数值分析上机报告1

段浩东 **1500017705**

上机习题**1.1**

问题：

利用Taylor展开公式：

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^x}{x!}$$

编一段小程序上机用单精度计算e^x的函数值，分别取$x = 1, 5, 10, 15, 20, -1, -5, -10, -15 - 20$。观察结果是否合理，若不合理请分析原因并给出解决方法。

解答：

我们利用e^x的Taylor级数的前n项和来作为e^x的近似值。在计算的过程中，我们可以认为，当通项$a_k = x^k/k!$的绝对值小于ϵ时，部分和已经基本收敛，近似值的计算就可以结束了。在实际计算中，注意到通项$a_k = x^k/k!$使用递推进行计算，从而避免重复计算。而在$x < 0$的情况下，由于存在较大项（$x^k/k!$）正负相消，有效数字难以保证的情况，因此，计算$e^x, x < 0$时，我们通过计算$1/e^{-x}$来得到结果。计算使用代码如下：

```
float calcexp(float num){
        if(num<0)
    return 1.0/calcexp(-num);
    float ans=0;
    float attr=1.0;
    float fact=1.0;
    do {
        ans+=attr;
        attr*=num;
        attr/=fact;
        fact+=1.0;
    }while(abs(attr)>eps);
    return ans;
}
```

幂次	数值	幂次	数值
1	2.718282	-1	0.367879
5	148.413193	-5	0.006738
10	22026.468750	-10	0.000045
15	3269017.500000	-15	0.000000
20	485165216.000000	-20	0.000000

同对单精度浮点数调用cmath自带函数exp相比，我们所编写的calcexp函数相对误差大致在千万分之一左右，取得了不错的效果。

上机习题**1.2**

问题：

对于积分：

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx$$

证明递推关系

$$I_0 = ln1.2,$$

$$I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}$$

用上述递推关系计算$I_1, I_2, ..., I_{20}$，观察数值结果是否合理，并说明原因

解答：

- 对于递推公式的证明：
  $I_0 = \int_0^1 dln(x+5) = ln1.2$
  $I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n+5x^{n-1}}{x+5} = \int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$
- 用上述方法计算出来的结果是：

幂次	结果
0	0.182322
1	0.0883922
2	0.0580389
3	0.0431387
4	0.0343063
5	0.0284684
6	0.0243249
7	0.0212326
8	0.0188369
9	0.0169265
10	0.0153676
11	0.0140713
12	0.0129766
13	0.0120399
14	0.0112289
15	0.0105219
16	0.00989032
17	0.00937191
18	0.00869602
19	0.00915147
20	0.00424264

我们发现，在I_{19}处居然存在一上升，这显然是一个不合理的数值结果，究其原因，是因为在递推过程$I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}$中，每递推一步，初始时的误差就成五倍放大，因此导致了不合理的数值结果。为了进行改进，我们可以直接利用递推公式求出I_n与I_0的关系并进行计算，由此可以减小误差的放大。或是先利用某种方法求出I_n，再反向求出其余值，这是一个误差逐渐被放小的过程。