Numerical Math Hw11

Haodong Duan 1500017705

Problem6.3

题目

用打靶法求解常微分方程边值问题：

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{sin(lnx)}{x^2}, 1 <= x <= 2$$

$$y(1) = 1, y(2) = 2$$

其精确解为：

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}sin(lnx) - \frac{1}{10}cos(lnx)$$

其中：

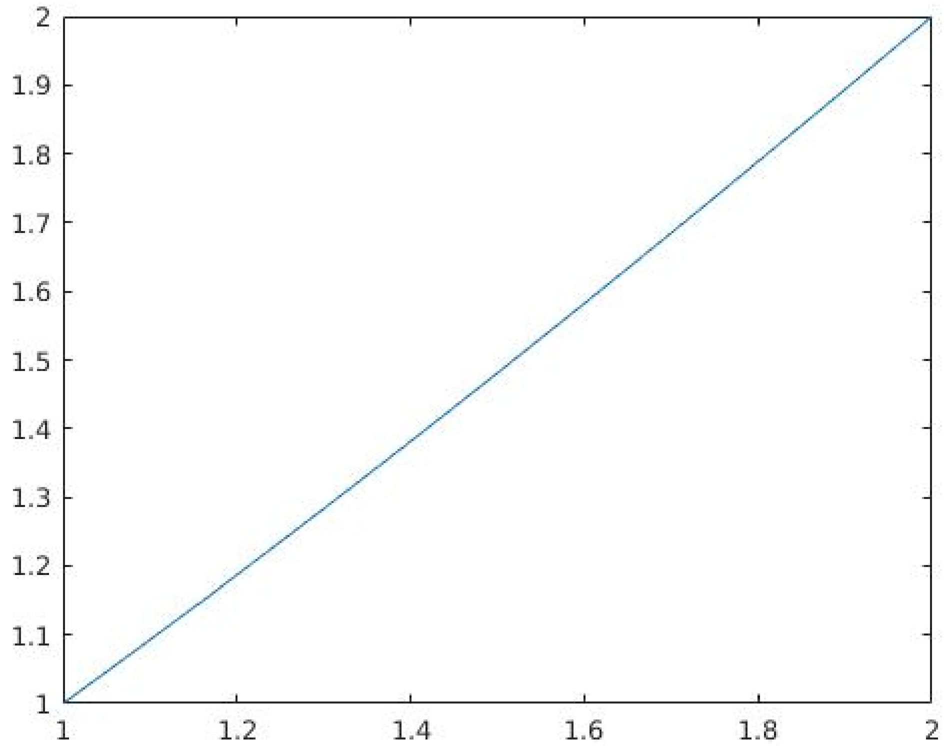
$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12sin(ln2) - 4cos(ln2)]$$

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2$$

从中体会边值问题和初值问题的基本差别。

解答

先绘出解的函数图像：



- 求解算法：
  - 先随机为起始点的导数初始化一个值g，设初始点的二阶导数为0，用这些值进行前递：
    - 每次用x点的二阶导算出x+h点的一阶导，用x点的一阶导算出x+h点的y
    - 用x+h点的一阶导和y算出二阶导
  - 利用g+h与g-h点前递所得的y值算出y(2)关于g的数值微分，使用牛顿法更新g
  - 迭代直至y(2)与2的差小于eps
- 此算法效果很好，迭代数次即收敛
- 边值问题同初值问题的最大区别，在于对最终的y值施加了一个条件，这个条件很强，与辛算法中维持不变量的感觉有所类似。

Problem6.5

题目

分别使用Euler方法，二级二阶，三级三阶，四级四阶Runge-Kutta方法求解微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}$$

$$u|_{t=0} = sinx$$

解答

先对于微分方程进行离散化，将之离散化为如下形式：

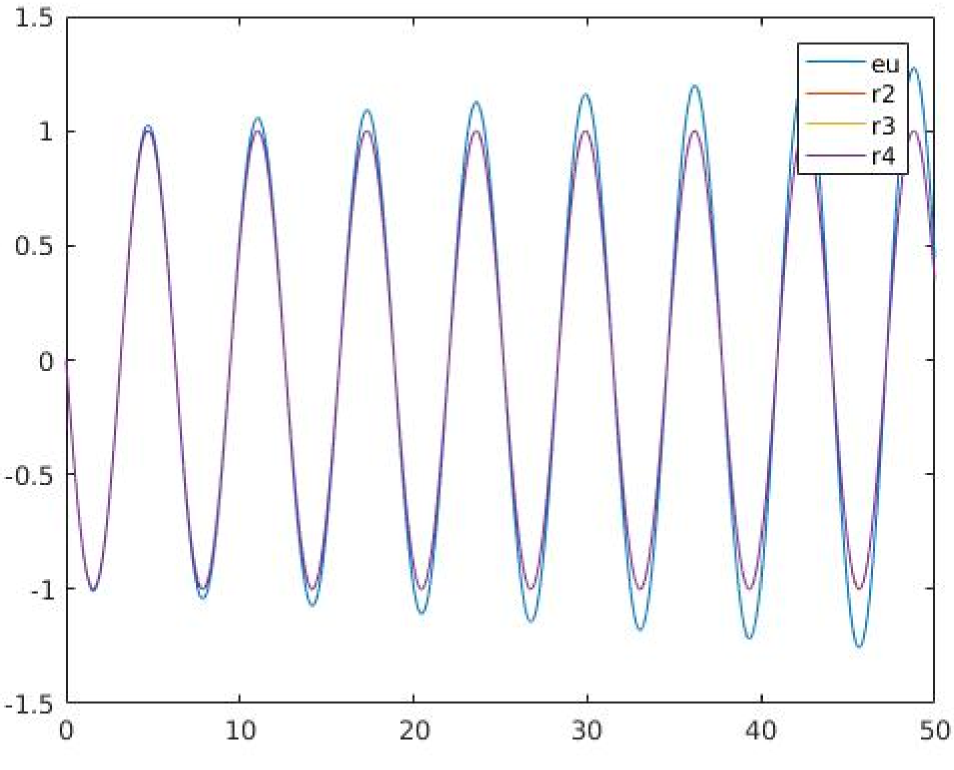
$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}=0$$

定义$u_i=u|_{x=\frac{i}{32}\pi}$，注意这里的h取值应为$\pi/32$

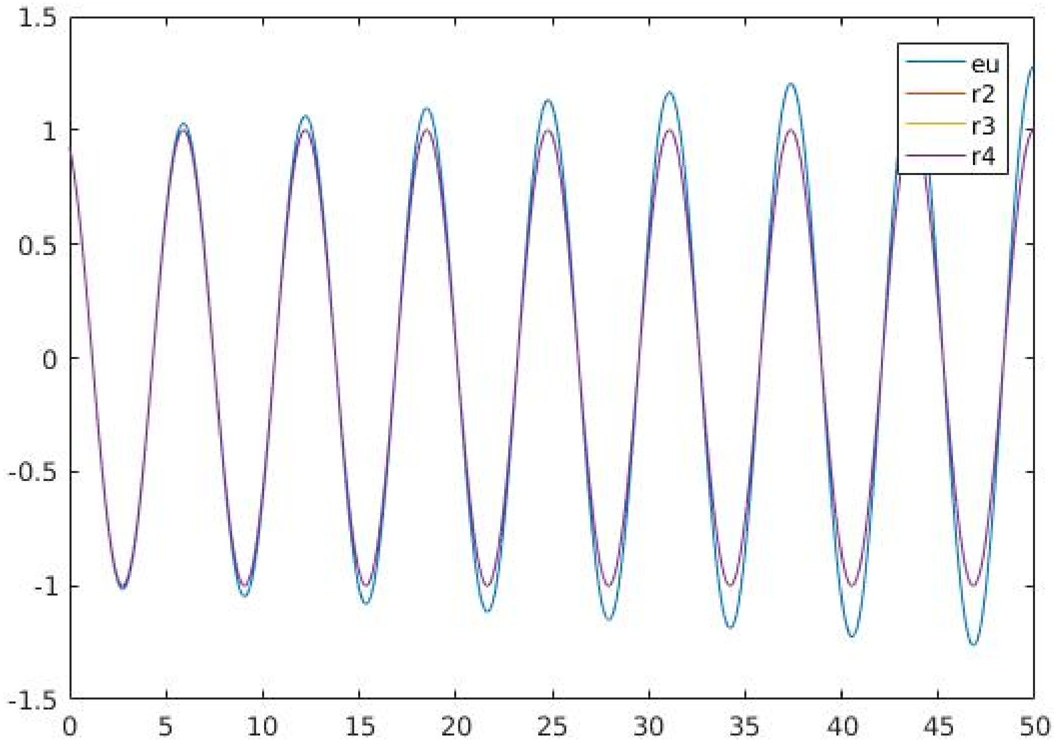
即是将本来的一个二维方程离散作了64个一维方程。

然后即可利用各种方法进行求解，由于二维方程难以可视化，因此选取部分一维方程进行可视化作为计算结果。下面是选取h=0.05时的部分结果：

$u|_{x=0}$：



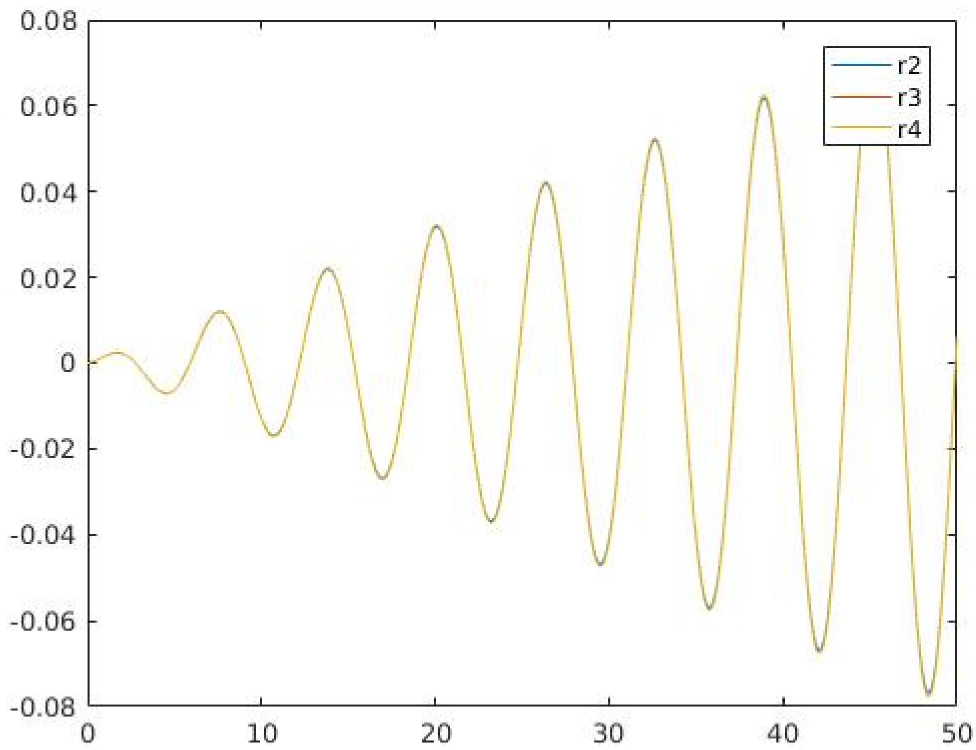
$u|_{x=\frac{12}{32}\pi}$：



其余离散的方程具有类似的解。

我们可以看出，除去显式euler方法之外，其余各阶Runge-Kutta方法都有着不错的效果。该微分方程的真解应为$sin(x-t)$，因此，我们尝试通过计算同真解的误差，比较三种runge-kutta方法。

误差曲线：



令人吃惊的是，三种方法看似获得的良好解都存在着相当大的误差，因此，尝试降低h继续进行计算。

但经过尝试，降低h计算相同的一段区间，误差有所并未减小，推测应当是虽然每一步误差减小，但步数增多，因此累积误差并未有多大变化。要解决这一问题，可能需要为这个方程寻找适当的辛格式进行求解。

Problem7.1

题目

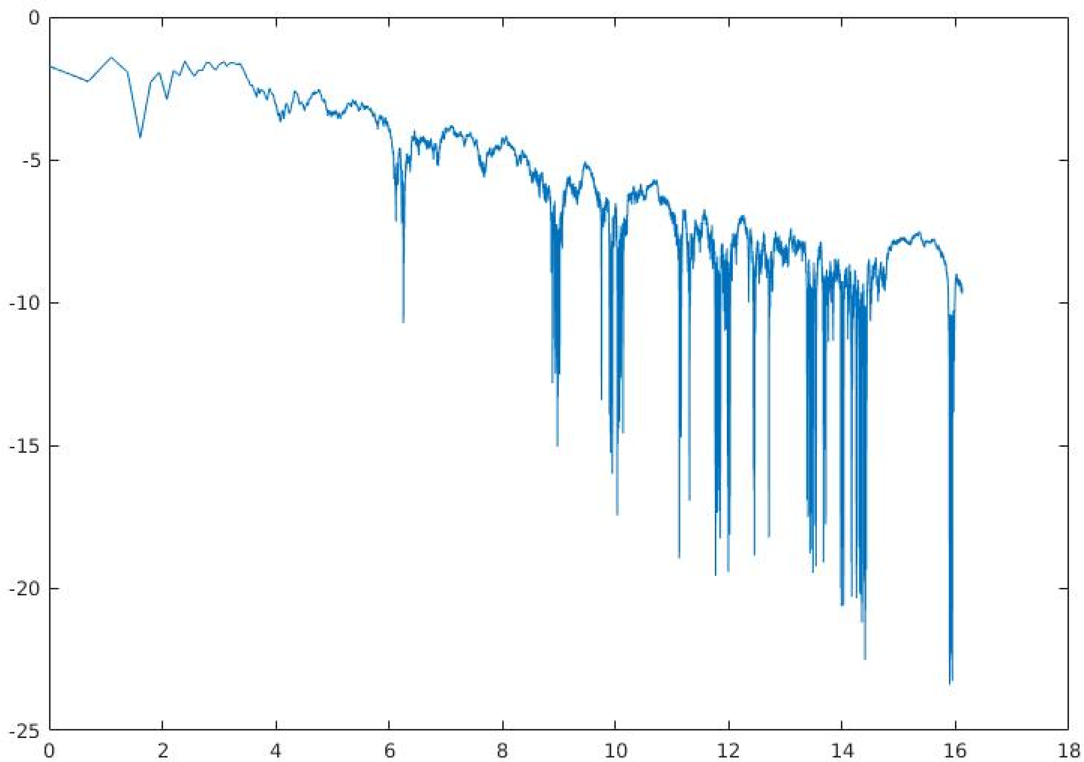
产生以图7.13中函数p(x)为概率密度的随机变量，并用Monte-Carlo方法计算积分$\int_0^2 e^{-x}dx$的值，且和理论计算精确解比较，计算算法的数值收敛阶。

解答

1. 先产生一$[0,1]$区间上的随机数x，随机变量X的值为：
    - $X=\sqrt{x}, 0<=x<=0.25$
    - $X=1-\sqrt{0.5-x}, 0.25<=x<=0.5$
    - $X=\sqrt{x-0.5}+1, 0.5<=x<=0.75$
    - $X=2-\sqrt{1-x}, 0.75<=x<=1$
2.

利用Monte-Carlo方法，即从[0,2]上的均匀分布中随机抽取N次随机变量X，计算出$2e^{-x}$，在进行求平均，所得的值即为MC方法得出的积分值。

经过计算，绘出ln(err)与ln(n)的图像，发现大致为半阶收敛（积分精确值为$1-e^{-2}$）



Problem7.2

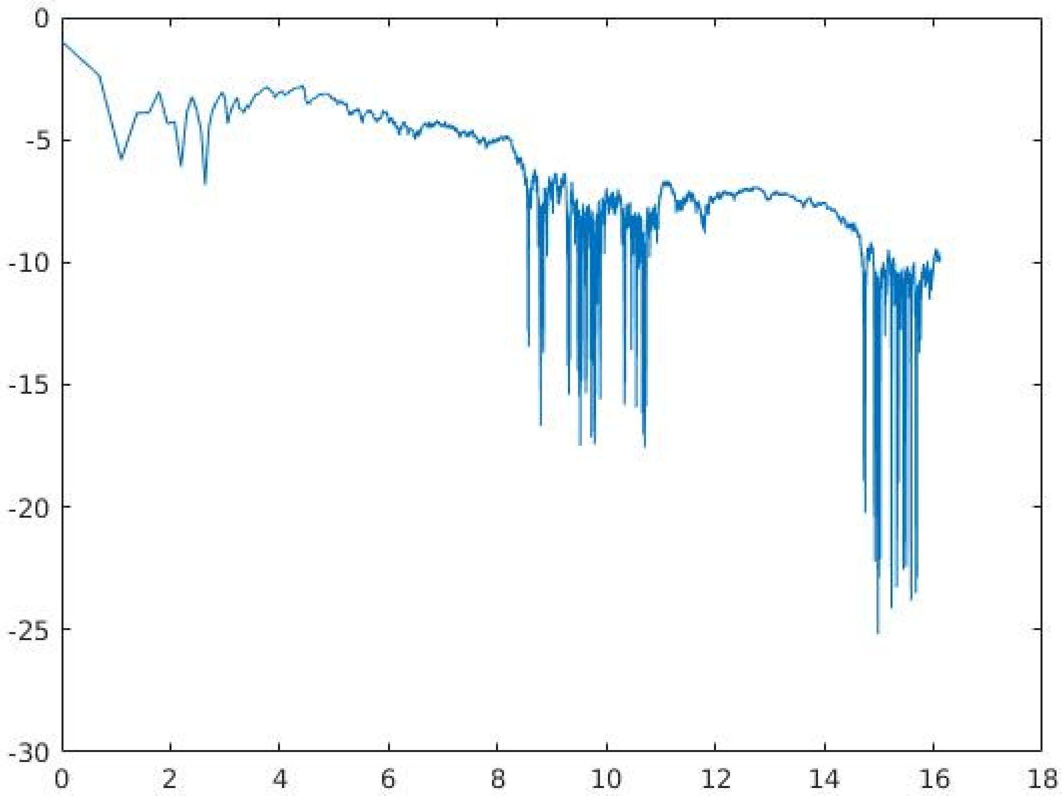
题目

用Monte-Carlo方法计算积分$I=\int_0^1 cos(\frac{x}{5})e^{-5x}dx$，并分别对不使用和使用重要性抽样减小方差技术所获得的结果进行比较。

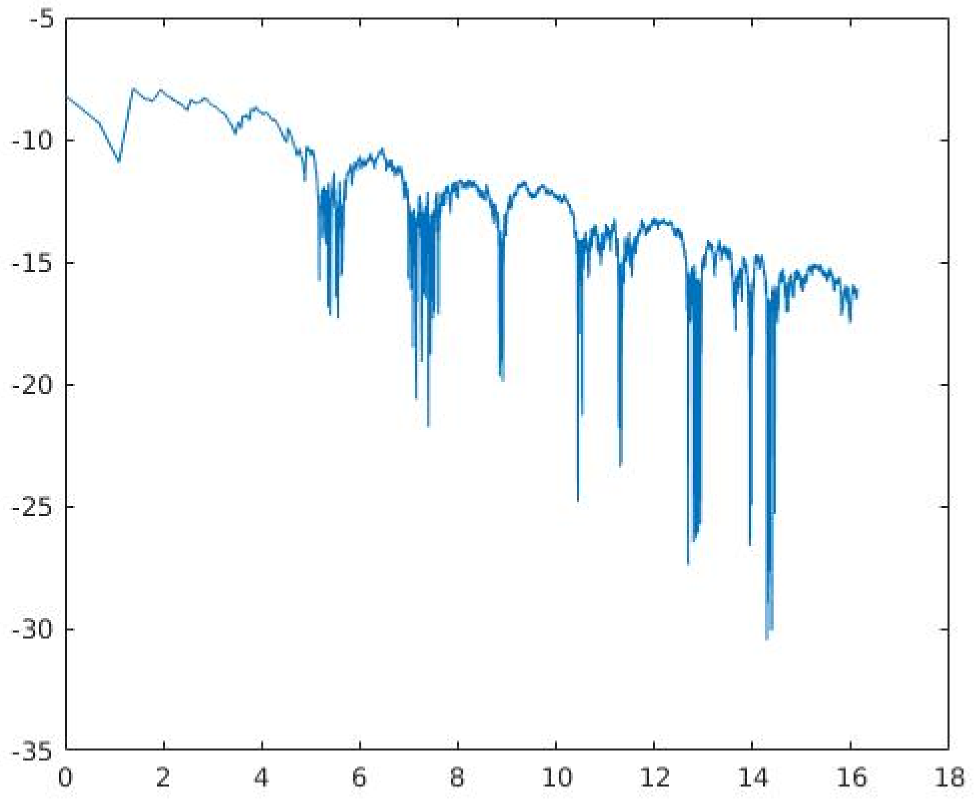
解答

首先，利用分步积分，求出以上积分的精确值为$\frac{625}{626}*(\frac{1}{5}*(1-cos(\frac{1}{5})*e^{-5}+\frac{1}{125}*sin(\frac{1}{5})*e^{-5})$，因此，我们接下来可以通过比较计算产生误差来比较两种方法。

未使用重要性抽样的结果



使用重要性抽样，选取$p=e^{-5x}/\int_0^1 e^{-5x}dx$，即我们产生每一次随机结果的方式变为：先按照分布P生成随机变量X，再计算出$f(x)/p(x)$作为一次的随机结果。下图是使用重要性抽样的结果。



我们可以发现，使用重要性抽样在选取相同N的情况下精度有着很大的提升，但方法的收敛性并未改变，依然为半阶收敛。

Problem7.3

题目

设计一种随机数抽样方法，产生满足概率密度

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi}e^{-r}, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

的随机向量$X = (X_1, X_2, X_3)$

解答

- 可将全空间上的概率积分转为$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi sin\phi \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{8\pi}e^{-r}dr$
- 按照以下概率分布生成随机变量r, θ, ϕ：
  - $p(r) = 1/2 * r^2 * e^{-r}$
  - $p(\theta) = 1/2\pi, \theta \in [0, 2\pi]$
  - $p(\phi) = sin\phi/2, \phi \in [0, \pi]$
- 生成x,y,z
  - $x = rsin\phi sin\theta$
  - $y = rsin\phi cos\theta$

- $z = rcos\phi$

- 生成r利用分布函数$F(R) = 1 - (R^2/2 + R + 1)e^{-R}$，先生成[0,1]区间上的随机数X，再解方程F(R)=X以生成r。其余可用舍选法。