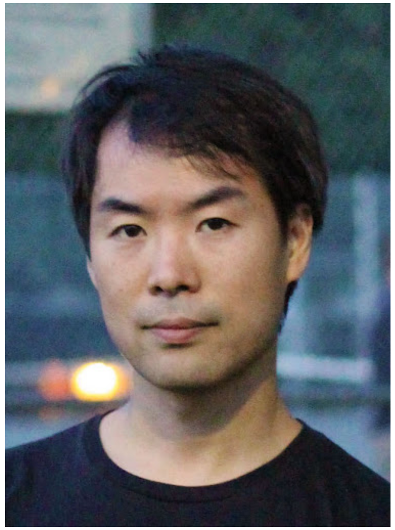
コンピュータグラフィックス論

～アニメーション(3)～

２０２０年７月１６日

東京大学　創造情報学専攻
准教授　梅谷信行

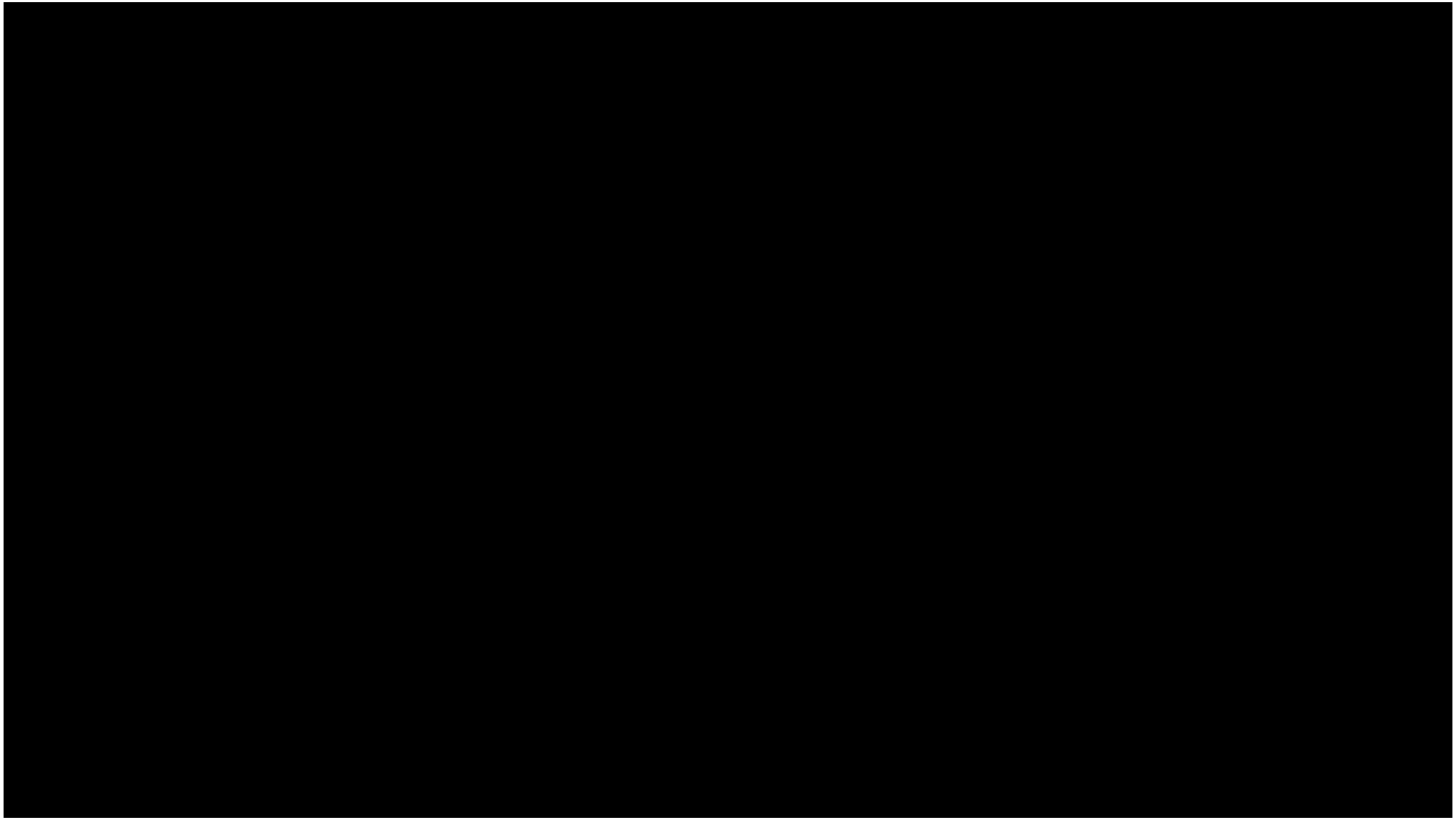
Short Bio



- 東京大学出身
  - 学部・修士→東大の機械系
  - 博士→東大の情報系
- 海外企業での研究
  - オートデスク研究所（カナダ）
  - ディズニー研究所（スイス）
  - オートデスク研究所（カナダ），研究グループ長
- 現在，東大の創造情報学専攻，准教授

コンピュータグラフィックス
特に物理シミュレーションや数値支援設計など

物理シミュレーションの例



Bifrost for Maya - Autodesk Area

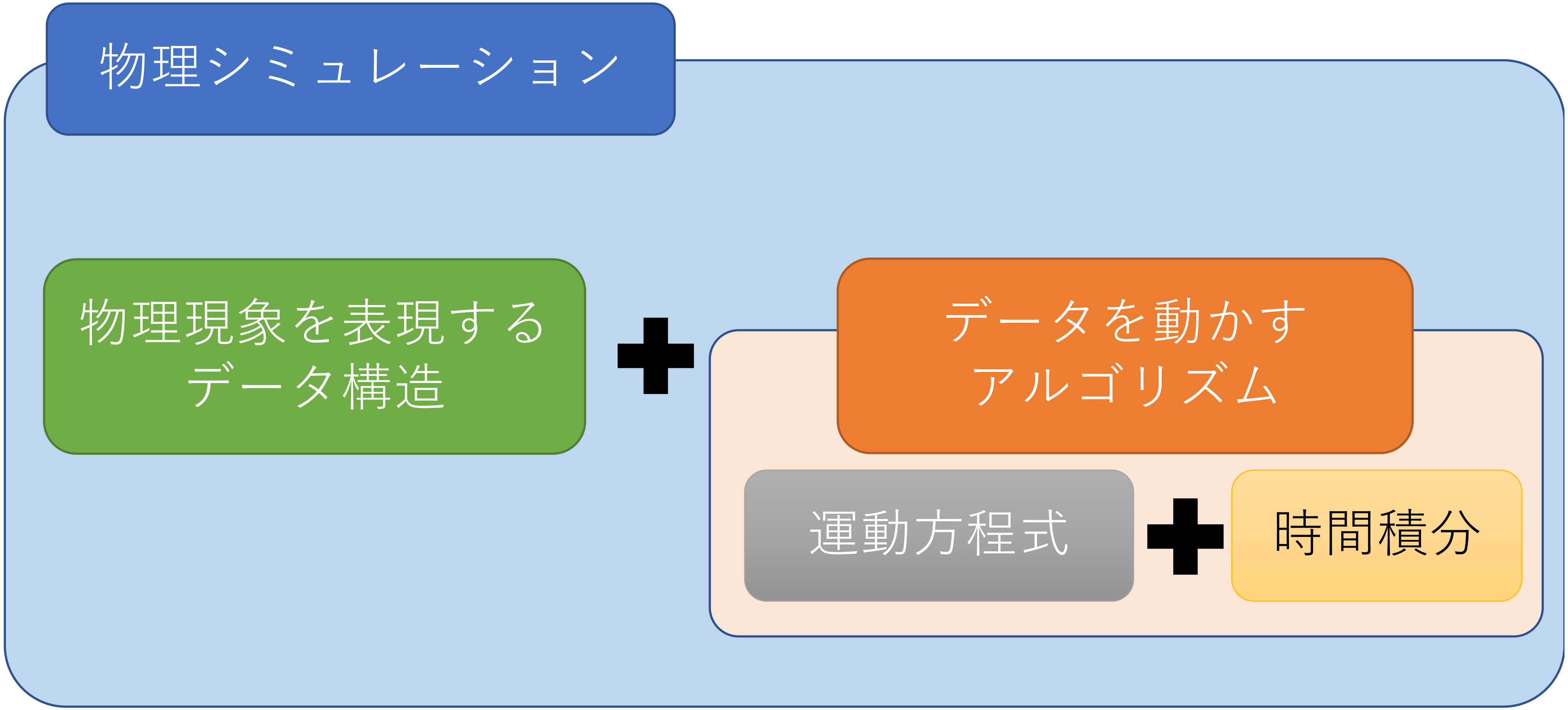
私の研究の一例：弾性ロッド

MAYAというソフトウェアに採用.　[Umetani et al. 2014]

私の研究の一例：弾性ロッド

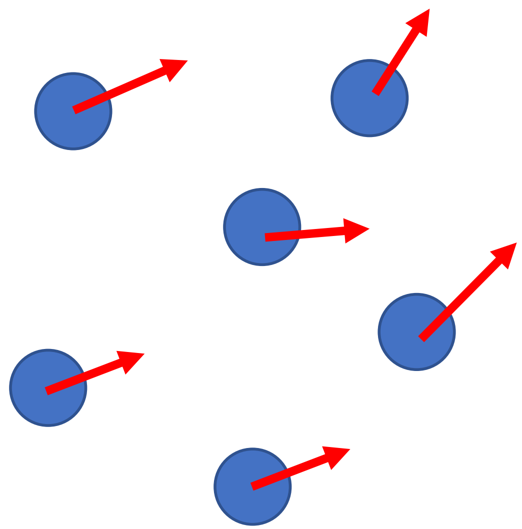
MAYAというソフトウェアに採用.　　　　　[Umetani et al. 2014]

物理シミュレーション概要



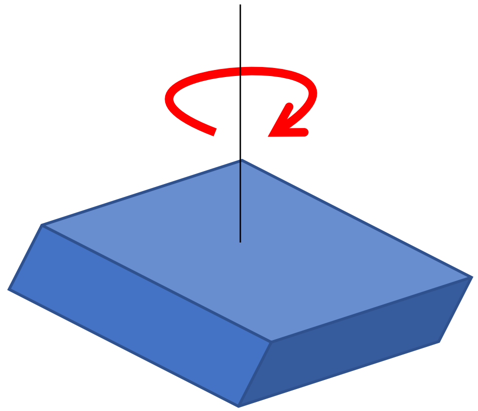
物理を表現するデータ構造の例

質点を表現



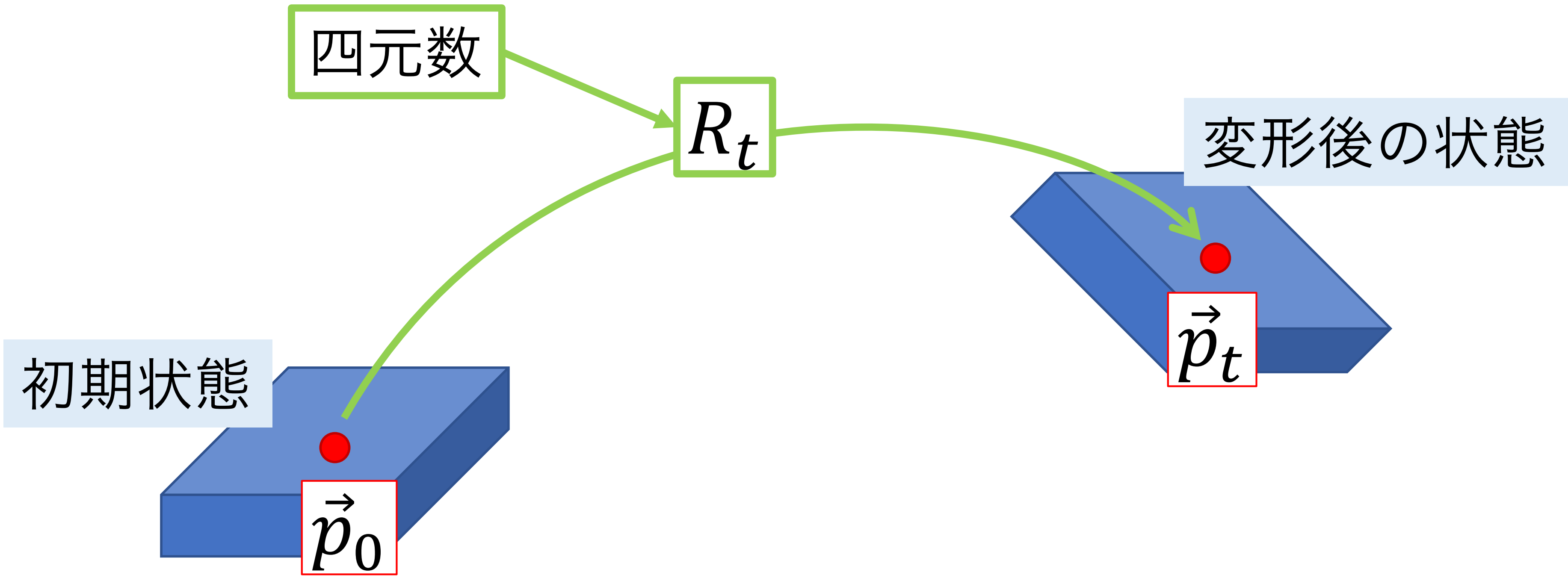
質点あたりの
位置や速度

剛体を表現



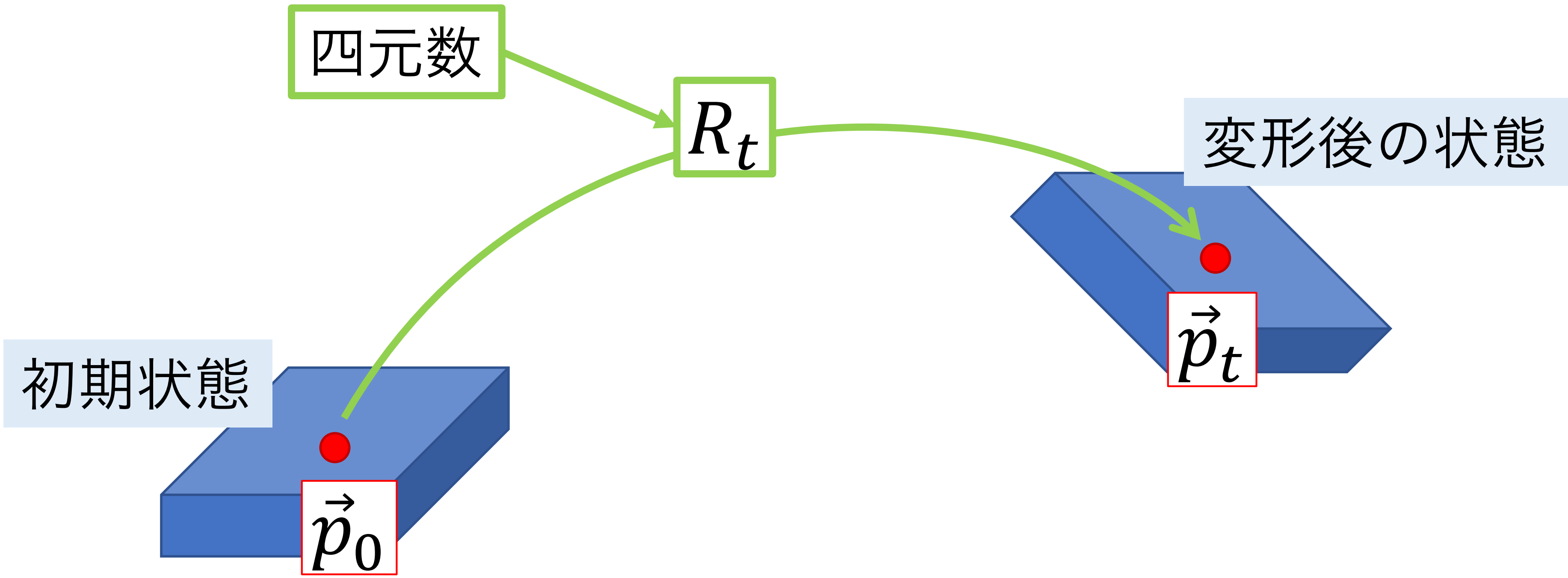
向きと位置と角速度
（アフィン変換行列や四元数）

剛体の変形の表現：中心位置と回転



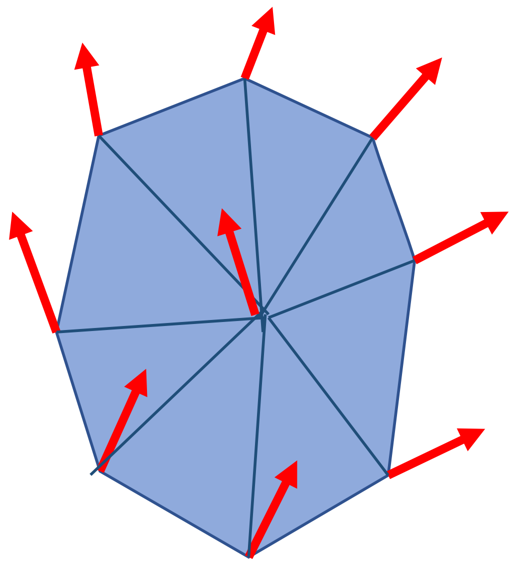
（ここに手書きで式を書く）

なぜ角速度はベクトル表記できる？



（ここに手書きで式を書く）

連続体を表現するデータ構造



変形を表現

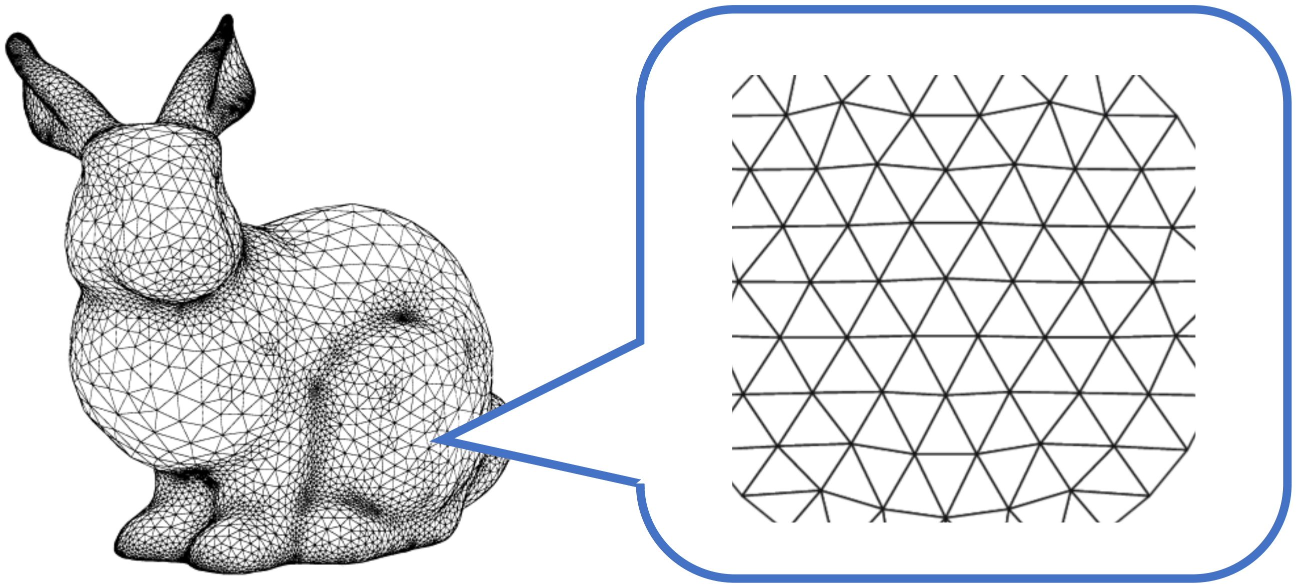
物体上の点の位置や速度
（ラグランジュ的考え方）

流れの場や温度を表現

空間に固定された点における
速度（オイラー的な表現）

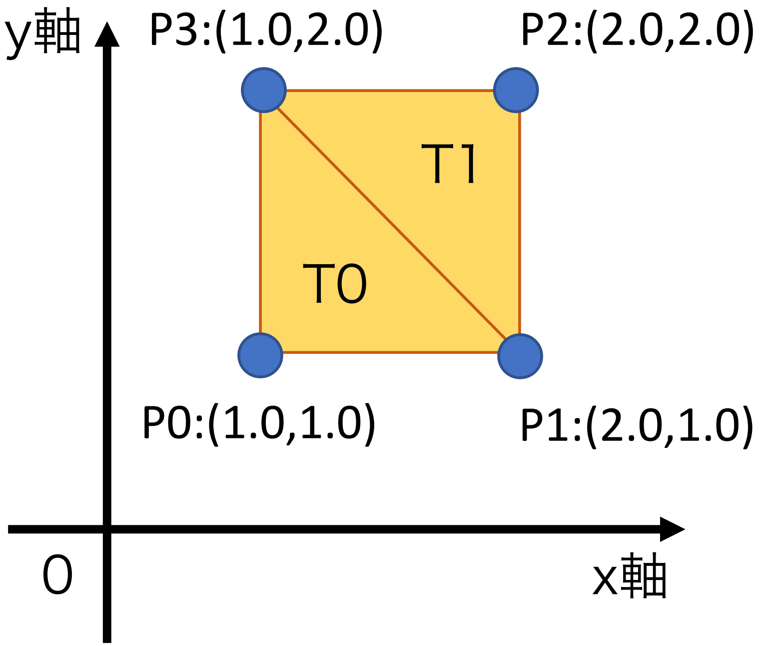
ポリゴン（メッシュ）表現

- 頂点を接続してポリゴンを作って形状を表現
- CGでもっともポピュラーな表現法
    - 特に三角形メッシュはよく使う



ポリゴン（メッシュ）表現

- 頂点座標と、接続情報(connectivity)から構成される



頂点座標

	X座標	Y座標
P0	1.0	1.0
P1	2.0	1.0
P2	2.0	2.0
P3	1.0	2.0

変形量

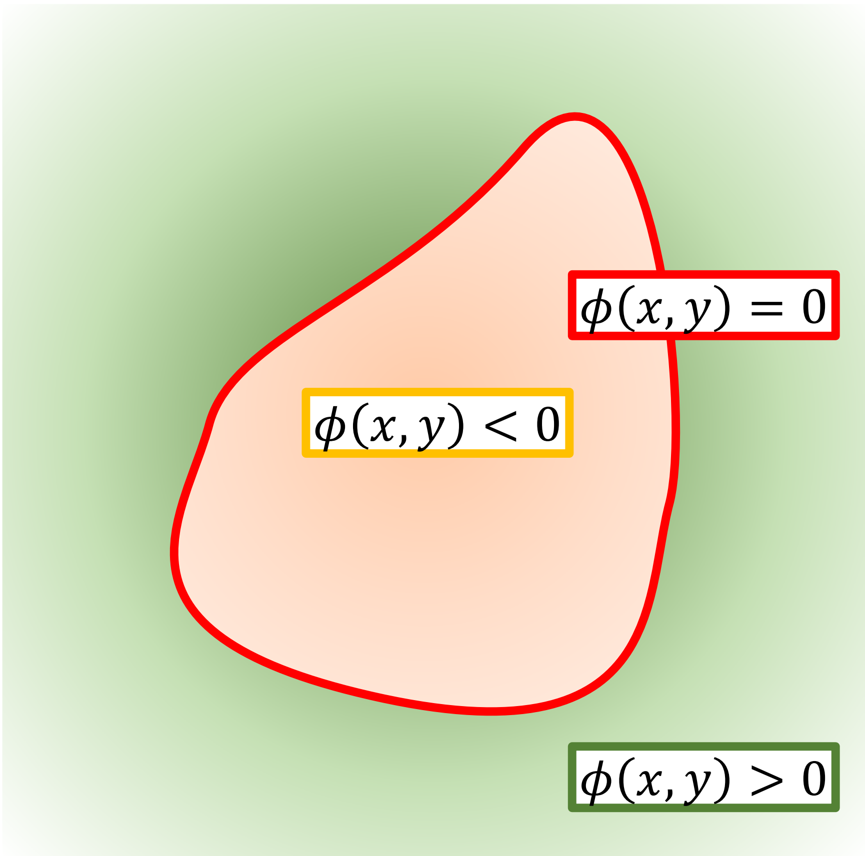
	X座標	Y座標
P0	-0.01	0.00
P1	0.02	-0.-1
P2	0.05	0.04
P3	0.03	-0.03

接続情報

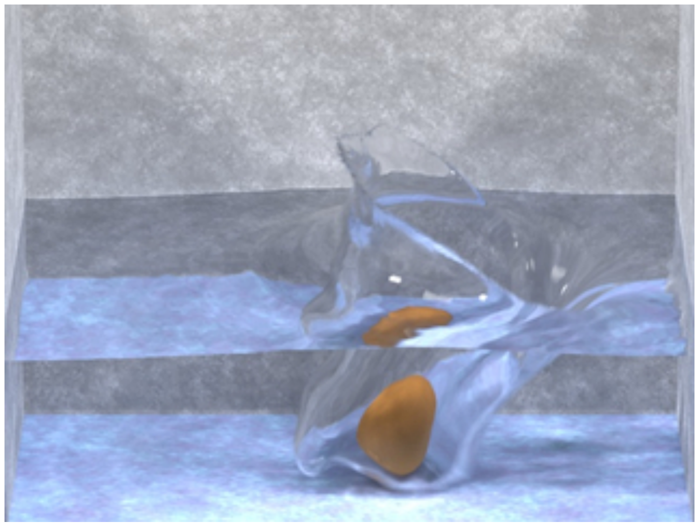
	頂点 1	頂点 2	頂点 3
T0	0	1	3
T1	1	2	3

陰関数表現：レベルセット関数

- 関数$\phi(x, y)$を考える。座標が引数。値が０なら表面
- こんな関数があると滑らかな形状を定義できる



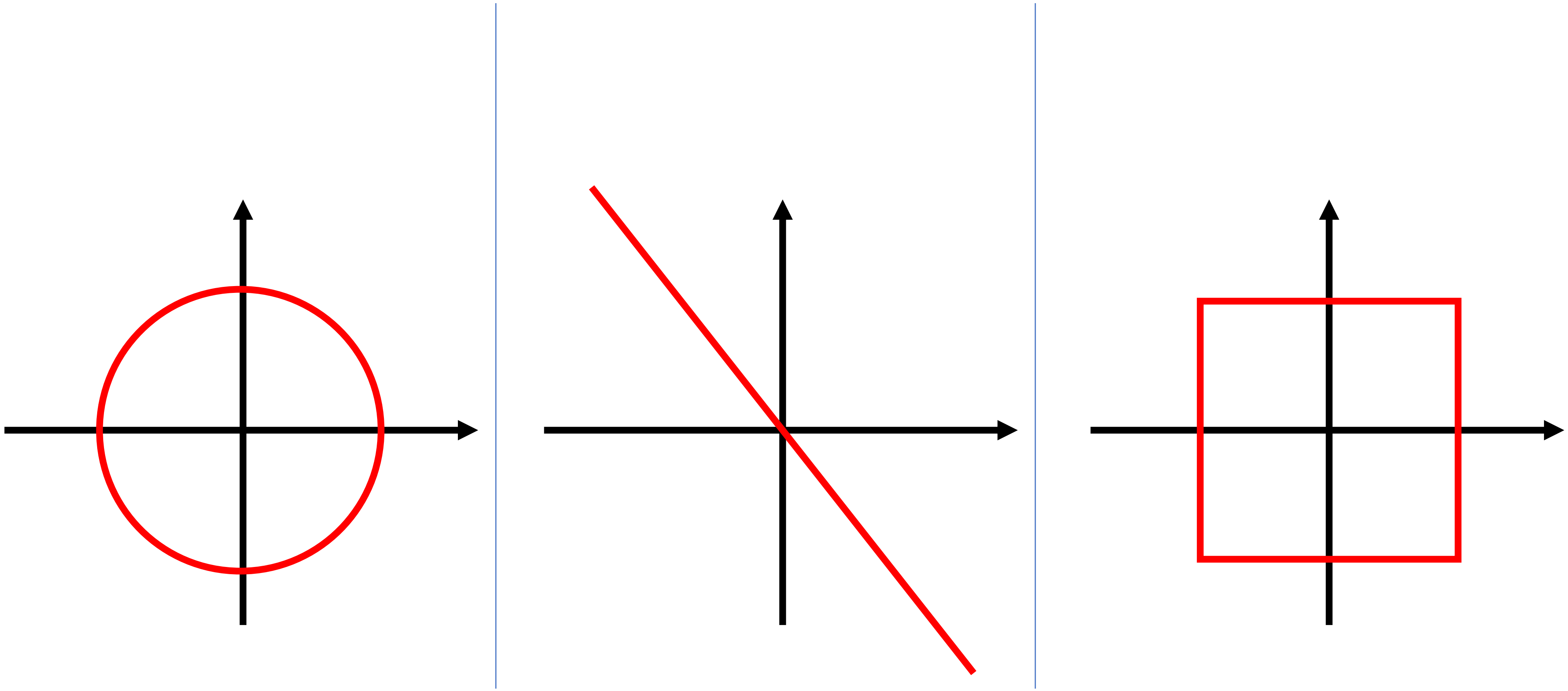
水の表面を表現に
適している



[Enright et al. 2002]

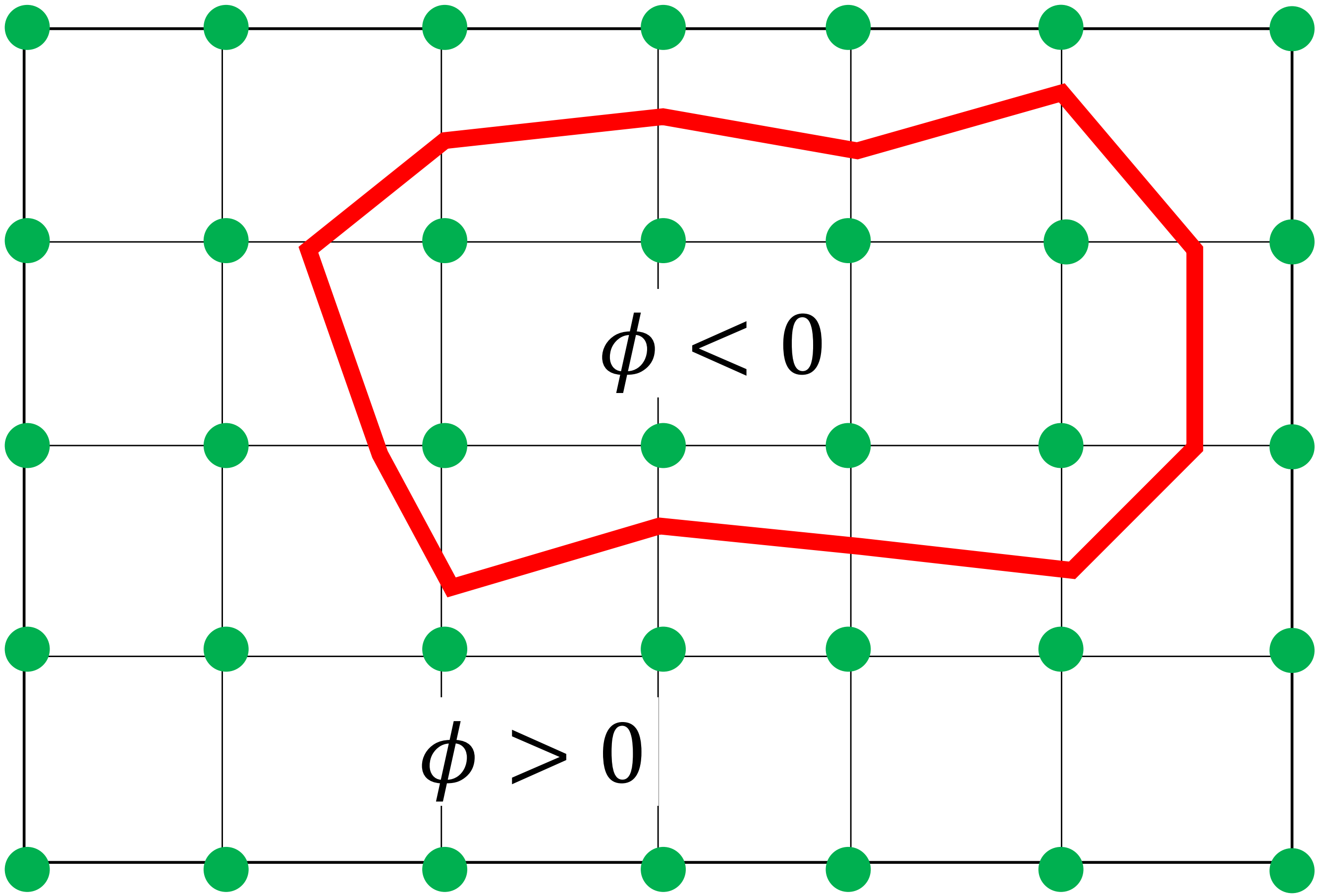
レベルセット関数を考えよう！

- 赤線の上で０になる関数を考えよう



レベルセット関数をグリッドに定義

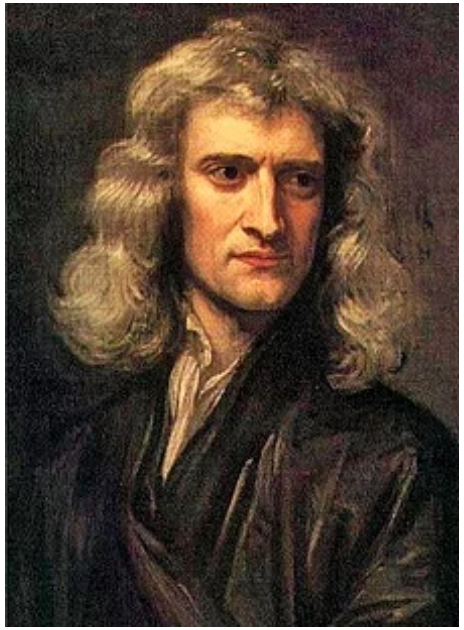
- グリッドの節点にレベルセット関数を定義する



マーチングキューブ法で境界を抽出

ニュートン力学復習

ニュートンの運動方程式

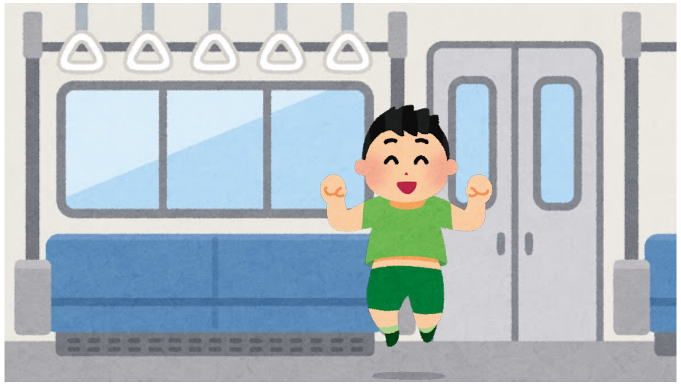


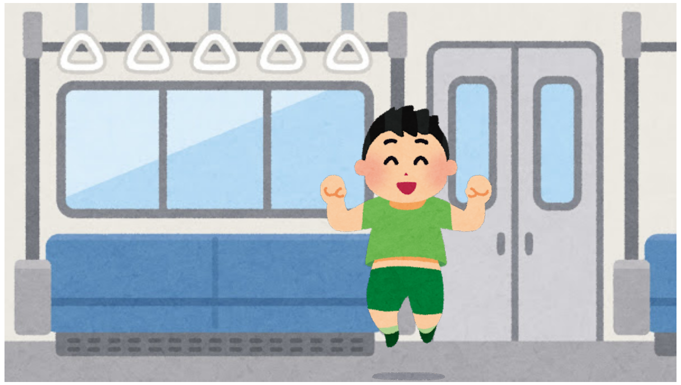
外力　　　質量　加速度

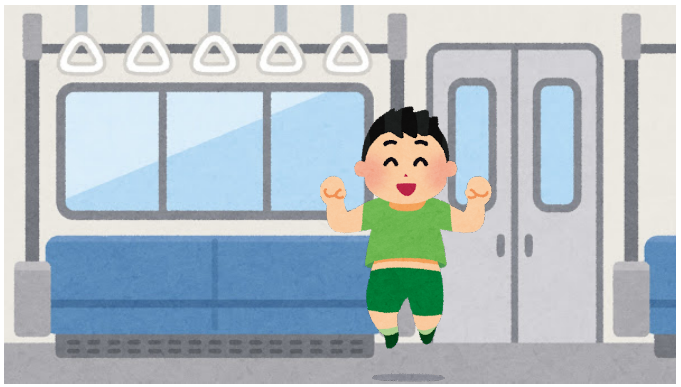
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

（成分ごとに書き出す）

走ってる電車の中でジャンプ

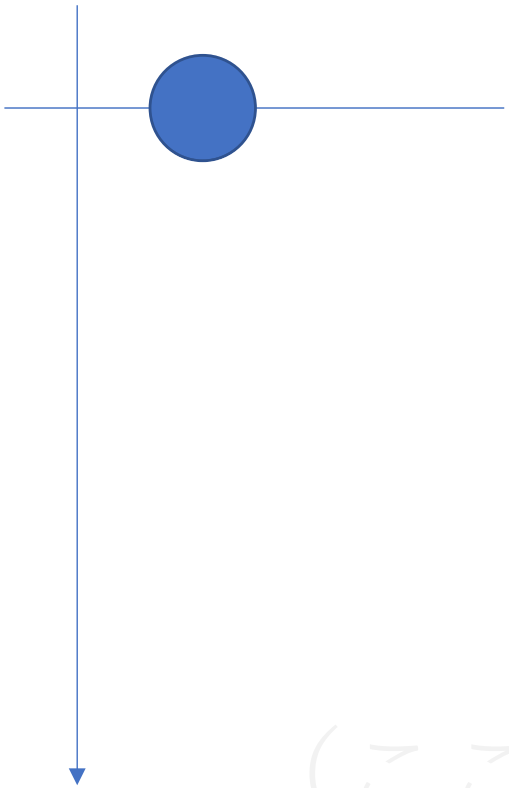


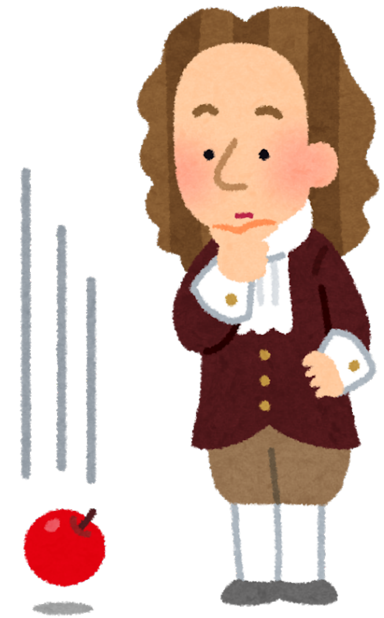




外力がない場合，物体は一定速度で動く

落ちるボールの位置



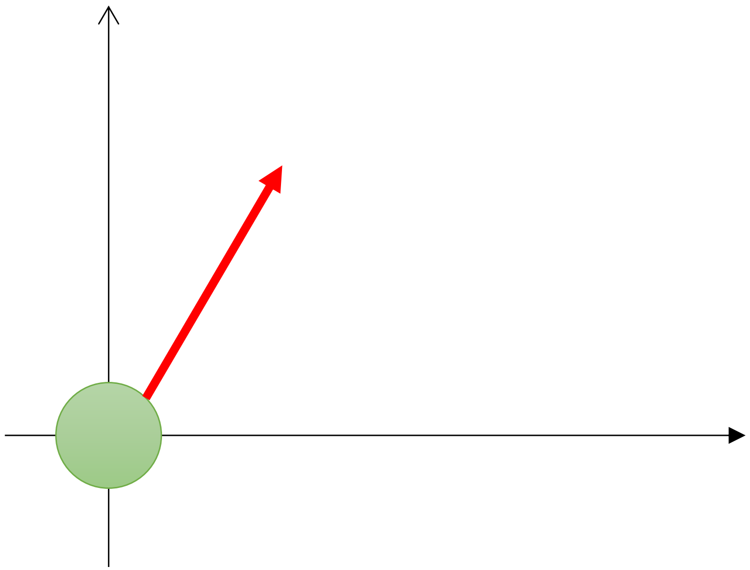


（ここに手書きで式を書く）

放物線：重力下の物体の軌跡

落ちるボールの軌跡は二次曲線になる

（ここに手書きで式を書く）



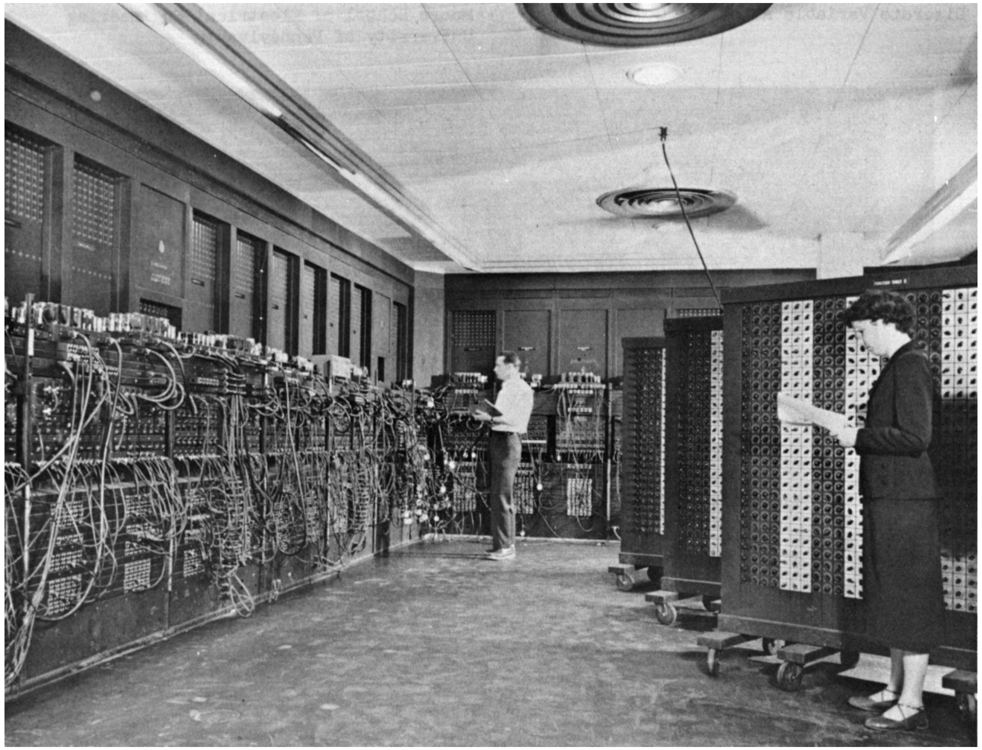
無重力飛行機の話

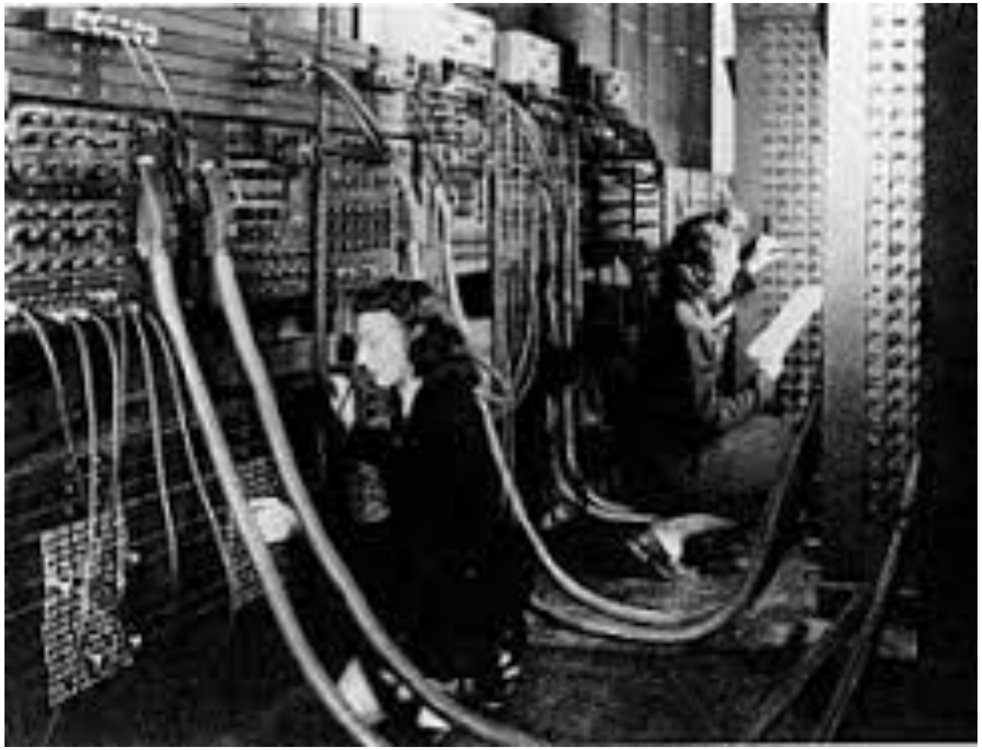
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Physicist_Stephen_Hawking_in_Zero_Gravity_NASA.jpg

https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2017/01/21/ask-ethan-is-zero-gravity-really-a-thing/#6f4f9a5f1ddc

初期のコンピュータENIAC

最初のプログラム可能な電子計算機
弾道計算をするために計算された





https://ja.wikipedia.org/wiki/ENIAC

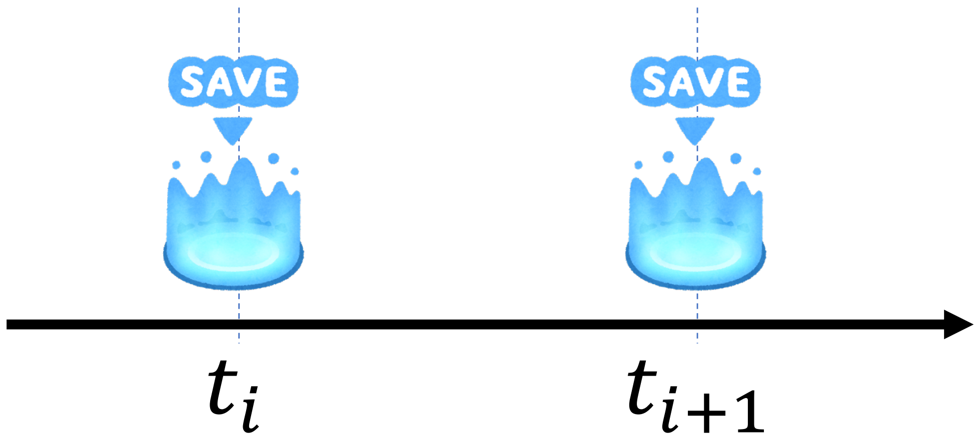
時間の離散化と時間積分

時間の離散化

- 運動方程式が解析的に解けるのは単純な問題だけ
  - 複雑な問題は数値的に解く

- コンピュータでは連続的な時間は扱えない
  - アナログ信号の標本化のように離散化する

- ある一定の間隔を決めて離散的に値を求める
  - この間隔を「時間刻み」や「タイムステップ」と呼ぶ



要は漸化式を
もっと複雑に
したもの

運動方程式と時間積分

運動方程式から積分を計算するように漸化式を組む

位置　速度　加速度

$\vec{x}$　$\vec{v}$　$\vec{a}$

積分　積分

運動方程式

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

時間積分の方法：単純な微分方程式

単純な１階の微分方程式から考える

- $\vec{x}_i$が与えられたときに$\vec{x}_{i+1}$を計算したい

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \xrightarrow{\text{積分}} \quad x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\, dt$$

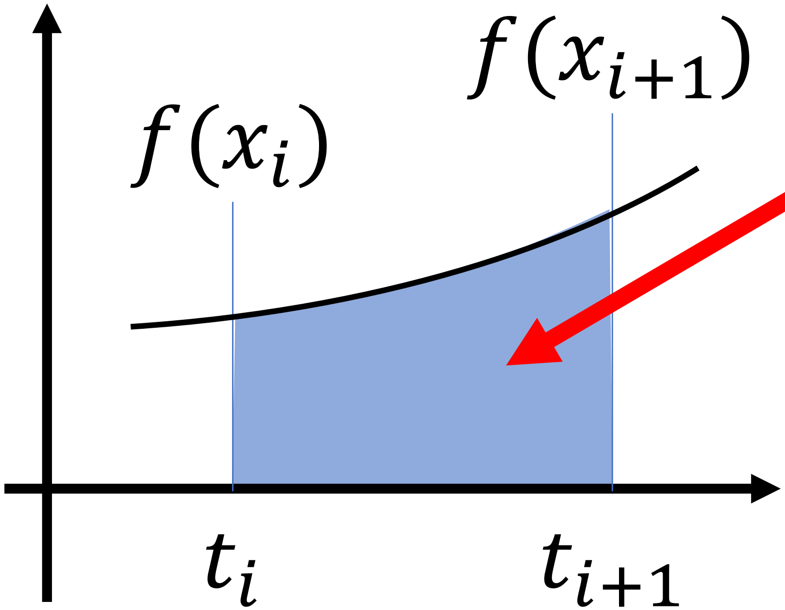
（ここに手書きで式を書く）

時間積分の方法：単純な微分方程式

単純な微分方程式から考える

- $\vec{x}_i$が与えられたときに$\vec{x}_{i+1}$を計算したい

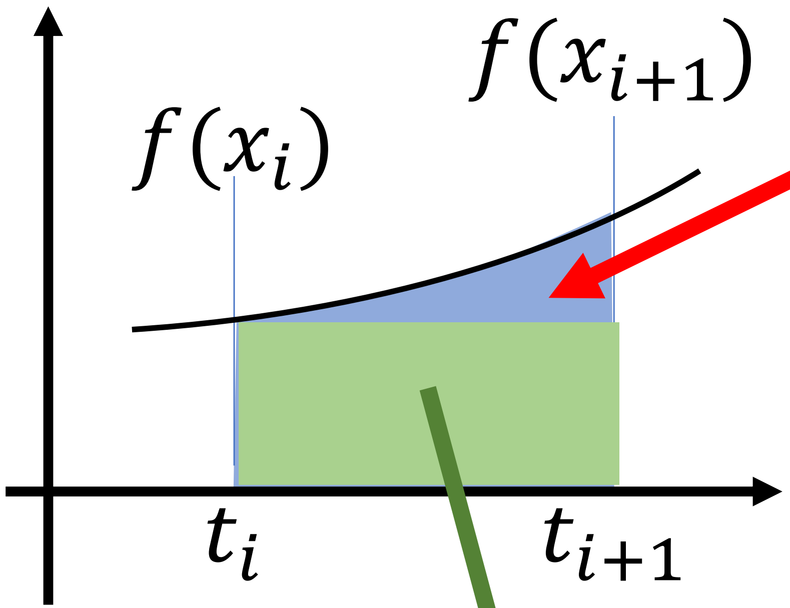
$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \xrightarrow{\text{積分}} \quad x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\,dt$$



この部分の面積が
$x_{i+1} - x_i$になる

xが未知なので$f(x)$も未知.
うまく面積を近似する

時間積分の方法：単純な微分方程式



この部分の面積が
$x_{i+1} - x_i$になる

xが未知なので$f(x)$も未知.
うまく面積を近似する

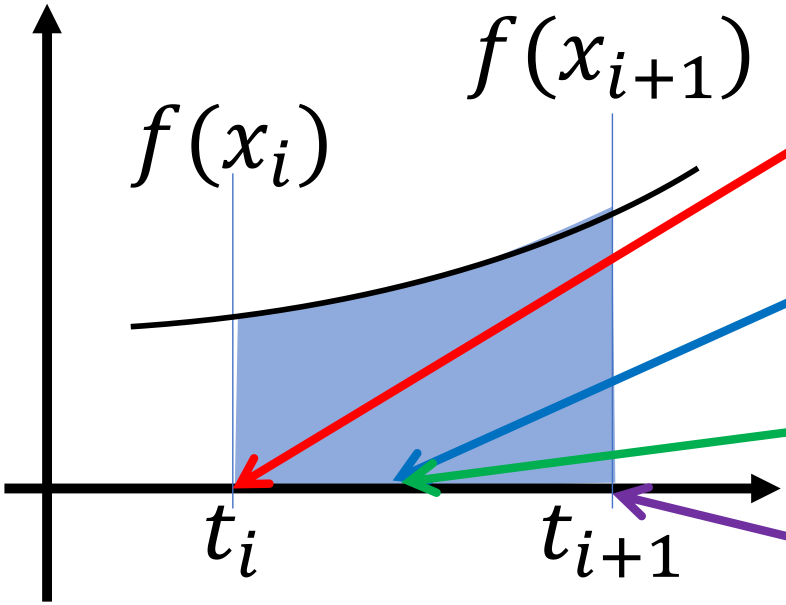
面積：$dt \times f(x_i)$

より発展的方法に
ルンゲ・クッタ法がある

前進(陽的)
オイラー法 $x_{i+1} = x_i + dt \times f(x_i)$

ルンゲ・クッタ法（４次精度）

面積$a = x_{i+1}$- x_iを４つの方法で近似



$$
\left[
\begin{aligned}
\boxed{a_1} &= dt \times f(x_i) \\
\boxed{a_2} &= dt \times f(x_i + \boxed{a_1}/2) \\
\boxed{a_3} &= dt \times f(x_i + \boxed{a_2}/2) \\
\boxed{a_4} &= dt \times f(x_i + \boxed{a_3})
\end{aligned}
\right.
$$

平均化

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(a_1 + 2a_1 + 2a_1 + a_1)$$

他の考え方：微分を差分で近似

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x)}$$

前進(陽的)
オイラー法

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{dt} = f(x_i)$$

単純だけど
不安定

後退(陰的)
オイラー法

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{dt} = f(x_{i+1})$$

複雑だけど
安定

後退オイラー法を漸化式にする

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{dt} = f(x_{i+1})$$

テイラー展開

$$\cong f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} (x_{i+1}-x_i)$$

（ここに手書きで式を書く）

時間差分の精度

前進(陽的)
オイラー法 $\dfrac{x_{i+1} - x_i}{dt} = f(x_i)$ 1次精度

足して
２で割る

クランク・ニコルソン法
$\dfrac{x_{i+1} - x_i}{dt} = \dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ 2次精度

後退(陰的)
オイラー法 $\dfrac{x_{i+1} - x_i}{dt} = f(x_{i+1})$ 1次精度

二階の時間微分と後退オイラー

後退(陰的)
オイラー法

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s_{i+1} - s_i}{dt} = f(s_{i+1})$$

$\mathrm{s_i} = \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} \\ \vec{\mathrm{x}}_\mathrm{i} \end{pmatrix}$を代入する

（ここに手書きで式を書く）

運動方程式を離散化

- 後退オイラー法で解く
  - 速度と位置に対して後退オイラー法

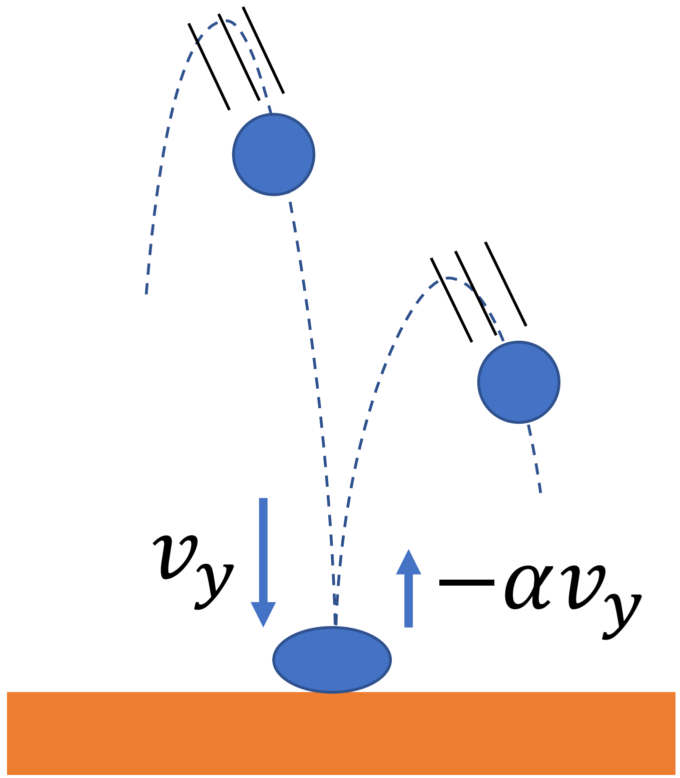
$$\begin{cases} \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i = dt \times \vec{a}_{i+1} \\ \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i = dt \times \vec{v}_{i+1} \end{cases}$$

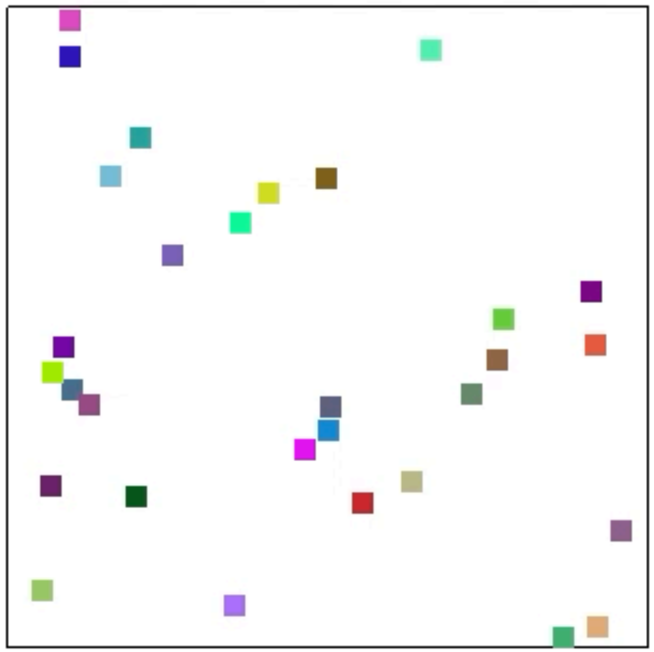
式変形　$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{g}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_{i+1} &= \vec{v}_i + dt \times \tfrac{1}{m}\vec{g} \\ \vec{x}_{i+1} &= \vec{x}_i + dt \times (\vec{v}_i + dt \times \frac{1}{m}\vec{g}) \end{aligned}}$$

衝突の処理

- 質点の衝突前後で反発係数(α)だけ速さが変化する
- 反発係数＝coefficient of restitution





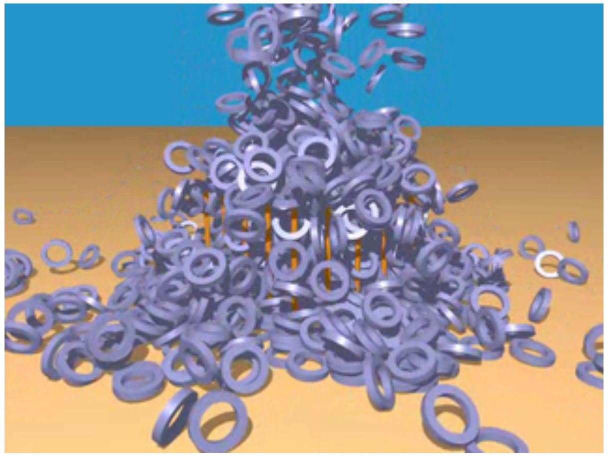
解析力学と運動方程式

なぜ解析力学が必要か？

物理のデータ表現が質点
　ニュートンの運動方程式が使える

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

剛体や連続体などの，複雑なデータ表現
　解析力学から得られる運動方程式を使う
　　（ニュートンの運動方程式の一般化）



[Guendelman et al. 2003]

[Bertails et al. 2006]

ラグランジュの運動方程式

物理表現のパラメタ(位置，角度など)をqとする

次のようにラグランジアンを定義する

運動エネルギー　ポテンシャルエネルギー

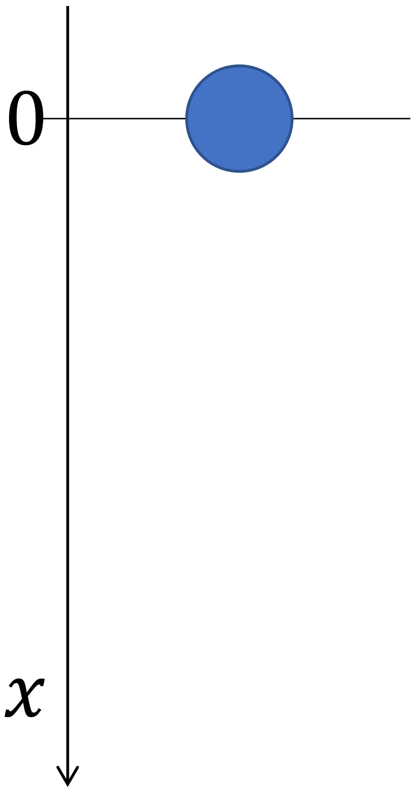
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \boxed{\mathcal{K}} - \boxed{\mathcal{W}}$$

ラグランジュの運動方程式は次のように導かれる

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

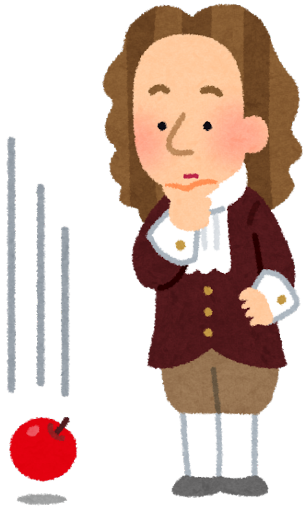
ラグランジュ運動方程式の例

落ちるボールを考える



$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{K} - \mathcal{W}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$



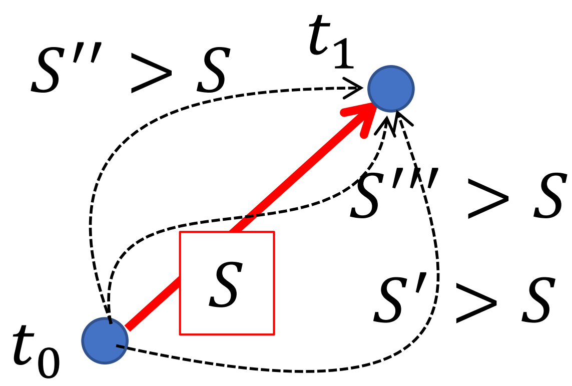
（ここに手書きで式を書く）

ハミルトンの原理

ラグランジアンの時間積分を作用と呼ぶ

$$S(q,\dot{q}) = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q})\,dt$$

ハミルトンの原理とは,
作用が停留する時にqが
実際の運動となること



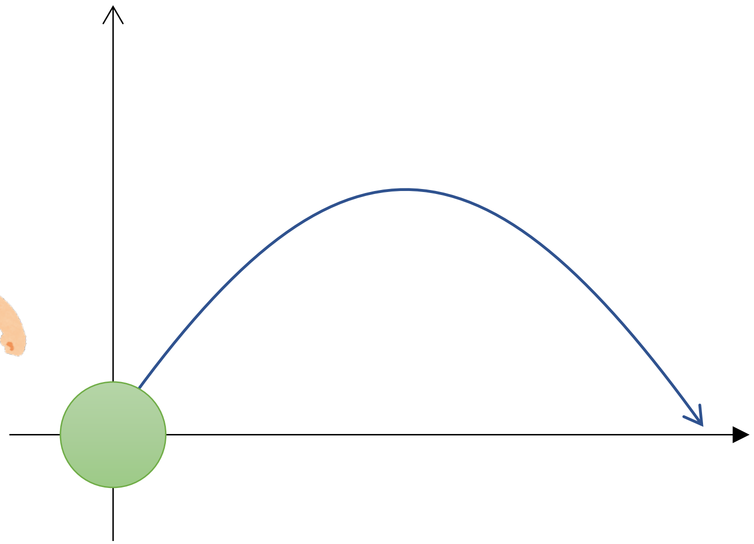
ハミルトンの原理からラグランジュ運動方程式が成立

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

ハミルトンの原理の直感的理解

ラグランジアン$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K} - \mathcal{W}$を小さく

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{K}\text{ を小さく}}_{\text{運動を滑らかに}}\underbrace{\mathcal{W}\text{を大きく}}_{\text{ポテンシャルが高い所ではゆっくり}}$$

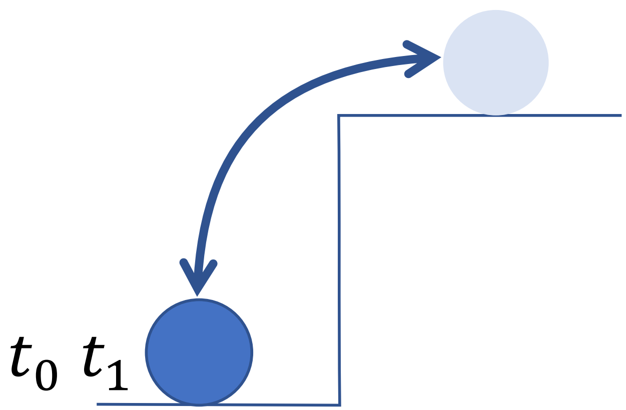


ポテンシャル$\mathcal{W}$を大きくって，小さくじゃないの？

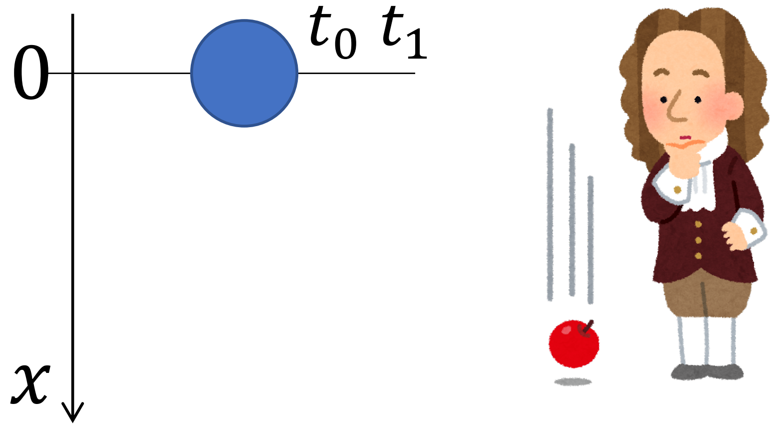
ハミルトンの原理の不思議

ラグランジアン$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{K} - \mathcal{W}$を小さく？

崖を駆け上がるボールはあり？



落ちないボールはあり？



シミュレーションの手順

解きたい物理現象を決める

↓

データ構造（数値的な表現）qを決める

↓

運動エネルギー$\mathcal{K}$を求める

↓

ポテンシャルエネルギー$\mathcal{W}$を求める

↓

ラグランジュ運動方程式を導出

↓

時間積分法を決めて運動方程式を解く

弾性ポテンシャル：バネ質点モデル

たいていの映像向け物理シミュレーションはバネ質点モデルで動いている

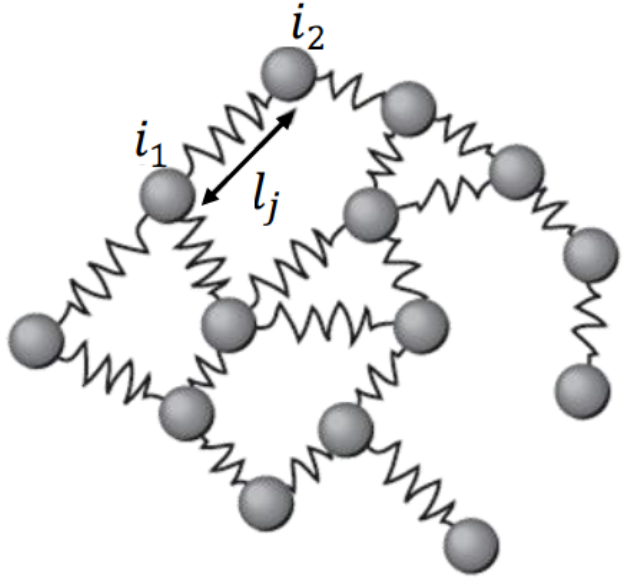
（ゼリーのような動きを実現させたい場合）

https://www.youtube.com/watch?v=bXU3ygW5XLo

バネ質点モデルのポテンシャル$\mathcal{W}$

- フックの法則からバネの弾性エネルギーを計算

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{e_{j=(i1,,i2)}} |\vec{x}_{i1} - \vec{x}_{i2}|^2 - l_j$$

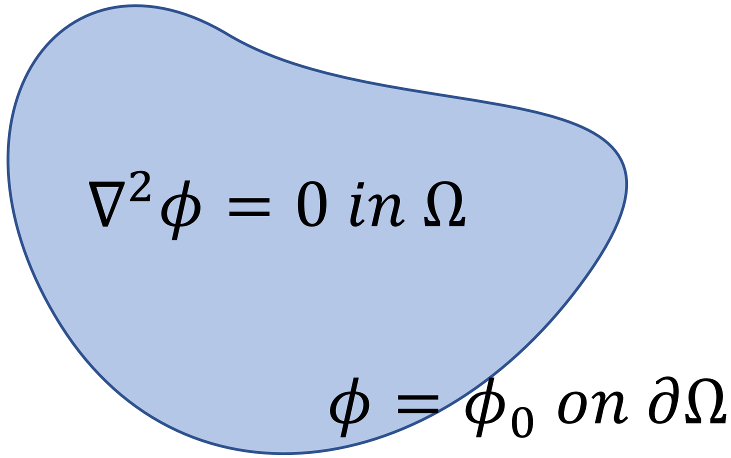


偏微分方程式

ラプラス方程式

一番単純な偏微分方程式，ラプラス方程式を考える

$$\nabla^2 \phi = 0$$



- 差分法
- 有限要素法
- 境界要素法
- 平均値の定理を使った方法

差分法

偏微分を差分で近似する

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

（ここに手書きで式を書く）

有限要素法

偏微分方程式がエネルギーを最小化する性質を利用

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\boxed{\mathcal{W} = \int \nabla\phi \cdot \nabla\phi \, d\Omega \text{を最小化}}$$

（ここに手書きで式を書く）

境界要素法

偏微分方程式が持つ基本解に着目

$$\nabla^2 \phi = 0$$

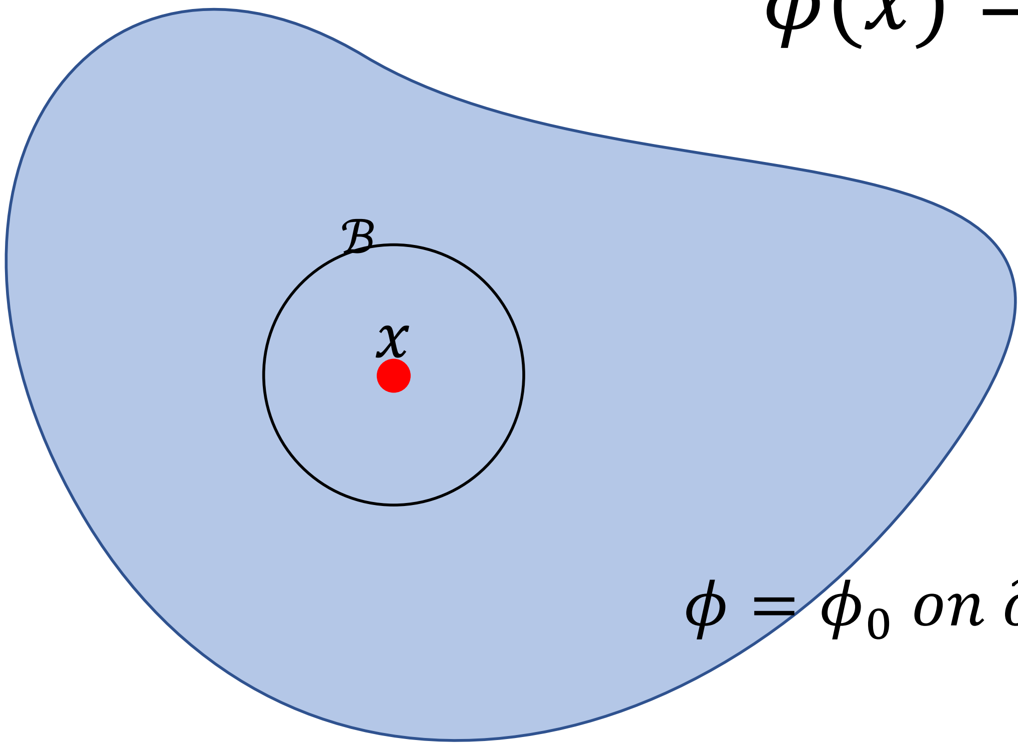
$$\nabla^2 \phi = \delta(x) \Rightarrow \begin{cases} \phi = |x| & \text{1 次元} \\ \phi = \frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{2 次元} \\ \phi = -\frac{1}{4\pi|x|} & \text{3 次元} \end{cases}$$

平均値の定理を使った方法

ラプラス作用素が持つ「平均値の定理」に着目

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \phi\,(y) dy$$



より発展的な内容へ

剛体（点でなく大きさがある物体）の物理

テンソルや解析力学などの知識が必要

連続体（流体・弾性体）の力学

テンソル・連続体力学などの知識が必要