数值分析上机报告4

段浩东 **1500017705**

上机练习4.1

题目

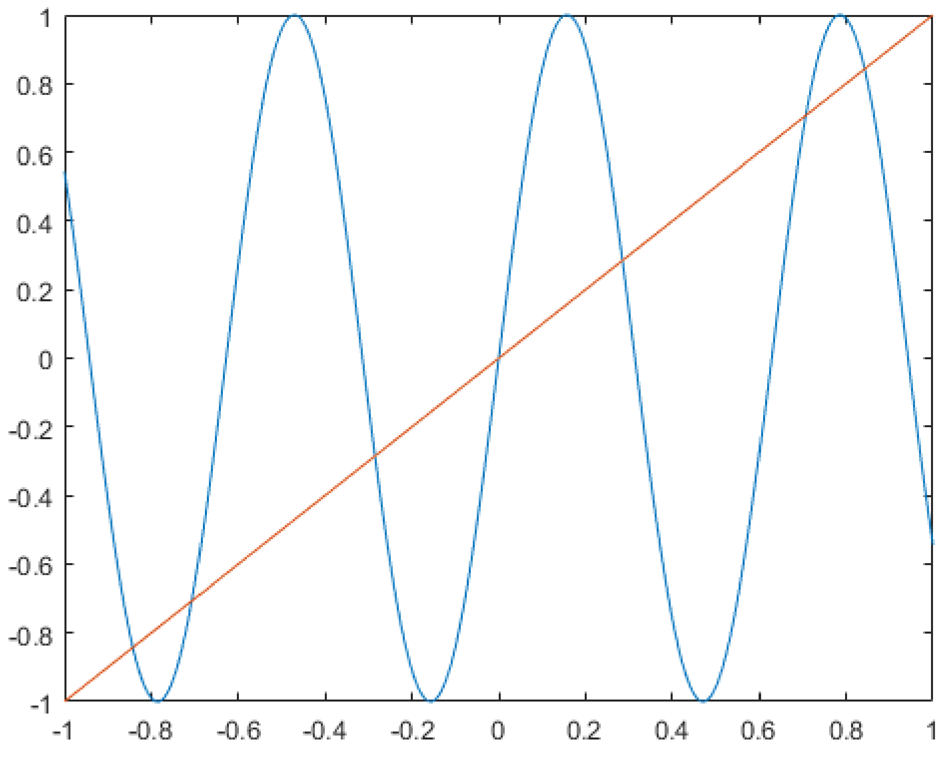
对于函数$f(x)=sin(10x)-x$，试讨论：

1.函数共有多少零点

2.任意选择两种方法，求出这个函数的所有零点，在计算中，不同的方法各有哪些需要注意的地方，请稍加分析。

解答

1. 由于$|sin(10x)|<=1$，因此零点必定全部位于区间$[-1,1]$，作出$sin(10x)$与x的图像定性观察，我们有：



通过观察，显然可以看出，此方程总共存在7个解，除去零点外，由奇函数的性质，这些零点都是关于原点对称的，因此实际求解时可以只求一边。

2.

由对称性，仅列出非负根：

- x0 = 0
- x1 = 0.285234

- x2 = 0.706817
- x3 = 0.842320

我分别选用了二分法和不动点法进行计算：

- 其中二分法需要先大致通过估计得到每一个零点临近的两点，函数值分别为一正一负，而后进行二分，此问题中所求解的函数比较正常，因此迭代停止条件正常选取即可，我选取了|f(x)|<1e-8这一条件。
- 不动点法我选择的函数是x=arcsin(x)/10，右侧函数的导数值为1/(10*sqrt(1-x^2))，这一值在x属于[-0.99,0.99]时绝对值小于1。而这一区间又包含了所有的根。因此迭代时初值选取接近所希望求的根的位置，使用不动点法即可求得所有根。

上机练习4.2

题目

求非线性方程$\cos x+1/(1+e^{-2x})=0$的最小正根。取初值$x_0=3$，分别考察下面的迭代格式：
（1）$x_{k+1}=\arccos(-1/(1+e^{-2x_k}))$；
（2）$x_{k+1}=0.5\ln(-1/(1+1/\cos x_k))$；
（3）Newton迭代法。
对上述每个格式，先证明它确实对应一个等价的不动点问题，从理论上分析它是否局部收敛以及收敛速度如何，然后实现该方法，验证你的结论。

解答

对于三种格式是否对于等价的不同点问题，我们进行了推导：

格式1：

$$|\phi'(x)|=|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(1+e^{-2x})^2}}}||\frac{1}{(1+e^{-2x})^2}||2e^{-2x}|$$

$$<|\frac{1}{1+e^{-2x}}||2e^{-2x}|<=1$$

而$x=\phi(x)$在 $[0,+\infty)$上恰好有一根，因此必可以局部收敛，在这一区间上

$|\phi'(x)|>=|\frac{1}{4}||\frac{1}{4}||2e^{-2x}|>0$，因此证得一阶收敛。

格式2：

通过计算，发现$|\phi'(x^*)\approx 15.37|$，所以不对应不动点问题。

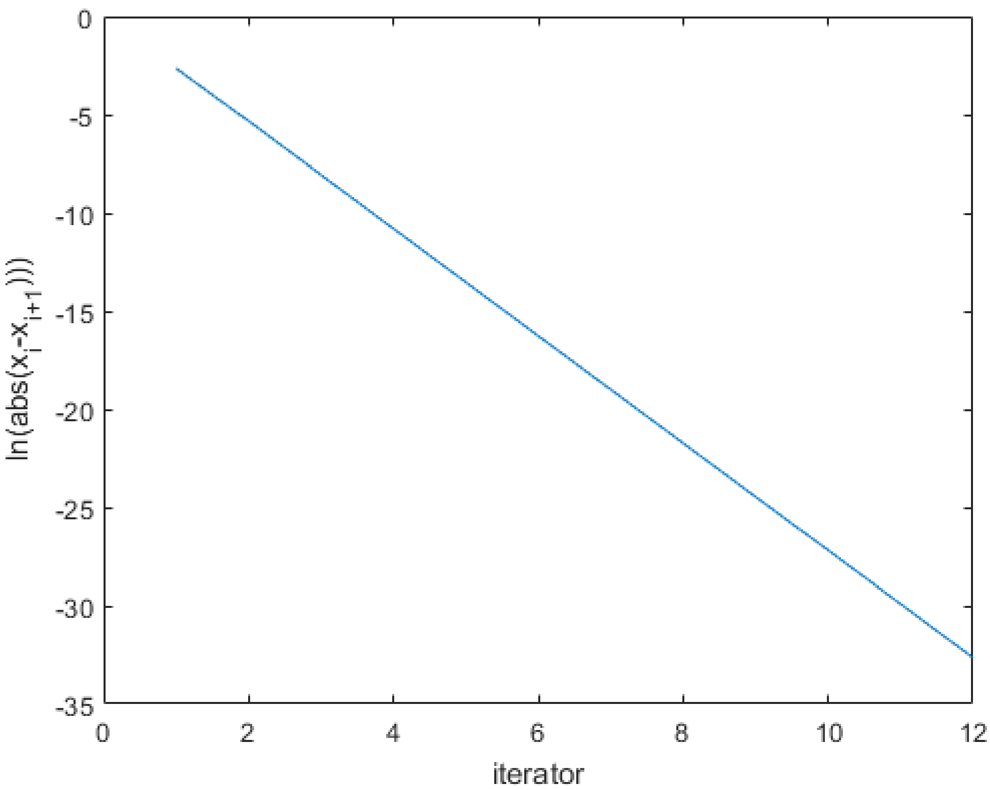
格式3：

我们有结论，Newton迭代法在零点附近可以达到二阶收敛。

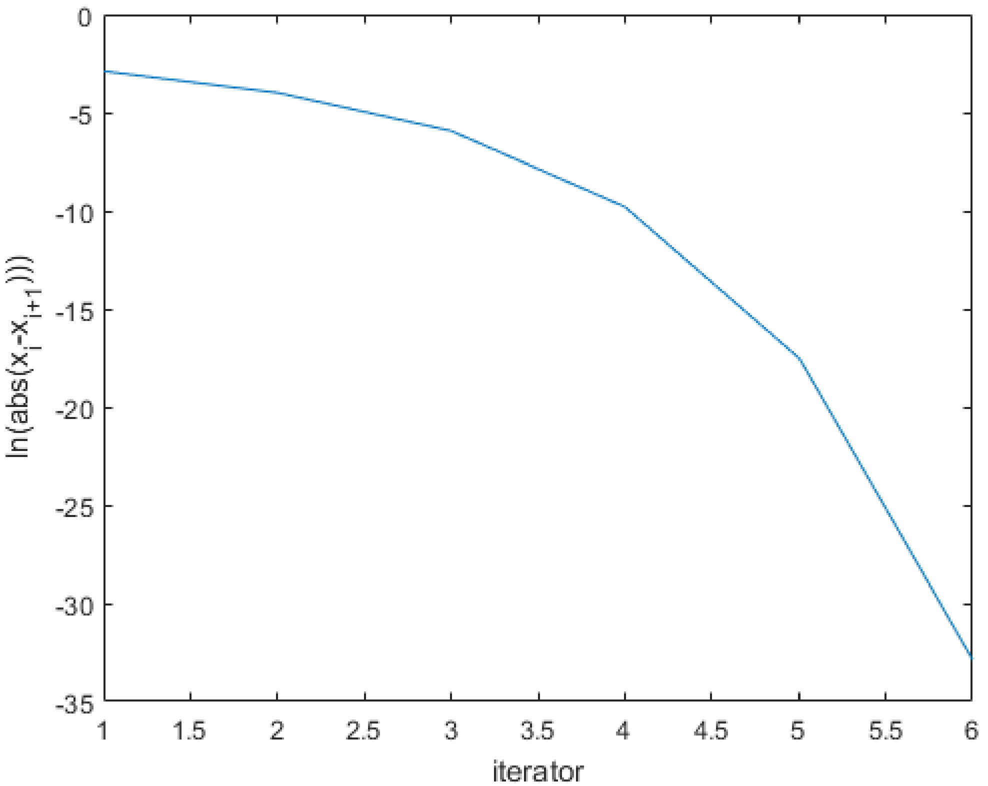
因格式2已在理论上证明为不可行，进行尝试后发现其迭代值很快发散，因此未作具体分析，下列出1,3两种格式误差与迭代次数的关系：

我们可以很容易的观察到，两种分别为直线与二次曲线，分别对应1阶收敛同2阶收敛

格式1：



格式2：



我们可以很容易的观察到，两种分别为直线与二次曲线，分别对应1阶收敛同2阶收敛

上机习题4.3

题目

对于非线性方程组

$(x_1+3)(x_2^3-7)+18=0$
$sin(x_2e^{x_1}-1)=0$

（1）使用Newton迭代法求解，初值取为$x_0=(-0.5,1.4)^T$；

（2）使用Broyden方法，取同(1)的初值求解上面问题；

（3）已知精确解为$x=(0,1)^T$，通过计算每个迭代步的误差，比较这两种方法的收敛速度。它们各需要多少步迭代可以达到机器精度？

解答

记$f_1(x)=(x_1+3)(x_2^3-7)+18$，$f_2(x)=\sin(x_2e^{x_1}-1)$，$f(x)=(f_1(x),f_2(x))$，则其Jacobi矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_2^3-7 & 3(x_1+3)x_2^2 \\ x_2e^{x_1}\cos(x_2e^{x_1}-1) & e^{x_1}\cos(x_2e^{x_1}-1) \end{bmatrix}.$$

根据Newton迭代法，每次迭代求解$\nabla f(x^{(k)})\cdot y^{(k)}=-f(x^{(k)})$,并作更新$x^{(k+1)}=x^{(k)}+y^{(k)}$.

为减小求$(\nabla f(x))^{-1}$的计算开销，不直接对其进行计算，而是利用Broyden算法对其估计，每次令：
$g=f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})$
$y=x^{(k)}-x^{(k-1)}$
则

$$(A^{(k)})^{-1}=(A^{(k-1)})^{-1}-\frac{[(A^{(k-1)})^{-1}g-y]\cdot y^T(A^{(k-1)})^{-1}}{y^T(A^{(k-1)})^{-1}g}$$

由此将Newton迭代法近似为

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-(A^{(k)})^{-1}f(x^{(k)}).$$

由此得以减小运算量。

结果如下文所示：

- Newton方法大约需要4次迭代即可达到机器精度，这一数值结果也验证了newton法二阶收敛的速度。
```
iter 1 with L2 error:6.20281981656521170000000000000e-02
iter 2 with L2 error:2.10889772824187150000000000000e-04
iter 3 with L2 error:1.86367816356949340000000000000e-08
iter 4 with L2 error:4.57562929854812270000000000000e-17
iter 5 with L2 error:4.57562929854812270000000000000e-17
iter 6 with L2 error:4.57562929854812270000000000000e-17
iter 7 with L2 error:4.57562929854812270000000000000e-17
iter 8 with L2 error:4.57562929854812270000000000000e-17
iter 9 with L2 error:4.57562929854812270000000000000e-17
```

- 但在试验中，Broyden方法约9次迭代左右达到机器精度

```
iter 1 with L2 error:6.202819816565211700000000000000e-02
iter 2 with L2 error:5.247283552766387500000000000000e-04
iter 3 with L2 error:2.460617606247627700000000000000e-04
iter 4 with L2 error:4.303118587302730500000000000000e-05
iter 5 with L2 error:1.402796044434178600000000000000e-07
iter 6 with L2 error:5.685862191650138100000000000000e-10
iter 7 with L2 error:1.758470187688125800000000000000e-12
iter 8 with L2 error:1.012235507039626600000000000000e-15
iter 9 with L2 error:1.154331015493329200000000000000e-16
iter 10 with L2 error:1.332917767228198500000000000000e-16
```

- 在此以后，Broyden迭代输出NaN，经考察后发现，是由于A^{-1}经迭代运算变为NaN所致

```
A =

  -Inf   Inf
   NaN   NaN
```

- 我们发现，Broyden算法由于利用迭代得到近似的Jacobi矩阵，因此效果显然不如直接对Jacobi矩阵进行求解，但是好处是节省了计算量，同时，从结果来看，这一对Jacobi矩阵的近似是比较合理的。

上机习题**4.4**

题目

对于非线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\cos x_1}{81} + \dfrac{x_2^2}{9} + \dfrac{\sin x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{\sin x_1}{3} + \dfrac{\cos x_3}{3}, \\ x_3 = -\dfrac{\cos x_1}{9} + \dfrac{x_2}{3} + \dfrac{\sin x_3}{6}. \end{cases}$$

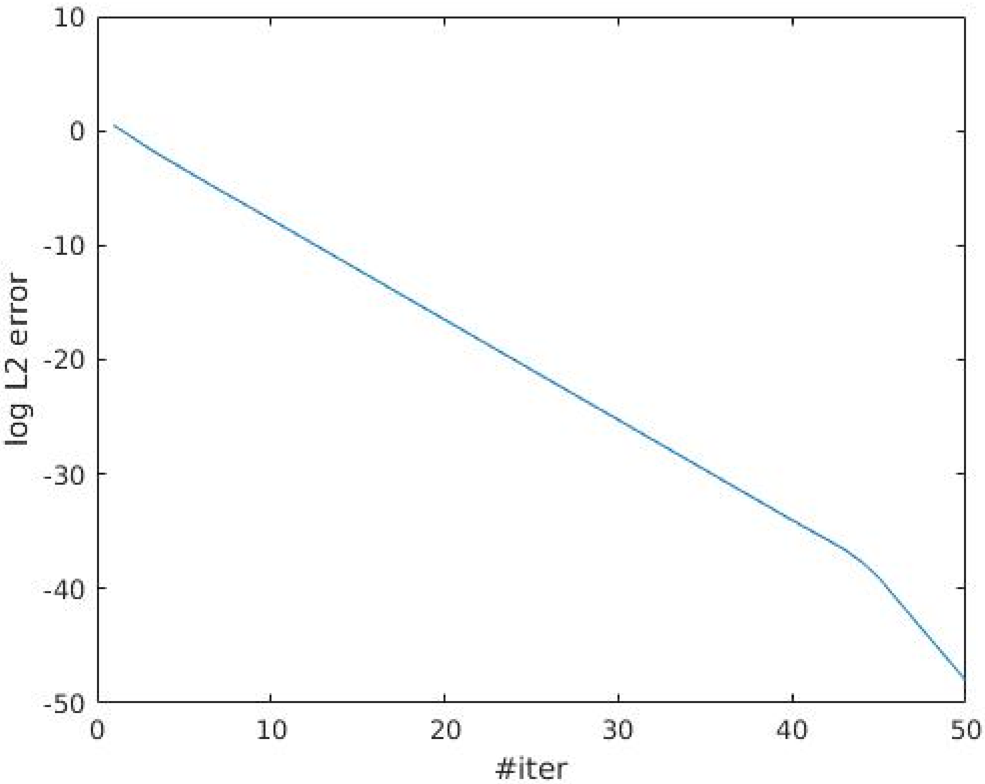
（1）使用不动点迭代法求解；

（2）在不动点，对应线性收敛速度的常数C是多少？如何和你实际所观察到的收敛情况加以比较？

（3）用Newton迭代法再求解该问题，比较收敛情况。

解答

首先，尝试利用迭代法进行求解，选取初值$(1,1,1)$进行迭代，发现结果收敛至$(0,1/3,0)^T$ ，经验证，发现的确为方程组的解，绘出迭代次数同L2误差的关系，如图所示：

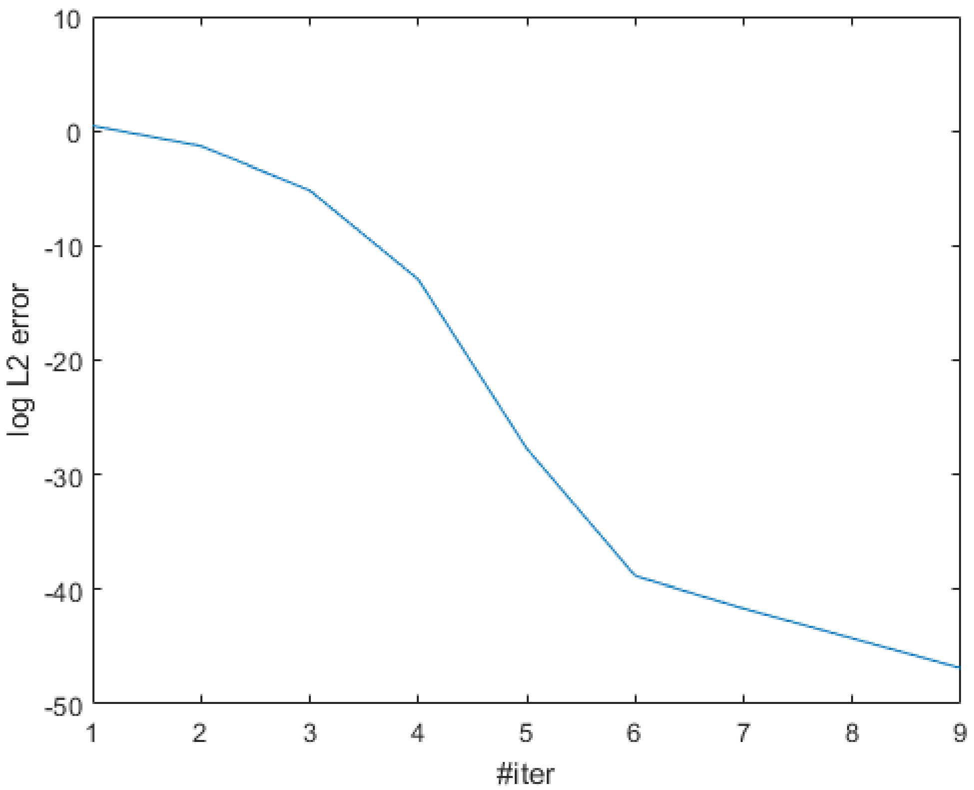


方程在解这一点处的Jacobi矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 2/27 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

该矩阵的谱半径约为0.4161，这一值小于1，因此在理论上保证了这一方法的收敛性。而经由验证，当迭代值趋于收敛的时候，线性收敛的常数基本也符合这一数值。

之后，再尝试用newton法解决这一问题，方式与此前相同，每一步迭代先求出Jacobi矩阵，然后再利用Jacobi矩阵更新解的值，大致结果如下：



由此我们发现，newton法的二阶收敛远快于不动点的线性收敛，大致分别迭代次数为50次与6次。

上机习题4.5

题目

下面的非线性方程组在求解的时候都会遇到一些困难，使用标准库函数或自己编写程序按给定初值求解这些问题。在每个题中，非线性求解器可能不收敛或者收敛到某个值但又不是方程组的解，试给出解释。观察收敛速度，如果比预想的要慢，试解释原因。

（1）

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2=5, \\ x_1+x_2=1, \\ x_1+x_3=3. \end{cases} \tag{E_3}$$

初值取$x_1=(1+\sqrt{3})/2, x_2=(1-\sqrt{3})/2, x_3=\sqrt{3}.$

（2）

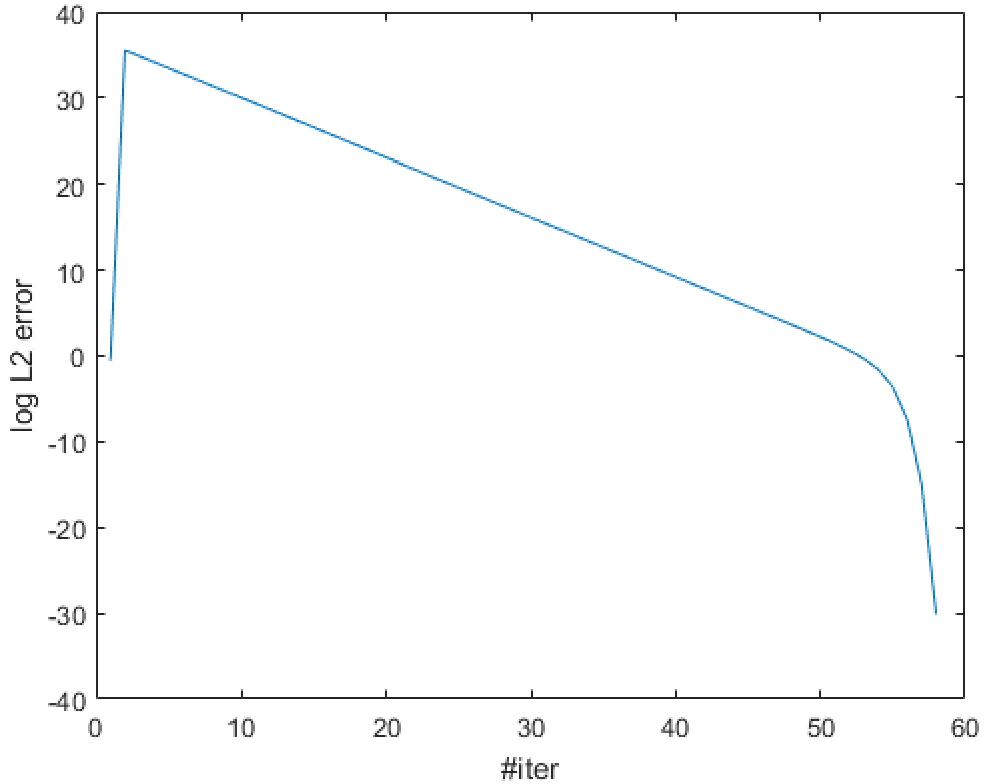
$$\begin{cases} 10^4 x_1 x_2=1, \\ e^{-x_1}+e^{-x_2}=1.0001. \end{cases} \tag{E_4}$$

初值取$x_1=0, x_2=1.$

解答

1.

利用牛顿法，所得到的误差与迭代次数关系如下：



开始阶段误差暴增，是由于初值处Jacobi矩阵奇异的缘故，而且由此看出，仅有迭代的x接近0点时，才体现出二阶
初值点处的Jacobi矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

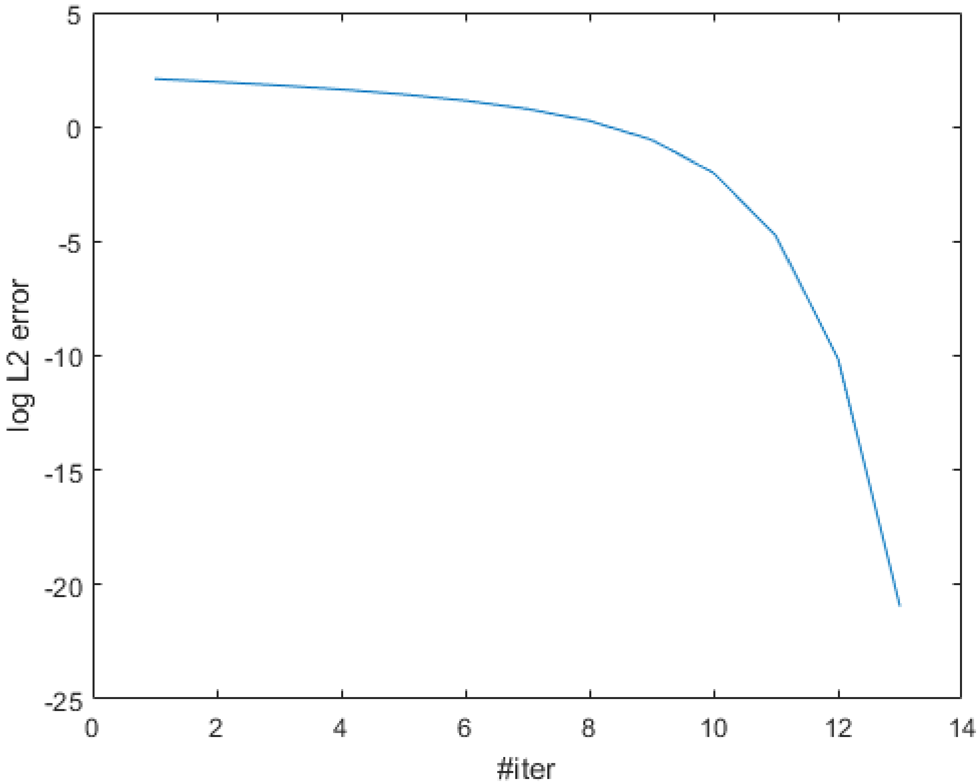
由此可以看出，迭代初值的选取不仅要考虑收敛域的大小，也要考虑Jacobi矩阵本身的性质，对于这一问题的求解，稍稍对初值进行一下变化将会是一个很好的选择。

2.

这一方程组其独特之处在于，它是一个关于x_1, x_2对称的方程组

利用牛顿法，解得方程的根为x1=0.0000109816;x2=9.1061467399;

误差曲线如下:



依然得以验证其收敛速度为2阶。

同样，将初值的x_1, x_2进行调换，在所得解中，x_1, x_2也恰为原先解的对换，体现了方程组的对称性。