1.1　支配方程式

流体の密度変化は圧力や温度の変化により生じる．代表的な流速が音速に比べてかなり低い場合，流体の挙動は圧縮性，つまり密度変化による媒質の弾性の影響が小さいと近似でき，非圧縮性流体として扱うことができる．一方，代表流速が音速よりかなり低い場合でも，弾性の影響を考慮しなければならない場合もある．この場合，対象とする流れの現象を考慮して基礎方程式を適切にモデル化して解く．モデル化のレベルによって，下記のようなバリエーションが考えられる．

1) 圧縮性方程式を近似せずに扱う [1]
2) 弾性の影響を質量保存則のみに適用し，運動量に与える密度変化を省略する
3) 温度変化によって生じる密度変化を運動方程式の外力としてモデル化する
4) 完全に非圧縮性流体として扱う

ここでは，2)-4) の定式化を説明する．

1.1.1　非圧縮性流体

解析対象とする流れの特徴を以下のように仮定し，支配方程式を記述する．

- 流れの速度が音速に比べて十分に低く，流れの運動に対する圧縮性の影響は小さいと仮定し，流れを非圧縮性として取り扱う．
- 温度場の代表的な温度差スケールが 30 °C 以下で，密度変化が小さいと仮定すると，密度変化が質量保存則へ与える影響は小さい．密度変化が流れの運動に及ぼす影響を Boussinesq 近似によりモデル化する．

支配方程式として，非圧縮性流れに対する質量保存則 (1.1)，運動量保存則 (1.2)，エネルギー保存則 (1.3) を用いる．δ はクロネッカーのデルタで重力方向 (i=3) のときに浮力が作用する．ここで，プライム [′] は有次元量を表す．

$$\frac{\partial u_i{}'}{\partial x_i{}'} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho' \frac{\partial u_i{}'}{\partial t'} + \rho' \frac{\partial}{\partial x_j{}'} \left(u_j' u_i' \right) = - \frac{\partial P'}{\partial x_i{}'} + \frac{\partial}{\partial x_j{}'} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i{}'}{\partial x_j{}'} + \frac{\partial u_j{}'}{\partial x_i{}'} \right) \right] - \rho' g' \delta_{i3} \tag{1.2}$$

$$\rho' C_p' \left[\frac{\partial \theta'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(u_i' \theta' \right) \right] = \frac{DP'}{Dt'} + \frac{\partial}{\partial x_i{}'} \left(\lambda' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i{}'} \right) + \mu' \Phi' + Q' \tag{1.3}$$

ρ'	$[kg\,/\,m^3]$	density
P'	$[Pa]$	pressure
C'_p	$[J\,/\,(kg\,K)]$	specific heat at constant pressure
θ'	$[K]$	temperature
λ'	$[W\,/\,(m\,K)]$	heat conductivity
$u_j{}'$	$[m\,/\,s]$	velocity components
$u_j^{g}{}'$	$[m\,/\,s]$	velocity components of a grid point
$x_j{}'$	$[m]$	coordinate axis
t'	$[s]$	time
μ'	$[Pa\,s]$	viscosity
g'	$[m\,/\,s^2]$	gravitational acceleration
Φ'	$[1/s^2]$	dissipation function
Q'	$[W\,/\,m^3]$	heat source

一様で平衡な状態においては，密度は圧力と温度の関数となる．理想気体の場合には，$\mathcal{R}\,(8.314472\ [J\,/\,(mol\,K)]$ を気体定数 [2][*1] とすると式 (1.4) により表される．

$$P' = \rho'\,\mathcal{R}\,\theta' \tag{1.4}$$

平衡状態 0 からのずれが小さく変化が線形であると仮定すると，テーラー展開から

$$\rho' \;=\; \rho_0{}' + \left(\frac{\partial\rho'}{\partial\theta'}\right)_0 (\theta' - \theta_0{}') + \left(\frac{\partial\rho'}{\partial P'}\right)_0 (P' - P_0{}') \tag{1.5}$$

ここで，体積膨張率を次式で定義すると，

$$\beta_0{}' = -\frac{1}{\rho_0{}'}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial\theta'}\right)_0 \tag{1.6}$$

理想気体の場合には，

$$\beta_0{}' = \frac{1}{\theta_0{}'} \tag{1.7}$$

となる．(1.5) の右辺第三項は音速の 2 乗に反比例するので省略でき，最終的に次のようになる．

$$\rho' = \rho_0{}' - \rho_0{}'\beta_0{}'\,(\theta' - \theta_0{}') \tag{1.8}$$

式 (1.8) は，基準状態 0 を基にして密度変化を温度変化によって表す Boussinesq 近似モデルである．

さて，重力下にある静止流体では下層にある流体ほど圧力が高い．三次元の z 方向 (i=3) を鉛直方向にとると，Navier-Stokes 方程式 (式 1.2) の右辺は，状態 0 のとき，

$$-\frac{\partial P'}{\partial x_i{}'} - \rho_0{}'g' \;=\; -\frac{\partial}{\partial z'}\,(P' + \rho_0{}'g'z') = -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial z'} \tag{1.9}$$

[*1] 気体定数の値は CODATA（科学技術データ委員会）の 2002 年の勧告で，それ以前から変更になっている．

である．重力ポテンシャルの影響を加えた新しい定義の圧力を導入し，支配方程式を表すと，式 (1.2) は以下のようになる．

$$\tilde{p}' = P' + \rho_0{}' g' z' \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u_i{}'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_j{}'}\left(u_j' u_i'\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i{}'} + \frac{\partial}{\partial x_j{}'}\left[\nu'\left(\frac{\partial u_i{}'}{\partial x_j{}'} + \frac{\partial u_j{}'}{\partial x_i{}'}\right)\right] - (\theta' - \theta_0{}')\beta_0{}' g' \delta_{i3} \tag{1.11}$$

また，低マッハ数を仮定すると，散逸関数 Φ' は M^2 に比例するので，その寄与は小さいとしてよい．圧力の全微分の項の影響も小さいとすると，式 (1.3) は，

$$\rho' C_p' \frac{\partial \theta'}{\partial t'} + \rho' C_p' \frac{\partial}{\partial x_i{}'}\left(u_i' \theta'\right) = \frac{\partial}{\partial x_i{}'}\left(\lambda' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i{}'}\right) + Q' \tag{1.12}$$

温度拡散係数 α' を導入すると，

$$\alpha' = \frac{\lambda'}{\rho' C_p{}'} \qquad [m^2/s] \tag{1.13}$$

温度拡散係数 α' が一定，さらに定常の場合には下記のようになる．

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_i{}'}\left(u_i' \theta'\right) = \alpha' \frac{\partial}{\partial x_i{}'}\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_i{}'}\right) + \frac{Q'}{\rho' C_p'} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i{}'}\left(u_i' \theta'\right) = \alpha' \frac{\partial}{\partial x_i{}'}\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_i{}'}\right) + \frac{Q'}{\rho' C_p'} \tag{1.15}$$

式 (1.12) において，単位体積あたりの内部エネルギーを $E' = \rho' C_p{}' \theta'$ $[J/m^3]$，熱流束を q' $[W/m^2]$ として，

$$\frac{\partial E'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_i{}'}\left(u_i' E'\right) = -\frac{\partial q_i'}{\partial x_i{}'} + Q' \tag{1.16}$$

この式は多媒質熱輸送の定式化に用いる．

1.1.2　非圧縮性流体への弱い圧縮性の導入

一般的に，流れの代表的な速度が音速の 0.2~0.3 程度までは運動方程式に対する圧縮性の影響は小さいと言われている．しかしながら，代表速度は小さくても流体の圧縮性が本質的な影響を及ぼす場合がある．例えば，大温度差で駆動される自然対流は空気の体積膨張のため，連続の式において圧縮性を考慮すべきである．また，キャビティ部のヘルムホルツ共鳴で音波を扱うような現象もある．

ここでは，低マッハ数における弱い圧縮性を考慮した定式化を考える．圧縮性を考慮した連続の式は，

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\rho' u_i'\right) = 0 \tag{1.17}$$

この式を実質微分を用いて変形すると，

$$\frac{D\rho'}{Dt'} + \rho' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i'} = 0$$

等エントロピー変化では，c を音速とすると，下記の関係がある．

$$\frac{D\rho'}{Dt'} = \frac{1}{c^2}\frac{Dp'}{Dt'} \tag{1.18}$$

したがって，式 (1.17) は，

$$\frac{1}{c^2}\frac{Dp'}{Dt'} + \rho' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i'} = 0 \tag{1.19}$$

さらに，圧力の実質微分項では空間微分の寄与が小さいと仮定すると，

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t'} + \rho' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i'} = 0 \tag{1.20}$$

1.2　無次元化

代表速度 u_0', 代表長さ L', 代表温度スケール $\Delta\theta_0'$ と基準温度 θ_0' で式 (1.1), (1.11), (1.12) を無次元化する．

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{u'}{u_0{}'} \\ x &= \frac{x'}{L'} \\ p &= \frac{p' - p_0{}'}{\rho' u_0'^2} \\ \theta &= \frac{\theta' - \theta_0{}'}{\Delta\theta_0'} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

1.2.1　強制対流と自然対流

以下の式 (1.22)–(1.24) は，単一成分の熱流動を表す．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j u_i\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{Gr}{Re^2}\delta_{i3}\theta \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \theta\right) = \frac{1}{Pe}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \Theta \tag{1.24}$$

$$\left.\begin{aligned}
Re &= \frac{u'_0 L'}{\nu'} \\
Pr &= \frac{\mu' C'_p}{\lambda'} = \frac{\nu'}{\alpha'} \\
Gr &= \frac{g' \beta' \Delta\theta'_0 L'^3}{\nu'^2} \\
Ra &= Pr \cdot Gr \\
Pe &= Pr \cdot Re \\
\Theta &= \frac{Q'}{\rho' C'_p u'_0 \Delta\theta'_0 / L'}
\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

ここで，

Pr	Prandtl 数	粘性と熱の拡散率の比
Re	Reynolds 数	慣性力と粘性力の比
Gr	Grashof 数	浮力と粘性力の比
Ra	Rayleigh 数	不安定性のパラメータ
Pe	Peclet 数	対流と熱伝達のエネルギー輸送の比
Θ	-	無次元の温度変化率

式 (1.23) は強制対流と自然対流を表現している．右辺第三項は自然対流と強制対流の比を表している．つまり，$Gr/Re^2 \gg 1$ の場合には自然対流が支配的で，$Gr/Re^2 \ll 1$ の場合には強制対流が支配的となる．$Gr = 0$ つまり温度差が無い場合には純強制対流である．一方，$Gr/Re^2 \to \infty$ の場合には純自然対流で，流れは浮力によって駆動されるため代表速度が自明ではない．また，$Gr > 10^9$ となるような流れは非定常性が強くなる．

1.2.2　弱圧縮形式

式 (1.20) において，密度はほぼ一定で ρ'_0 とすると，

$$\frac{1}{\rho'_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t'} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} = 0 \tag{1.26}$$

これを無次元化すると，

$$M^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.27}$$

ここで，マッハ数 $M = u'/c$ である．

1.3　自然対流のスケールアナリシス

純自然対流の場合の代表流速をスケールアナリシスから推測する [3]．自然対流の場合には流れを駆動する支配要因が熱拡散であり，対流の影響は小さいと考えられるので，温度境界層と粘性境界層の厚さが同程度と見積もられる．ところで，Pr 数が大きな流体の場合には粘性が支配的なので，式 (1.23) において，粘性項と浮力項のオーダーが等しい．一方，低 Pr 数流体の場合には慣性力が支配的となるので，慣性項と浮力項のオーダーが等しくなる．これらをまとめ

ると，

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\dfrac{Gr}{Re^2}\delta_{i3}\theta & \sim & \dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (Pr \gg 1) \\
\dfrac{Gr}{Re^2}\delta_{i3}\theta & \sim & \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i u_j\right) \qquad\qquad\qquad (Pr \ll 1)
\end{array}
\right\}
\tag{1.28}
$$

Pr 数が小さい場合は式 (1.28) から，

$$
u_0' = \sqrt{g'\beta'\Delta\theta_0' L'} \tag{1.29}
$$

と見積もることができる．したがって，自然対流の場合の代表速度は式 (1.29) の関係を用いて見積もり，代表速度パラメータとして与える．自然対流と強制対流が共存する共存対流の場合には，各々の代表スケールの平均値や大きい方の値を代表速度とする．

1.3.1　熱流動計算の支配方程式とパラメータ

各流動現象の支配方程式に対する入力パラメータ (Kind_Of_Solver, Buoyancy) と支配方程式の関係を表 1.1 にまとめる[*2]．パラメータは全て有次元で入力[*3] するが，標準出力には対応する無次元数も出力する．

表 1.1　支配方程式と熱対流計算のパラメータ指定の関係

支配方程式	Kind_Of_Solver	Buoyancy
純強制対流	Flow_Only	-
熱対流（浮力なし）	Thermal_Flow	No_Buoyancy
熱対流（浮力あり）	Thermal_Flow	Boussinesq
自然対流	Thermal_Flow_Natural	Boussinesq
固体熱伝導	Solid_Conduction	-

- 純強制対流
  式 (1.23) においては $Gr = 0$ なので Re が支配パラメータとなる．無次元化のスケーリングは，u_0', L', ν', $\alpha'\,(= \lambda'/\rho' C_p')$ を与える．

- 熱対流

  - 浮力の効果を考慮しない場合
    式 (1.23) において，純強制対流と同じく $Gr = 0$ である．式 (1.24) では Pe が支配パラメータとなる．無次元化のスケーリングは，u_0', L', ν', $\alpha'\,(= \lambda'/\rho' C_p')$ を与える．

  - 浮力の効果を考慮する場合
    式 (1.23) では Gr, Re が，式 (1.24) では Pe が支配パラメータとなる．無次元化のスケーリングは，u_0', L', $\Delta\theta_0'$, β', g', ν', α', Pr を与える．

---
*2 共役熱移動と固体熱伝導についての詳細は，5 章で説明する．
*3 純強制対流の場合のみ無次元パラメータにも対応している．

- 純自然対流
  浮力の効果を考慮した熱対流と同じである．ただし，u_0' は自明でないので，式 (1.29) により適切に見積る点に注意する．

- 固体熱伝導
  式 (1.24) の形式で Pe が支配パラメータとなる．ただし，対流項の寄与はゼロである．無次元化のスケーリングは，L', $\Delta\theta'$, α, を与え，$u_0{}'$ には式 (5.7) を用いる．

- 共役熱移動
  共役熱移動は，固体中の熱移動と流体中の熱流動を同時に扱うので，必然的に多媒質の熱移動問題となる．熱流動は浮力効果を考慮している．

1.4　解法アルゴリズム

この節では前節の支配方程式に対して，非圧縮性流体の解法に使われる分離解法を適用し，離散化する．

1.4.1　Fractional Step 法

非圧縮性の Navier-Stokes 方程式 (1.23) の解法として，Fractional step 法を用いる．これは，任意のベクトル場が非回転場と湧き出し無しの直交するベクトル場に分解できる性質を利用して，二つのベクトルの和をとることにより解を求める分離解法である．

離散式のコーディングポリシーとして，各セル単位で計算を進めていく．保存的な支配方程式を解くのでセル界面の流束ベースの評価が素直で演算量も少なくなるが，コロケートでは固体面や境界面の処理を考える上でセル単位毎の方が計算処理がしやすい．

1.4.1.1　Euler Explicit

一次精度の時間進行法である．

■Navier-Stokes equations

式 (1.23) の対流項と粘性項をそれぞれ C_i, D_i，浮力項を外力 f_i で表すと，

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial t} + C_i &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + D_i + f_i \\
C_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\, u_i\right) \\
D_i &= \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\
f_i &= \frac{Gr}{Re^2}\delta_{i3}\theta
\end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

疑似ベクトルの予測式は，

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t\left(D_i^n - C_i^n + f_i{}^n\right) \tag{1.31}$$

連続の式による拘束条件から，圧力の Poisson 方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial \bar{u}_i{}^*}{\partial x_i} \tag{1.32}$$

圧力ポテンシャルによるセルセンターとスタガード位置の速度ベクトルの修正式は，

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} \tag{1.33}$$

$$u_{i,face}^{n+1} = \bar{u}_{i,face}^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} \tag{1.34}$$

■Thermal transport equation

式 (1.24) の移流項と拡散項をそれぞれ Cs_i, Ds_i で表すと，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + Cs_i &= Ds_i + \Theta \\ Cs_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i \theta) \\ Ds_i &= \frac{1}{Pe}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left(Ds_i^n - Cs_i^n + \Theta^n\right) \tag{1.36}$$

1.4.1.2 Adams-Bashforth

二次精度ではあるが，安定条件が厳しい．

■Navier-Stokes equations

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t \left[\frac{1}{2}\left\{3\left(D_i^n - C_i^n\right) - \left(D_i^{n-1} - C_i^{n-1}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left(3 f_i^n - f_i^{n-1}\right)\right] \tag{1.37}$$

■Thermal transport equation

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left[\frac{1}{2}\left\{3\left(Ds_i^n - Cs_i^n\right) - \left(Ds_i^{n-1} - Cs_i^{n-1}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left(3\Theta^n - \Theta^{n-1}\right)\right] \tag{1.38}$$

1.4.1.3 Adams-Bashforth + Crank-Nicolson

拡散項に由来する安定条件による時間積分幅の制限を緩和するため，陰解法を導入する．

■Navier-Stokes equations

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t \left[-\frac{1}{2}\left(3 C_i^n - C_i^{n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(D_i^n + D_i^*\right) + \frac{1}{2}\left(3 f_i^n - f_i^{n-1}\right)\right] \tag{1.39}$$

実装は，

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i^n + \Delta t \left[-\frac{1}{2}\left(3 C_i^n - C_i^{n-1}\right) + \frac{1}{2} D_i^n + \frac{1}{2}\left(3 f_i^n - f_i^{n-1}\right)\right] \\ u_i^* &= \bar{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\bar{D} \\ u_{i,j,k}^* &= \bar{u}_{i,j,k} + \frac{\Delta t}{2\,Re\,h^2}\left(\sum_l u_l^* - 6\,u_{i,j,k}^*\right) \\ \left(1 + \frac{3\,\Delta t}{Re\,h^2}\right) u_{i,j,k}^* &= \bar{u}_{i,j,k} + \frac{\Delta t}{2\,Re\,h^2}\sum_l u_l^* \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

■Thermal transport equation

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t\left[-\frac{1}{2}\left(3Cs_i^n - Cs_i^{n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(Ds_i^n + Ds_i^{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(3\Theta^n - \Theta^{n-1}\right)\right] \tag{1.41}$$

実装は，

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\theta} &= \theta^n + \Delta t\left[-\frac{1}{2}\left(3Cs_i^n - Cs_i^{n-1}\right) + \frac{1}{2}Ds_i^n + \frac{1}{2}\left(3\Theta^n - \Theta^{n-1}\right)\right] \\
\theta^{n+1} &= \bar{\theta} + \frac{\Delta t}{2}Ds_i^{n+1} \\
\theta_{i,j,k}^{n+1} &= \bar{\theta}_{i,j,k} + \frac{\Delta t}{2\,Pe\,h^2}\left(\sum_l \theta_l^{n+1} - 6\,\theta_{i,j,k}^{n+1}\right) \\
\left(1 + \frac{3\,\Delta t}{Pe\,h^2}\right)\theta_{i,j,k}^{n+1} &= \bar{\theta}_{i,j,k} + \frac{\Delta t}{2\,Pe\,h^2}\sum_l \theta_l^{n+1}
\end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

1.4.1.4 Runge-Kutta + Crank-Nicolson

二次精度の時間進行法，対流項には 2 段階 Runge-Kutta 法，拡散項には Crank-Nicolson 法を用いる．

■1st step : Predictor

積分幅を $\Delta t/2$ にとり Euler 陽解法で時間積分し，n+1/2 タイムレベルでの予測値を得る．

Navier-Stokes equations

$$u_i^{*,n+1/2} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left(D_i^n - C_i^n + f_i^n\right) \tag{1.43}$$

$n+1/2$ タイムレベルの圧力 Poisson 式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1/2} = \frac{2}{\Delta t}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}^{*,n+1/2} \tag{1.44}$$

$n+1/2$ タイムレベルの圧力ポテンシャルによる速度の修正式

$$u_i^{n+1/2} = u_i^{*,n+1/2} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1/2} \tag{1.45}$$

Thermal transport equation

$$\theta^{n+1/2} = \theta^n + \frac{\Delta t}{2}\left(Ds_i^n - Cs_i^n + \Theta^n\right) \tag{1.46}$$

■2nd step : Corrector

Navier-Stokes equations

$u^{*,n+1}$ について反復的に解く．

$$u_i^{*,n+1} = u_i^n + \Delta t\left\{\frac{1}{2}\left(D_i^n + D_i^{*,n+1}\right) - C_i^{n+1/2} + f_i^{n+1/2}\right\} \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}^{*,n+1} \tag{1.48}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{*,n+1} - \Delta t\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} \tag{1.49}$$

1.5　乱流解析

現在の計算機リソースでは，Reynolds 数が $10^5 \sim 10^6$ オーダの高 Reynolds 数の乱流を直接計算することはできないため，乱流現象を表現する何らかの数学モデルの導入が必要になる．

1.5.1　LES と RANS

主な乱流モデルは LES(Large Eddy Simulation) と Reynolds 平均モデル (RANS; Reynolds Averaged Navier-Stokes simulation) に大別される．

LES は計算格子よりも大きなスケールの渦は直接計算し，格子幅よりも小さいスケール (SGS; Sub-Grid Scale) の渦をモデル化する手法である．一般に低周波の大きな渦は 流れ場によって異なるが，高周波の小さな渦は流れ場の形態によらず普遍性をもち，高周波の小さな渦は等方的でエネルギーを散逸する役割を担っているとされている．このような考えに基づいて，LES は普遍性のある小さな渦の影響だけをモデル化し，流れ場の形態の影響を強く受ける大きな渦の影響はモデル化せず直接解く．しかし，この大きな渦も大小さまざまなスケールの渦が相互作用し合って形成されているため，大きな渦の計算といえども十分に細かい計算格子が必要である [6].

一方，RANS は時間平均化された Navier-Stokes 方程式を解く手法であり，時間平均的な流れ場や乱流成分の定常的な統計量を得るのに適した手法である．LES が大きな渦の影響をモデル化せずに直接解いているのに対して，RANS モデルは大きい渦から小さい渦まで全てのスケールの渦の影響をモデル化している．このため LES ほど細かい格子は要求されないので，LES に比べれば計算負荷は小さいため，計算負荷の面から言えば産業利用に向いた解析手法であり，市販の CFD コードには必ずと言って良いほど RANS 系の乱流モデルが実装されている．しかし，この渦のモデル化には経験的あるいは直観的な関係式や基礎的な実験データに基づいて整理された定数群が使用されることが多く，普遍的に使用できる乱流モデルは今のところ開発されていない．また，数多くの乱流モデルが存在するため乱流モデルを適切に選択し適用することは難しく，あるモデルが合わない場合，他のモデルを試すといった試行錯誤が行われる場合も多い．

1.5.2　LES 乱流モデル

LES では格子サイズ以下の小さな渦の影響を表す SGS(Sub-Grid Scale) モデルを導入する．乱流中ではエネルギーカスケードといわれる現象が起きており，流れ場と同程度な大きさの渦から徐々に小さい渦へと運動エネルギーが受け渡され，最終的には最小の渦のスケールで運動エネルギーが熱に変換されている (局所的にはこの逆もあり得る)．SGS 渦粘性モデルは，実効的な粘性を大きくすることによって，最終的に熱に変換されるべき量の運動エネルギーを格子スケールの渦の運動で散逸させる．

標準 Smagorinsky モデルは GS(Grid Scale) と SGS 間のエネルギーの輸送は常に散逸的であるため，乱流場に局所的に存在する SGS から GS へのエネルギーの逆輸送である Backward cascade を再現する仕組みを持たない．このため局所的なエネルギー散逸の再現性には欠けるものの，唯一のモデル定数である Smagorinsky 定数 (Cs) が適切であれば，エネルギー散逸の総量に関しては妥当な値を予測することが知られている．また，モデル式がシンプルで計算安定性もよいことから近年，工学的な問題にも広く利用されている．Cs には理論値 (Cs=0.173) が存在するが，いくつかの計算例をみるとより低い値に修正することで実験結果とよく合うことが報告されており（例えば [7]），これが普遍的な定数でないことがわかる．

そこで，Germano ら [8] が提案した DSM(Dynamic Smagorinsky Model) および，その改良モデル (例えば [9]) は，Cs を流れ場の状態から自動的に決定し，エネルギーの Backward cascade を再現することも可能である．このため，DSM は各種の流れ場への LES の適用を促進できると期待され，今なお精力的に研究が行われている．しかし，標準 Smagorinsky モデルには無いフィルタリングや多くの計算が必要となるので，標準 Smagorinsky モデルに比べて計算負荷は大きい．また，Cs が負の値をとることは数値計算には不安定に作用するので，安定化のために何らかの工夫が必要になる．

以上，LES における代表的な 2 種類のモデルについて述べたが，標準 Smagorinsky モデルの安定性と計算負荷が少ない点は魅力的である．また唯一の定数値 Cs についても，過去の研究結果を参考に決めることは難しくない．

1.5.3　Smagorinsky モデル

標準 Smagorinsky モデルの離散化手法については，既に多くの研究・文献 (例えば [7, 8]) が存在する．このため，ここでは解法の概略をのみを述べる．LES の基礎方程式には，式 (1.59)，式 (1.58) に示すフィルタリング操作を施した GS での Navier-Stokes 方程式と流体の連続の式を用いる [6, 10].

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.58}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\tau_{ij} + 2\nu \overline{D}_{ij}\right) \tag{1.59}$$

$\overline{D}_{ij}$ はひずみ速度テンソルの GS 成分で，

$$\overline{D}_{ij} = \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.60}$$

ここで τ_{ij} は GS で粗視化した場合の残余の応力で，$\overline{p}$ および $\overline{u}_i$ はフィルタ化を施した GS の圧力と速度成分を表している．SGS 応力 τ_{ij} は渦粘性近似を用いてモデル化される．

$$\tau_{ij} = -2\nu_e \overline{D}_{ij} \tag{1.61}$$

Smagorinsky モデルは SGS の乱流エネルギーの収支において生成と散逸が局所平衡の状態にあると仮定しており，ν_e[*4] を以下のようにモデル化する．

$$\nu_e = \left(Cs\overline{\Delta}\right)^2 \left|\overline{D}\right| \tag{1.62}$$

ここで Cs, Δ_i は，それぞれ Smagorinsky 定数および i 方向の格子幅を表している．乱流統計理論からコルモゴロフのスペクトルを仮定し，$Cs = 0.173$ の無次元定数を得た．

フィルタ代表長さは，各軸方向の格子幅の平均値とする．

$$\overline{\Delta} = (\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^{\frac{1}{3}} \tag{1.63}$$

ひずみ速度テンソルの大きさは，

$$\left|\overline{D}\right| = \sqrt{2\overline{D}_{ij}\,\overline{D}_{ij}} \tag{1.64}$$

$$\left|\overline{D}\right|^2 = 2\left(D_{xx}^2 + D_{yy}^2 + D_{zz}^2\right) + 4\left(\left[\overline{D}_{xy}^{xy}\right]^2 + \left[\overline{D}_{yz}^{yz}\right]^2 + \left[\overline{D}_{zx}^{zx}\right]^2\right) \tag{1.65}$$

Smagorinsky モデルでは，GS 成分に速度勾配があれば必ず $\left|\overline{D}\right| > 0$ となるので，式 (1.62) より SGS 渦粘性係数は正の値となり，そこでは散逸性を示す．例えば，層流域で速度勾配があるような部分では $\tau_{ij} = 0$ となるはずであるが，そ

*4 渦粘性モデルでは，係数は常に正（散逸）であり，エネルギーの逆カスケードは表現できない．