Homework 4

B06303131 經濟五 沈家睿

January 3, 2022

Reference:
b08501098 柯晨緯 & b08902149 徐晨祐 & b09902068 凌暄
b09902129 黃柏鈞 & b08502041 李芸芳 & b09505014 王聖文

Problem 5 - P NPC & Reduction

1. 定義 reduction function 爲
$f(a_1, a_2, .., a_n; T) = (a_1 + K, a_2 + K, ..., a_n + K, \underbrace{K, ..., K}_{nK's}; T + nK)$
$K = 1 + |T| + \sum_{i=1}^{n} |a_i|$
這樣可以保證 $K \neq T$ 及 $\sum_{i=1}^{n} a_i + K \neq T$ 及 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq T$
因爲若 $K = T$ 或 $\sum_{i=1}^{n} a_i + K = T$ 或 $\sum_{i=1}^{n} a_i = T$
有可能會發生若干 K 及 $\sum_{i=1}^{m}(a_i + K), m \leq n$ 組合出 $T + nK$
則 f(L) 經過 $JJBAP_+$ 爲 yes
但 L 經過 JJBAP 爲 no
因此取 $K = 1 + |T| + \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ 可避免上述情形之發生
而 K 之計算時間爲 O(n)
而 $(a_1, a_2, ...a_n)$ 再額外加上 K 及補上 n 個 K 亦爲 O(n)
因此 f() 可以 polynomial-time reduction
定義 L:the instance of JJBAP
f(L):the instance of $JJBAP_+$
claim:the answer to L is yes iff the answer to f(L) is yes
$(\Rightarrow)$:
answer to L 爲 yes 代表假設 T 爲 m 個 a_i 加總而成 $m \leq n$
則 answer to f(L) 則取一樣的 a_i 們及 $(n - m)K$ 組成 $T + nK$
亦可得到 yes
$(\Leftarrow)$:
answer to f(L) 爲 yes 代表 T+nK 爲 $\sum_{i=1}^{m}(a_i + K) + (n - m)K$
而 $\sum_{i=1}^{m} a_i$ 即爲 T
因此 answer to L 亦爲 yes
故得證
因此可得 $JJBAP \leq_p JJBAP_+$

2. 由上題可知 $JJBAP \leq_p JJBAP_+$

因此先將 JJBAP 之 instance 轉爲 $JJBAP_+$ 之 instance

再證 $JJBAP_+ \leq_p QQP$

令 $JJBAP_+$ 之 instance 爲

$L = (a_1 + K, a_2 + K, .., a_n + K, \underbrace{K, ..., K}_{nK's}; T + nK)$

令 $U = \sum_{i=1}^{n}(a_i + K) + nK$

$T' = T + nK$

因此 polynomial time reduction 就加入 $|U - 2T'|$ 至 L 即可

令 QQP 之 instance 爲

$f(L) = (a_1, a_2, .., a_n, \underbrace{K, ..., K}_{nK's}, |U - 2T'|)$

claim:the answer to L is yes iff the answer to f(L) is yes

($\Rightarrow$):

若 the answer to L is yes

則可將 L 分爲兩個 subset 其和分別爲 S_1:$U - T'$ 及 S_2:T'

則分兩 case 討論

1.$U \geq 2T'$:

則將多的元素 $|U - 2T'|$ 加至 S_2

便可得兩 subset 和皆爲 $U - T'$

因此便可得 the answer to f(L) is yes

2.$U < 2T'$

則將多的元素 $|U - 2T'|$ 加至 S_1

便可得兩 subset 和皆爲 T'

因此便可得 the answer to f(L) is yes

($\Leftarrow$):

若 the answer to f(L) is yes

則分兩 case 討論

1.$U \geq 2T'$:

則兩 subset S_1, S_2 和皆爲 $|U - T'|$

則將多的元素 $|U - 2T'|$ 從 S_2 中移除

因此 S_2 之和即爲 T'

因此便可得 the answer to L is yes

2.$U < 2T'$

則兩 subset S_1, S_2 和皆爲 T'

則將多的元素 $|U - 2T'|$ 從 S_1 中移除

而 S_2 之和即爲 T'

因此便可得 the answer to L is yes

故得證

因此 $JJBAP_+ \leq_p QQP$

結合上題之結論 $JJBAP \leq JJBAP_+$ 可得 $JJBAP \leq_p QQP$

3. DDBP: 是否可以將全部的球分割爲 k 個 subset
且每個 subset 重量之總和 $w \in [0,1]$
claim:$QQP \leq_p DDBP$
令 $U = \sum_{i=1}^{n} a_i$
QQP 之 instance 爲 $L = (a_1, a_2, ...a_n)$
polynomial time reduction function 爲

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{cases} (a_1 \cdot \frac{2}{U}, a_2 \cdot \frac{2}{U}, ..., a_n \cdot \frac{2}{U}; 2) & \text{,if } U \neq 0 \\ (0, 0, \cdots, 0; 2) & \text{,if } U = 0 \end{cases}$$

因爲只需將每個元素乘上 $\frac{2}{U}$ 及加上一個限制 k
因此只需花費 O(n) 時間
claim:the answer to L is yes iff the answer to f(L) is yes
分爲 $U = 0$ 及 $U \neq 0$ 兩個 case 討論
1. 若 $U = 0$
則 $QQP(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$ 且 $DDBP(0, 0, \cdots, 0; 2) = 1$
2. 若 $U \neq 0$
($\Rightarrow$):
若 the answer to L is yes
則代表可將 $(a_1, a_2, a_2, ...a_n)$ 分爲兩 subset
且各 subset 和皆爲 $\frac{U}{2}$
因此若將兩 subset 之各元素乘上 $\frac{2}{U}$ 後
subset 總和皆爲 1
因此 the answer to f(L) is yes
($\Leftarrow$):
若 the answer to f(L) is yes
因其全部元素總和爲 2
因此只可分割爲兩個 subset
兩個 subset 的元素總和皆爲 1
因此將兩個 subset 元素皆乘上 $\frac{U}{2}$
即可得到 the answer to L is yes
故得證
因此 $QQP \leq_p DDBP$
而 DDBP 可以 polynomial time reduce to DBP
因爲就將 DDBP 之限制 k 移除即可
而 DBP 可以解出最小堆數 m
若 $m > k$ 則可推得 DDBP output false
反之即爲 yes
而又因爲 $QQP \leq_p DDBP$
可推得 $QQP \leq_p DBP$

4. $QQP \in NP$ 是因若給任一解

可在 O(n) 時間內分別驗證兩 subset 之元素總和是否爲 $\frac{U}{2}$

$DDBP \in NP$ 是因若給任一解

可在 O(n) 時間內檢驗其是否所有 subset 之元素總和 $w \in [0,1]$

由 (2) 可知 $JJBAP \leq_p QQP$

而 $JJBAP \in NP-Complete$ 且 QQP 爲 NP

因此 $QQP \in NP-Complete$

而 $QQP \leq_p DDBP$

而 $QQP \in NP-Complete$ 且 DDBP 爲 NP

因此 $DDBP \in NP-Complete$

5. claim: 存在 polynomial time($\frac{3}{2}-\epsilon$)-approximation algorithm for DBP

使用矛盾法證明

若存在 polynomial time($\frac{3}{2}-\epsilon$)-approximation algorithm for DBP

假設 $U=\sum_{i=1}^{n} a_i$

一樣分爲 $U \neq 0$ 及 $U=0$ 討論

1. 若 $U=0$

則 $DBP(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$

因此可以在 polynomial time 得到解

2. 若 $U \neq 0$

DBP 之 instance L 爲 ($\frac{2a_1}{U}, \frac{2a_2}{U}, ..., \frac{2a_n}{U}$)

假設最佳解 m 爲 2

則可知 ($\frac{3}{2}-\epsilon$)-approximation algorithm output ans 之範圍爲

$2 \leq ans < 3$

且 ans 皆爲正整數

因爲 $0 < \epsilon < 0.5$

因此 $2 < ans = 3 - 2 \cdot \epsilon < 3$ 且 $2 \leq ans$

根據 (3)(4) 可知 $QQP \leq_p DBP$

1. 因此若 $ans = 2$

則 QQP 亦可得到 yes

2. 反之 $ans > 2$ 則 QQP output false

因爲 $ans > 2$ 則 m 亦不可能爲 2

因此 $QQP(a_1, a_2, .., a_n) = 0$

綜上可得若此 algorithm 存在

則 QQP 可在 polynomial time 解出

然而 $QQP \in NP - Complete$

矛盾於 $P \neq NP$

因此不存在 polynomial time($\frac{3}{2}-\epsilon$)-approximation algorithm for DBP

6. 因爲每顆球最少重 c 公斤
因此每個 bin 最多 $\lfloor \frac{1}{c} \rfloor$ 顆球
總共有 m 種 type 的球
因此可將問題轉換爲
$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq \lfloor \frac{1}{c} \rfloor$ 之非負整數解個數
而上述問題等價於求
$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + N = \lfloor \frac{1}{c} \rfloor$ 之非負整數解個數
因此非負整數解個數爲 $H^{m+1}_{\lfloor \frac{1}{c} \rfloor}$ 亦爲此題之 upper bound

7. 每一個 bin 有 M 種選擇
因此令 x_i 爲第 i 種選擇
則總共有 k 個 bin 且每個 bin 都要選一種方式放球
因此問題轉換爲
$x_1 + x_2 + \cdots + x_M = k$ 之非負整數解個數
因此答案爲 H_k^M
而 $H_k^M = C_k^{M+k-1} = C_{M-1}^{M+k-1} = O(k^M)$
推導如下

$$
\begin{aligned}
C_{M-1}^{M+k-1} &= \frac{M+k-1}{M-1} \times \frac{M+k-2}{M-2} \times \cdots \times \frac{k+1}{1} \\
&= \underbrace{(1+\frac{k}{M-1}) \times (1+\frac{k}{M-2}) \times \cdots \times (1+k)}_{M-1} = O(k^{M-1}) = O(k^M)
\end{aligned}
$$

8. 依次用 $\Gamma()$ 求出 $\Gamma(1), \Gamma(2), \cdots, \Gamma(n)$ 總共花費 $O(n)$ 時間
在 $\Gamma(k)$ 求出 $O(k^{M-1})$ 解後
每個解花費 $O(n)$ 時間檢驗其是否爲可行解
因此 $\Gamma()$ 所花最多時間爲 $O(n^M)$
最後輸出最小堆數的可行解即可
因此時間複雜度爲 $O(n \cdot n^M) = O(n^{M+1})$
因爲要知道是否可以切成 k 個 bins
最多花 $O(n^M)$ 時間
因此 $(c, m) - Kuan's\ DDBP \in P$

Problem 6 - P Merry Christmas

1. $\{v|degree(v) = 2k, \forall v \in G, k \in \mathbb{N}\}$

2. 因爲 $\sum_{v_i \in T.V} degree(v_i) = 2|E|$ 爲偶數
   定義另一集合 $V'' = \{vertex\ v\ with\ even\ degree|\forall v \in T\}$
   則 $\sum_{v_i \in V''} degree(v_i)$ 爲偶數
   因此 $\sum_{v_i \in V'} degree(v_i)$ 需爲偶數
   可得 $|V'|$ 爲偶數否則即發生矛盾

3. OPT 爲 G=(V,E) 之 minimal cost of TSP
根據題目 $V' \subseteq V$ 且 $|V'|$ 爲偶數
定義 subgraph $G' = (V', E')$ 爲一 complete graph 且 $E' \subseteq E$
令 OPT' 爲 G' 之 minimal cost of TSP
而根據圖上邊之權重皆具三角不等式可知 $OPT' \leq OPT$
考慮兩個 perfect matching 之集合 M_1, M_2
令 T 爲 G' 之 TSP 的解集且 $M_1 + M_2 = T$
因此 $cost(M_1) + cost(M_2) \leq OPT' \leq OPT$
可得 $min\{cost(M_1), cost(M_2)\} \leq \frac{OPT}{2}$
而 $cost(M) \leq min\{cost(M_1), cost(M_2)\}$
因此可得 $cost(M) \leq \frac{OPT}{2}$

4. 演算法設計如下

I. 首先獲得 G 之 minimal spanning tree T

II. 得到一集合 V'
$V' = \{v | degree(v) = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0, v \in T.V\}$

III. 利用 V' 得到一 complete graph $G' = (V', E'), E' \subseteq E$

IV. 對 G' 使用 Oracle 找出 V' 之 min-cost perfect matching M

V. 將 M 的邊加入 T 形成新圖 G''
因此可知 G'' 存在 Eulerian cycle
因爲所選出奇數 degree 之點皆多產生一條邊
因此 G' 有 Eulerian cycle
目標是在 G'' 中造出 Hamiltonian cycle
G'' 中從 T.root 沿著 Eulerian cycle 出發
若在點 u 時發現其 adjancency node 皆已被拜訪過
則往後選取一未走訪之點 v
將 u,v 連接形成一 shortcut
並且將 Euler cycle 中從 u 到 v 的邊皆移除
而因爲圖上之邊的權重皆具三角不等式
因此新加入的 shortcut 並不會產生額外 cost
依然會被 cost(T)+cost(M) 所限制住

a claim: 此演算法爲 $\frac{3}{2}$-approximation algorithm

令 OPT 爲此問題的 optimal sol
根據上述演算法可得不等式
$cost(T) + cost(M) \leq OPT + cost(M)$
而根據 (3) 可知 $cost(M) \leq \frac{OPT}{2}$
因此可得 $cost(T) + cost(M) \leq OPT + \frac{OPT}{2} = \frac{3OPT}{2}$
故得證

b 演算法之各步驟時間複雜度分析如下
1. 找 MST 所花時間爲 $O(V^2)$(假設使用 adjancency matrix)
2. 得到集合 O 所花時間爲 $O(V)$
3. 得到 G' 所花時間爲 $O(V^2)$
4. 對 G' 使用 Oracle 找出 M 所花時間爲 polynomial time
5. 得到 G'' 之 Hamiltonian tour 所花時間爲 $O(V^2)$
因此總時間複雜度爲 polynomial time