Digital Signatures
Outlook

- Definitions
- Digital Signatures with Appendix
- Digital Signatures with Message Recovery
- RSA Signature Algorithm
- Rabin Signature Algorithm
- ElGamal Signature Algorithm
- Digital Signatures and Cryptocurrencies
- Attacks on Digital Signatures

Signatures Digitales: Définitions

- *Signature digitale*: chaîne de données permettant d'associer un message (sous forme digitale) à une entité d'origine.
- *Schéma de signature digitale*: algorithme de génération + algorithme de vérification.
- *Procédé de signature*: formatage du message + algorithme de génération de signature
- *Procédé de vérification*: algorithme de vérification + (reconstruction du message).
- Classification des signatures digitales:
    - *Signatures digitales avec appendice* qui nécessitent la présence du message original pour vérifier la validité de la signature. Ce sont les plus couramment utilisées. Exemples: *ElGamal*, *DSS*.
    - *Signatures digitales avec reconstitution du message* qui offrent, en plus, la possibilité de reconstruire le message à partir de la signature. Exemples: *RSA*, *Rabin*.
- Les signatures digitales sont pour la plupart basées sur la crypto asymétrique du fait que la notion clé partagée n'est pas adaptée aux besoins d'identifier une entité de façon explicite.
- Des engagements semblables à ceux obtenus par une signature à clé publique (comme la non-répudiation d'origine) peuvent cependant être obtenus avec la technologie symétrique et des tierces de confiance (*Trusted Third Parties* ou *TTP*). Ces méthodes sont nommées: *arbitrated digital signatures*.

Signatures Digitales avec Appendice: Cadre Formel

- On admet que chaque entité a une clé privée pour signer des messages et une copie authentique des clés publiques des correspondants.

Notation: M: Espace de messages

M_h: $m_h = H(m)$ avec $m \in M$, $m_h \in M_h$ et H une *hash function*

S: Espace des valeurs pouvant être obtenues par un procédé de signature

Description:

Chaque entité définit une appl. injective $S_A : M_h \rightarrow S$; (ie. la *signature*)

L'application S_A donne lieu à une application V_A:

$$V_A: M_h \times S \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$$; (ie. la *vérification*)

t.q. $\forall\, m_h \in M_h$, $s \in S$, on a:

$$V_A(m_h, s) = \text{vrai si } S_A(m_h) = s \text{ et}$$
$$V_A(m_h, s) = \text{faux sinon}$$

Les opérations S_A nécessitent la clé *privée* de A alors que les opérations V_A utilisent la clé *publique* de A.

- Quelques propriétés simples:
  - Les opérations S_A et V_A doivent être faciles à calculer (en ayant les clés corresp.)
  - Il est impossible (calculatoirement) pour une entité n'ayant pas la clé privée de A de trouver un m' et un s' avec $m' \in M$ et $s' \in S$ t.q. $V_A(m'_h, s') = \text{vrai}$ avec $m'_h = H(m')$.

SD avec reconstitution du message: Cadre Formel

Notation: en plus des définitions précédentes, on a:

M_s: L'espace des éléments sur lesquels peut s'appliquer une signature.

R: Une application injective: $M \rightarrow M_s$, appelée *fonction de redondance.* Elle doit être *inversible* et *publique.*

M_R: $M_R = Im(R)$

Description:

Chaque entité définit une appl. injective $S_A : M_S \rightarrow S$; (ie. la *signature*)

L'application S_A donne lieu à une application V_A: ;(ie. la *vérification*)

$$V_A : S \rightarrow M_s \text{ , t.q. } V_A \text{ o } S_A = \text{Identité sur } M_s$$

A noter que la vérification s'effectue sans la clé privée de A

Génération de signature:

(1) Calculer $m_R = R(m)$ et $s = S_A(m_R)$

(2) Rendre publique s en tant que signature de A sur m. Ceci permet aux autres entités de vérifier la signature et reconstituer m.

Vérification:

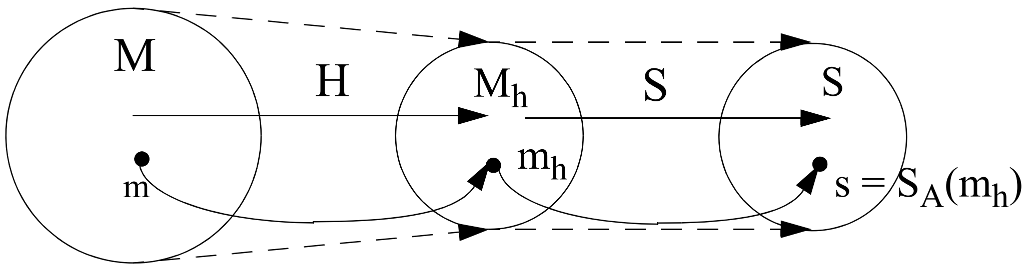
(1) Calculer $m_R = V_A(s)$ (avec la clé publique de A)

(2) Vérifier que $m_R \in M_R$ (sinon rejeter la signature)

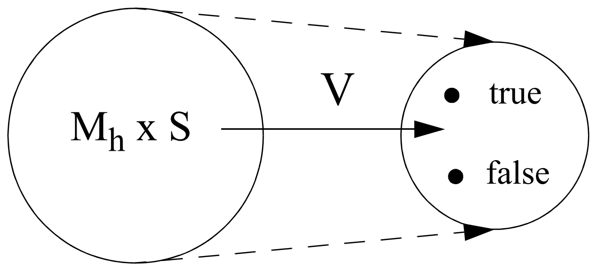
(3) Reconstituer m en calculant: $R^{-1}(m_R)$

Signatures Digitales: Appendice et Reconstitution

Signature Digitale avec appendice

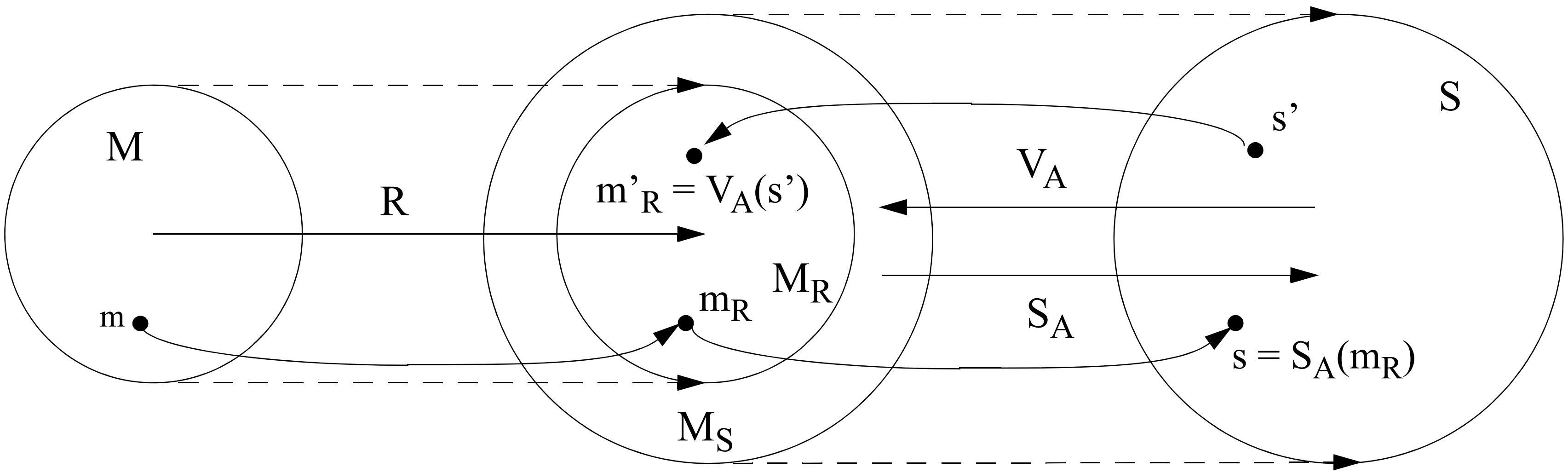


Génération



Vérification

Signature Digitale avec réconstitution du message



SD avec reconstitution du message: Propriétés

- Propriétés:
  - Les opérations S_A et V_A doivent être faciles à calculer (en ayant les clés corresp.)
  - Il est impossible (calculatoirement) pour une entité n'ayant pas la clé privée de A de trouver un $s' \in S$ t.q. $V_A(s') \in M_R$
- Remarques sur la fonction de redondance:
  - Le choix d'une fonction de redondance est essentiel pour la sécurité du système.
  - Si $M_R = M_S$ et R et S_A sont des bijections respectivement de M dans M_R et de M_S dans S, alors M et S ont une taille identique et, par conséquent, il est trivial de forger des messages portant la signature de A.
- Exemple de fonction de redondance: soit $M = \{m: m \in \{0,1\}^n\}$ (n taille du message) et $M_S = \{t: t \in \{0,1\}^{2n}\}$. Soit $R : M \rightarrow M_S$ t.q. $R(m) = m \| m$ ($\|$ étant la concaténation de 2 messages). La probabilité de tomber sur un tel message en essayant de forger un message à partir d'une signature est de : $|M_R| / |M_S| = (1/2)^n$, ce qui est négligeable pour des grands messages.
- Attention!: Une fonction de redondance adaptée pour un schéma de signature digitale peut provoquer des failles dans un autre différent !

Procédé de Signature de RSA[1]

Génération des clés

- Chaque entité (**A**) crée une paire de clés (publique et privée) comme suit:
  - **A** choisit la taille du **modulus n** (p.ex. taille (n) = 1024 ou taille (n) = 2048).
  - **A** génère deux nombres premiers **p** et **q** de grande taille (~ n/2).
  - **A** calcule $\mathbf{n := pq}$ et $\mathbf{\Phi(n) = (p-1)(q-1)}$.
  - **A** génère l'exposant de vérification **e**, avec $\mathbf{1 < e < \Phi(n)}$ t.q. $\mathbf{pgcd\,(e, \Phi(n)) = 1}$.
  - **A** calcule l'exposant de signature **d**, t.q.: $\mathbf{ed \equiv 1 \bmod \Phi(n)}$ avec l'algorithme d'Euclide étendu ou avec l'algorithme *fast exponentiation* (page 95).
  - Le couple **(n,e)** est la **clé de publique de A**; **d** est la **clé privée de A**.

Signature

- **A** calcule la fonction de redondance du message **m**: $\mathbf{m_R := R(m)}$.
- **A** calcule la signature: $\mathbf{s := m_R^{\,d} \bmod n}$ et envoie **s** à **B**.

Vérification

- L'entité **B** obtient **(n,e),** la clé publique authentique de **A**.
- B calcule $\mathbf{m'_R = s^e \bmod n}$, vérifie $\mathbf{m'_R} \in \mathbf{M_R}$ et rejette la signature si $\mathbf{m'_R} \notin \mathbf{M_R}$.
- B retrouve le message correctement signé par **A** en calculant: $\mathbf{m = R^{-1}(m'_R)}$.

---

1. *A Method for Obtaining Digital Signatures and Public Key Cryptosystems*. R.Rivest, A.Shamir and L.M. Adleman. Communications of tha ACM 21 (1978), 120-126

Signature RSA: Remarques

- La preuve de fonctionnement est identique à celle du procédé d'encryption (page 100). L'ordre d'exponentiation n'a pas d'influence puisque:

$$\mathbf{ed \equiv de \equiv 1 \bmod \Phi(n)}$$

- Le procédé peut également être utilisé pour produire des signatures avec appendice avec les modifications suivantes:

Signature:

  - A utilise une fonction de hachage **H** et calcule $\mathbf{m_h := H(m)}$.
  - A calcule la signature de m_h: $\mathbf{s := m_h^{\,d} \bmod n}$ et envoie le couple **(m,s) à B.**

Vérification

  - B calcule $\mathbf{m'_h = s^e \bmod n}$ et **H(m)** et vérifie l'égalité $\mathbf{m'_h = H(m)}$.
  - Si l'égalité est vérifiée, **B** accepte la signature **s** de **A** sur le message **M.**

- Le calcul de signature est plus lent que la vérification à cause de différence de taille entre l'exposant **d** (**taille(d)** ≈ **taille(Φ(n)**) et **e**.
- Les risques et attaques mentionnés dans le procédé d'encryption (page 103) s'appliquent également pour la signature.
- Il convient de différencier les paires de clés d'encryption et de signature puisqu'elles nécessitent des politiques de stockage, sauvegarde et mise à jour distinctes.

Signatures “Aveugles” (*Blind Signatures*)

- Schéma inventé par Chaum ([Chau82][1]).
- Idée: **A** envoie une information à **B** pour signature. **B** retourne à **A** l’information signée. A partir de cette signature, **A** peut calculer la signature de **B** sur un autre message choisi à priori par **A**. Ceci permet à **A** d’avoir une signature de **B** sur un message que **B** n’a jamais vu (d’où le nom de signature aveugle...)
- En fait il s’agit d’une faille basée sur la propriété multiplicative de RSA (page 103) qui a été exploitée pour en faire un nouveau procédé de signature.
- Algorithme: Soit $\mathbf{S_B}$ la signature de RSA de **B** avec **(n,e)** et **d**, resp. les clés publiques et privées de **B**. Soit **k** un entier fixé avec **pgcd(n,k) = 1**:

  $\mathbf{f: Z_n \to Z_n}$ avec $\mathbf{f(m) = m \cdot k^e \bmod n}$; *blinding function*

  $\mathbf{g: Z_n \to Z_n}$ avec $\mathbf{g(m) = k^{-1} \cdot m \bmod n}$; *unblinding function*

  ce qui donne:

  $$\mathbf{g(S_B(f(m)) = g(S_B(mk^e \bmod n)) = g\,(m^d k \bmod n) = m^d \bmod n = S_B(m) \qquad (*)}$$

- Protocole:

  $\mathbf{A \to B: m' = f(m)}$

  $\mathbf{A \leftarrow B: s' = S_B(m')}$

  A calcule **g(s’)** et obtient la signature souhaitée en utilisant **(*).**

1.[Chau82]: Chaum, D. *Blind Signatures for Untraceable Payments*. Crypto’82

Procédé de Signature de Rabin[1]

Génération des clés

- Chaque entité (**A**) crée une paire de clés (publique et privée) comme suit:
  - **A** génère deux nombres premiers aléatoires **p** et **q** de grande taille (*len* (pq) ≥ 1024).
  - **A** calcule **n := pq**.
  - La clé publique de **A** est **n** la clé privée de **A** est **(p,q)**.

Signature

- **A** calcule la fonction de redondance du message **m**: $\mathbf{m_R := R(m)}$.
- **A** utilise sa clé privée pour calculer la signature: $\mathbf{s := m_R^{1/2} \bmod n}$ en utilisant des algortihmes efficaces pour calculer des racines carrées **mod p** et **mod q.**
- **A** envoie **s** à **B** (**s** est **une des 4** racines carrées obtenues).

Vérification

- L'entité **B** obtient **n,** la clé publique authentique de **A**.
- B calcule $\mathbf{m'_R = s^2 \bmod n}$, vérifie $\mathbf{m'_R} \in \mathbf{M_R}$ et rejette la signature si $\mathbf{m'_R} \notin \mathbf{M_R}$.
- B retrouve le message correctement signé par **A** en calculant: $\mathbf{m = R^{-1}(m'_R)}$.

1. *Digitalized Signatures and Public Key Functions as Intractable as Factorization.* M.O.Rabin. MIT/LCS/TR 212. MIT Laboratory for Computer Science 1979.

Procédé de Signature d'ElGamal[1]

Génération des clés

- Chaque entité (**A**) crée une paire de clés (publique et privée) comme suit:
  - **A** génère un nombre premier **p** (**len(p)** $\geq$ 1024 **bits**) et un générateur α de $\mathbf{Z_p}^*$.
  - **A** génère un nombre aléatoire **a**, t.q. $\mathbf{1 \leq a \leq p-2}$ et calcule $\mathbf{y := \alpha^a \bmod p}$.
  - La clé publique de **A** est $(\mathbf{p}, \alpha, \mathbf{y})$, la clé privée de **A** est **a**.

Signature

- **A** utilise une fonction de hachage **H** et calcule $\mathbf{m_h := H(m)}$.
- **A** génère un nombre aléatoire $\mathbf{k}$ $(\mathbf{1 \leq k \leq p-2}$ et $\mathbf{pgcd(k,p-1) = 1})$ et calcule $\mathbf{k^{-1} \bmod (p-1)}$
- **A** calcule $\mathbf{r := \alpha^k \bmod p}$ et ensuite $\mathbf{s := k^{-1} (m_h - ar) \bmod (p-1)}$
- La signature de **A** sur le message **m** est le couple **(r,s)**.

Vérification

- L'entité **B** obtient $(\mathbf{p}, \alpha, \alpha^{\mathbf{a}} \mathbf{\bmod p})$, la clé publique authentique de **A**.
- **B** vérifie que $\mathbf{1 \leq r \leq p-2}$, sinon rejette la signature.
- **B** calcule $\mathbf{v_1 := y^r r^s \bmod p}$.
- **B** calcule **H(m)** et $\mathbf{v_2 := \alpha^{H(m)} \bmod p}$
- **B** accepte la signature ssi. $\mathbf{v_1 = v_2}$.

---

1. *A Public Key Cryptosystem and a Signature Scheme Based on Discrete Logaithms*. T. ElGamal. Advances in Cryptology-Proceedings of CRYPTO 84 (LNCS 196), 10-18, 1985.

Signature ElGamal: Remarques

- Preuve que le schéma fonctionne: Si $\mathbf{s \equiv k^{-1} (m_h - ar) \bmod (p\text{-}1)}$, **on a que:**

  $$\mathbf{m_h \equiv (ar + ks) \bmod (p\text{-}1)} \text{ et}$$

  $$\mathbf{v_2 = \alpha^{H(m)} \bmod p}$$

  si, comme on souhaite montrer $\mathbf{m_h = H(m)}$, en réduisant les exposants **mod (p-1)** (page 93), on peur réécrire $\mathbf{v_2}$:

  $$\mathbf{v_2 \equiv \alpha^{ar+ks} \bmod p}$$

  D'autre part:

  $$\mathbf{v_1 = y^r\, r^s \equiv \alpha^{ar}\, \alpha^{ks} \equiv \alpha^{ar+ks} \bmod p} \qquad \textbf{c.q.f.d.}$$

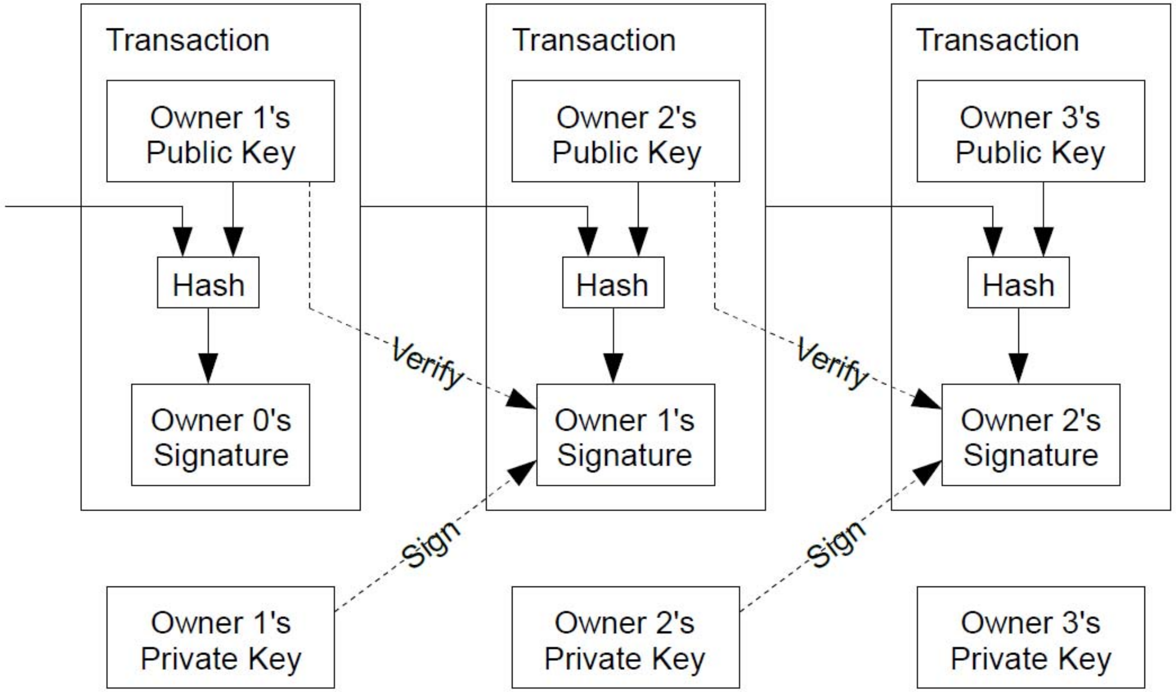
- Par construction, le schéma d'ElGamal fonctionne uniquement avec appendice (résultat de l'application d'une fonction de hachage). Le schéma de Nyberg-Rueppel [1] introduit une variation permettant la reconstitution du message.
- Le *Digital Signature Algorithm* (*DSA*), approuvé par le *US National Institute of Standards and Technology* est devenu le standard de signature le plus corammment utilisé. Il est construit sur la base d'un dérivé direct du schéma d'ElGamal avec la fonction de hachage *SHA-1* (page 139).

---

1. *Message Recovery for Signature Schemes Based on the Discrete Logarithm Problem*. K. Nyberg and R.Rueppel. Designs, Codes and Cryptography, 7 1996, 61-81.

Signatures Digitales: *Crypto-monnaies*

- La plupart des crypto-monnaies se basent sur la cryptographie asymétrique. Le ***bitcoin*** p.ex. utilise des signatures digitales pour authentifier ses transactions
- La dépense ou la transmission de bitcoins nécessite la signature avec la clé privée du détenteur (qui était à son tour le destinataire de la transaction précédente):



Source Image: Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. Satoshi Nakamoto

- *Bitcoin* et *Ethereum* utilisent l'algorithme **ECDSA** (*Elliptic Curve Digital Signature Algorithm*) dérivé de algorithme de signature de ElGamal sur les courbes elliptiques dont la sécurité repose sur *ECDLP* (page 110).

Signatures Digitales: Schéma Récapitulatif[1]

Classe	Schéma	Message Recovery	Problème de base
Signatures Classiques	RSA	oui	RSAP
	Rabin	oui	SQROOTP
	ElGamal	non	DLP
	DSS	non	DLP
One-time Signatures	Lamport	non	dépend de la OWF
	Bos-Chaum	non	dépend de la OWF
Undeniable Signatures	Chaum-van Antwerpen	non	DLP
Fail-Stop Signatures	van Heyst-Pedersen	non	DLP
Blind Signatures	Chaum	oui	RSAP

1. Le fonctionnement des procédés de signature *One-time*, *Undeniable* et *Fail-Stop* peut être consulté dans [Men97].

Types d'attaques pour les SD

- Critères pour "casser" un schéma de signature digitale:
  - *Total Break*: Calculer la clé privé du signataire ou un algorithme efficace (polynomial) pour générer des signatures.
  - *Falsification sélective* (*selective forgery*). L'adversaire est capable de générer une signature valide pour un message (ou une classe de messages) fixé.
  - *Falsification existentielle* (*existential forgery*). L'adversaire est capable de forger une signature pour (au moins) un message (dont il n'a pas le contrôle).
- Attaques de base:
  - Attaques *key-only*: L'adversaire a seulement connaissance de la clé publique du signataire.
  - Attaques basées sur les messages: L'adversaire a accès à des signatures correspondantes à des:
    - *known-messages*
    - *chosen-messages*
    - *adaptive chosen-messages*

  Equivalents à des attaques *x-ciphertext* mais avec des messages !