数值分析上机报告6（半）

段浩东 1500017705

上机习题6.1

题目

分别用Euler方法和改进的Euler方法求解下列初值问题：

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} - y^2, \quad 1 \le x \le 2, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

比较它们的计算结果，从中体会预估-校正的作用。

解答

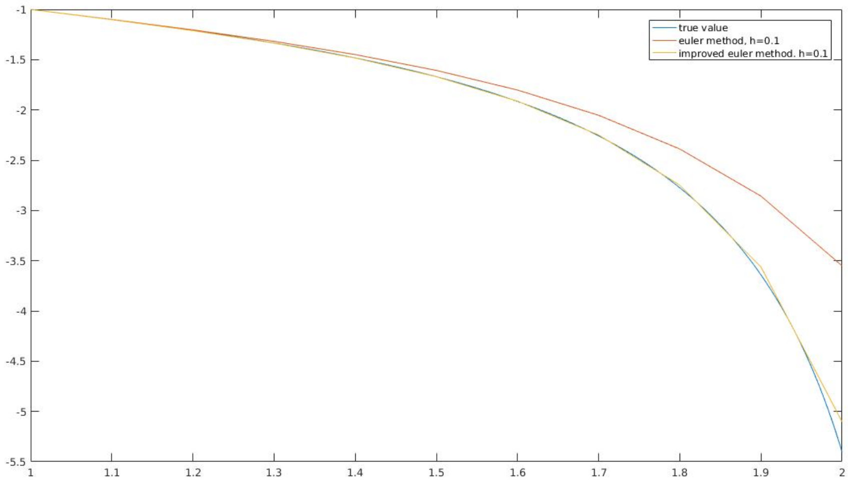
先求得初值问题的精确解$y = -\dfrac{1}{x}\tan\left(\ln x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

下面求题给问题的数值解。一般Euler格式的递推式为$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$

该方法是一阶方法，而改进的Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1). \end{cases}$$

属于二阶Runge-Kutta方法。



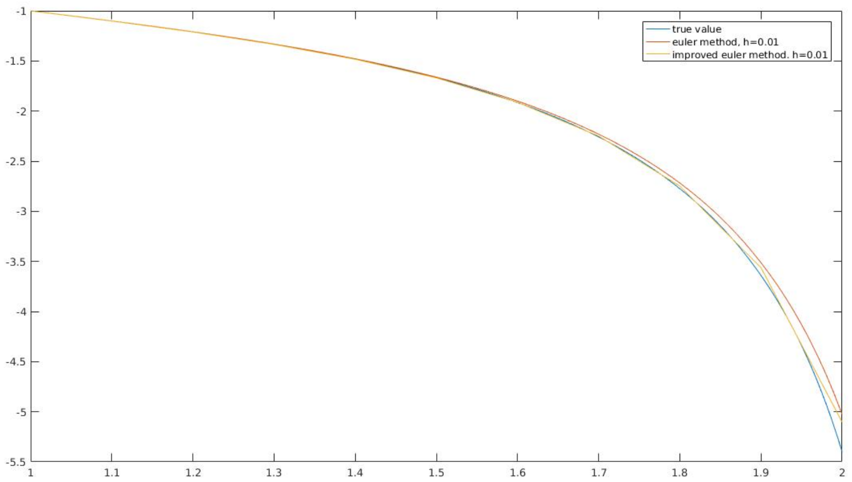


表1展示了利用两种数值方法进行求解的结果（步长$h = 0.01$）。可以看到，改进的Euler公式利用预估-校正的思想，结合了隐式方法较小的截断误差和显式方法较小的计算量两大优点，得到了更加令人满意的数值结果。但改进Euler公式在接近2的一段函数效果依然并不是很令人满意。

上机习题**6.2**

题目

刚性比是衡量问题困难程度的重要指标，针对问题合理选择求解刚性问题的方法很重要。尝试用不同方法求解下面的初值问题：

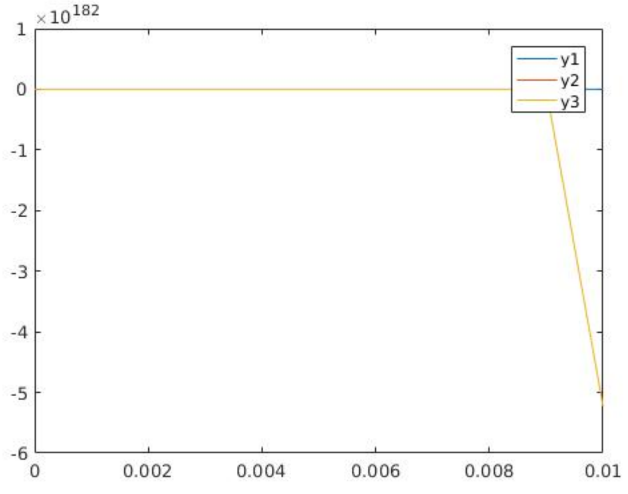
$$\begin{cases} y_1'(t) = -0.013y_1 - 1000y_1y_2, \\ y_2'(t) = -2500y_2y_3, \\ y_3'(t) = -0.013y_1 - 1000y_1y_2 - 2500y_2y_3, \\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 0, \end{cases} \qquad t \in [0, 10]. \qquad (E_1)$$

比较它们的求解结果和计算时间，并分析它们的精度。

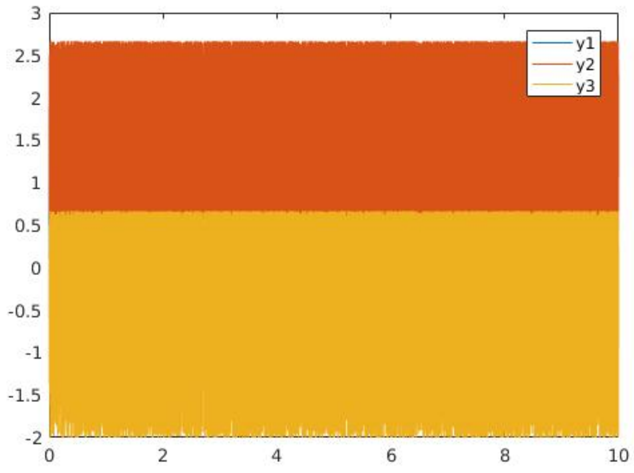
解答

以下主要尝试使用显式Euler方法，隐式Euler方法，4级4阶Runge-Kutta方法。首先简述对Euler方法的尝试：

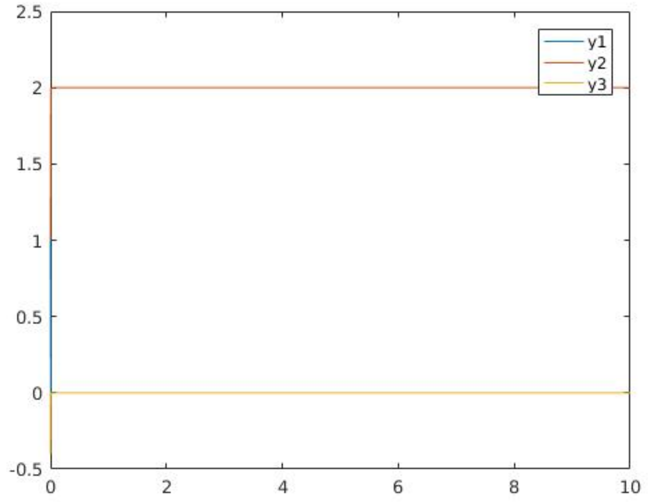
h=0.001



h=0.0006

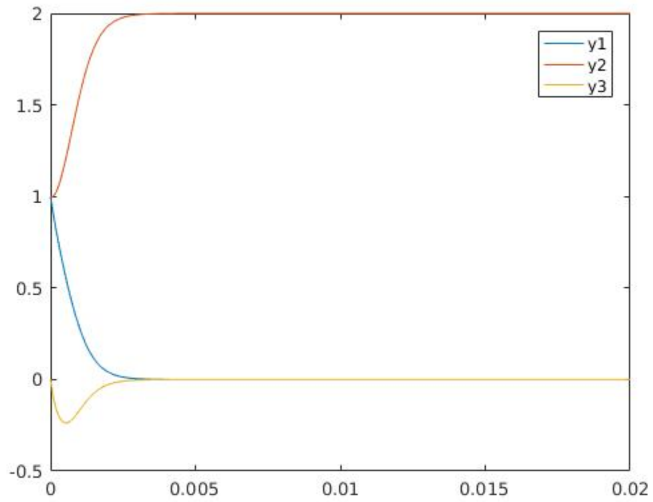


h=0.0004



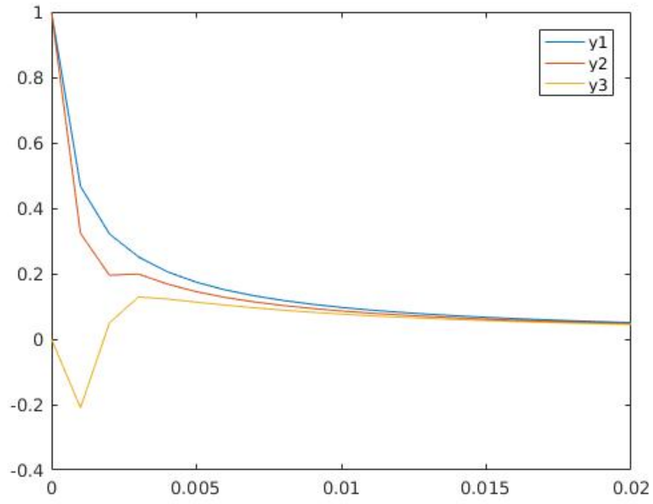
可进行放大，具体观察三条曲线的收敛过程：

h=0.0001:



- 因此，得到结论，Euler方法使得问题稳定的步长大致为0.0004。
- 改进Euler方法
    - h=0.0001　　所得出的图像与上张区别微小，收敛速度无大变化。
- 4阶显式runge-kutta

- h=0.001 这一方法较最初的Euler方法，最大的优点是收敛步长变大，h取0.001也可收敛，收敛的速度未有明显变化，值得一提的是，它收敛到了一个与此前方法稍有不同的解，y2的值有所不同。



- 总结，在此问题中，所得收敛解y1,y3均为0，但y2不存在限制，可以取任意值，实际求解中，y2的最终值往往与方法有关，另外，高阶的方法往往有着更大的收敛步长。

上机习题**6.4**

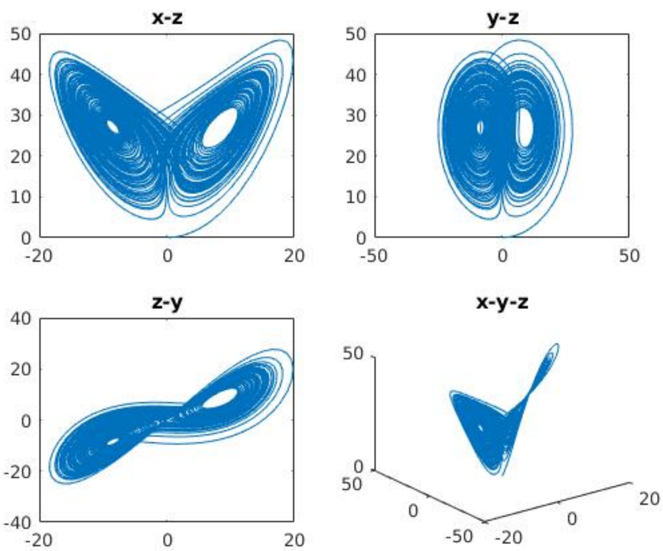
题目

考虑$Lorenz$方程 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z. \end{cases}$ 其中σ, ρ, β为变化区域有一定限制的实参数。（1）对取定的参数值$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$，选取不同的初值，观察计算的结果有什么特点？解的曲线是否有界，是不是周期的或者趋于某个固定的点？（2）在问题允许的范围内适当改变其中的参数值，再选取不同的初值，观察并记录计算的结

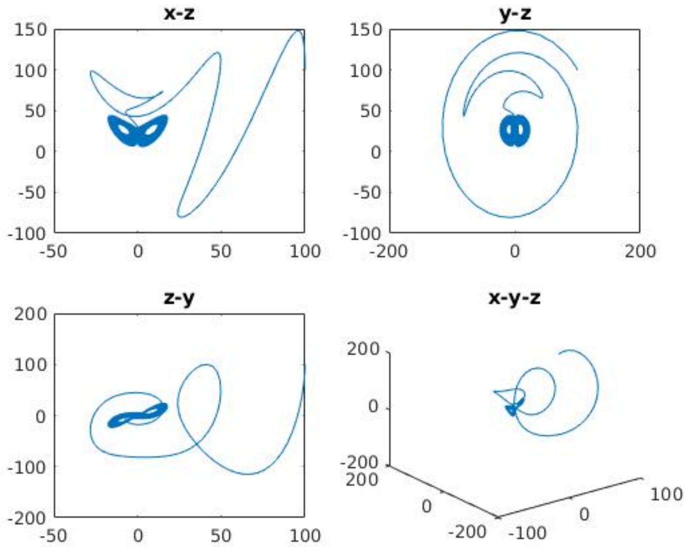
解答

(1)

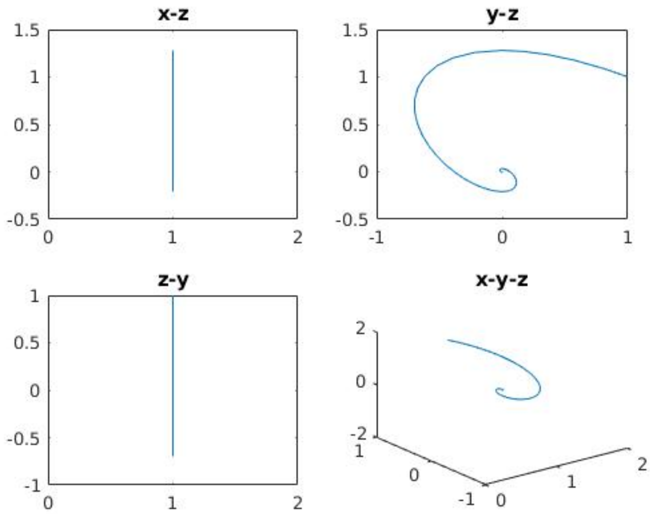
- 固定参数，对于不同初值的实验结果如下：
  - (0.1,0.1,0.1) 曲线未发散，但无法看出周期性或趋于某点的迹象。



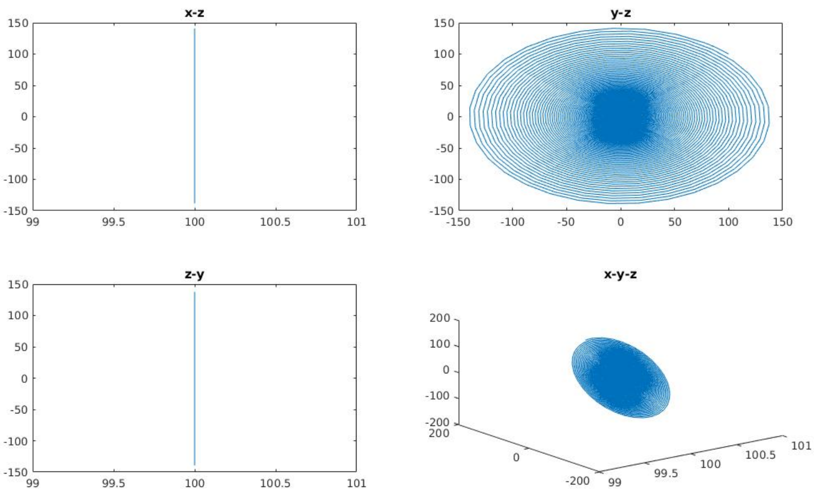
  - (100,100,100) 曲线收敛到上图混沌区域的范围



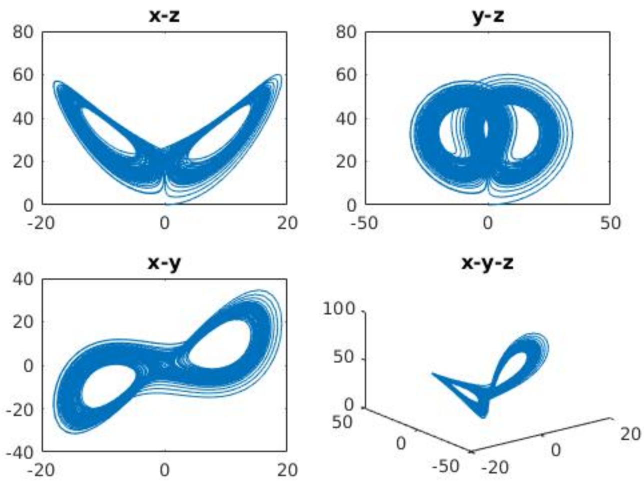
- 尝试其他值，最终都会收敛至这一区域形成混沌的状态。
  (2)
- 举几例：
  - 参数全为0时，x不变，初值取(1,1,1)时，曲线收敛到(0,0,0):



  - 初值取(100,100,100)时，以有趣的螺旋形态收敛：
    、



- 参数取(-5,35,-8/3)，混沌，形态稍有变化



- 经过以上考察，发现Lorenz曲线对于初值一般并不十分敏感，调整初值一般不改变收敛或是混沌，也不会改变收敛的点值。但参数略有变化，往往会对曲线带来很大的改变。