

Numerical Math HW8

By duanhaodong 1500017705

the code for the following 2 questions is fft1.cpp and fft2.cpp

1

- 此问题无法用FFT进行求解，由于向量c各维之和为0，因此c做完DFT后所得向量必有1维为0，因此无法作为分母。
- 据说应该把所有对角元都改为4，因此，换成4进行了尝试
- 所写程序为fft1.cpp，经过三步计算：
 - 求b的FFT:b_hat
 - 求c的FFT:c_hat
 - 令x_hat为b_hat与c_hat按分量相除，然后求得x_hat的反FFT：x，即为方程组解
- 最终得到方程组精确解：x每一分量的值为0.5

2

- 推导如下：

计算精确解：

$$\text{设 } u = a \cos(6t) + b \sin(6t)$$
$$u' = 6b \cos(6t) - 6a \sin(6t)$$
$$u'' = -36a \cos(6t) - 36b \sin(6t)$$

有方程组：

$$\begin{cases} -36a + 12b + 2a = 3 \\ -36b - 12a + 2b = 0 \end{cases}$$

解得：

$$a = -\frac{17}{6}b$$
$$102b + 12b - \frac{17}{3}b = 3$$
$$-\frac{25}{3}b = 3$$
$$b = -\frac{9}{325}$$
$$a = \frac{51}{650}$$

\therefore 精确解为 $u = \frac{51}{650} \cos(6t) - \frac{9}{325} \sin(6t)$

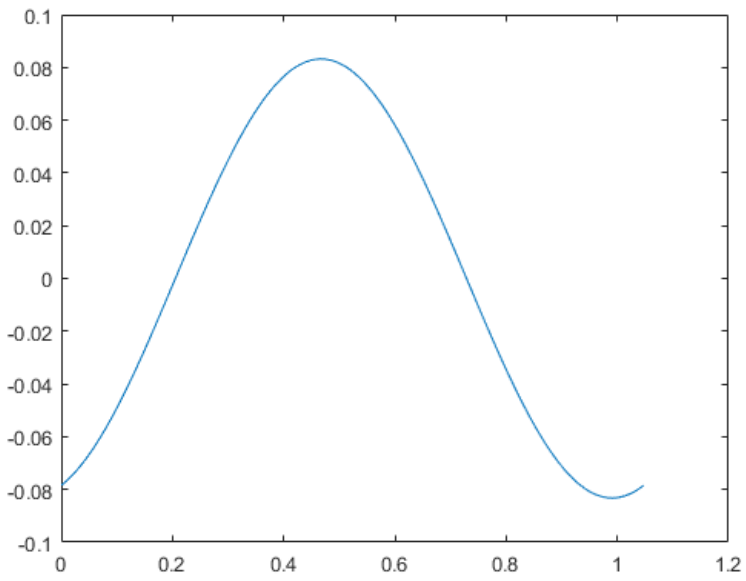
进行离散：

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + 2\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{h} + 2u_j = f_j$$

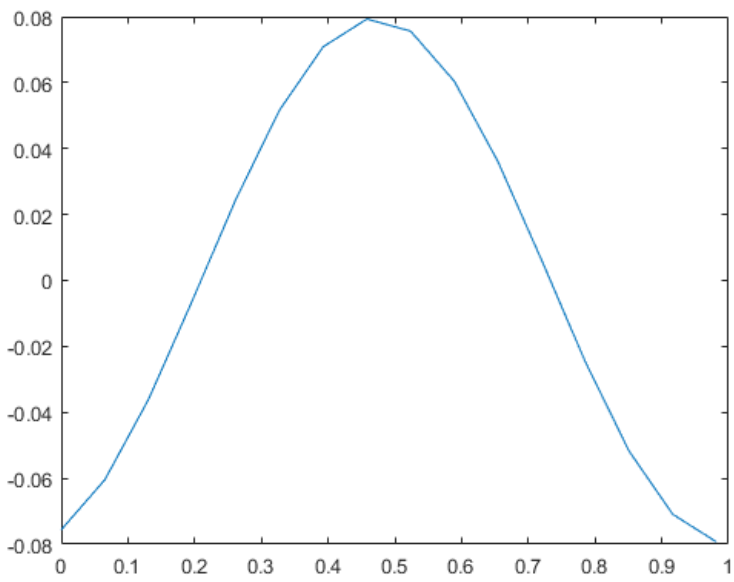
此问题类似系数为循环矩阵情形的解法。

$$C_0 = -\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h} + 1$$
$$C_1 = \frac{1}{h^2}$$
$$C_{-1} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{h}$$

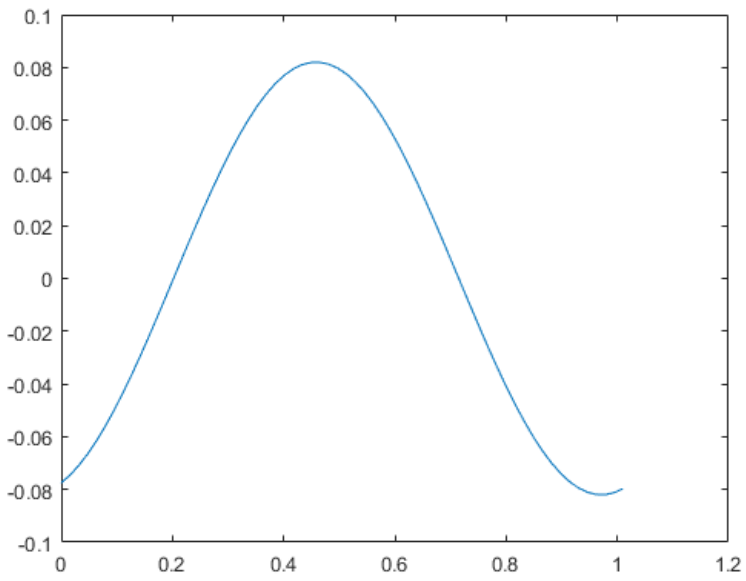
- 真实解：



- N=16:



- N=64:



- N=256:

