数值分析上机报告5

段浩东 **1500017705**

上机习题5.1

题目

设有方程组$Ax = b$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

为N阶循环矩阵，b是分量均为1的N维向量。对$N = 2^{10}$用FFT求解此方程组。

解答

设λ为A的特征值，$c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})^T$。由$Lx = \lambda x$，亦即$c * x = \lambda x$，两端作DFT得$\hat{c} \cdot \hat{x} = \lambda \hat{x}$，于是有$\lambda_k = \hat{c_k}$，相应的特征向量$\hat{x_j}^k = \delta_{ij}$。通过对特征向量组成的矩阵逆变换，我们有：

- $x^{(0)} = (1, 1, \ldots, 1)^T$
- $x^{(1)} = (1, \omega^{-1}, \ldots, \omega^{-(N-1)})^T$
- ....
- $x^{(N-1)} = (1, \omega^{-(N-1)}, \ldots, \omega^{-(N-1)^2})$

这一矩阵为$\overline{F}$， 我们有：$A = F^{-1} \Lambda F$，而求解$Ax = b$，即是求$F^{-1} \Lambda F x = b$，即$\Lambda(Fx) = Fb$

我们分为三步计算：3

- 求Fb，得到$\hat{b}$
- 求Λ，即$\hat{c}$
- 求$\hat{x_k} = \hat{b_k} / \hat{c_k}$，然后求$F^{-1}x$得到结果。

最终解得x每一维均为1/2。这一方法相对时间复杂度为$O(N^3)$的高斯消元法，时间复杂度仅$O(NlogN)$，且数值稳定性更加优秀。

上机习题5.2

题目

假设$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{h}$是两个非周期的具有紧支集的向量，并设其分量分别如下：

$$x_n = \begin{cases} \sin(n/2), & n = 1, 2, \cdots, M-1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$
$$h_n = \begin{cases} \exp(1/n), & n = 1, 2, \cdots, Q-1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

这里$Q \le M$。取$Q = 200, M = 500$,利用FFT计算非周期的卷积

$$y_n = \sum_{q=0}^{Q-1} h_q x_{n-q},$$

并和直接用卷积定义求解进行比较。

解答

此题目直接使用FFT进行卷积即可完成，注意由于两向量的维度分别为200与500，在进行FFT之前应先将其分别补齐到最近的2的幂次的两倍，即1024。将补完的两个向量分别按照顺序组织，进行DFT，将结果进行点积，再组织顺序，进行逆DFT即得到结果。

计算结果与直接利用定义求解无显著区别，时间消耗4ms，而直接利用定义求解消耗47ms。

上机习题**5.3**

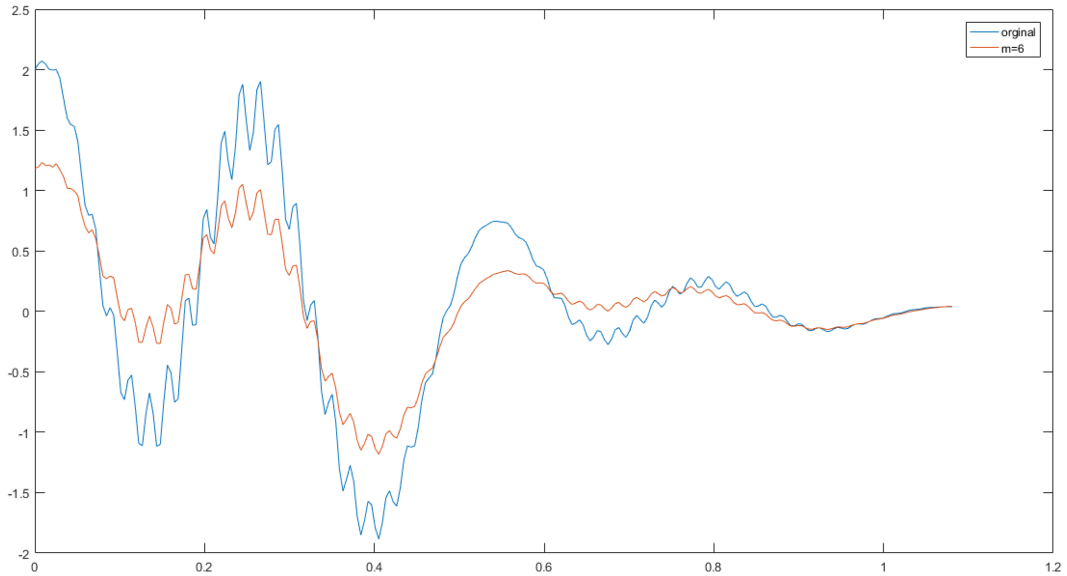
题目

设$f(t) = e^{-t^2/10}(\sin 2t + 2\cos 4t + 0.4 \sin t \sin 50t)$。取$y_k = f(2k\pi/256)$ $(k = 0, 1, \cdots, 256)$离散$f(t)$，利用FFT计算$\hat{y}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, 256)$。因为有结论$\hat{y}_{n-k} = \bar{\hat{y}}_k$，因此低频系数是$\hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_m$和$\hat{y}_{256-m}, \cdots, \hat{y}_{256}$（对某个比较小的$m$）。令$\hat{y}_k = 0$ $(m \le k \le 256-m, m = 6)$过滤掉高频项，然后对新的$\hat{y}'_k$作FFT逆变换得到新的$y'_k$。画图比较$y_k$和$y'_k$的差异，并试验不同的$m$。

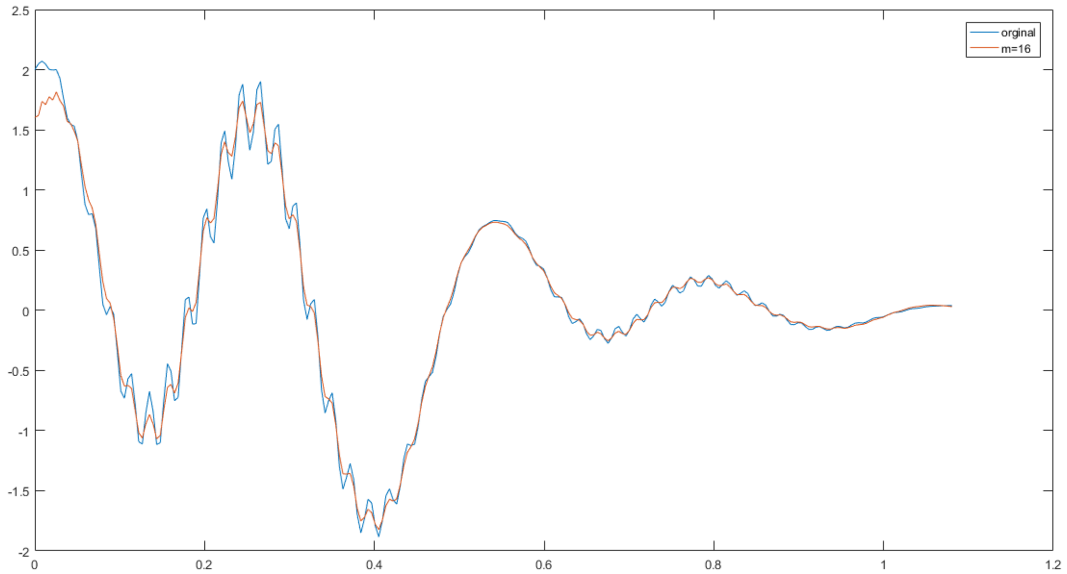
解答

先根据函数f计算出$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{256}$，为了便于进行FFT，将向量y补齐至512维（后面补0）。然后组织好元素的位置，进行DFT，然后根据选定的m，将$\hat{y}$数组的$[m, 256-m]$置为0，再组织好元素位置进行逆DFT，并根据结果绘出图像：

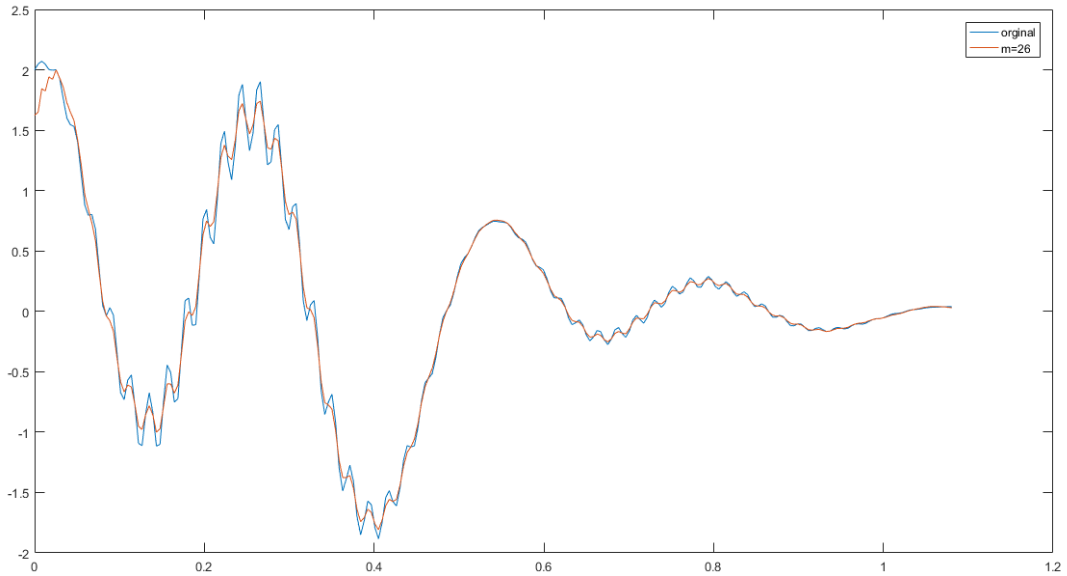
m=6


orginal
m=6
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

m=16


orginal
m=16
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

m=26



- 我们发现，使用FFT得到频域信息后，我们将高频系数略去，采用这一方式对信号进行压缩，在压缩比很大的情况下依然能保持较小的失真。下面我们简述这样做的原理：
- 首先，对采样a进行一次DFT实质相当于进行了一次三角插值：假设a为区间$[c,d]$上均匀分布于$t_j=c+j\delta t,$ $j=0,1,2,\dots N-1,\delta t=\frac{d-c}{n}$的采样点，我们有结果：
  - $a_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}c_k\omega^{-kj}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{-i2\pi kj/N}$
  - $a_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{e^{\frac{i2\pi k(t_j-c)}{d-c}}}{n}$
- 这种插值相对于高次多项式插值更为平滑，适应于函数值都在一定区间范围内的对象
- 经过实验，我们发现，低频项的系数较高频项显著更大，这一点可以类比傅立叶系数在$n->\infty$时趋于0，利用这一点，我们可以选取低频项为基对原先的数据点进行逼近。
- 存在最小二乘近似定理，若以低频的m个项为基，仅需抹去其余项系数，所得即是原先函数以这m个项为基的最小二乘逼近

上机习题5.4

题目

求出$u''+2u'+2u=3\cos 6t$的$\pi/3$周期精确解，把它和FFT得到的离散解进行比较（在一个周期中划分，分别取$N=16,64,256$）。

解答

先计算精确解：

设

$u=acos(6t)+bsin(6t)$

$u'=6bcos(6t)-6asin(6t)$

$u''=-36acos(6t)-36bsin(6t)$

有方程组：

$-36a+12b+2a=3$

$-36b-12a+2b=0$

解得$a=-\frac{51}{650},b=\frac{9}{325}$

因此，精确解为：$-\frac{51}{650}cos(6t)+\frac{9}{325}sin(6t)$

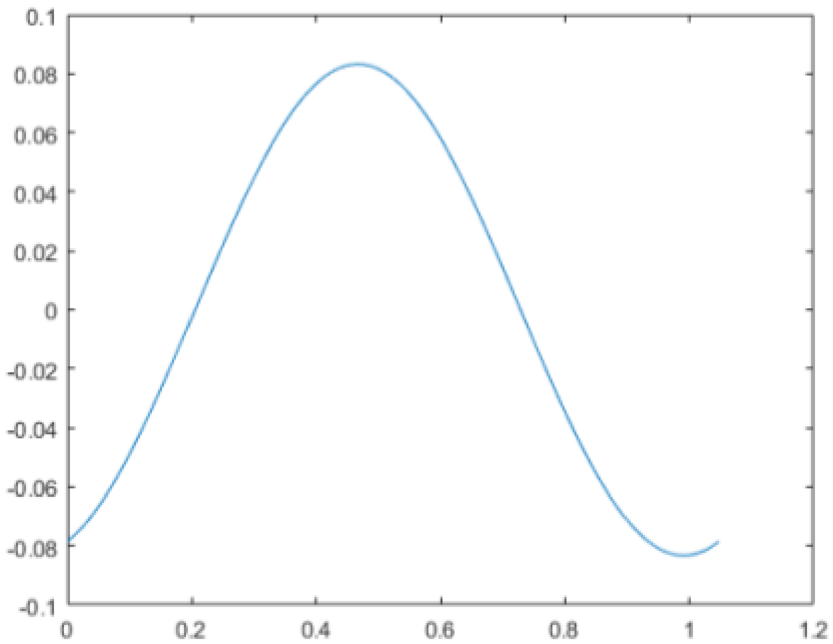
进行离散求解（将之处理为周期函数）：

$$\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2}+2\frac{u_{j+1}-u_j}{h}+2u_J=f_j$$

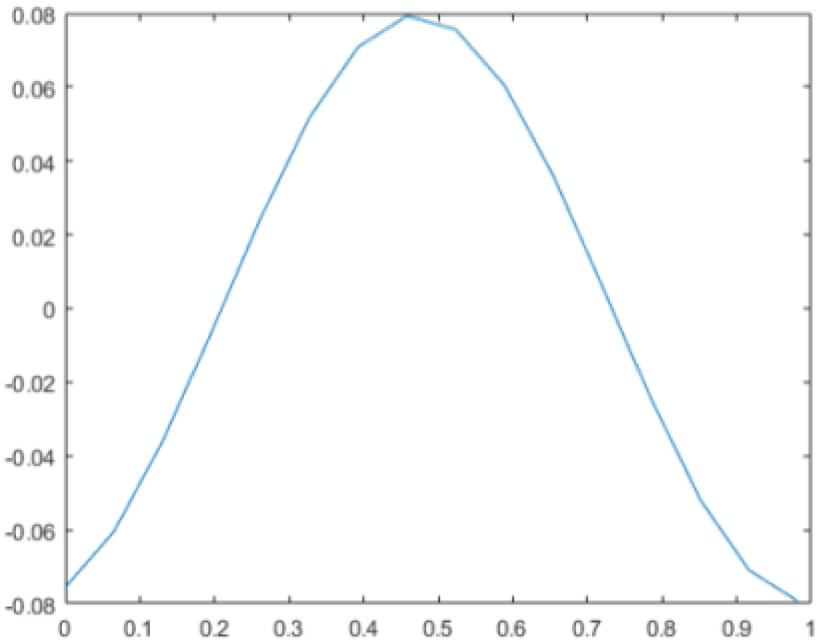
此问题可以直接使用系数为循环矩阵情形的解法，其中：

$c_0=-\frac{2}{h^2}-\frac{2}{h}+1,c_1=\frac{1}{h^2},c_{-1}=\frac{1}{h^2}+\frac{2}{h}$

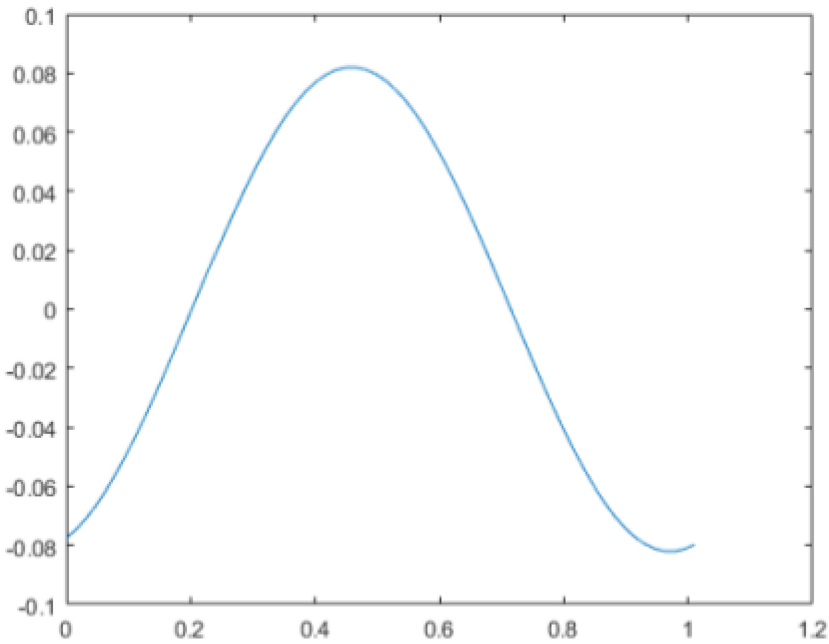
- 原函数：



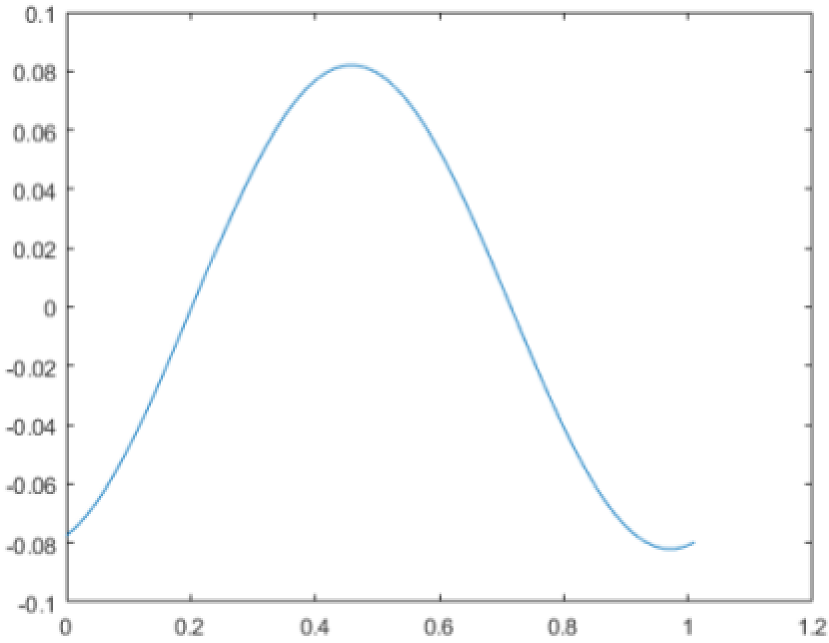
- N=16:


0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

- N=64:


0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

- N=256:



我们可以看出，这样的离散方法得到的结果令人满意，甚至在N=16的情况下就取得了不错的结果。