

# コンピュータグラフィックス論

## －モデリング(1)－

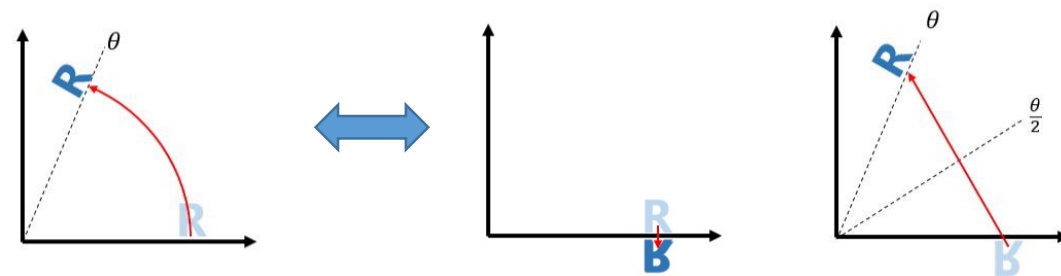
2018年4月19日

高山 健志

# クォータニオンについての補足説明

# クォータニオンの直感的な説明 (概要)

1. あらゆる回転操作は、偶数回の反転操作に分解できる



2. クォータニオンを使うと、3Dの反転操作を簡潔に記述できる

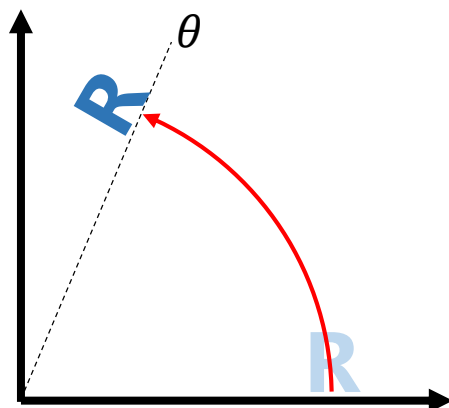
$$R_{\vec{f}}(\vec{x}) = -\vec{f} \vec{x} \vec{f}^{-1}$$

3. 回転操作と等価な反転操作に相当するクォータニオンを合成すると、公式の形が出てくる

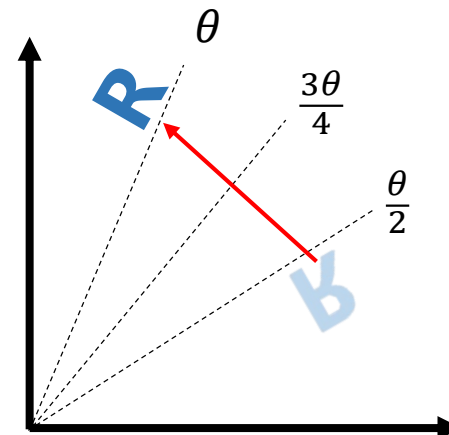
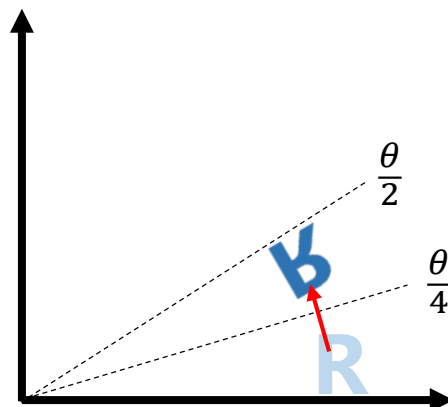
$$R_{\vec{g}}(R_{\vec{f}}(\vec{x})) = \left(\cos \frac{\theta}{2} + \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2}\right) \vec{x} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

# あらゆる回転は、偶数回の反転に分解できる

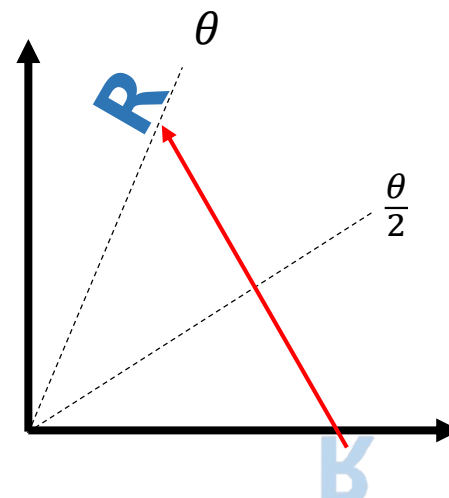
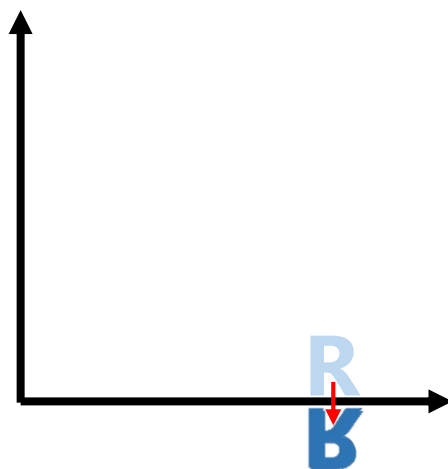
- 数学的に証明されている
  - 任意次元の空間に対して成り立つ
- もちろん、一意ではない



方法その1



方法その2



# クォータニオン (四元数) のおさらい

- 複素数：実部と虚部のペア

$$a + b \mathbf{i}$$

- 四元数：スカラーとベクトルのペア

$$a + \vec{v}$$

- 四元数の積の定義：

$$(a_1 + \vec{v}_1)(a_2 + \vec{v}_2) := \overbrace{a_1 a_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}^{\text{スカラー部}} + \overbrace{a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2}^{\text{ベクトル部}}$$

- 純粋なベクトルも、四元数と見なせば積を取れる：

$$\vec{v}_1 \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

- 特筆すべき性質：
  - (後で使う)

$$\vec{v} \vec{v} = -\|\vec{v}\|^2$$

$\vec{v} \times \vec{v}$  は必ずゼロ

$$\vec{v}^{-1} = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

右辺に  $\vec{v}$  を掛けると1になる

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \text{ の場合、 } \vec{v} \vec{w} = -\vec{w} \vec{v}$$

$$\vec{v} \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{w} \vec{v}$$

# クォータニオンを使った反転の表現

- 原点を通りベクトル  $\vec{f}$  に直交する面に関して、点  $\vec{x}$  を反転させる式：

$$R_{\vec{f}}(\vec{x}) := -\vec{f} \vec{x} \vec{f}^{-1}$$

- 反転の性質を満たすことを確認：

- 線形性：

$$R_{\vec{f}}(a \vec{x} + b \vec{y}) = a R_{\vec{f}}(\vec{x}) + b R_{\vec{f}}(\vec{y})$$

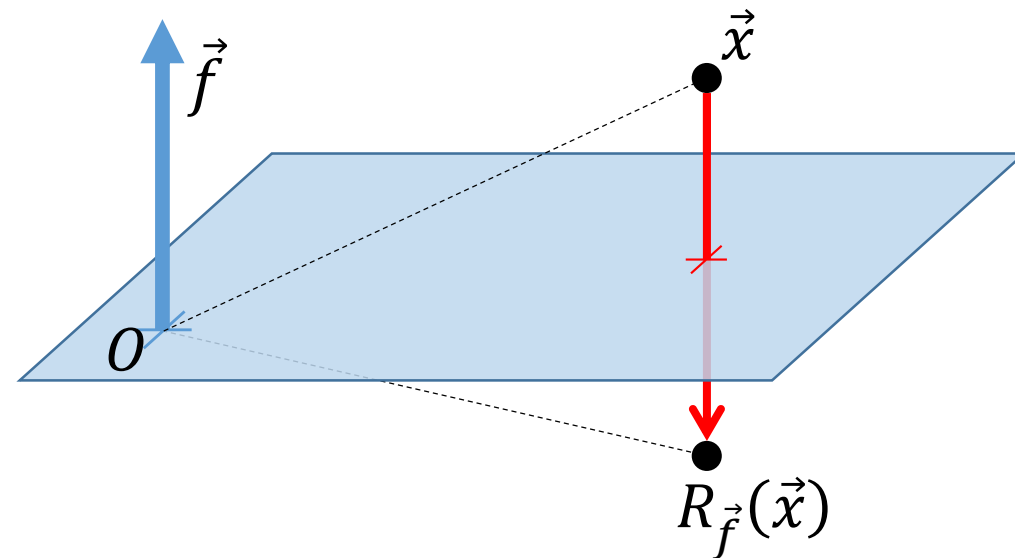
- $\vec{f}$  は  $-\vec{f}$  へ写像される：

$$R_{\vec{f}}(\vec{f}) = -\vec{f} \vec{f} \vec{f}^{-1} = -\vec{f}$$

- 点  $\vec{x}$  が  $\vec{x} \cdot \vec{f} = 0$  を満たす、つまり平面上にあるとき、 $\vec{x}$  は不変：

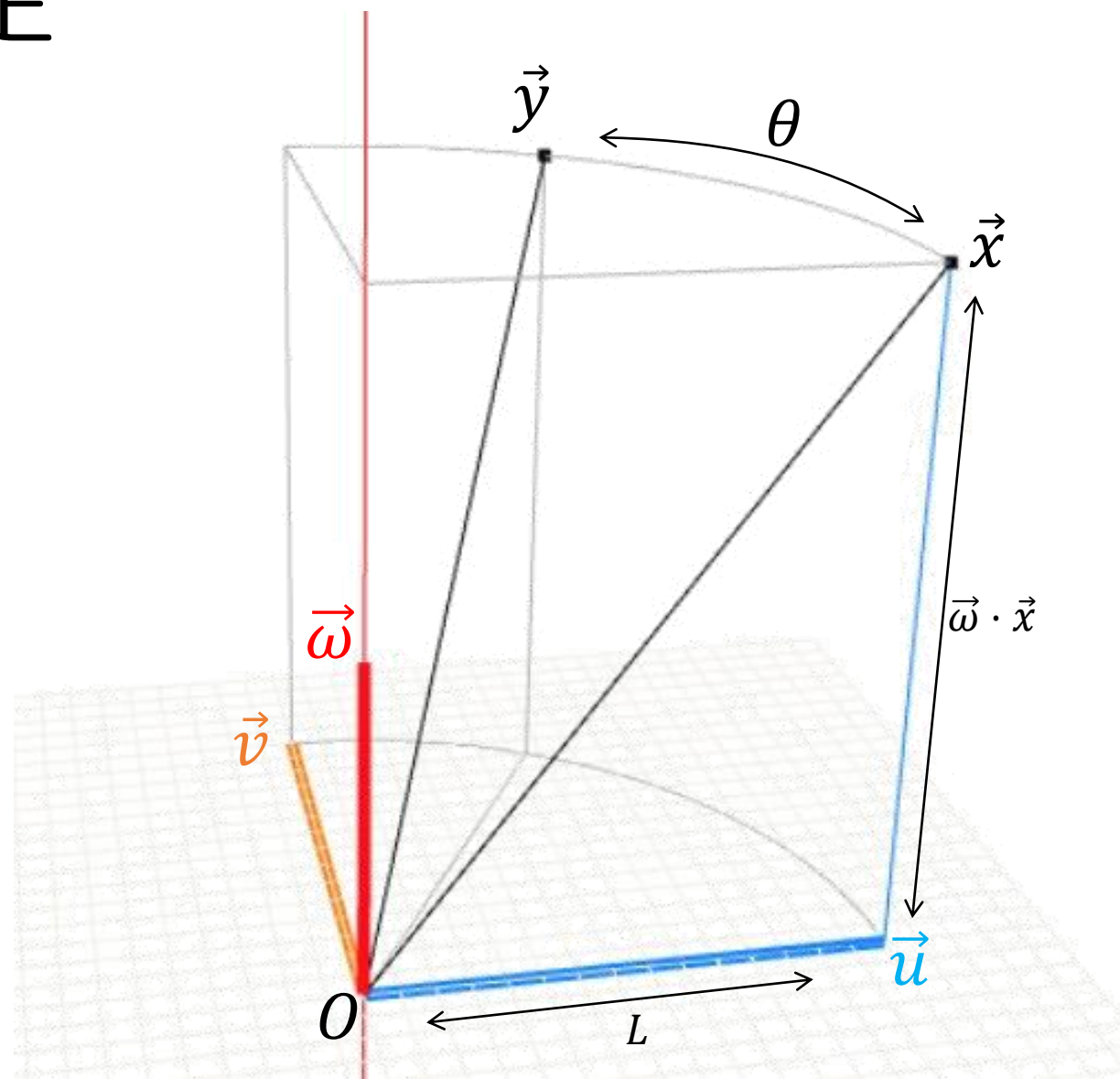
$$R_{\vec{f}}(\vec{x}) = -\vec{f} \vec{x} \vec{f}^{-1} = -(-\vec{x} \vec{f}) \vec{f}^{-1} = \vec{x}$$

$\vec{x} \cdot \vec{f} = 0$  のとき、 $\vec{f} \vec{x} = -\vec{x} \vec{f}$  なので



# 軸周りの回転の問題設定

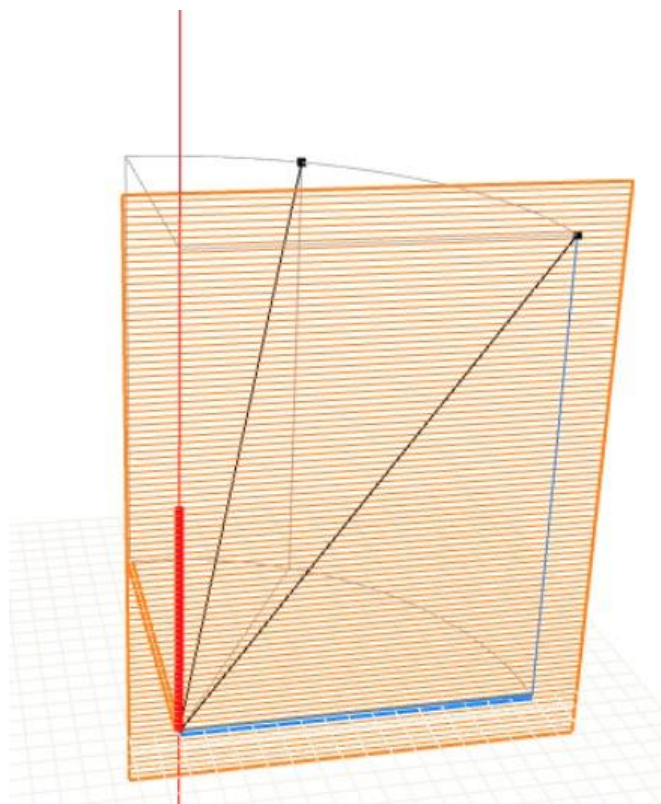
- 回転軸 (単位ベクトル) :  $\vec{\omega}$
- 回転角 :  $\theta$
- 回転前の点 :  $\vec{x}$
- 回転後の点 :  $\vec{y} := R_{\vec{\omega}, \theta}(\vec{x})$
- 局所2D座標系的なものを考える :
  - 「右」ベクトル :  $\vec{u} := \vec{x} - (\vec{\omega} \cdot \vec{x})\vec{\omega}$
  - 「上」ベクトル :  $\vec{v} := \vec{\omega} \times \vec{x}$ 
    - $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$  であることに注意
    - (これを  $L$  とおく)



# 軸周りの回転を、2回の反転に分解する

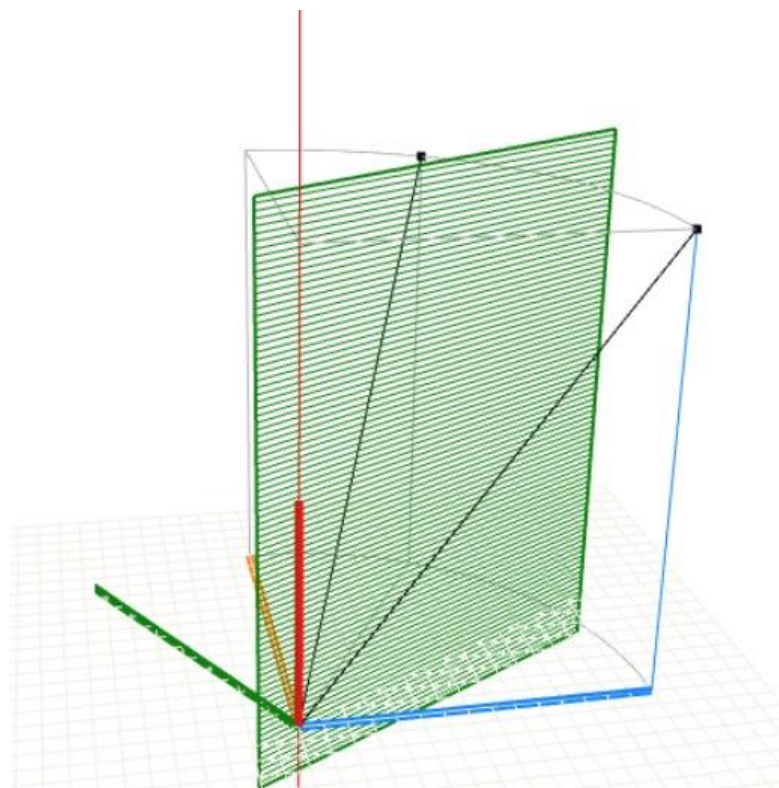
1回目の反転：

$$\vec{f} := \vec{v}$$

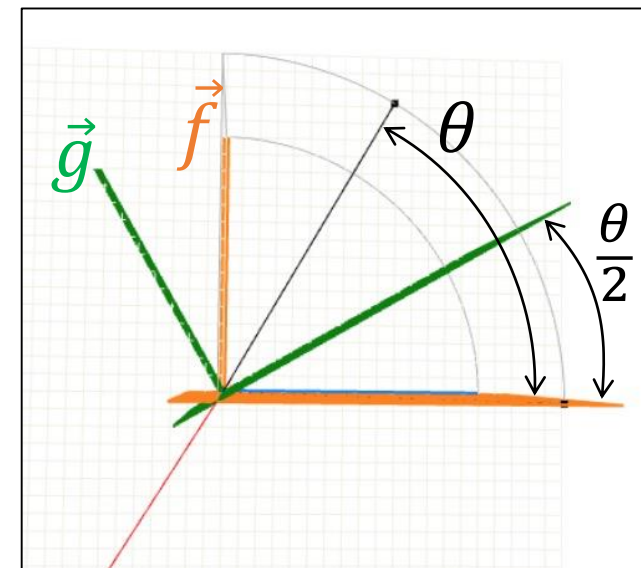


2回目の反転：

$$\vec{g} := -\sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v}$$



上から見た図





# 2回の反転を合成する

$$\vec{f} := \vec{v}$$

$$\vec{g} := -\sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v}$$

- 合成の式：

$$R_{\vec{g}} \left( R_{\vec{f}}(\vec{x}) \right) = R_{\vec{g}}(-\vec{f} \vec{x} \vec{f}^{-1}) = -\vec{g}(-\vec{f} \vec{x} \vec{f}^{-1})\vec{g}^{-1} = (\vec{g} \vec{f}) \vec{x} (\vec{f}^{-1} \vec{g}^{-1})$$

- 左側  $\vec{g} \vec{f}$  について：

$$\vec{g} \cdot \vec{f} = \left( -\sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} = L^2 \cos \frac{\theta}{2}$$

( $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  より)

$$\vec{g} \times \vec{f} = \left( -\sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v} \right) \times \vec{v} = -L^2 \sin \frac{\theta}{2} \vec{\omega}$$

( $\vec{u} \times \vec{v} = L^2 \vec{\omega}$  より)

より、

$$\vec{g} \vec{f} = -\vec{g} \cdot \vec{f} + \vec{g} \times \vec{f} = -L^2 \left( \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

- 右側  $\vec{f}^{-1} \vec{g}^{-1} = \frac{\vec{f} \vec{g}}{L^4}$  についても同様： $\vec{f}^{-1} \vec{g}^{-1} = -L^{-2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right)$

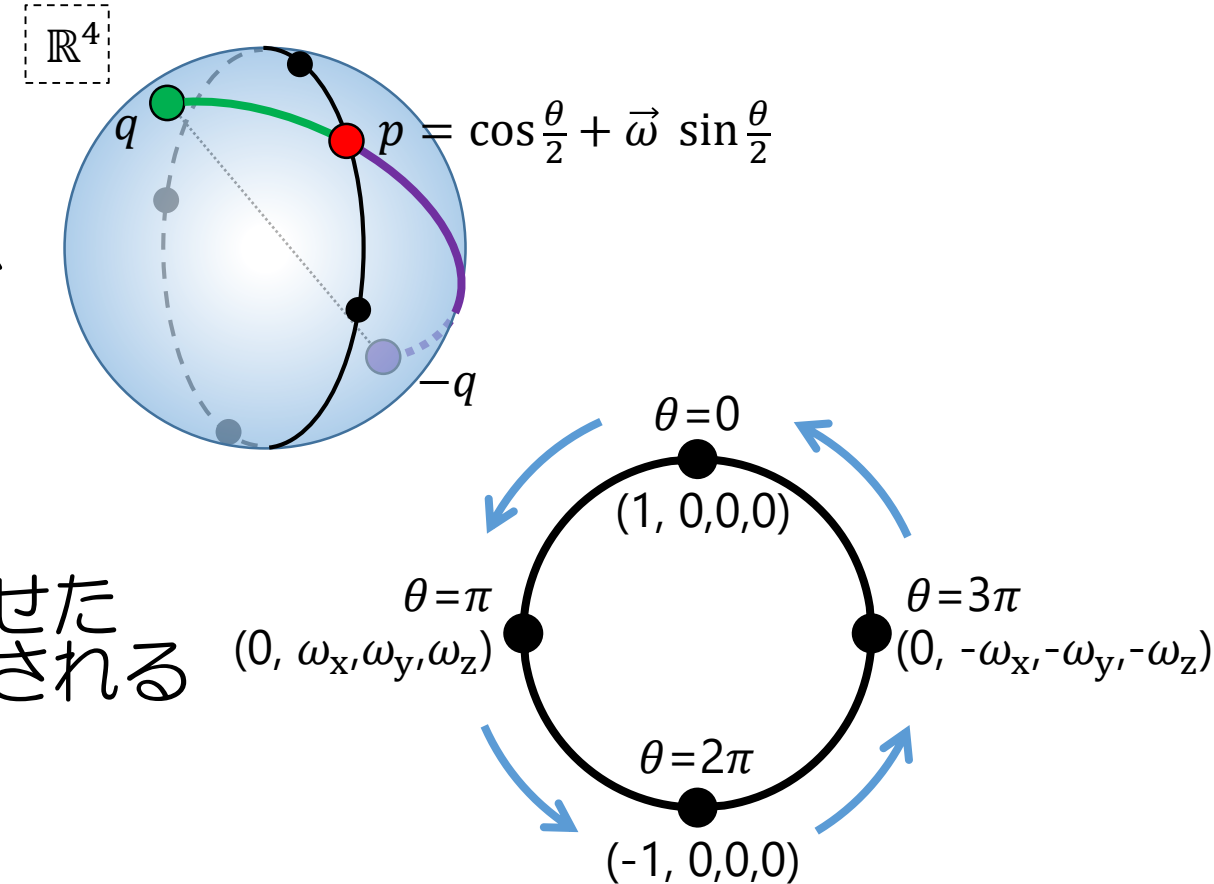
- 以上から、公式が導かれる：

$$R_{\vec{\omega}, \theta}(\vec{x}) = R_{\vec{g}} \left( R_{\vec{f}}(\vec{x}) \right) = \left( -L^2 \left( \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right) \vec{x} \left( -L^{-2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$= \left( \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{x} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \vec{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

# クォータニオンによる姿勢の表現と補間

- 任意の回転 (姿勢) は、単位クォータニオンとして表せる
  - 4D空間の単位超球面 (hypersphere) 上の点
- $\vec{\omega}$  を固定して  $\theta$  を変化させると、4D空間の単位円が得られる
- ある姿勢を、ある軸の周りで一回転させた姿勢は、別のクォータニオンとして表される
  - 一つの姿勢に、二つのクォータニオンが対応する (double cover)
- Hypersphere上の2点  $p, q$  を結ぶ測地線は、姿勢の補間を表す
  - $q$  と  $-q$  のうち、 $p$  と近い方 (4D内積が正となる方) を選ぶべし



# 曲線のモデリング

# パラメトリック曲線

- X座標とY座標がパラメタ  $t$  ( $\doteq$ 時刻) によって決まるもの
  - 例：サイクロイド

$$\begin{aligned}x(t) &= t - \sin t \\y(t) &= 1 - \cos t\end{aligned}$$



- 接線ベクトル： $(x'(t), y'(t))$
- 多項式曲線： $x(t) = \sum_i a_i t^i$

# 3次エルミート曲線

- 両端での値と微分の制約を満たす  
(=エルミート補間) ような、多項式曲線

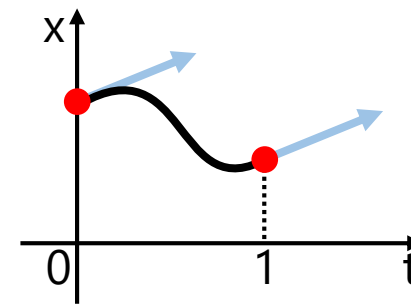
- 制約が4つなので、4自由度が必要

→ 4個の係数 → 3次多項式

- $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
- $x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

- 制約値を代入すれば係数が求まる

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\x(1) &= x_1 \\x'(0) &= x'_0 \\x'(1) &= x'_1\end{aligned}$$



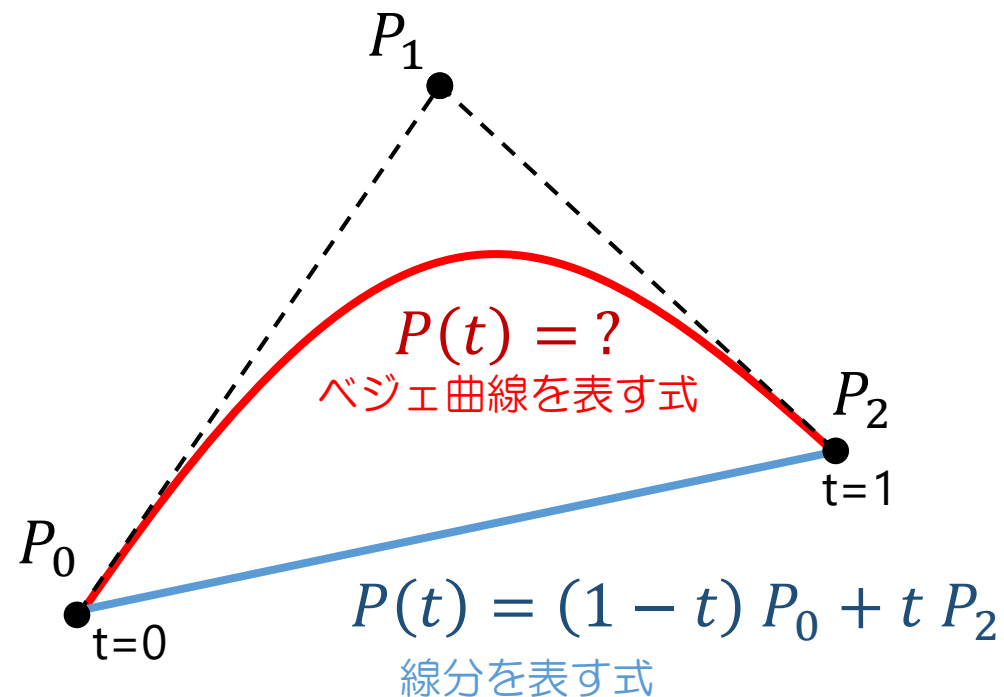
$$\begin{aligned}x(0) &= a_0 &= x_0 \\x(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= x_1 \\x'(0) &= a_1 &= x'_0 \\x'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= x'_1\end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}a_0 &= x_0 \\a_1 &= x'_0 \\a_2 &= -3x_0 + 3x_1 - 2x'_0 - x'_1 \\a_3 &= 2x_0 - 2x_1 + x'_0 + x'_1\end{aligned}$$

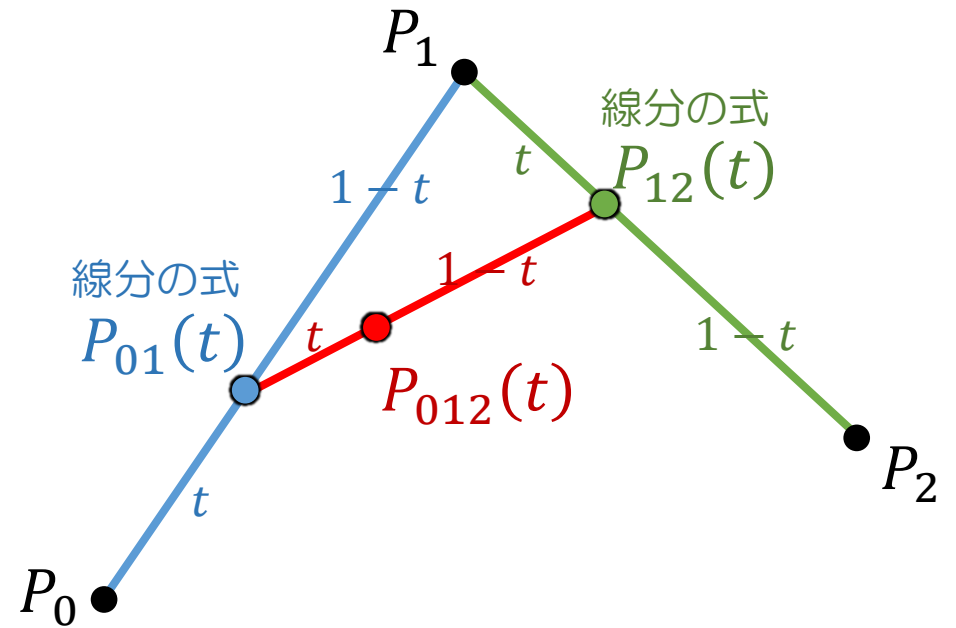
# ベジエ (Bezier[ベズィエ]) 曲線

- 入力：3点 $P_0, P_1, P_2$  (制御点)
  - 任意空間 (2D, 3D) の座標
- 求めたいもの：曲線 $P(t)$ で $P(0) = P_0$   
 $P(1) = P_2$   
を満たしつつ、  
 $P_1$ に“引っ張られる”もの



# ベジエ曲線

- $P_{01}(t) = (1 - t)P_0 + t P_1$
- $P_{12}(t) = (1 - t)P_1 + t P_2$ 
  - $P_{01}(0) = P_0$
  - $P_{12}(1) = P_2$



- アイディア： "補間を補間"  
 $t : 0 \rightarrow 1$  のとき  $P_{01} \rightarrow P_{12}$  となるように線形補間
- $P_{012}(t) = (1 - t)P_{01}(t) + t P_{12}(t)$ 
$$= (1 - t)\{(1 - t)P_0 + t P_1\} + t \{(1 - t)P_1 + t P_2\}$$
$$= (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2 P_2$$

---

2次ベジエ曲線

# ベジエ曲線

- $P_{01}(t) = (1 - t)P_0 + t P_1$
- $P_{12}(t) = (1 - t)P_1 + t P_2$ 
  - $P_{01}(0) = P_0$
  - $P_{12}(1) = P_2$

- アイディア: "補間を補間"

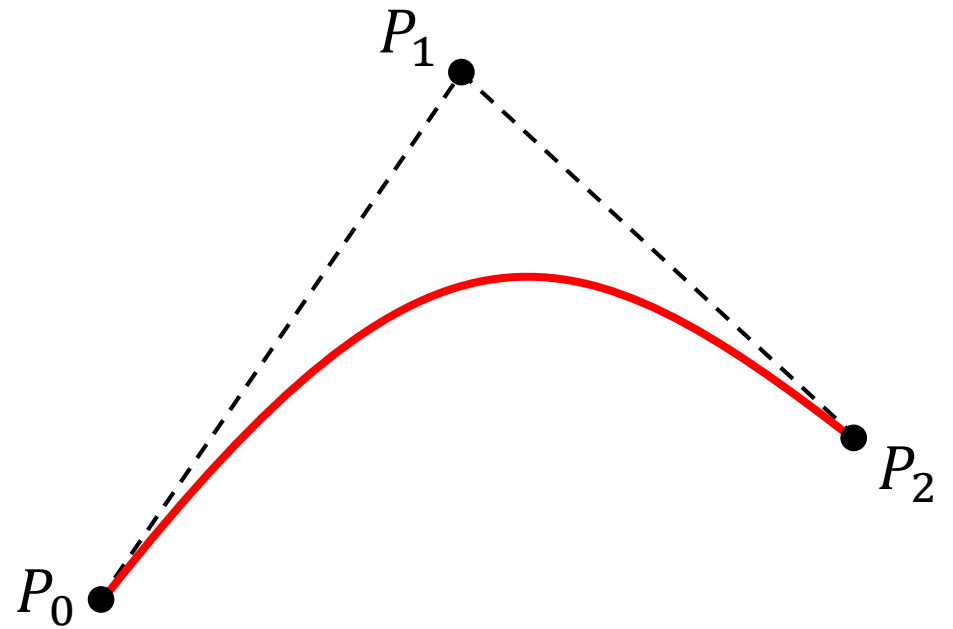
$t : 0 \rightarrow 1$  のとき  $P_{01} \rightarrow P_{12}$  となるように線形補間

- $P_{012}(t) = (1 - t)P_{01}(t) + t P_{12}(t)$

$$= (1 - t)\{(1 - t)P_0 + t P_1\} + t \{(1 - t)P_1 + t P_2\}$$

$$= (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2 P_2$$

2次ベジエ曲線



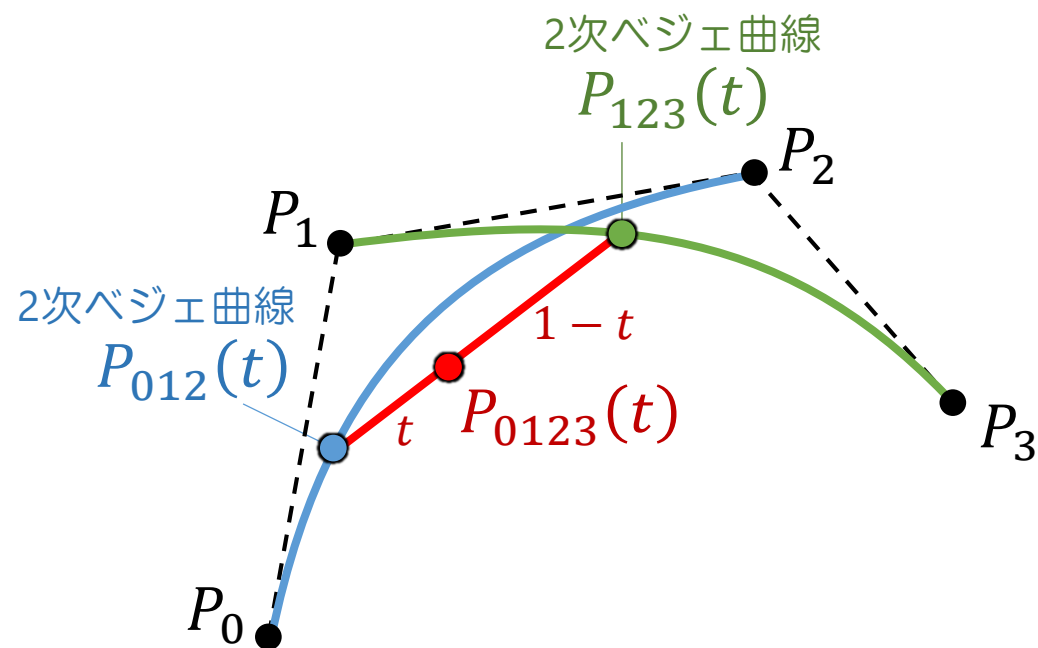


# 3次ベジエ曲線

- 全く同じ考え方を4点 $P_0, P_1, P_2, P_3$ に適用：

$t : 0 \rightarrow 1$  のとき  $P_{012} \rightarrow P_{123}$

となるように線形補間



- $P_{0123}(t) = (1-t)P_{012}(t) + tP_{123}(t)$

$$= (1-t)\{(1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2\} + t\{(1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3\}$$

$$= \underline{(1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3}$$

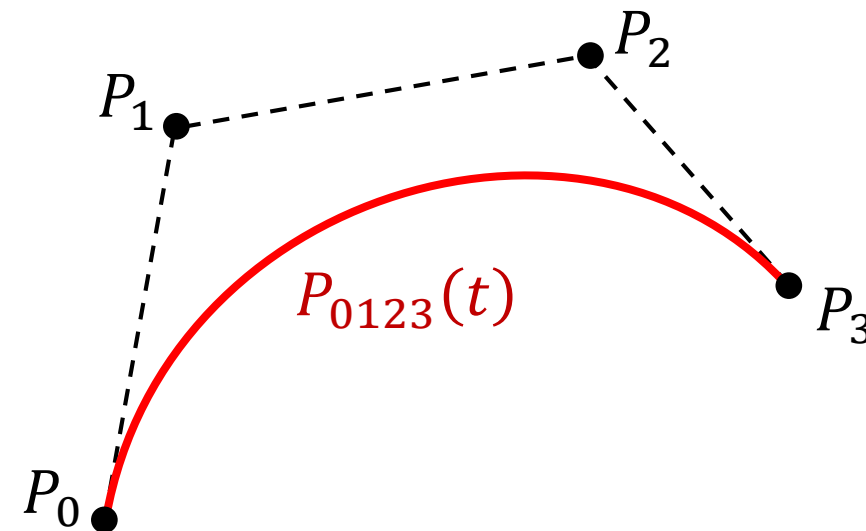
3次ベジエ曲線

# 3次ベジエ曲線

- 全く同じ考え方を4点 $P_0, P_1, P_2, P_3$ に適用：

$t : 0 \rightarrow 1$  のとき  $P_{012} \rightarrow P_{123}$

となるように線形補間



- $P_{0123}(t) = (1 - t)P_{012}(t) + t P_{123}(t)$

$$= (1 - t)\{(1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2 P_2\} + t \{(1 - t)^2 P_1 + 2t(1 - t)P_2 + t^2 P_3\}$$

$$= \underline{(1 - t)^3 P_0 + 3t(1 - t)^2 P_1 + 3t^2(1 - t)P_2 + t^3 P_3}$$

3次ベジエ曲線

- 両端における接線の制御がしやすい→CGで頻繁に使われる

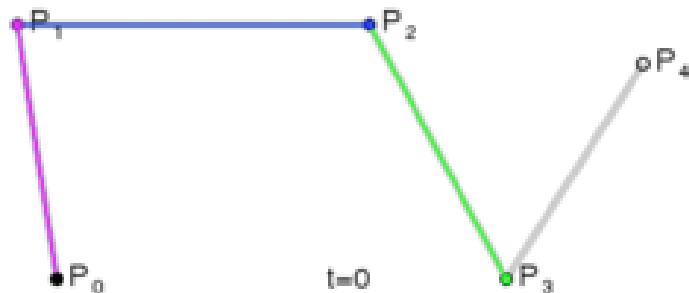
# n次ベジエ曲線

- 入力：n+1個の制御点 $P_0, \dots, P_n$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n {}^nC_i t^i (1-t)^{n-i} P_i$$

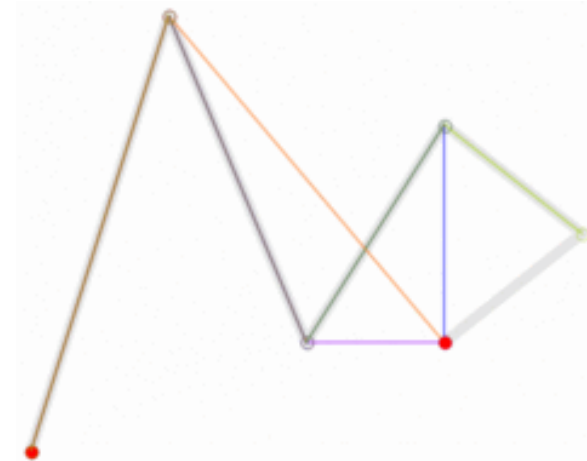
$b_i^n(t)$   
バーンスタイン基底関数

4次ベジエ曲線



$$\begin{aligned} &(1-t)^4 P_0 + \\ &4t(1-t)^3 P_1 + \\ &6t^2(1-t)^2 P_2 + \\ &4t^3(1-t) P_3 + \\ &t^4 P_4 \end{aligned}$$

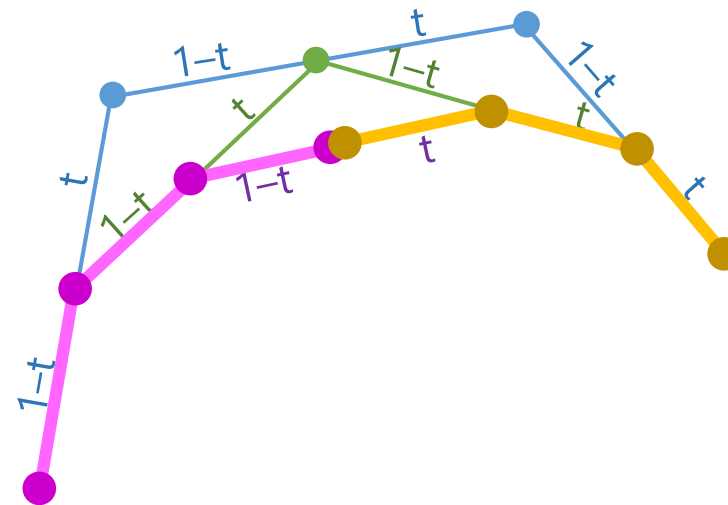
5次ベジエ曲線



$$\begin{aligned} &(1-t)^5 P_0 + \\ &5t(1-t)^4 P_1 + \\ &10t^2(1-t)^3 P_2 + \\ &10t^3(1-t)^2 P_3 + \\ &5t^4(1-t) P_4 + \\ &t^5 P_5 \end{aligned}$$

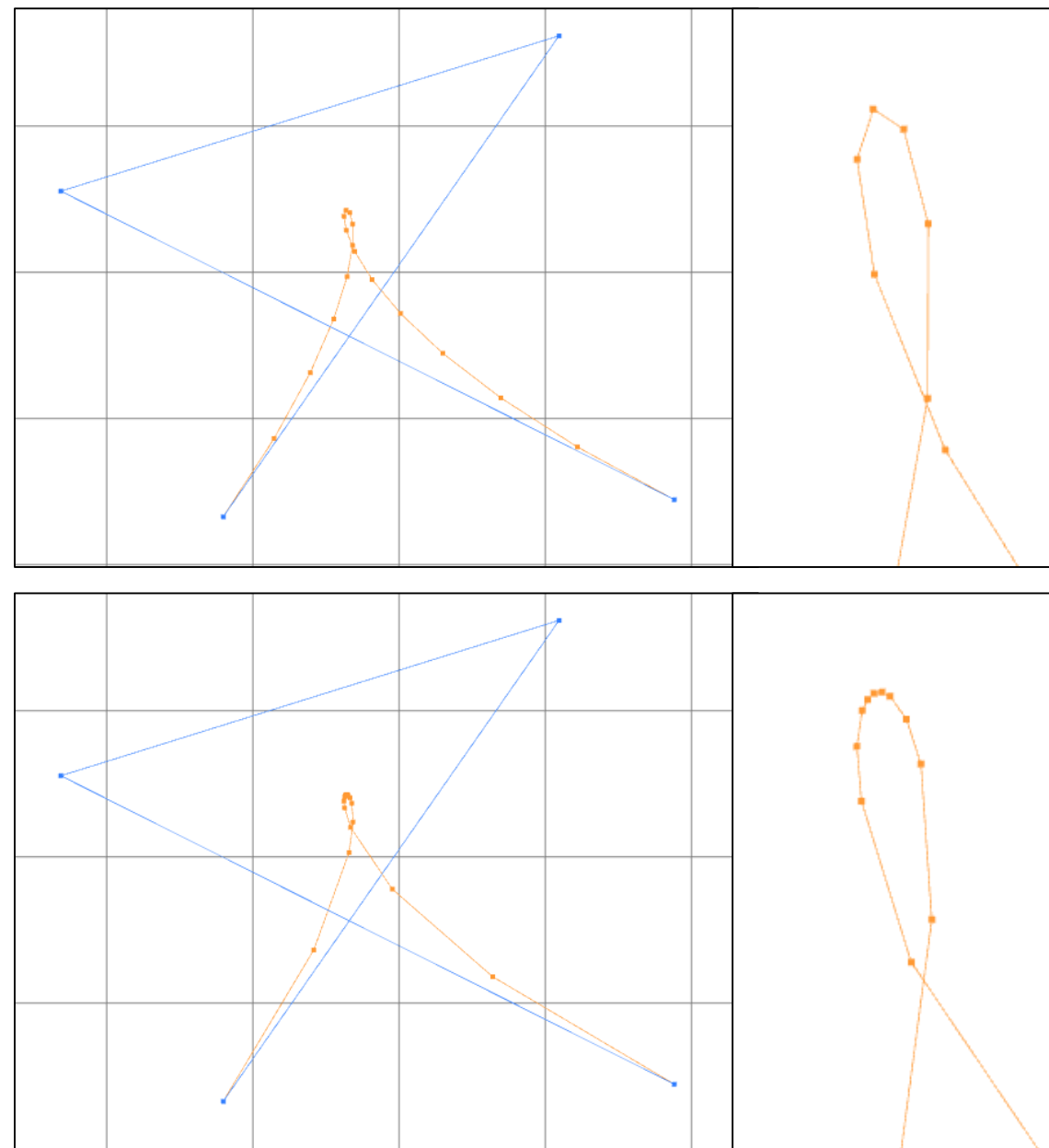
# ベジエ曲線の評価方法

- 方法1：多項式をそのまま評価する
  - 単純で速いが、数值的に不安定になる場合も
- 方法2：ド・カステリヨ [de Casteljau] のアルゴリズム
  - ベジエ曲線の再帰的な定義そのものに倣う
  - 計算手順は増えるが、数值的に安定
  - ベジエ曲線の分割にも使える



# ベジエ曲線の描画方法

- 最終的には折れ線で近似的に描く
  - パラメタ $t$ をどうサンプリングするかが問題
- 方法1：一定間隔でサンプリング
  - 実装が簡単
  - サンプル点の密度が必要十分でなくなる？
- 方法2：適応的なサンプリング
  - 制御点列が直線状でなければde Casteljauの方法で分割する



# さらなる制御法：有理ベジエ曲線

- ベジエ曲線は、制御点の“重み付き平均”と見ることができる

- $$P_{012}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$
$$= \lambda_0(t) P_0 + \lambda_1(t) P_1 + \lambda_2(t) P_2$$

- 重要な性質：**partition of unity**

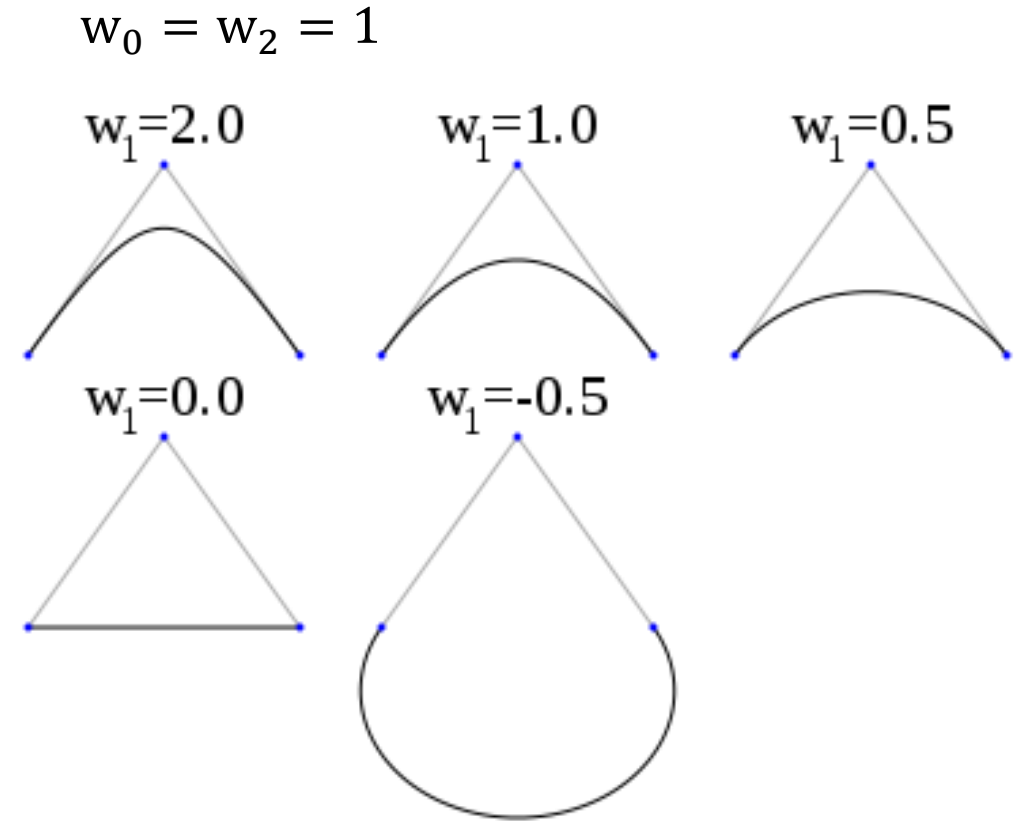
$$\lambda_0(t) + \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 1 \quad \forall t$$

- 各制御点の重み $\lambda_i(t)$ に任意係数 $w_i$ を掛ける：

$$\xi_i(t) = w_i \lambda_i(t)$$

- 正規化して新しい重みを得る：

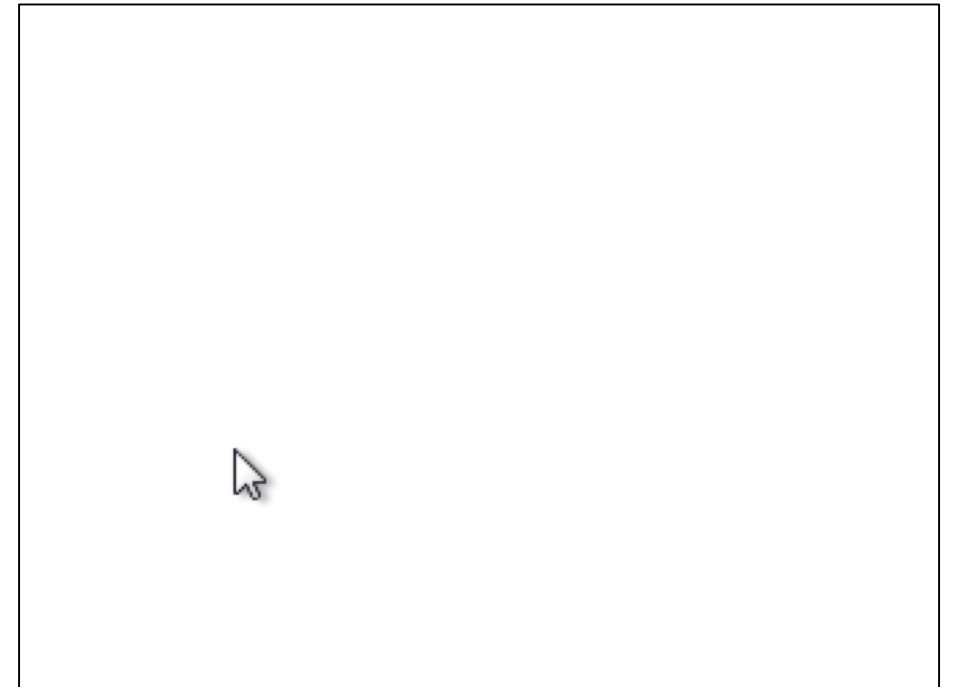
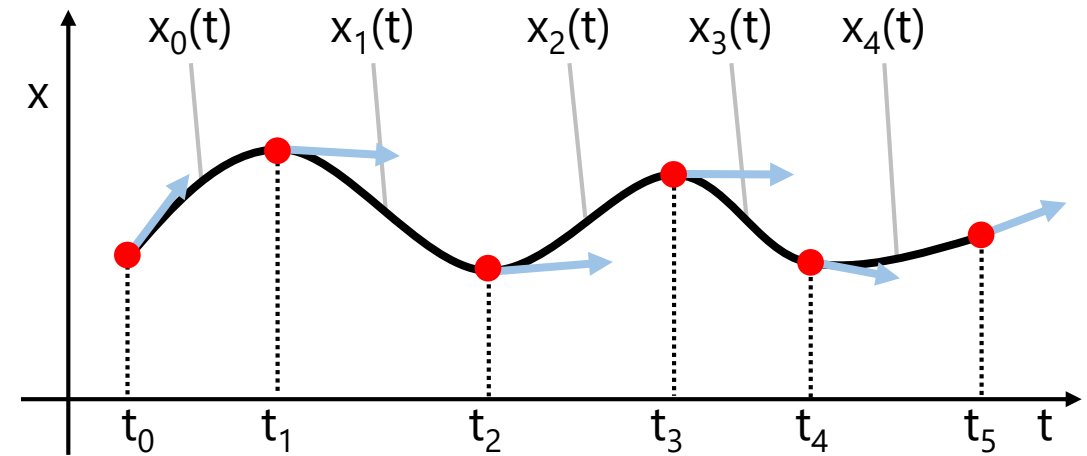
$$\lambda'_i(t) = \frac{\xi_i(t)}{\sum_j \xi_j(t)}$$



多項式曲線ではない → 円弧なども表現可能

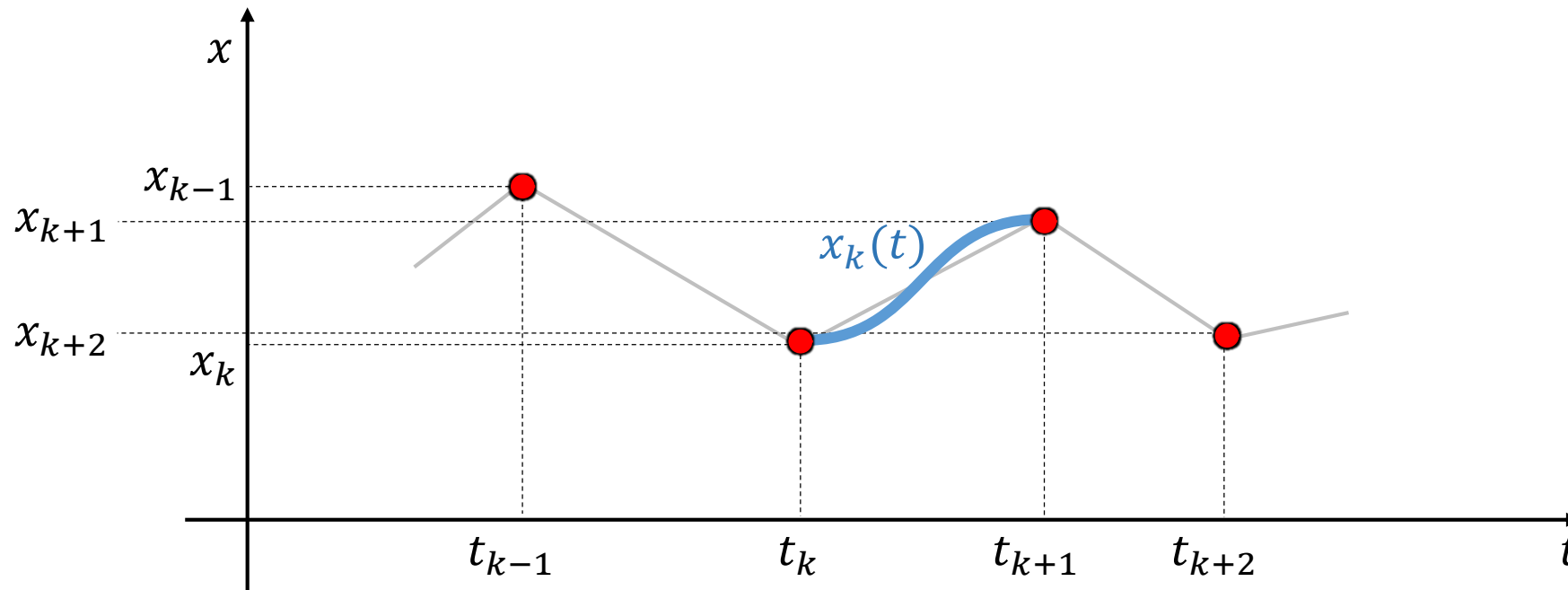
# 3次スプライン

- 複数の3次曲線を滑らかに繋げたもの
  - 区分的多項式
  - 区分の境目で値と微分値が共通 ( $C^1$ 連続)
- パラメタ範囲は  $[0, 1]$  とは限らない
  - ただし  $t_k < t_{k+1}$
- 値のみを入力として、  
微分値を適切に自動推定したい



# 3次Catmull-Romスプライン

- 区間  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$  における3次関数  $x_k(t)$  を、前後の制約値  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$  から決定

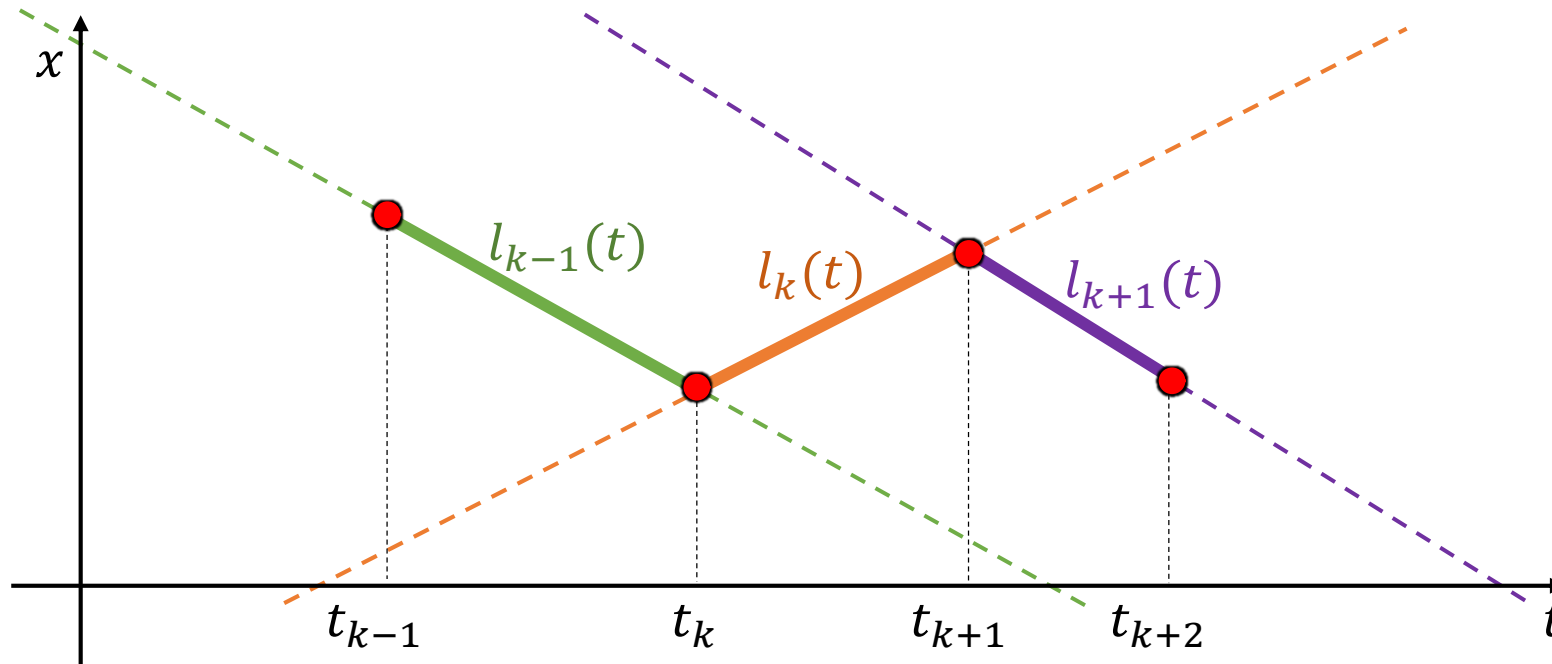




# 3次Catmull-Romスプライン：ステップ1

- $t_k \rightarrow t_{k+1}$  のとき  $x_k \rightarrow x_{k+1}$  となるように補間  $\rightarrow$  直線

$$l_k(t) = \left(1 - \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\right) x_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} x_{k+1}$$

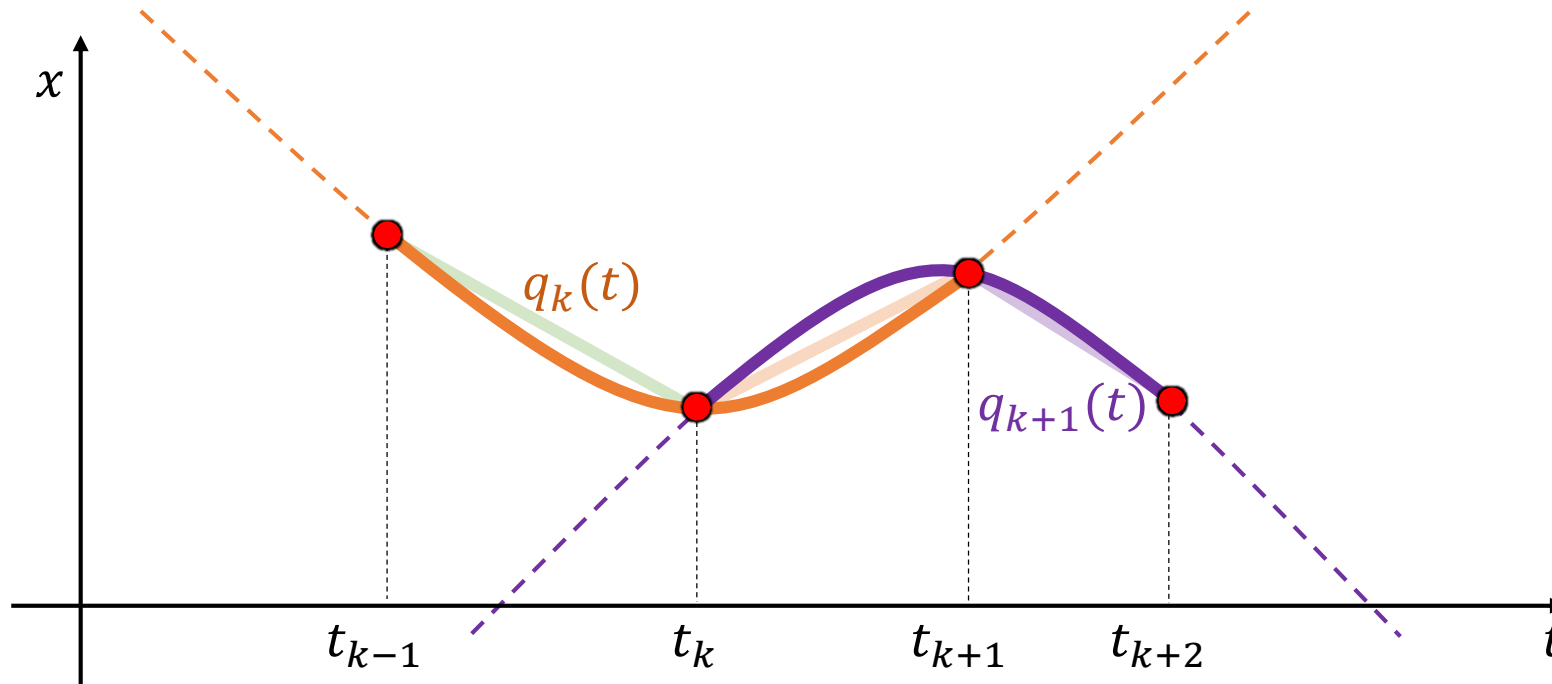


# 3次Catmull-Romスプライン：ステップ2

- $t_{k-1} \rightarrow t_{k+1}$  のとき  $l_{k-1} \rightarrow l_k$  となるように補間  $\rightarrow$  2次曲線

$$q_k(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}\right) l_{k-1}(t) + \frac{t - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}} l_k(t)$$

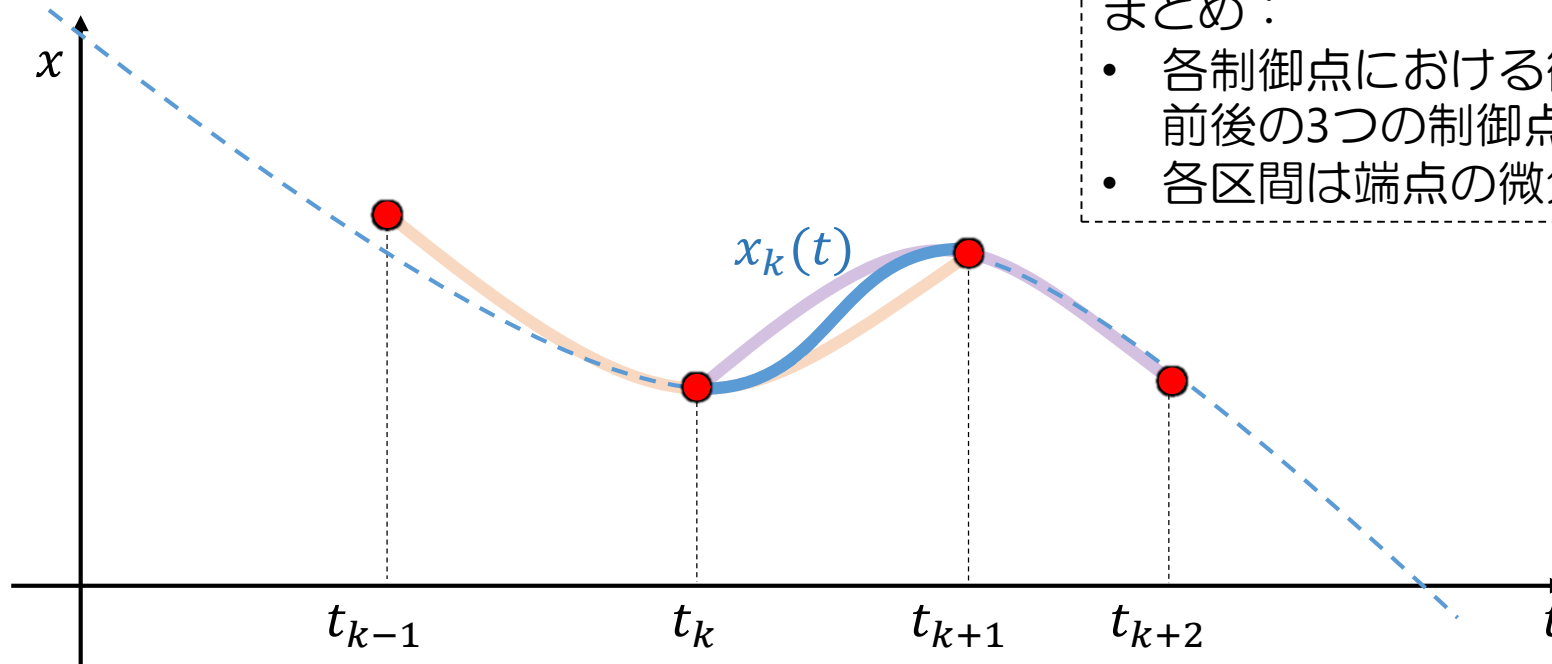
- 3点  $(t_{k-1}, x_{k-1}), (t_k, x_k), (t_{k+1}, x_{k+1})$  を通る



# 3次Catmull-Romスプライン：ステップ3

- $t_k \rightarrow t_{k+1}$  のとき  $q_k \rightarrow q_{k+1}$  となるように補間  $\rightarrow$  3次曲線

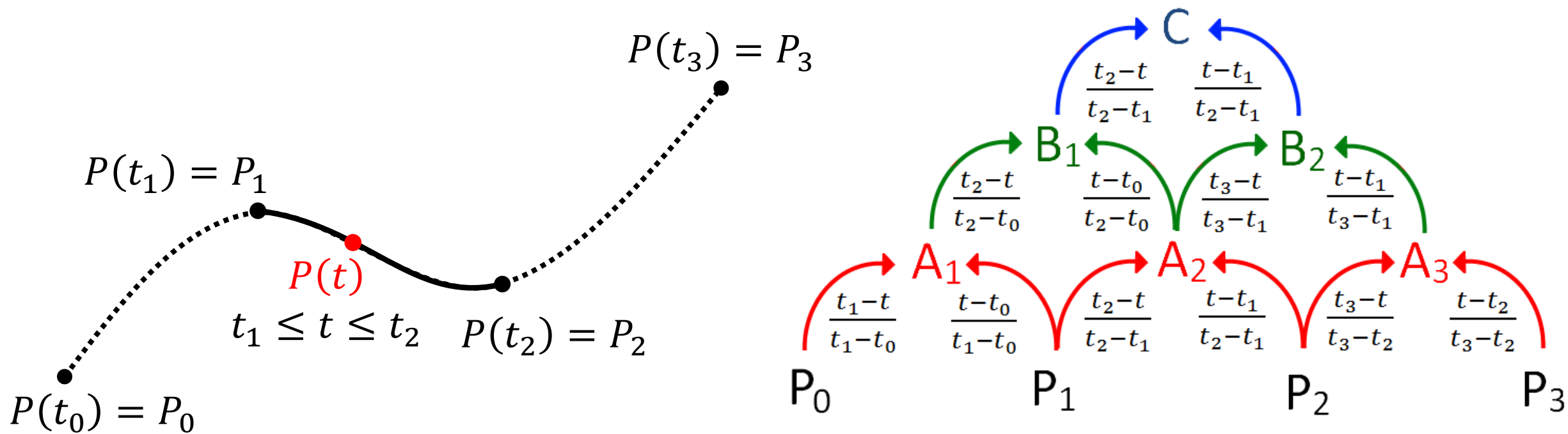
$$x_k(t) = \left(1 - \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\right) q_k(t) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} q_{k+1}(t)$$



まとめ：

- 各制御点における微分値が、それ自身とその前後の3つの制御点を通る2次曲線から定まる
- 各区間は端点の微分値を満たす3次曲線

# 3次Catmull-Romスプラインの計算方法



# パラメタ区分 $t_k$ (ノット列) の決め方

- 前提:  $t_0 = 0$

- Uniform (一様)

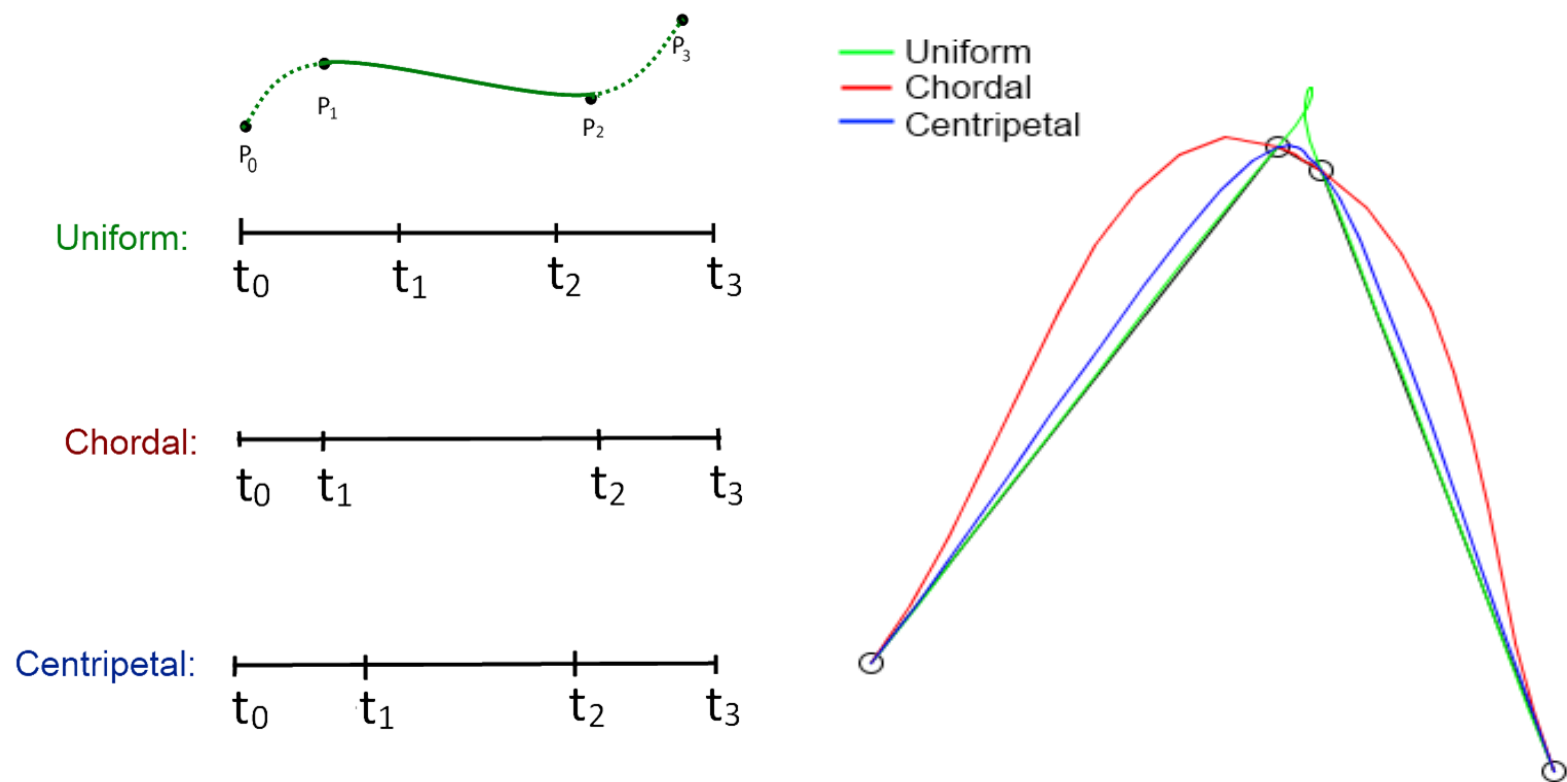
$$t_k = t_{k-1} + 1$$

- Chordal (弧長に基づく)

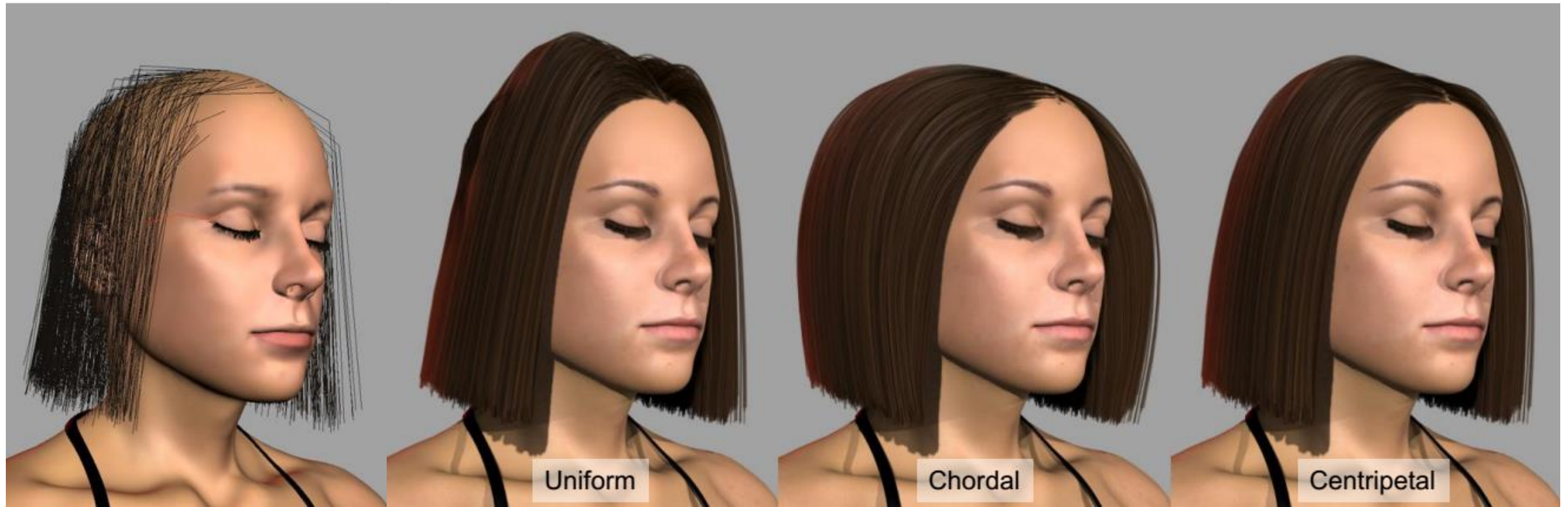
$$t_k = t_{k-1} + |P_{k-1} - P_k|$$

- Centripetal (求心性?)

$$t_k = t_{k-1} + \sqrt{|P_{k-1} - P_k|}$$

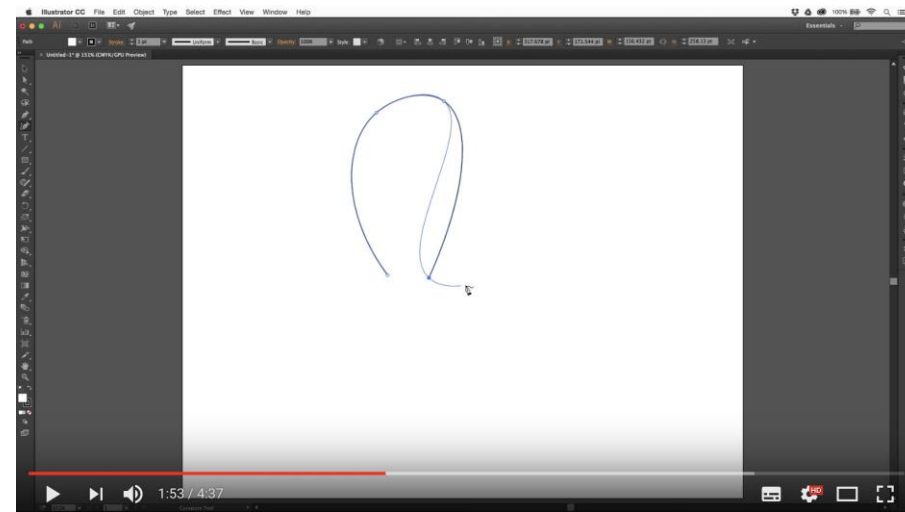


# 3次Catmull-Romスプラインの応用



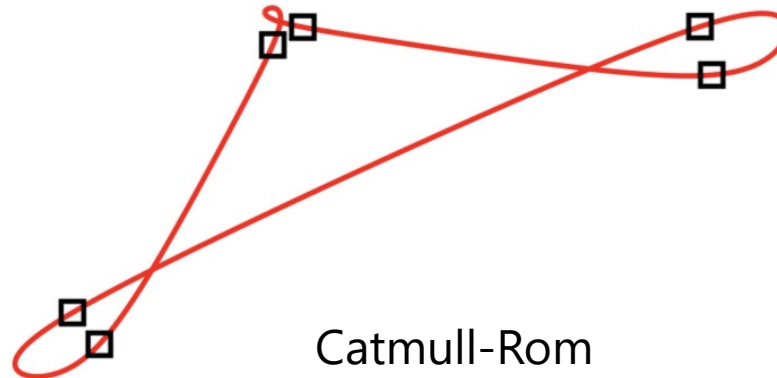
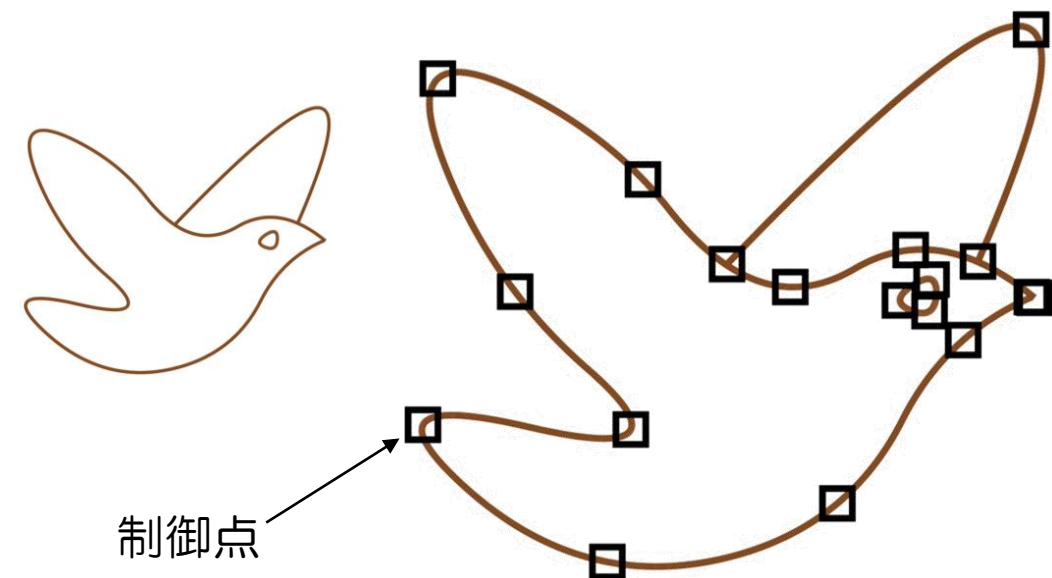
# 最近出た面白い論文： $\kappa$ -Curves

- 大学と民間企業 (Adobe) の共同研究
- 特長
  - $C^2$  連続 (より滑らか)
  - 曲率最大の箇所が必ず制御点の上に来る

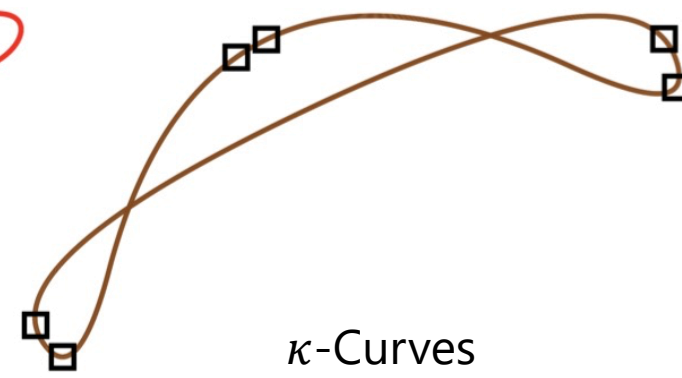


Curvature Tool in Illustrator

<https://www.youtube.com/watch?v=NvyYvj3q1AU>



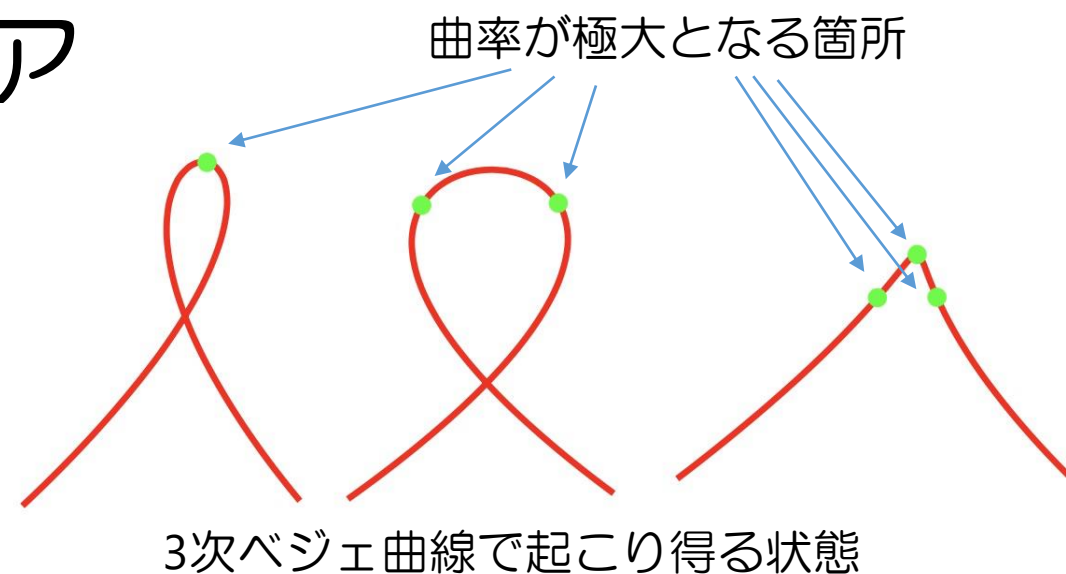
Catmull-Rom



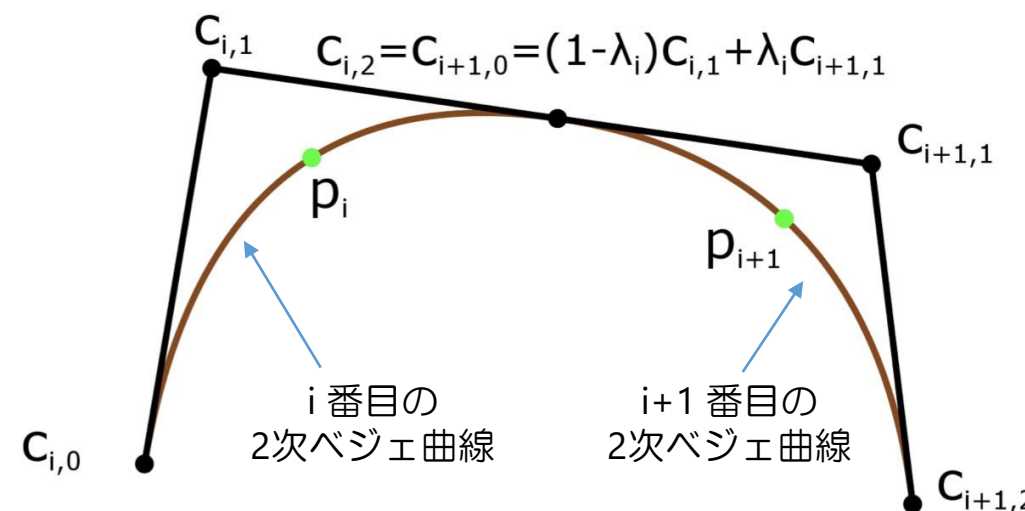
$\kappa$ -Curves

# $\kappa$ -Curves の基本アイディア

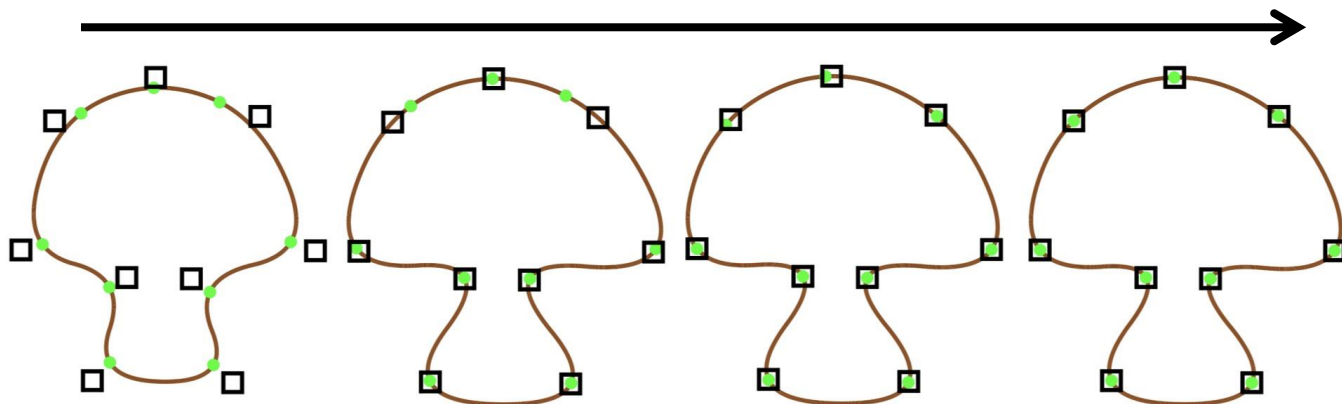
- 3次ベジエ曲線だと、  
曲率のコントロールが難しい



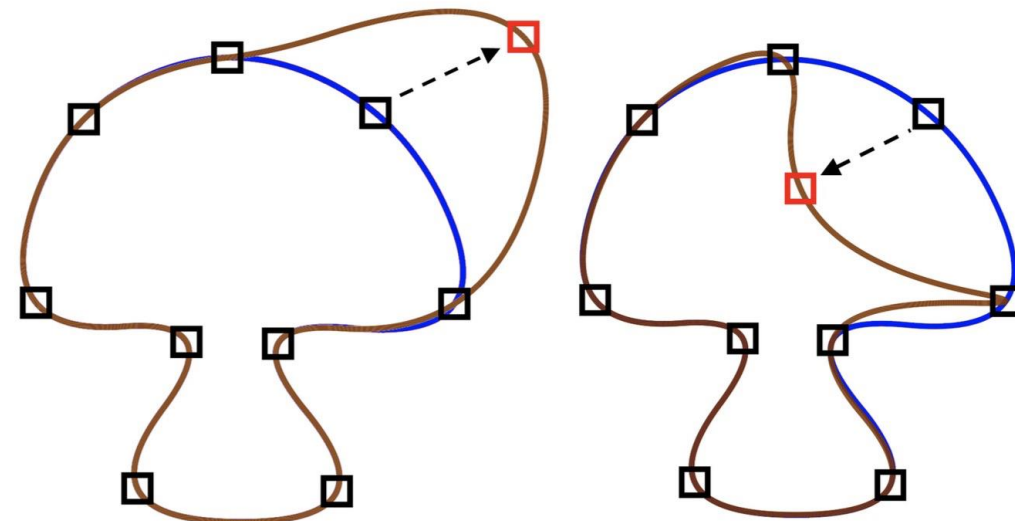
- 2次ベジエ曲線の方が実は使いやすい！
  - 曲率極大となるのが必ず高々1箇所
  - 曲率が極大となる箇所をユーザが指定し、  
ベジエ曲線の制御点の位置を逆算する



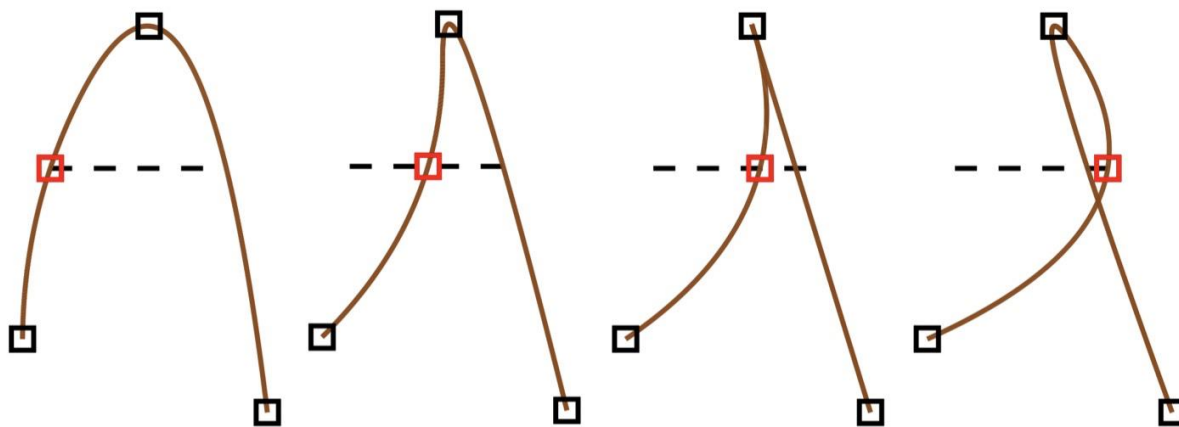




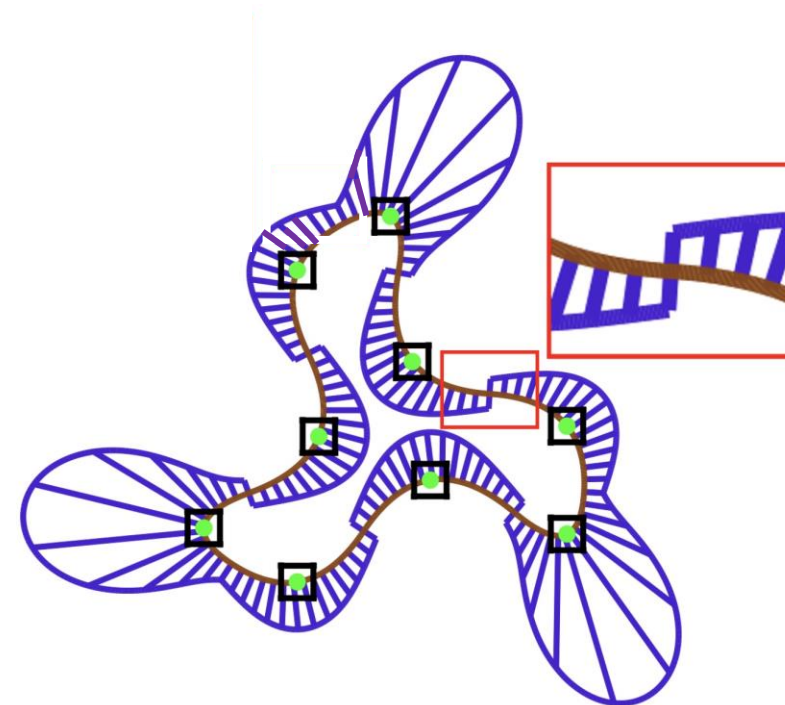
グローバルで非線形な最適化なので、繰り返し計算で解く



1個の制御点を動かすと、曲線全体が影響を受ける



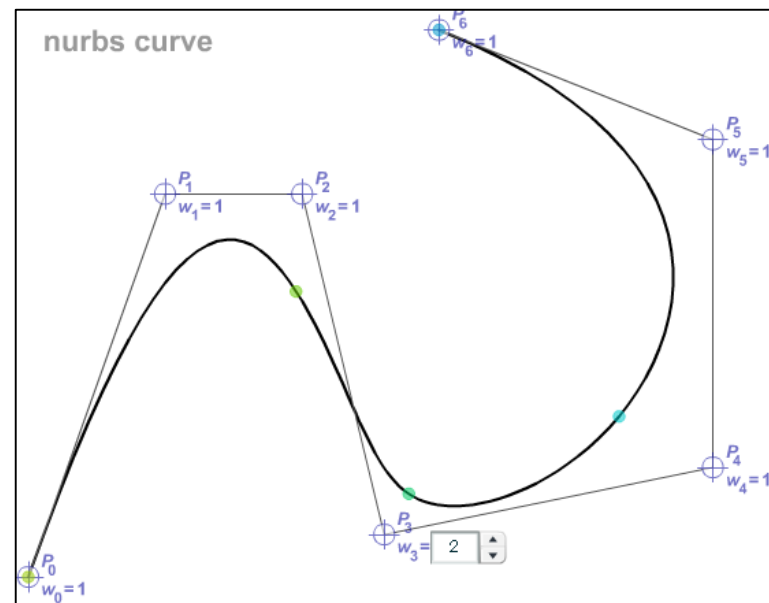
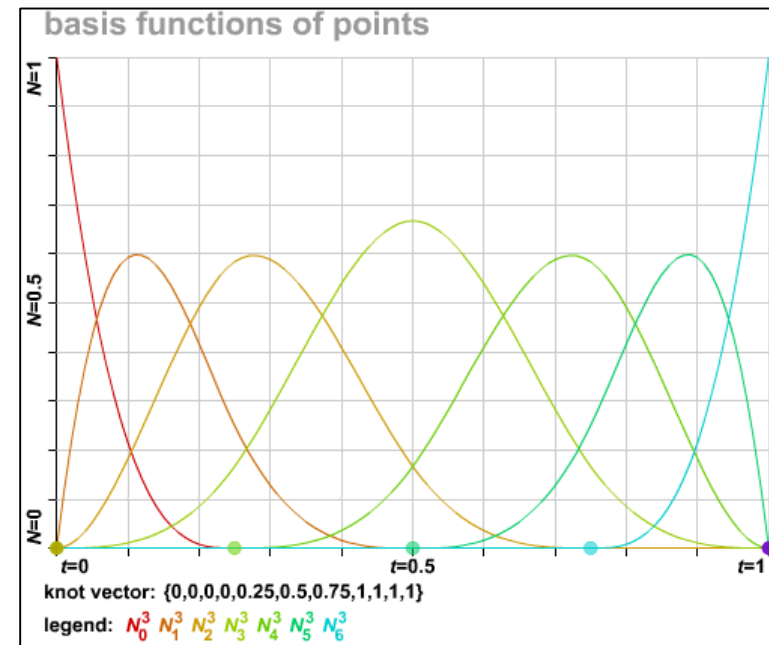
「ひっくり返り」は、必ず制御点の上で起こる



凹と凸の境目では、曲率は不連続になる

# Bスプライン曲線

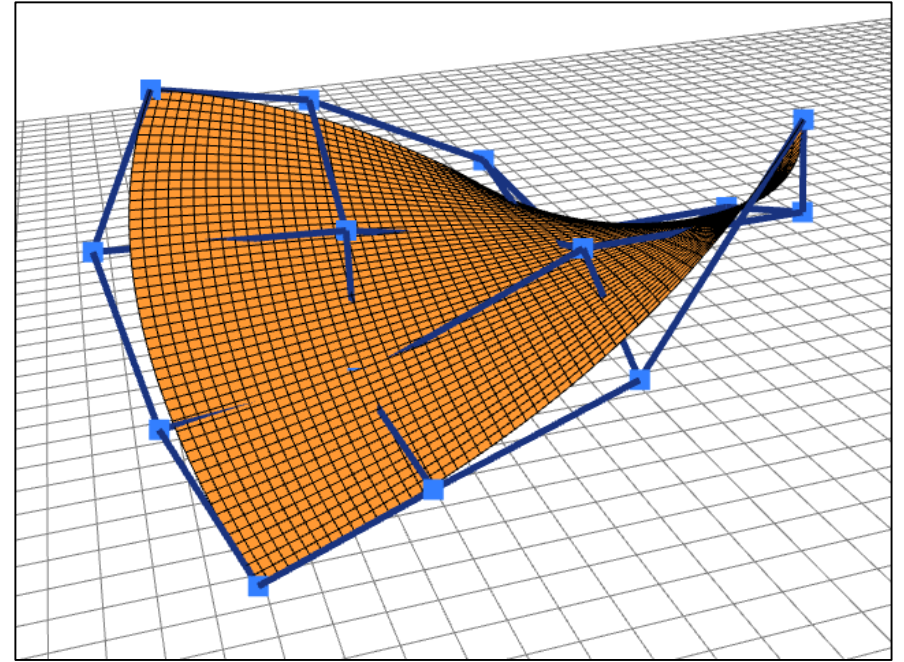
- 多項式スプラインを表すもう一つの方法
  - 曲線を**基底関数 (basis)** の重ね合わせで表す
  - 3次の基底関数が実用上一般的
  - **サブディビジョンサーフェス**と深い関係  
→ 次回講義で説明
- **Non-Uniform Rational B-Spline**
  - Non-Uniform = ノット列 ( $t_k$ ) の間隔が一樣でない
  - Rational = 制御点が重みを持つ (有理式曲線)
  - (ややこしいので本講義では説明しない)
- 秀逸なFlashデモ：  
<http://geometrie.foretnik.net/files/NURBS-en.swf>



# パラメトリック曲面

- パラメタが1個 → 曲線  $P(t)$
- パラメタが2個 → 曲面  $P(s, t)$
- 3次ベジエ曲面：
  - 入力： $4 \times 4 = 16$ 個の制御点  $P_{ij}$

$$P(s, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_i^3(s) b_j^3(t) P_{ij}$$



バーンスタイン基底関数

$$b_0^3(t) = (1 - t)^3$$

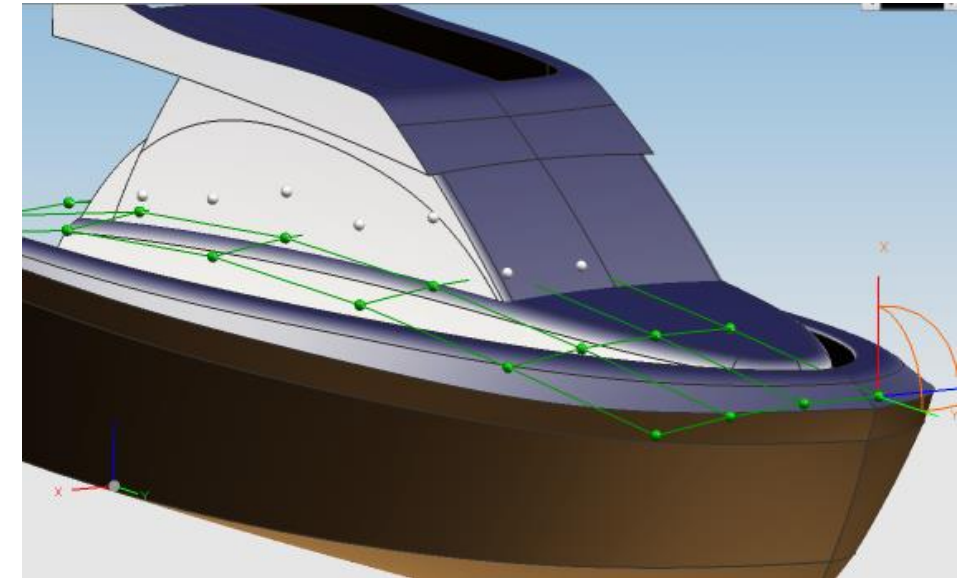
$$b_1^3(t) = 3t(1 - t)^2$$

$$b_2^3(t) = 3t^2(1 - t)$$

$$b_3^3(t) = t^3$$

# パラメトリック曲面を用いた3Dモデリング

- 長所
  - 滑らかな曲面をコンパクトに表現できる
  - 球や円錐面などを正確に表現できる
- 短所
  - 複数のパッチをうまく配置するのが難しい
  - 複数のパッチ間の連続性を保つのが難しい
- シンプルなパーツの組み合わせで人工物をデザインするのによく使われる



# 参考

- [http://en.wikipedia.org/wiki/Bezier\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Bezier_curve)
- [http://antigrain.com/research/adaptive\\_bezier/](http://antigrain.com/research/adaptive_bezier/)
- <https://groups.google.com/forum/#!topic/comp.graphics.algorithms/2FypAv29dG4>
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic\\_Hermite\\_spline](http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_Hermite_spline)
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Centripetal\\_Catmull%E2%80%93Rom\\_spline](http://en.wikipedia.org/wiki/Centripetal_Catmull%E2%80%93Rom_spline)