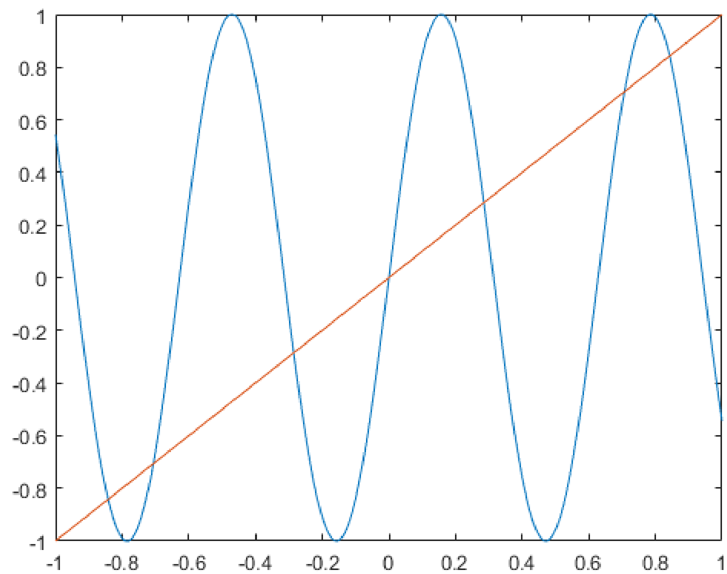
Numerical Math HW5

By 段浩东 1500017705

1

(1)

- 易知f(x)仅在[-1,1]上有零点，又因为f为奇函数，所以仅考虑(0,1]上，由sin(10x)周期性，知(0,0.2×pi]上有一个零点，(0.2×pi,1]上有两个零点，再加上0，总共有7个零点。



- 下图画出y=sin(10x)与y=x，两函数相交点即为零点

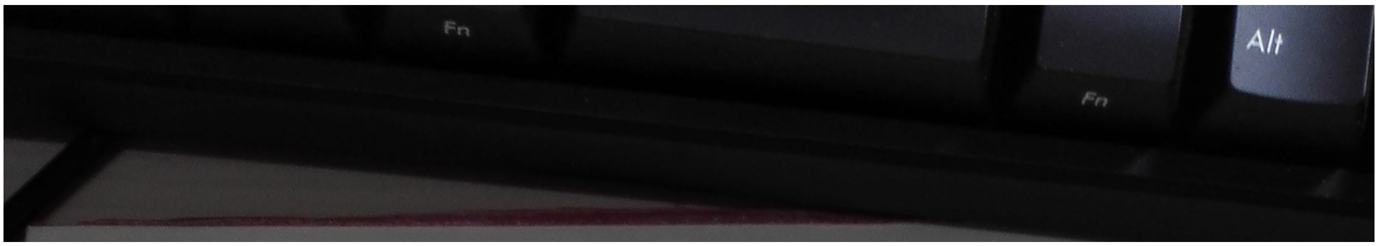
---

(2)

- 由对称性，仅列出非负根：
  - x0 = 0
  - x1 = 0.285234
  - x2 = 0.706817
  - x3 = 0.842320
- 我分别选用了二分法和不动点法进行计算：
  - 其中二分法需要先大致通过估计得到每一个零点临近的两点，函数值分别为一正一负，而后进行二分，此问题中所求解的函数比较正常，因此迭代停止条件正常选取即可，我选取了|f(x)|<1e-8这一条件
  - 不动点法我选择的函数是x=arcsin(x)/10，右侧函数的导数值为1/(10*sqrt(1-x^2))，这一值在x属于[-0.99,0.99]时绝对值小于1。而这一区间又包含了所有的根。因此迭代时初值选取接近所希望求的根的位置，使用不动点法即可求得所有根。

2

- 推导如下



2. (1) $x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad \varphi(x) = \arccos\left(-1/(1+e^{-2x})\right)$

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(1+e^{-2x})^2}}}\right| \cdot \left|\frac{1}{(1+e^{-2x})^2}\right| \cdot \left|2e^{-2x}\right|$$

$$< \left|\frac{1}{1+e^{-2x}}\right| \cdot \left|2e^{-2x}\right| \qquad \because x \geq 0 \text{ 时}, e^{-2x} \leq 1$$

$$\leq 1 \qquad (x \in [0, +\infty))$$

而 $x = \varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恰有一根，∴必可局部收敛

$x \in [0, +\infty)$ 时，$|\varphi'(x)| \geq \left|\frac{1}{4}\right| \cdot \left|\frac{1}{4}\right| \cdot \left|2e^{-2x}\right|$

∴若 x^* 是 $x = \varphi(x)$ 的根，则 $|\varphi'(x^*)| > 0$

∴应是线性收敛的

(2) $x_{k+1} = \varphi(x) \qquad \varphi(x) = 0.5\ln\left(-1/(1+1/\cos x)\right)$

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{2}\right| \cdot \left|1+\frac{1}{\cos x}\right| \cdot \left|\frac{1}{\cos^2 x}\right| \cdot |\sin x| \cdot \left|\frac{1}{1+\frac{1}{\cos x}}\right|^2$$

~~$x \in [3, \pi - 0.01]$ 时，有 $|\varphi'(x)| < 1$，且 $x^* \in [3, \pi - 0.01]$~~

~~∴对应一等价的不动点问题，可以局部收敛~~

~~$x \in [3, \pi - 0.01]$ 时，$|\varphi'(x)| \geq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos 0.01}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 3} \cdot \sin 0.01 > 0$~~

~~∴线性收敛~~ $|\varphi'(3)| \approx 7.19 \qquad |\varphi'(x^*)| \approx 15.37$ ∴不等价于不动

(3) $f(x) = \cos x + 1/(1+e^{-2x})$ 在零点 x^* 附近二阶连续可微

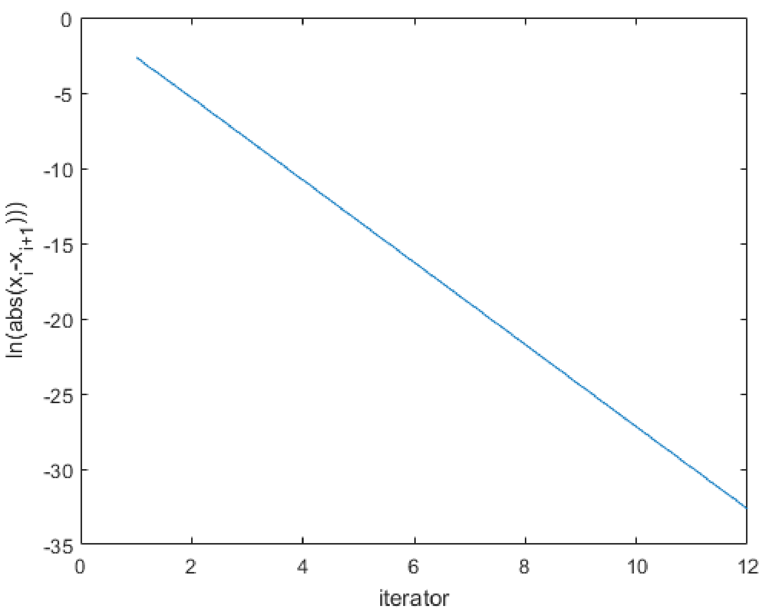
又 $f'(x^*) = -\sin x^* + \frac{2}{(1+e^{-2x^*})^2} e^{-2x^*} > 0$

∴由Newton迭代法产生的序列可局部收敛，且至少为二阶

- code in ex2.m

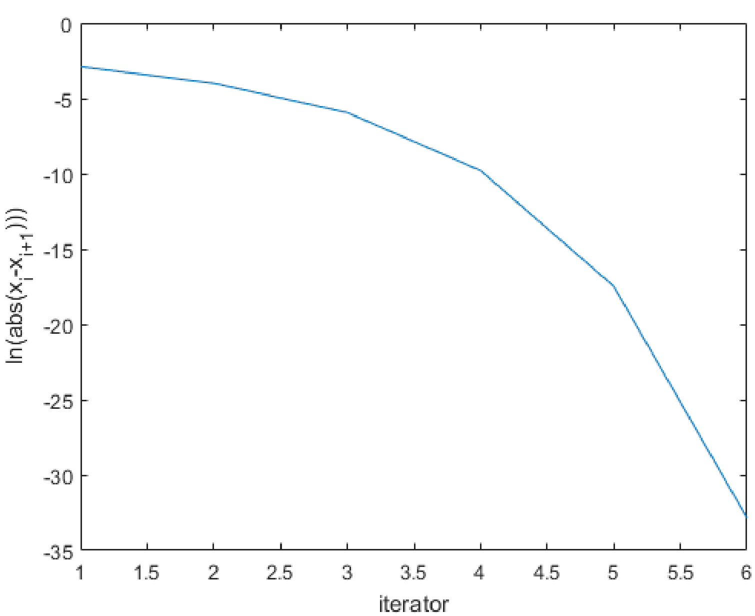
---

error of way1



---

error of way3



3

- 实现代码分别为ex3_1.m与ex3_2.m
- Newton方法大约需要4次迭代即可达到机器精度

```
iter 1 with L2 error:6.20281981656521170000000000000000e-02
iter 2 with L2 error:2.10889772824187150000000000000000e-04
iter 3 with L2 error:1.86367816356949340000000000000000e-08
iter 4 with L2 error:4.57562929854812270000000000000000e-17
iter 5 with L2 error:4.57562929854812270000000000000000e-17
iter 6 with L2 error:4.57562929854812270000000000000000e-17
iter 7 with L2 error:4.57562929854812270000000000000000e-17
iter 8 with L2 error:4.57562929854812270000000000000000e-17
iter 9 with L2 error:4.57562929854812270000000000000000e-17
```

- 但在试验中，Broyden方法约9次迭代左右达到机器精度

```
iter 1 with L2 error:6.20281981656521170000000000000000e-02
iter 2 with L2 error:5.24728355276638750000000000000000e-04
iter 3 with L2 error:2.46061760624762770000000000000000e-04
iter 4 with L2 error:4.30311858730273050000000000000000e-05
iter 5 with L2 error:1.40279604443417860000000000000000e-07
iter 6 with L2 error:5.68586219165013810000000000000000e-10
iter 7 with L2 error:1.75847018768812580000000000000000e-12
iter 8 with L2 error:1.01223550703962660000000000000000e-15
iter 9 with L2 error:1.15433101549332920000000000000000e-16
iter 10 with L2 error:1.33291776722819850000000000000000e-16
```

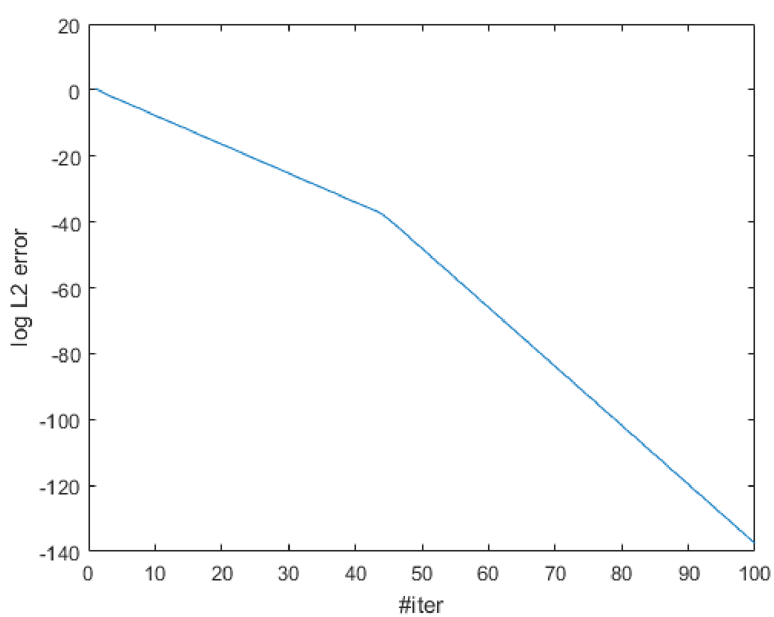
- 在此以后，Broyden迭代输出NaN，经考察后发现，是由于A^{-1}经迭代运算变为NaN所致

```
A =

  -Inf   Inf
   NaN   NaN
```

4

- 利用不动点法，选取初值$(1,1,1)^T$，解得此方程的解为$(0,1/3,0)^T$，考察收敛速度：

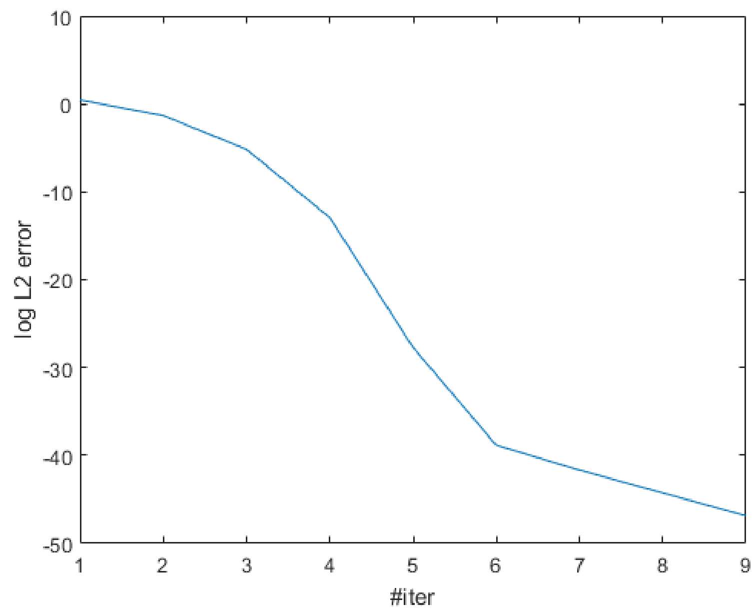


- 不动点处的Jacobi矩阵为

```
A =

   -1.0000    0.0741    0.3333
    0.3333   -1.0000         0
         0    0.3333   -0.8333
```

- 即若误差原为$(x,y,z)^T$，一步以后变为$(-2x/3,-16y/27,-z/2)^T$
- 实际观测到的常数C约为0.4



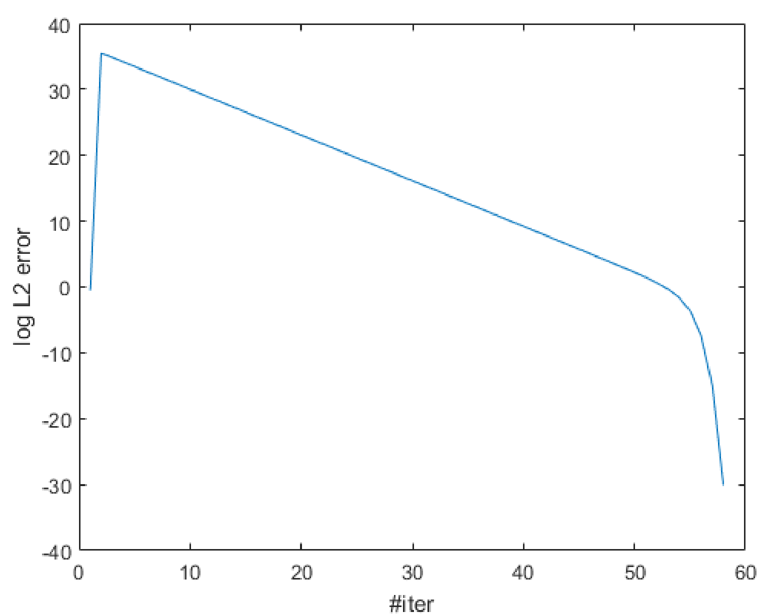
- 使用Newton迭代法获得的结果如下：

- 对比发现，不动点法需50多次迭代才可收敛，而牛顿法仅需6次左右，且很容易观察出一为线性收敛，另一为2阶收敛。

5

5_2

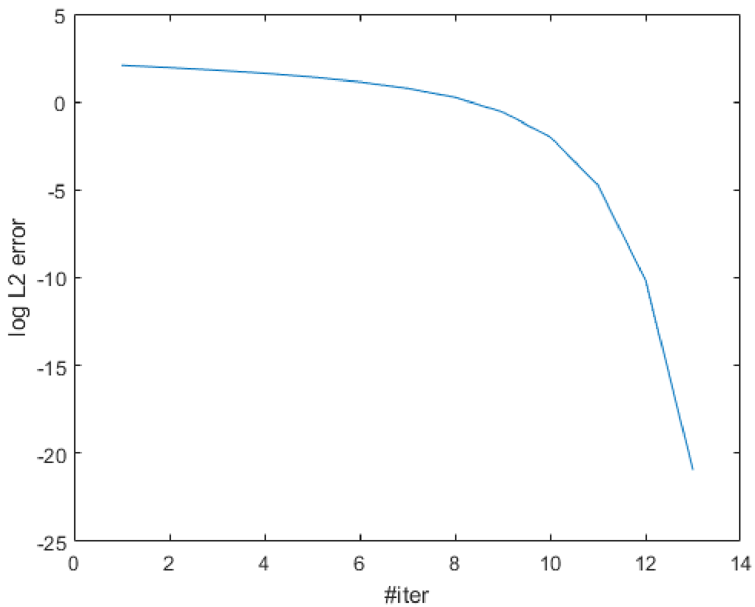
- 利用牛顿法，所得到的误差与迭代次数关系如下：



- 开始阶段误差暴增，是由于初值处Jacobi矩阵奇异的缘故，而且由此看出，仅有迭代的x接近0点时，才体现出二阶

5_5

- 利用牛顿法，解得方程的根为x1=0.0000109816;x2=9.1061467399;
- 误差曲线如下:



log L2 error
#iter