a^2\end{cases}$

Với $b=a^2$ thay vào (1) được $1+a^2=2a \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$

Với $b=-a^2$ thay vào (1) được $1-a^2=2a \Leftrightarrow a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow a=-1+\sqrt{2} \vee a=-1-\sqrt{2}$

• $a=-1+\sqrt{2} \Rightarrow b=-\left(-1+\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow b=-3+2\sqrt{2}$

• $a=-1-\sqrt{2} \Rightarrow b=-\left(-1-\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow b=-3-2\sqrt{2}$

Kết luận $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases} \vee \begin{cases}a=-1+\sqrt{2}\\ b=-3+2\sqrt{2}\end{cases} \vee \begin{cases}a=-1-\sqrt{2}\\ b=-3-2\sqrt{2}\end{cases}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 26. Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

Lời giải

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}S_n=728\\ u_n=486\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=728\\ u_1q^{n-1}=486\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1-u_1q^n=728(1-q)\\ u_1q^n=486q\end{cases} \Rightarrow u_1-486q=728(1-q) \Leftrightarrow u_1=2$

Câu 27. Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21.Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1,u_2,u_3 thành lập cấp số cộng.

Theo đề bài: $u_1+2;u_2+3;u_3+9$ là ba số liên tiếp tạo thành cấp số nhân.

Theo đề bài: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=21\\ u_1+u_3=2u_2\\ \left(u_1+2\right)\left(u_3+9\right)=\left(u_2+3\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3u_2=21\\ u_1+u_3=2u_2\\ \left(u_1+2\right)\left(u_3+9\right)=\left(u_2+3\right)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}u_2=7\\ u_1=14-u_3\\ \left(14-u_3+2\right)\left(u_3+9\right)=100\ (*)\end{cases}$

Giải $(*)$: $\left(16-u_3\right)\left(u_3+9\right)=100 \Leftrightarrow -u_3^{\,2}+7u_3+44=0 \Leftrightarrow u_3=11 \quad \vee \quad u_3=-4$

Với $u_3=11 \Rightarrow u_1=3$. Với $u_3=-4 \Rightarrow u_1=18$.

Câu 28. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1,u_2,u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1-1;u_3-19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=65 \\ u_1-1+u_3-19=2u_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=65 \\ u_1-2u_2+u_3=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1.q+u_1.q^2=65 \\ u_1-2u_1.q+u_1.q^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=65 \quad (1) \\ u_1\left(1-2q+q^2\right)=20 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\dfrac{65}{20}=\dfrac{13}{4} \Leftrightarrow 4\left(1+q+q^2\right)=13\left(1-2q+q^2\right)$

$\Leftrightarrow 9q^2-30q+9=0 \Leftrightarrow q=3 \quad \vee \quad q=\dfrac{1}{3}$

Vì u_1,u_2,u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q=3 \Rightarrow u_1=5$

Vậy $u_1=5;\ u_2=15;\ u_3=45$.

Câu 29. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1,u_2,u_3 với công bội là q. Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=19 \\ u_1.u_2.u_3=216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=19 \\ \left(u_1q\right)^3=6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=19 \quad (*) \\ u_1q=6 \Rightarrow u_1=\dfrac{6}{q} \end{cases}$

Thay $u_1=\dfrac{6}{q}$ vào $(*)$ được: $6q^2-13q+6=0 \Leftrightarrow q=\dfrac{3}{2}$ hoặc $q=\dfrac{2}{3}$.

Với $q=\dfrac{3}{2} \Rightarrow u_1=4,u_2=6,u_3=9$.

Với $q=\dfrac{2}{3} \Rightarrow u_1=9,u_2=6,u_3=4$.

Câu 30. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Lời giải

Theo đề bài ta có $\begin{cases} S_n=889 \\ u_n=448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=889 \\ u_1q^{n-1}=448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^n-u_1=889(q-1) \quad (1) \\ u_1q^n=448q \quad (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) được: $448q-7=889q-889 \Leftrightarrow q=2$

Câu 31. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1-u_2=35 \\ u_3-u_4=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1q=35 \\ u_1q^2-u_1q^3=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q)=35 \quad (1) \\ u_1q^2(1-q)=560 \quad (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2=16 \Leftrightarrow q=\pm 4$

Với $q=4$ thay vào (1) được $u_1=-\dfrac{35}{3}, u_2=u_1q=-\dfrac{140}{3},\ u_3=-\dfrac{560}{3},\ u_3=-\dfrac{2240}{3}$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Câu 32. Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, ab + 5, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo tính chất của CSC ta có: $a+(2a+b)=2(a+2b)$ (1)

Theo tính chất của CSN ta có: $(b+1)^2(a+1)^2=(ab+5)^2$ (2)

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a=3b$, thay vào (2):

$(b+1)^2(3b+1)^2=(3b^2+5)^2 \Leftrightarrow (b+1)(3b+1)=\pm(3b^2+5)$

Với $(b+1)(3b+1)=3b^2+5 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow a=3$

Với $(b+1)(3b+1)=-3b^2-5 \Leftrightarrow 6b^2+4b+6=0$ (vô nghiệm).

Kết luận $a=3, b=1$

Câu 33. Tính các tổng sau:

a). $S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

b). $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

c). $S_n=\left(3+\frac{1}{3}\right)^2+\left(9+\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\frac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666...6}_{n\text{ so }6}$

Lời giải

a). Ta có dãy số $2,2^2,2^3,\cdots,2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội $q=\frac{2^2}{2}=2$. Do đó $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=2.\frac{1-2^n}{1-2}=2\left(2^n-1\right)$.

b). Ta có dãy số $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{2}$ và công bội $q=\frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. Do đó $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$.

c). $S_n=\left(3+\frac{1}{3}\right)^2+\left(9+\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\frac{1}{3^n}\right)^2$

$=3^2+2+\frac{1}{3^2}+3^4+2+\frac{1}{3^4}+\cdots+3^{2n}+2+\frac{1}{3^{2n}}$

$=\left(3^2+3^4+\cdots+3^{2n}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{2n}}\right)+\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n}$

• Có dãy số $3^2,3^4,\cdots,3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=3^2$ và công bội $q=\frac{3^4}{3^2}=9$. Do đó $S_1=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=9.\frac{1-9^n}{1-9}=\frac{9}{8}\left(9^n-1\right)$.

- Có dãy số $\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^4},\cdots,\frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{3^2}$ và công bội

$q=\frac{1}{9}$. Do đó $S_1=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{9}.\frac{1-\frac{1}{9^n}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)=\frac{9^n-1}{8.9^n}$.

Vậy $S_n=\frac{9}{8}\left(9^n-1\right)+\frac{9^n-1}{8.9^n}+2n=\frac{\left(9^n-1\right)\left(9^{n+1}+1\right)}{8.9^n}+2n$.

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666...6}_{n\text{ so }6}=\frac{6}{9}\left(9+99+999+\cdots+\underbrace{999...9}_{n}\right)$

$=\frac{2}{3}\left[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^n-1)\right]$

$=\frac{2}{3}\left[10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n\right]=\frac{2}{3}\left[10.\frac{10^n-1}{10-1}-n\right]=\frac{20}{27}\left(10^n-1\right)-\frac{2n}{3}$

Câu 34. Tính tổng $B=7+77+777+\cdots+\underbrace{777...7}_{n}$

Lời giải

$B=7+77+777+\cdots+\underbrace{777...7}_{n}$

$\Leftrightarrow B=7\left(1+11+111+\cdots+\underbrace{111...1}_{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{B}{7}=1+11+111+\cdots+\underbrace{111...1}_{n}$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=9+99+999+\cdots+\underbrace{99...9}_{n}$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=\left(10+10^2+10^3+\cdots+10^n\right)-\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=\frac{10\left(1-10^n\right)}{1-10}-n$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$

$\Leftrightarrow B=\frac{7\left(10^{n+1}-9n-10\right)}{81}$

☞ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

☞Tải nhiều tài liệu hơn tại: https://www.nbv.edu.vn/