

数值分析上机报告2

段浩东 1500017705

上机习题2.1

题目

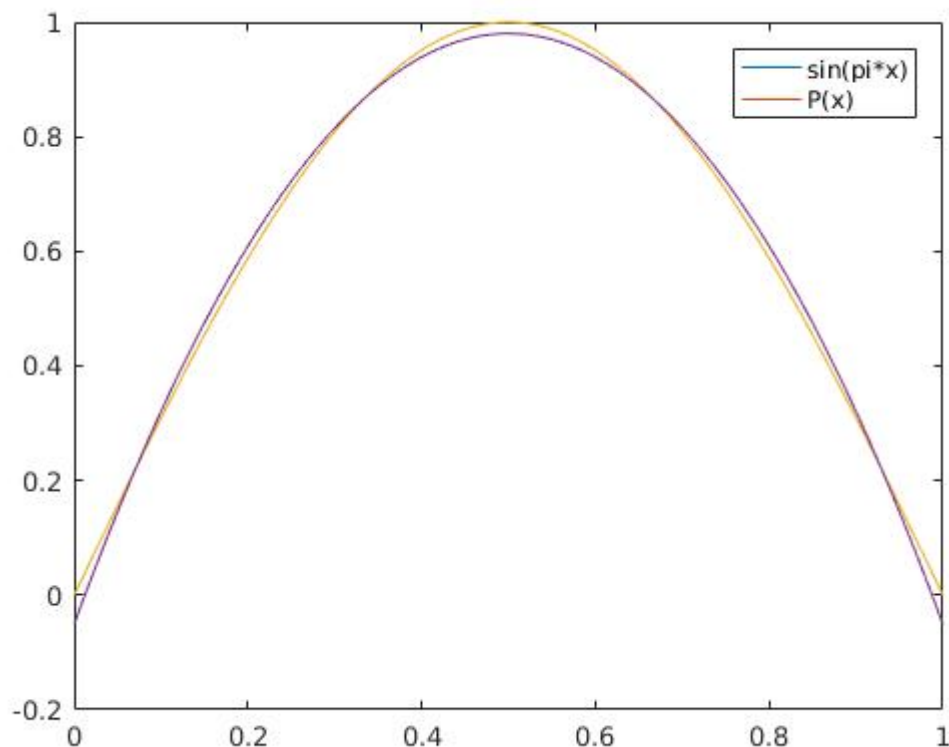
求 $f(x) = \sin \pi x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式 $P^*(x)$ ，并绘出 $f(x)$ 和 $P^*(x)$ 的图像进行比较。

解答

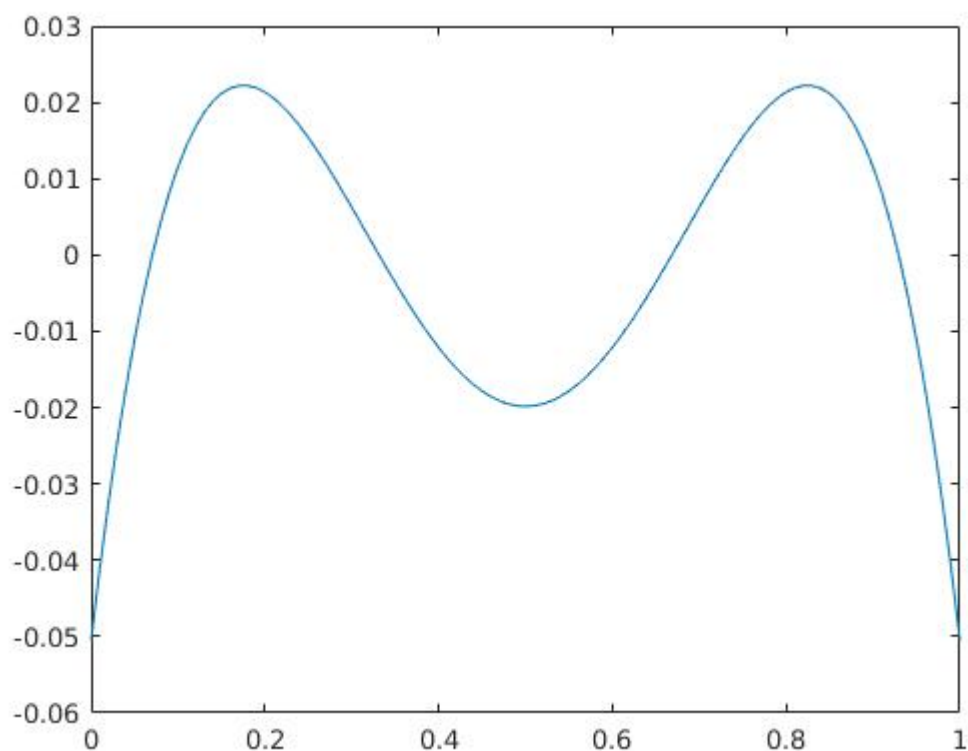
我们希望找到 $f(x)$ 的二次最佳平方逼近多项式，即是找到一组参数 c_0, c_1, c_2 ，使得式

$\int_0^1 [c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - f(x)]^2 dx$ 最小，由于这是一平方函数，因此应取的参数点必定满足该点偏导为0，即 $\frac{\partial P}{\partial c_i} = 0$ ，因此，我们最终要对方程组 $\sum_{i=0}^2 [\int_0^1 x^{i+j} dx] c_i = \int_0^1 f(x) x^j dx, j = 0, 1, 2$ ，这是一个关于参数的线性方程组，在进行计算时，我们先求出参数的系数矩阵，再求出方程右端的积分值，最后将方程两端左乘以系数矩阵的逆（系数矩阵一定非奇异），从而求得解。

$P(x)$ 与 $f(x)$ 的对比：



误差的函数：



解得函数的表达式： $P^*(x) = -0.0504655 + 4.12251162x - 4.12251162x^2$, $x \in [0, 1]$.

因此，我们发现，最佳平方误差逼近函数能在整体上较好的逼近待逼近函数。为了逼近整体的趋势，从而逼近区间的边界处存在较大的误差。

上机习题2.2

对Runge函数 $R(x)$ ，利用下列条件作插值逼近，并与 $R(x)$ 的图像进行比较

本题所有解答都将函数离散成间距为0.1的离散值。

题目1

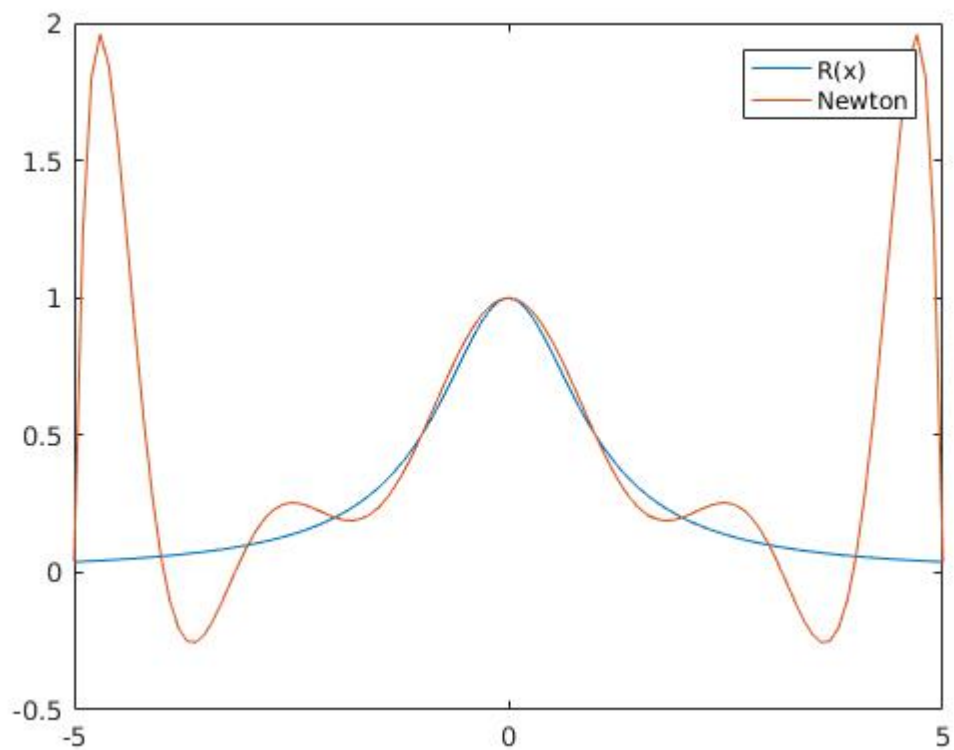
用等距节点 $x_i = -5 + i, i = 0, 1, 2, \dots, 10$ ，绘出它的10次Newton插值多项式的图像

解答1

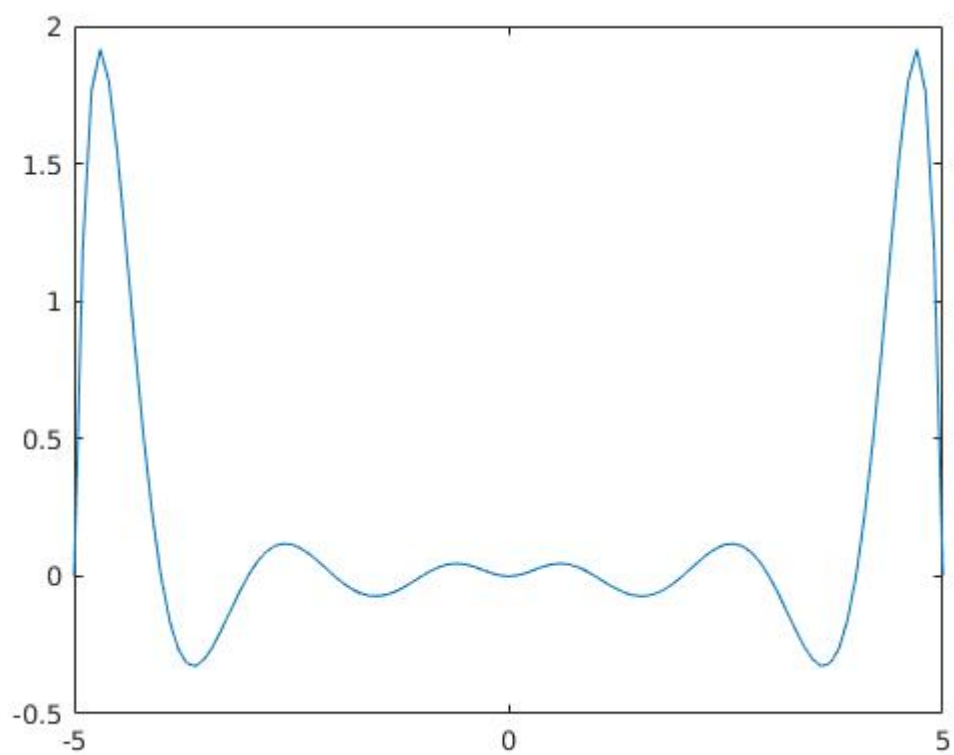
由于给定插值节点的情况下，Newton方法与Lagrange方法所得的多项式相同，因此选用Lagrange方法进行插值，所得的插值多项式为 $\sum_{i=0}^{10} R(x_i)l_i(x)$ ，其中

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

进行插值，绘出插值所得函数图像：



绘出误差曲线：



我们发现，在区间端点附近，两函数偏差迅速增大，这是由于 $R(x)$ 在 $x=i$ 及 $x=-i$ 处存在奇性。另外，高次插值多项式的数值稳定性也较差，因此实际逼近一般不用这种方法。

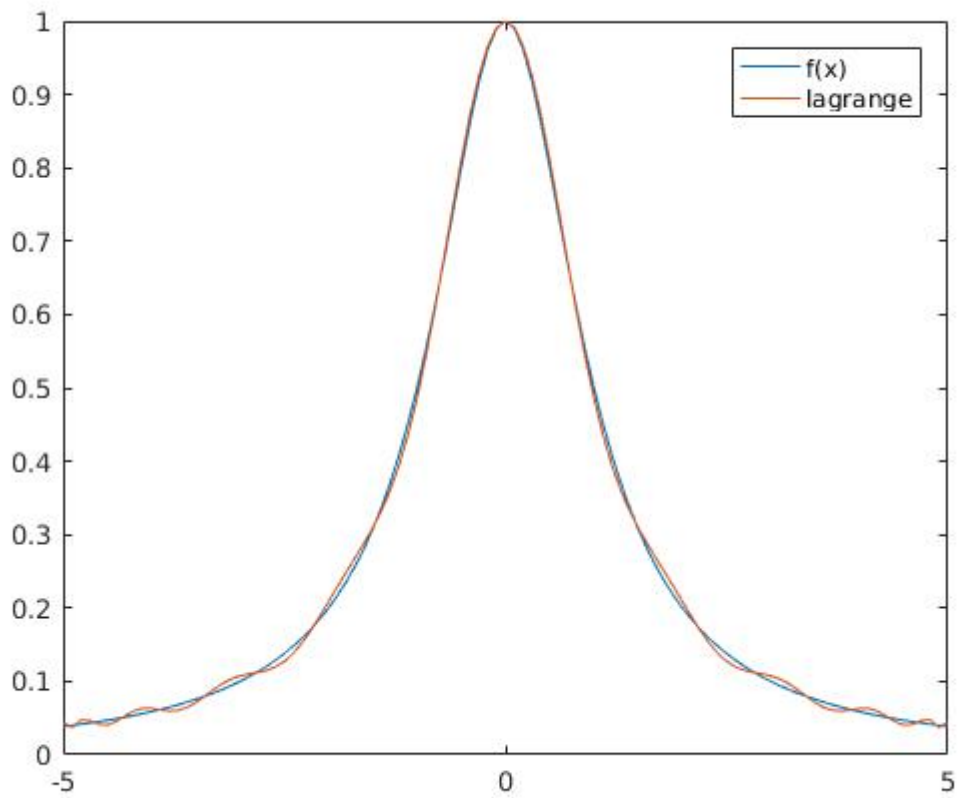
问题2

用节点 $x_i = 5\cos(\frac{2i+1}{42}\pi)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 20$ ，绘出它的20次Lagrange插值多项式的图像

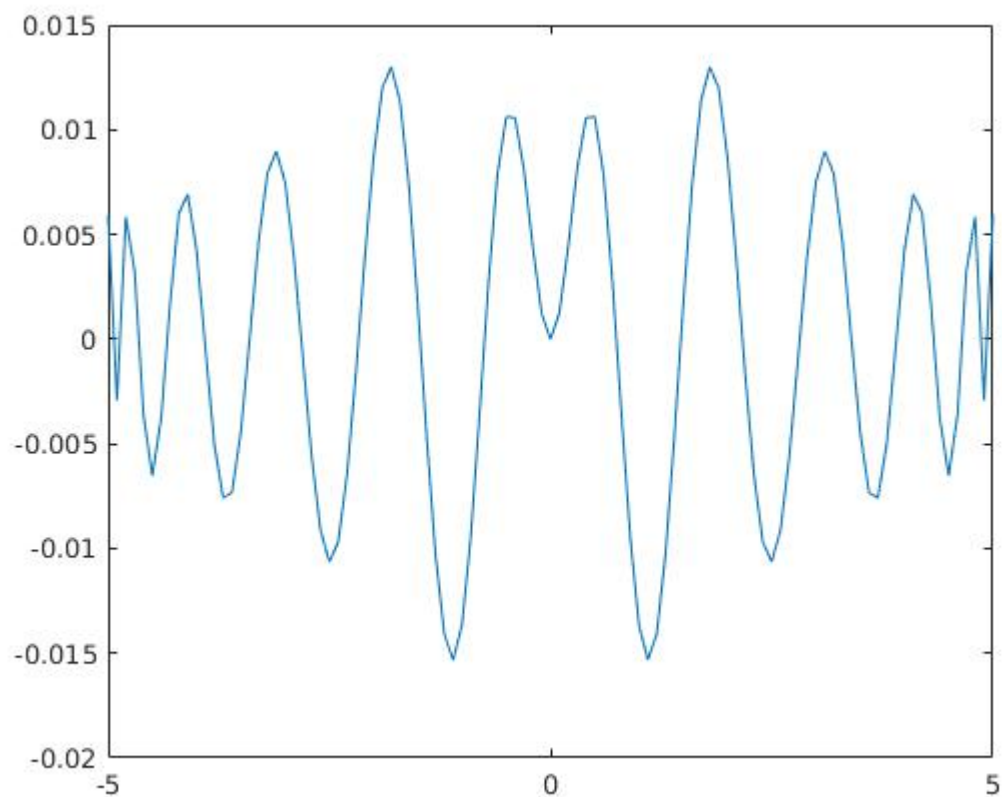
解答2

由于依旧使用Lagrange插值方法，利用上题公式并修改插值节点即可

插值所得函数图像：



误差图像：



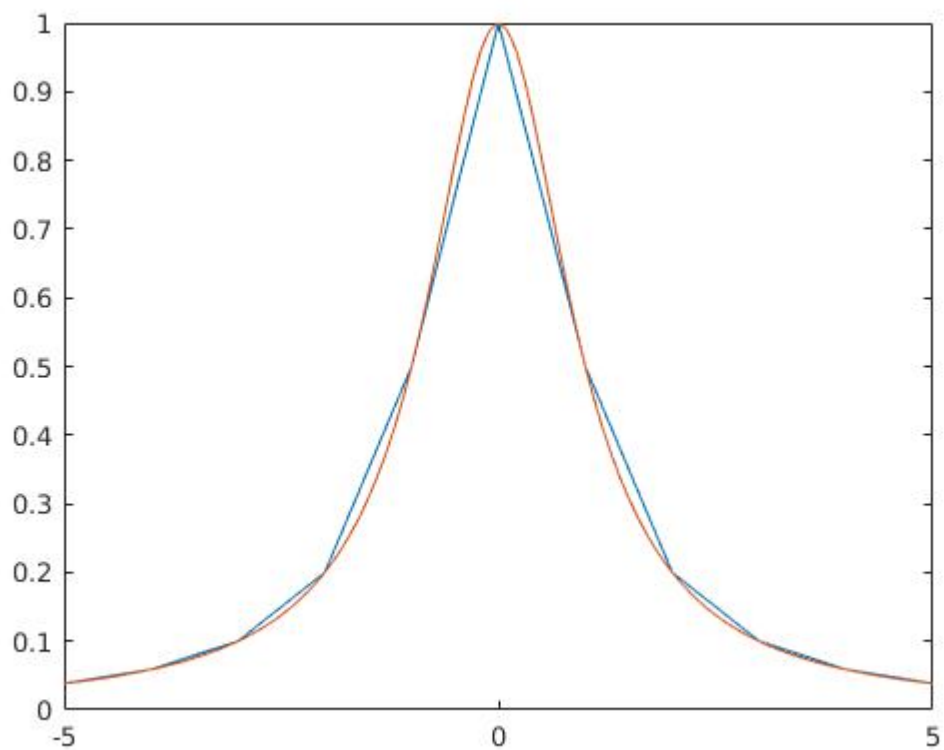
经过观察误差图像我们发现，即使使用高次多项式插值方法，只要我们选取的节点得当，仍可取得较好的效果。这一插值方法较之前的等距节点插值，误差大致降低2个数量级左右。

问题3

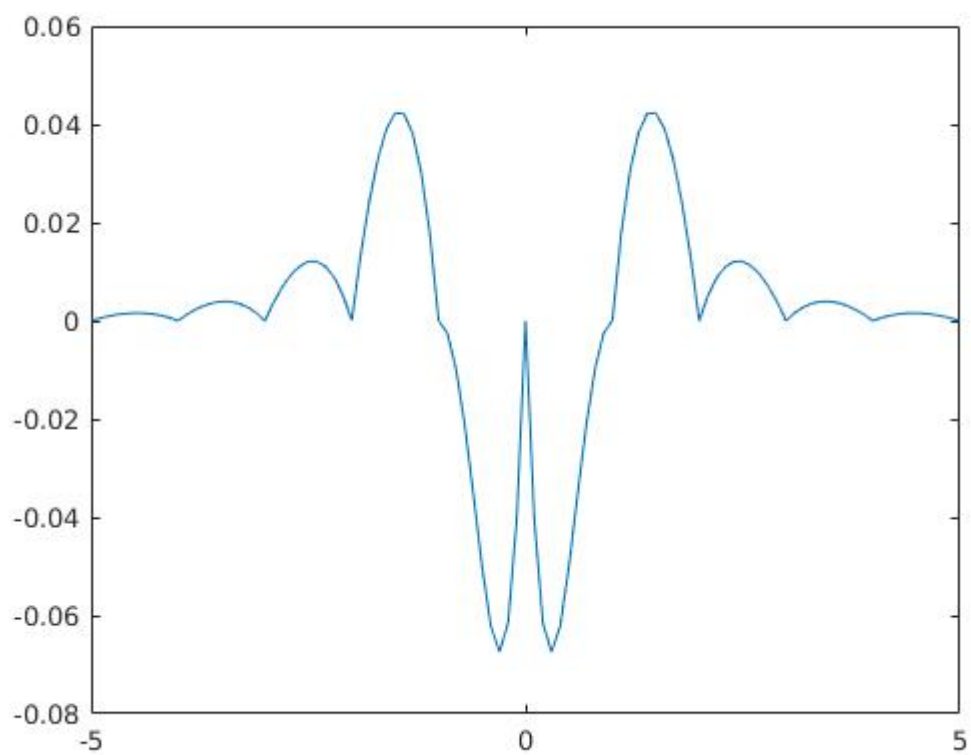
用等距节点 $x_i = -5 + i, i = 0, 1, 2, \dots, 10$ ，绘出它的分段线性插值图像

解答3

作分段线性插值的图像，即用折线连接这些 (x_i, y_i) 对即可，这一方式存在误差界： $|f(x) - \phi_h(x)| \leq \frac{Mh^2}{8}$ ，其中 $M = \max_{x \in [a, b]} |f''|$ ，作出图像验证这一结论：



误差图像：



通过验算 f 在这一区间的最大二阶导值，我们验证了以上定理得到满足。另外，这一插值方法虽然在 f'' 处于一定区间时能控制好误差，但是通过观察我们得到的插值函数，我们发现，这一分段线性插值所得的函数，光滑性很成问题，这样一来，在一些领域中就很难进行应用。

问题4

用等距节点 $x_i = -5 + i, i = 0, 1, 2, \dots, 10$ ，绘出它的分段三次Hermite插值图像

解答4

在Hermite插值的过程中，我们希望能对端点的函数值与导数值都加以控制，因此便产生了Hermite插值，在每一段区间的Hermite插值过程中，存在一组基函数 $\alpha_j(x), \beta_j(x) (j = i, i + 1)$ ，分别来控制这段区间上的函数及导数值，经过计算，它们有如下形式：

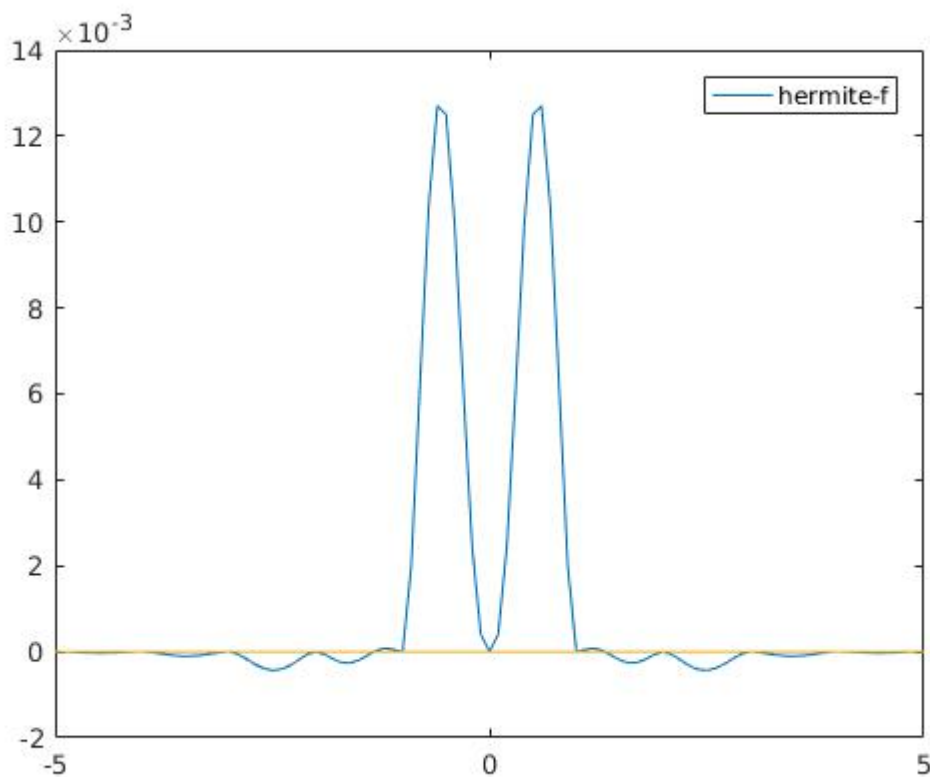
$$\alpha_j(x) = [1 - 2(x - x_j)l'_j(x_j)]l_j^2(x),$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j)l_j^2(x)$$

其中 $l(x)$ 即为上文所述lagrange基函数

每一段区间上的插值多项式为： $f(x_i) * \alpha_i(x) + f(x_{i+1}) * \alpha_{i+1}(x) + f'(x_i)\beta_i(x) + f'(x_{i+1}) * \beta_{i+1}(x)$

由于插值效果很好，仅作出误差图像：



观察发现，临近中心的区域误差最大，原因应是这一段函数的表达式同确定两端函数值及导数的三次多项式不尽吻合。

问题5

用等距节点 $x_i = -5 + i, i = 0, 1, 2, \dots, 10$ ，绘出它的三次自然样条插值图像

解答5

我们希望求一个满足插值条件的二阶连续可微的分段三次多项式 $S(x)$ 。记 $S_i(x)$ 为 $S(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式，利用Hermite插值基，设 $S_i(x) = y_i\alpha_i(x) + y_{i+1}\alpha_{i+1}(x) + m_i\beta_i(x) + m_{i+1}\beta_{i+1}(x)$ ，设 m_i 为 $S(x)$ 在 x_i 处的一阶导数。这样的形式已经保证了一阶连续可微。自然样条需使

$$\begin{aligned} S_0''(x_0) &= S_{n-1}''(x_n) = 0 \\ S_{i-1}''(x_i) &= S_i''(x_i), \quad (1 \leq i \leq n-1) \end{aligned}$$

引入记号 $\delta_i = 1/(x_{i+1} - x_i)$ ，则

$$\begin{aligned} \alpha_i''(x) &= 2\delta_i^2[1 + 4\delta_i(x - x_{i+1}) + 2\delta_i(x - x_i)] \\ \beta_i''(x) &= 4\delta_i^2(x - x_{i+1}) + 2\delta_i^2(x - x_i) \end{aligned}$$

进而求得：

$$\begin{aligned} S_3''(x_i + 0) &= -\frac{6}{\delta_i^2}y_i + \frac{6}{\delta_i^2}y_{i+1} - \frac{4}{\delta_i}m_i - \frac{2}{\delta_i}m_{i+1} \\ S_3''(x_i - 0) &= \frac{6}{\delta_{i-1}^2}y_{i-1} - \frac{6}{\delta_{i-1}^2}y_i + \frac{2}{\delta_{i-1}}m_{i-1} + \frac{4}{\delta_{i-1}}m_i \end{aligned}$$

于是有关于 $m_i (0 \leq i \leq n)$ 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ 1 - \lambda_1 & 2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 - \lambda_{n-1} & 2 \\ & & & & 1 - \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{bmatrix},$$

其中对 $1 \leq i \leq n-1$ 有

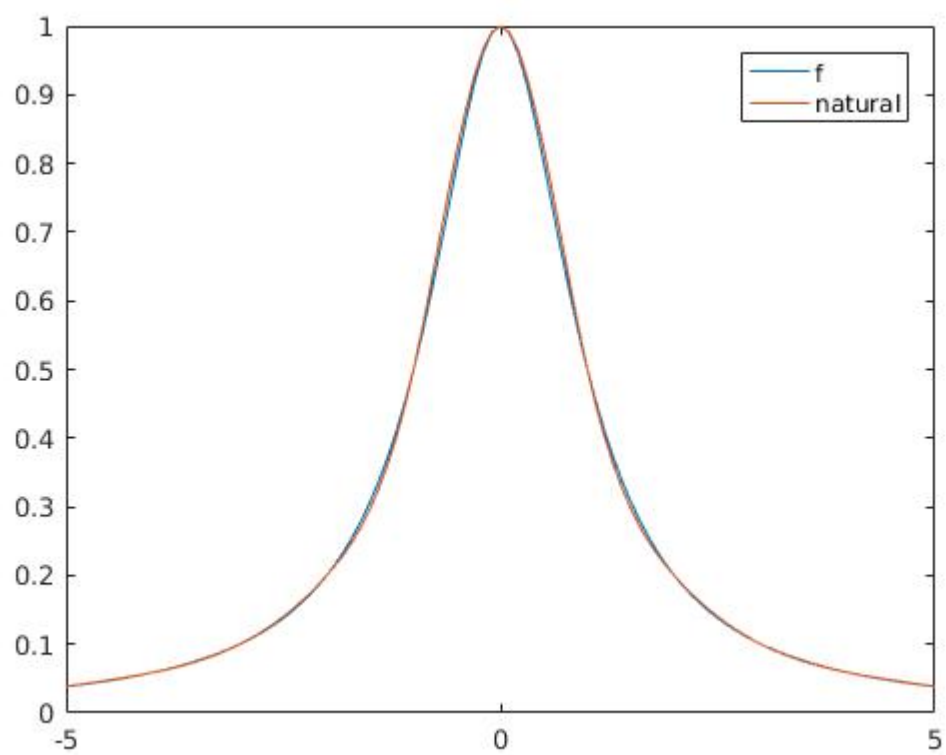
$$\begin{aligned} \lambda_i &= \delta_i/(\delta_{i-1} + \delta_i), \\ \mu_i &= 3[(1 - \lambda_i)\delta_{i-1}(y_i - y_{i-1}) + \lambda_i\delta_i(y_{i+1} - y_i)]. \end{aligned}$$

以及由自然边界条件

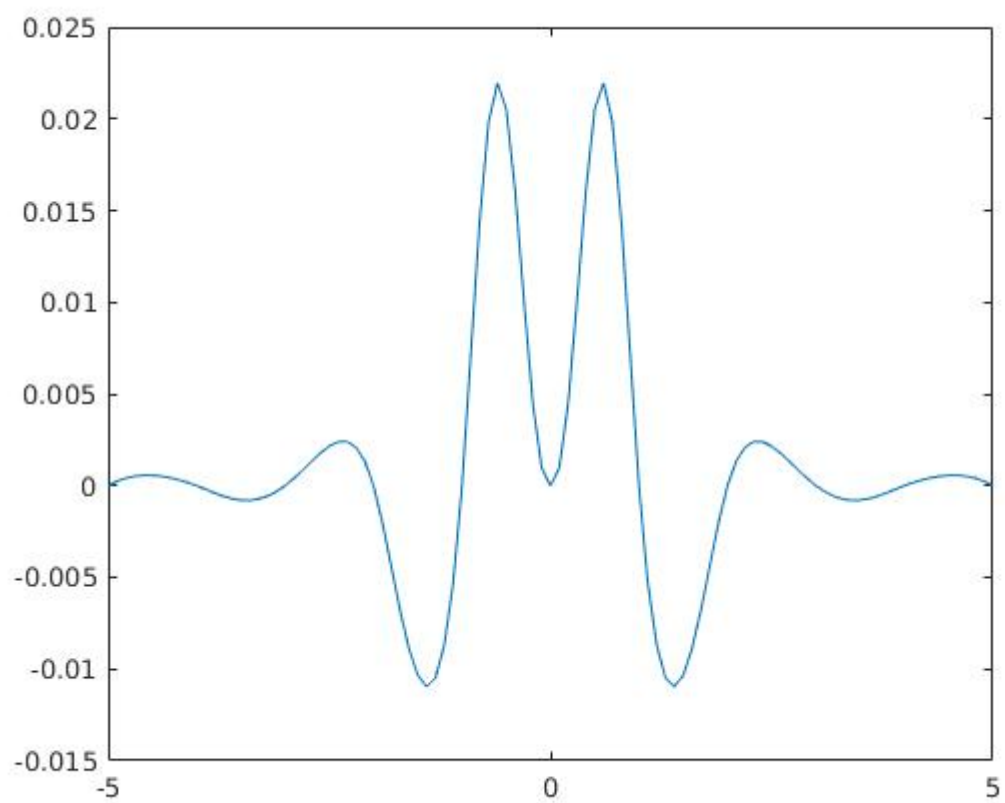
$$\lambda_0 = 1, \lambda_n = 0, \mu_0 = 3\delta_0(y_1 - y_0), \mu_n = 3\delta_{n-1}(y_n - y_{n-1}).$$

通过解该三对角矩阵方程组即可求得 $S(x)$ 的各个一阶导数，进而写出整个自然样条函数。

作出图像：



误差函数：



我们发现自然样条插值所得的函数不仅光滑性很好，达到2阶，而且插值的误差也可以解释，其误差要略大于 Hermite插值所得函数，是因为在计算时缺乏了插值点导数的信息所致，这种情况下来看，这一类插值方法是非常优秀的。