

BÀI 2. CẤP SỐ CỘNG

- **CHƯƠNG 2. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN**
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)**DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY SỐ (u_n) LÀ CẤP SỐ CỘNG.**

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 1. (SGK-CTST 11-Tập 1) Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định công sai của mỗi cấp số cộng đó.

- 3; 7; 11; 15; 19; 23.
- Dãy số (u_n) với $u_n = 9n - 9$.
- Dãy số (v_n) với $v_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

Lời giải

a) Dãy số 3; 7; 11; 15; 19; 23. là cấp số cộng với công sai $d = 4$

b) Ta có: $u_{n+1} = 9(n+1) - 9 = 9n - 9 + 9 = u_n + 9$

Vậy dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 9$

c) Ta có: $v_{n+1} = a(n+1) - b = an - b + a = v_n + a$

Vậy dãy số (v_n) là cấp số cộng có công sai $d = a$

Câu 2. (SGK-CTST 11-Tập 1) Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

Lời giải

3 góc của tam giác lập thành cấp số cộng, ta gọi 3 góc đó là: $a; a + d; a + 2d$ ($a, d > 0$)

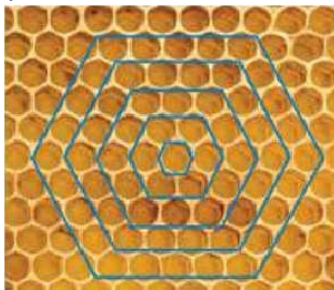
Ta có: $a + (a + d) + (a + 2d) = 180^\circ \Leftrightarrow 3a + 3d = 180^\circ \Leftrightarrow a + d = 60^\circ$ (1)

Do tam giác đó là tam giác vuông nên có 1 góc bằng 90° . Suy ra $a + 2d = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2), ta tính được $a = 30^\circ, d = 30^\circ$

Vậy số đo 3 góc là $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$

Câu 3. (SGK-CTST 11-Tập 1) Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục (Hình 2). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hình 2

Lời giải

Số ô trên các vòng là: $u_1 = 6; u_2 = 12; u_3 = 18$

Ta thấy $u_{n+1} = u_n + 6$

Vậy các ô trên vòng tạo thành cấp số cộng có công sai là 6

Câu 4. (SGK-CTST 11-Tập 1) Chứng minh dãy số hữu hạn sau là cấp số cộng: $1; -3; -7; -11; -15$.

Lời giải

Ta thấy: $u_{n+1} = u_n + (-4)$

Vậy dãy số trên là dãy số cộng có công sai bằng -4

Câu 5. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$.

Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

Lời giải

$$u_n = 4 + (n-1)(-10) = -10n + 14$$

Vậy công thức số hạng tổng quát $u_n = -10n + 14$

Câu 6. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$ b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$ d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Lời giải

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$ và số hạng đầu $u_1 = 19 \cdot 1 - 5 = 14$.

b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) = -3$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$ và số hạng đầu $u_1 = -3 \cdot 1 + 1 = -2$.

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$, phụ thuộc vào n

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 10(n+1) - [(-1)^n + 10n] = -(-1)^n + 10 - (-1)^n = 10 - 2(-1)^n$, phụ thuộc vào n . Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 7. Định x để 3 số $10 - 3x, 2x^2 + 3, 7 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

Lời giải

Theo tính chất cấp số cộng ta có: $(10 - 3x) + (7 - 4x) = 2(2x^2 + 3)$

$$\Leftrightarrow 17 - 7x = 4x^2 + 6 \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{11}{4}.$$

Câu 8. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$, và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Lời giải

Gọi x, y, z theo thứ tự tăng dần của độ dài ba cạnh của tam giác.

Chu vi của tam giác: $x + y + z = 3a$ (1)

Tính chất của CSC có $x + z = 2y$ (2)

Vì tam giác vuông nên có: $x^2 + y^2 = z^2$ (3)

Thay (2) vào (1) được $3y = 3a \Leftrightarrow y = a$, thay $y = a$ vào (2) được: $x + z = 2a \Rightarrow x = 2a - z$

Thay x và y vào (3) được: $(2a - z)^2 + a^2 = z^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 4az = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5a}{4} \Rightarrow x = \frac{3a}{4}$

Kết luận độ dài ba cạnh của tam giác thỏa yêu cầu: $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Câu 9. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CSC. Tìm số đo các góc đó.

Lời giải

Gọi 3 góc A, B, C theo thứ tự đó là ba góc của tam giác ABC lập thành CSC.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A + B + C = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 90 \\ A - 2B = -90 \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30 \\ B = 60 \\ C = 90 \end{cases}$$

DẠNG 2: TÌM SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN, CÔNG SAI CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÌM SỐ HẠNG THỨ k CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÍNH TỔNG k SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN.

Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d . Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d .

Muốn tìm số hạng thứ k , trước tiên ta phải tìm u_1 và d . Sau đó áp dụng công thức:

$$u_k = u_1 + (k-1)d.$$

Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d . Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k[2u_1 + (k-1)d]}{2}$$

Câu 10. (SGK-CTST 11-Tập 1) Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau:

a) Cấp số cộng (a_n) có $a_1 = 5$ và $d = -5$;

b) Cấp số cộng (b_n) có $b_1 = 2$ và $b_{10} = 20$.

Lời giải

a) $u_n = 5 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 10$

b) $b_{10} = b_1 + 9d \Leftrightarrow 20 = 2 + 9d \Leftrightarrow d = 2$

$b_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$

Câu 11. (SGK-CTST 11-Tập 1) Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) có $c_4 = 80$ và $c_6 = 40$.

Lời giải

$c_4 = c_1 + 3d \Leftrightarrow c_1 + 3d = 80$

$c_6 = c_1 + 5d \Leftrightarrow c_1 + 5d = 40$

Suy ra $c_1 = 140$ và $d = -20$

$c_n = 140 + (n-1) \cdot (-20) = -20n + 160$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $c_n = -20n + 160$

Câu 12. (SGK-CTST 11-Tập 1) a) Tính tổng 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Lời giải

a) Tổng 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên là: $S_{50} = \frac{50[2.0 + (50-1) \cdot 2]}{2} = 2450$

b) $u_3 + u_{28} = u_1 + 2d + u_1 + 27d = u_1 + u_1 + 29d = u_1 + u_{30} = 100$

$$S_{30} = \frac{n(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30.100}{2} = 1500$$

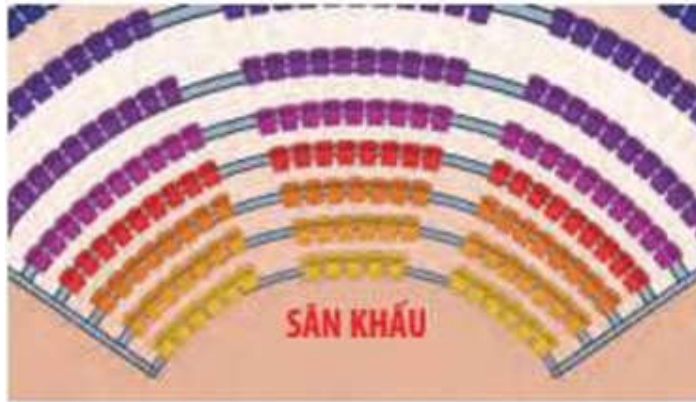
c) $S_6 = \frac{6(2u_1 + 5d)}{2} = 18 \Leftrightarrow 2u_1 + 5d = 6$

$$S_{10} = \frac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 110 \Leftrightarrow 2u_1 + 9d = 22$$

Suy ra $u_1 = -7; d = 4$

$$S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 620$$

Câu 13. (SGK-CTST 11-Tập 1) Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế,... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình 4).



Hình 4

a) Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.

b) Tính tổng số ghế có trong rạp.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 17; u_2 = 20; u_3 = 23$

Suy ra $d = 3$ và $u_n = 17 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 14$

a) $u_{20} = 3.20 + 14 = 74$

b) $S_{20} = \frac{20(17 + 74)}{2} = 910$

Câu 14. (SGK-CTST 11-Tập 1) Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

a) Tìm u_{12} .

b) Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

Lời giải

$$u_n = -3 + 2(n-1) = 2n - 5$$

a) $u_{12} = 2.12 - 5 = 19$

b) $u_n = 2n - 5 = 195 \Leftrightarrow n = 100$

Câu 15. (SGK-CTST 11-Tập 1) Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 3 - 4n$

- b) $u_n = \frac{n}{2} - 4$
 c) $u_n = 5^n$;
 d) $u_n = \frac{9-5n}{3}$.

Lời giải

a) $u_n = 3 - 4n = -1 - 4(n-1)$

Vậy dãy số trên là cấp số cộng có số hạng đầu là -1 và công sai là -4

b) $u_n = \frac{n}{2} - 4 = \frac{-7}{2} + (n-1)\frac{1}{2}$

Vậy dãy số trên là cấp số cộng có số hạng đầu là $\frac{-7}{2}$ và công sai là $\frac{1}{2}$

c) $u_n = 5^n$

Dãy số trên không phải cấp số cộng

d) $u_n = \frac{9-5n}{3} = \frac{4}{3} - (n-1)\frac{5}{3}$

Vậy dãy số trên là cấp số cộng có số hạng đầu là $\frac{4}{3}$ và công sai là $-\frac{5}{3}$

Câu 16. (SGK-CTST 11-Tập 1) Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

- a) $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8, u_3 = 24. \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - u_1 = 20 \\ u_1 + d + u_1 + 4d = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 10 \\ u_1 = 2 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 2d = 0 \\ u_1 + d + u_1 + 4d = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 0 \\ 2u_1 + 5d = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 40 \\ u_1 = -60 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8, u_3 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d - u_1 - d = 3 \\ (u_1 + 7d)(u_1 + 2d) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} d = 1 \\ u_1 = -10 \end{cases}$

Câu 17. (SGK-CTST 11-Tập 1) Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là $45cm, 43cm, 41cm, \dots, 31cm$.



Hình 5

- a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
 b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Lời giải

a) Chiều dài các thanh ngang là dãy cấp số cộng có số hạng đầu là 45, công sai là -2

$$u_n = 45 - 2(n-1) = 47 - 2n$$

Khi $u_n = 31 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy cái thang có 8 bậc

$$b) S_8 = \frac{8 \cdot (45 + 31)}{2} = 304$$

Vậy chiều dài thanh gỗ là 304 cm

Câu 18. (SGK-CTST 11-Tập 1) Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

a) Tính công sai của cấp số cộng trên.

b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$

$$b) S_{10} = \frac{10 \cdot [2 \cdot 16 + (10-1) \cdot 32]}{2} = 1600$$

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet

Câu 19. (SGK-CTST 11-Tập 1) Ở một loài thực vật lưỡng bội, tình trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5cm . Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100cm . Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

Lời giải

Cây với kiểu gene $AABB$ có chiều cao là: $100 + 5 \cdot 4 = 120(\text{cm})$

Câu 20. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

$$a) \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \quad c) \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases} \quad d) \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$$

Lời giải

$$a) \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \quad (1). \text{ Áp dụng công thức } u_n = u_1 + (n-1)d, \text{ ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 4 = 79$.

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên: } S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot 3 + 19 \cdot 4) = 820$$

$$b) \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \quad (1). \text{ Ta cũng áp dụng công thức } u_n = u_1 + (n-1)d :$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 3$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 3 = 58$.

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên: } S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.1 + 19.3) = 590$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases} \quad (1). \text{ Áp dụng công thức } u_n = u_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} \quad \text{Ta có:}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 6(u_1 + u_{12}) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy số hạng đầu tiên } u_1 = \frac{5}{2}, \text{ công sai } d = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Số hạng thứ 20: } u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2} = 31.$$

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên: } S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2 \cdot \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2}\right) = 335$$

$$\text{d) } \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 5d + d)^2 + (8 - 5d + 3d)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 16 \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*): 20d^2 - 96d + 112 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{14}{5} \vee d = 2.$$

$$\text{Với } d = \frac{14}{5} \Rightarrow u_1 = -6$$

$$\text{Số hạng thứ 20: } u_{20} = u_1 + 19d = -6 + 19 \cdot \frac{14}{5} = \frac{236}{5}.$$

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên: } S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2 \cdot (-6) + 19 \cdot \frac{14}{5}\right) = 412$$

$$\text{Với } d = 2 \Rightarrow u_1 = -2$$

$$\text{Số hạng thứ 20: } u_{20} = u_1 + 19d = -2 + 19 \cdot 2 = 36.$$

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên: } S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot (-2) + 19 \cdot 2) = 340$$

Câu 21. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

$$\text{a). } \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \quad \text{b). } \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \quad \text{c). } \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$$

$$\text{d). } \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \quad \text{e). } \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$$

Lời giải

Gọi số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

$$\text{a). } \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - (u_1 + 6d) = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \end{cases} (*)$$

$$\text{Giải } (*) \Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}$$

$$e). \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } S_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 21 \Leftrightarrow d = 7 - u_1.$$

$$\text{Ta có: } u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 7 - u_1)^2 + (u_1 + 14 - 2u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + 49 + (14 - u_1)^2 = 155$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9 \vee u_1 = 5$$

$$\text{Với } u_1 = 9 \Rightarrow d = -2. \text{ Với } u_1 = 5 \Rightarrow d = 2$$

Câu 22. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

$$1) \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$$

Lời giải

$$1) \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(2u_1 + 2d) = 12 \\ \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 8 \\ 2u_1 + 4d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 9 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3-d \\ (3-d)^2 + 3^2 + (3+d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3-d \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3-d \\ d = \pm 2 \end{cases}$$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5$.

$$3) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 16 \quad (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 84 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow u_1 = \frac{16-6d}{4} = 4 - \frac{3}{2}d$ thay vào (2) được:

$$\left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 2d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 3d\right)^2 = 84$$

$$\Leftrightarrow \left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{3d}{2}\right)^2 = 84 \Leftrightarrow 64 + 5d^2 = 84 \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 7$

$$4) \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 5 \Leftrightarrow 2u_1 + 4d = 2 \Rightarrow u_1 = 1 - 2d \quad (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2):

$$\Leftrightarrow (1-2d)(1-2d+d)(1-2d+2d)(1-2d+3d)(1-2d+4d) = 45$$

$$\Leftrightarrow (1-2d)(1-d)(1+d)(1+2d) = 45 \Leftrightarrow (1-2d)(1+2d)(1-d)(1+d) = 45$$

$$\Leftrightarrow (1-4d^2)(1-d^2) = 45. \text{ Đặt } t = d^2, t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-4t)(1-t) = 45 \Leftrightarrow 4t^2 - 5t - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 4 \text{ (nhận) hoặc } t = -\frac{11}{4} \text{ (loại)} \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -3$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5$.

$$5) \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u_1 + 3d) = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 - \frac{3}{2}d \\ \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 2d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 3d} = \frac{25}{24} \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 + \frac{3}{2}d} \right) + \left(\frac{1}{5 - \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{d}{2}} \right) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25 - \frac{9d^2}{4}} + \frac{10}{25 - \frac{d^2}{4}} = \frac{25}{24}$$

$$\text{Đặt: } \frac{d^2}{4} = t; t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{25-9t} + \frac{10}{25-t} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{2(25-t) + 2(25-9t)}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24}$$

$$\Leftrightarrow 24(20-4t) = (25-9t)(25-t) \Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{145}{9} \quad \vee \quad t = 1$$

$$\bullet t = \frac{145}{9} \Leftrightarrow d^2 = \frac{145}{9} \Rightarrow d = \pm \frac{\sqrt{145}}{3}$$

$$\text{Với } d = \frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{\sqrt{145}}{2}. \text{ Với } d = -\frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$\bullet t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1$$

$$\text{Với } d = 1 \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}. \text{ Với } d = -1 \Leftrightarrow u_1 = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

$$6) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d + u_1 + 4d = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10d = 20 \Rightarrow u_1 = 4 - 2d \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 4d)^2 = 170 \quad (2) \end{cases}$$

Thay: $u_1 = 4 - 2d$ vào (2) được:

$$(4 - 2d)^2 + (4 - 2d + d)^2 + (4 - 2d + 2d)^2 + (4 - 2d + 3d)^2 + (4 - 2d + 4d)^2 = 170$$

$$\Leftrightarrow (4 - 2d)^2 + (4 - d)^2 + 4^2 + (4 + d)^2 + (4 + 2d)^2 = 170$$

$$\Leftrightarrow 80 + 10d^2 = 170 \Leftrightarrow d^2 = 9 \Leftrightarrow d = \pm 3.$$

$$\text{Với } d = 3 \Rightarrow u_1 = 4 - 6 = -2. \text{ Với } d = -3 \Rightarrow u_1 = 4 + 6 = 10.$$

$$7) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = -12 \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 - d \quad (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d) = 8 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được: $(-4 - d)(-4 - d + d)(-4 - d + 2d) = 8 \Leftrightarrow (4 + d)(d - 4) = 2$

$$\Leftrightarrow d^2 - 16 = 2 \Leftrightarrow d^2 = 18 \Leftrightarrow d = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\text{Với } d = 3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 - 3\sqrt{2}. \text{ Với } d = -3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 + 3\sqrt{2}.$$

$$8) \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d = \frac{5}{3} \\ (u_1 + 2d)(u_1 + 3d) = \frac{65}{72} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{6} - 2d \\ \left(\frac{5}{6} - 2d + 2d\right)\left(\frac{5}{6} - 2d + 3d\right) = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{6} - 2d \\ \frac{5}{6} + d = \frac{13}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 23. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

$$\text{a). } \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \quad \text{b). } \begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \quad \text{c). } \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \quad \text{d). } \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases}$$

Lời giải

$$a). \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12(2u_1 + 11d)}{2} = 34 \\ \frac{18(2u_1 + 17d)}{2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u_1 + 33d = 17 \\ 2u_1 + 17d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{32}{9} \\ d = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$u_n = u_1 + (n-1)d = \frac{33}{9} - \frac{1}{9}n$$

$$b). \begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ \frac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ 2u_1 + 9d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 86 \\ d = -19 \end{cases}$$

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 105 - 19n$$

$$c). \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} \\ \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20(2u_1 + 19d)}{10} = \frac{10(2u_1 + 9d)}{6} \\ \frac{10(2u_1 + 9d)}{6} = \frac{5(2u_1 + 4d)}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 55d = 0 \\ 2u_1 + 24d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow u_n = 0$$

$$d). \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(2u_1 + 19d) = 20(2u_1 + 9d) \\ 15(2u_1 + 14d) = 15(2u_1 + 4d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ u_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 \in \mathbb{R}$$

Câu 24. Cho cấp số cộng: $u_1; u_2; u_3; \dots$ có công sai d .

- 1). Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23}
- 2). Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_6 + u_{11} \vee u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$
- 4). Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính: S_{19}
- 5). Biết $u_{23} + u_{57} = 29$. Tính: $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$

Lời giải

- 1). Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23}

$$\text{Ta có: } u_2 + u_{22} = 40 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 21d = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 40$$

$$\text{Mà } S_{23} = \frac{23}{2}(2u_1 + 22d) = \frac{23}{2} \cdot 40 = 460.$$

- 2). Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_6 + u_{11} \vee u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$

$$\text{Có: } u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147.$$

$$\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 3d + u_1 + 6d + u_1 + 9d + u_1 + 12d + u_1 + 15d = 147.$$

$$\Leftrightarrow 6u_1 + 45d = 147 \Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 49.$$

$$\text{Ta có: } u_6 + u_{11} = u_1 + 5d + u_1 + 10d = 2u_1 + 15d = 49.$$

$$\text{Ta có: } u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} = u_1 + u_1 + 5d + u_1 + 10d + u_1 + 15d$$

$$= 4u_1 + 30d = 2(2u_1 + 15d) = 2 \cdot 49 = 98.$$

- 4). Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính: S_{19}

$$\text{Có: } u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 11d + u_1 + 15d = 224 \Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 56$$

$$\text{Ta có: } S_{19} = \frac{19}{2}(2u_1 + 18d) = 19(u_1 + 9d) = 19.56 = 1064.$$

$$5). \text{ Biết } u_{23} + u_{57} = 29. \text{ Tính: } u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$$

$$\text{Ta có: } u_{23} + u_{57} = 29 \Leftrightarrow u_1 + 22d + u_1 + 56d = 29 \Leftrightarrow 2u_1 + 78d = 29.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3u_1 + u_{10} + u_{70} + u_{157} &= 3u_1 + u_1 + 9d + u_1 + 69d + u_1 + 156d \\ &= 6u_1 + 234d = 3(2u_1 + 78d) = 3.29 = 87 \end{aligned}$$

Câu 25. Tìm 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Lời giải

Gọi 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng: $u_1; u_2; u_3$. Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 & (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 293 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 27 \Leftrightarrow 3u_1 + 3d = 27 \Leftrightarrow d = 9 - u_1.$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 293$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + (u_1 + 18 - 2u_1)^2 = 293 \Leftrightarrow u_1^2 + 81 + (18 - u_1)^2 = 293$$

$$\Leftrightarrow 2u_1^2 - 36u_1 - 112 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 14 \vee u_1 = 4$$

$$\text{Với } u_1 = 14 \Rightarrow d = -5 \Rightarrow u_2 = 9; u_3 = 4.$$

$$\text{Với } u_1 = 4 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow u_2 = 9; u_3 = 14.$$

Ta có thể gọi 3 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - d, u_2 = u, u_3 = u + d$ với công sai d

Câu 26. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.

Lời giải

Gọi 4 số hạng của cấp số cộng cần tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 có công sai d .

$$\text{Theo đề bài ta có: } \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 & (1) \\ u_1 u_2 u_3 u_4 = 384 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 20$$

$$\Leftrightarrow 4u_1 + 6d = 20 \Rightarrow u_1 = \frac{20 - 6d}{4} = 5 - \frac{3}{2}d.$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d) = 384.$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{2}d\right)\left(5 - \frac{3}{2}d + d\right)\left(5 - \frac{3}{2}d + 2d\right)\left(5 - \frac{3}{2}d + 3d\right) = 384$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{2}d\right)\left(5 + \frac{3}{2}d\right)\left(5 - \frac{d}{2}\right)\left(5 + \frac{d}{2}\right) = 384 \Leftrightarrow \left(25 - \frac{9d^2}{4}\right)\left(25 - \frac{d^2}{4}\right) = 384.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{d^2}{4}, t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (25 - 9t)(25 - t) = 384 \Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{241}{9} \vee t_2 = 1.$$

$$\text{Cách 2: gọi } u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$$

$$\text{Ta có: } u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \Leftrightarrow 4u = 20 \Rightarrow u = 5.$$

$$\text{Và: } u_1 u_2 u_3 u_4 = 384. \Leftrightarrow (u-3d)(u-d)(u+d)(u+3d) = 384$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - 9d^2)(u^2 - d^2) = 384 \Leftrightarrow (25 - 9d^2)(25 - d^2) = 384.$$

$$\text{Đặt: } t = d^2, t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{241}{9}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1.$$

$$\bullet d = 1 \Rightarrow u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 6; u_4 = 8$$

$$\bullet d = -1 \Rightarrow u_1 = 8; u_2 = 6; u_3 = 4; u_4 = 2$$

$$\text{Với: } t = \frac{241}{9} \Rightarrow d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3}$$

$$\bullet d = \frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \sqrt{241}; u_2 = 5 - \sqrt{241}; u_3 = 5 + \frac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 + \sqrt{241}$$

$$\bullet d = -\frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \sqrt{241}; u_2 = 5 + \frac{\sqrt{241}}{3}; u_3 = 5 - \frac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 - \sqrt{241}.$$

Ta có thể gọi 4 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai $2d$.

Câu 27. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - d, u_2 = u, u_3 = u + d$ với công sai là d :

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u = 15 \\ (u-d)^2 + u^2 + (u+d)^2 = 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ d = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } d = 2 \Rightarrow u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7$$

$$\text{Với } d = -2 \Rightarrow u_1 = 7, u_2 = 5, u_3 = 3.$$

Câu 28. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Lời giải

Gọi năm số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 2d, u_2 = u - d, u_3 = u, u_4 = u + d, u_5 = u + 2d$ với công sai là d :

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 40 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 480 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 40 \\ (u-2d)^2 + (u-d)^2 + u^2 + (u+d)^2 + (u+2d)^2 = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d = \pm 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } d = 4 \Rightarrow u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 8, u_4 = 12, u_5 = 16.$$

$$\text{Với } d = -4 \Rightarrow u_1 = 16, u_2 = 12, u_3 = 8, u_4 = 4, u_5 = 0$$

Câu 29. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai là $2d$:

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 10 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u = 10 \\ (u - 3d)^2 + (u - d)^2 + (u + d)^2 + (u + 3d)^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{5}{2} \\ d^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d = \pm 4 \end{cases}$$

Câu 30. Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d .

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_3 - u_5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 2d) - (u_1 + 5d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 \\ d = -2 \end{cases}$$

Kết luận: $u_1 = 17, u_2 = 15, u_3 = 13, u_4 = 11, u_5 = 9, u_6 = 7, u_7 = 5$.

Câu 31. Một CSC có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm CSC đó.

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d .

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 28 \\ u_5 + u_7 = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 28 \\ u_1 + 4d + u_1 + 6d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 28 \\ 2u_1 + 10d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -70 \\ d = 28 \end{cases}$$

Câu 32. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được CSC có tám số hạng. Tìm CSC đó

Lời giải

Gọi $3, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, 24$ là CSC cần tìm, ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_8 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 + 7d = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 12, u_5 = 15, u_6 = 18, u_7 = 21, u_8 = 24$

Câu 33. Bốn số nguyên lập thành CSC, biết tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$.

Tìm bốn số đó.

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai là $2d$:

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u = 20 \\ \frac{1}{u-3d} + \frac{1}{u-d} + \frac{1}{u+d} + \frac{1}{u+3d} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 5 \\ \frac{1}{5-3d} + \frac{1}{5+3d} + \frac{1}{5-d} + \frac{1}{5+d} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ \frac{10}{25-9d^2} + \frac{10}{25-d^2} = \frac{25}{24} \end{cases} \quad (2)$$

Giải (2): đặt $t = d^2$, điều kiện $t \geq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2}{25-9t} + \frac{2}{25-t} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow 24(20-4t) = (25-9t)(25-t)$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{145}{9}$$

Vì các số hạng là những số nguyên nên chọn $t = 1$.

Câu 34. Tính các tổng sau:

- $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$
- $S = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) + (3n+1) + (3n+4)$
- $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

Lời giải

a). Ta có dãy số $1, 3, 5, \dots, (2n-1), (2n+1)$ là cấp số cộng với công sai $d = 2$ và $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_m = 2n+1$. Do đó có $2n+1 = u_1 + (m-1)d \Leftrightarrow 2n+1 = 1 + (m-1).2 \Rightarrow m = n+1$.

$$\text{Vậy } S_{n+1} = \frac{(n+1)(2u_1 + nd)}{2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2}.$$

b). Ta có dãy số $1, 4, 7, \dots, (3n-2), (3n+1), (3n+4)$ là cấp số cộng với công sai $d = 3$ và $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_m = 3n+4$. Do đó có: $3n+4 = u_1 + (m-1)d \Leftrightarrow 3n+4 = 1 + (m-1).3 \Rightarrow m = n+2$

$$\text{Vậy } S_{n+2} = \frac{m(2u_1 + (m-1)d)}{2} = \frac{(n+2)[2 + (n+1)3]}{2} = \frac{(n+2)(3n+5)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c). } S &= 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 \\ &= (100-99)(100+99) + (98-97)(98+97) + \dots + (2-1)(2+1) \\ &= 199 + 195 + \dots + 3 \end{aligned}$$

Ta có dãy số $3, 7, \dots, 195, 199$ là cấp số cộng với công sai $d = 4$, số hạng đầu tiên $u_1 = 3$ và số hạng n là $u_n = 199$.

$$\text{Do đó có } 199 = 3 + (n-1).4 \Rightarrow n = 50.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{50(2.3 + 49.4)}{2} = 5050.$$

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương**  <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: Nguyễn Vương  <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)  <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

 https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

 **Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <https://www.nbv.edu.vn/>