クオータニオンについて

任意軸周りの回転

- 様々な場面で必要 (e.g. カメラ操作)

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

X軸周り

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Y軸周り

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z軸周り

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2\left(1-\cos\theta\right) & u_x u_y\left(1-\cos\theta\right) - u_z\sin\theta & u_x u_z\left(1-\cos\theta\right) + u_y\sin\theta \\ u_y u_x\left(1-\cos\theta\right) + u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2\left(1-\cos\theta\right) & u_y u_z\left(1-\cos\theta\right) - u_x\sin\theta \\ u_z u_x\left(1-\cos\theta\right) - u_y\sin\theta & u_z u_y\left(1-\cos\theta\right) + u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2\left(1-\cos\theta\right) \end{bmatrix}.$$

任意軸周り

(u_x, u_y, u_z) ：回転軸ベクトル

- 行列表現の欠点
  - 無駄に複雑！
    - 本来は2自由度 (軸方向) + 1自由度 (角度) = 3自由度で表されるべき
  - 補間 (混ぜ合わせ) が上手くできない

複素数とクオータニオン (四元数)

- 複素数
  - $\mathbf{i}^2 = -1$
  - $\mathbf{c} = (a, b) \coloneqq a + b\,\mathbf{i} \quad \in \mathbb{C}$
  - $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\,\mathbf{i}$

- クオータニオン
  - $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$
    - $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$ 　　可換ではない！
  - $\mathbf{q} = (a, b, c, d) \coloneqq a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \quad \in \mathbb{H}$
  - $$\begin{aligned}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 &= (a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\,\mathbf{i} \\ &\quad + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)\,\mathbf{j} + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

スカラーとベクトルのペアによる表記

$$s \in \mathbb{R}$$
$$\vec{v} := \left(v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}}\right) \in \mathbb{R}^3$$

- $\mathbf{q} = s + v_{\mathrm{x}}\,\mathbf{i} + v_{\mathrm{y}}\,\mathbf{j} + v_{\mathrm{z}}\,\mathbf{k} =: s + \vec{v} =: (\underbrace{s}_{\text{スカラー部}}, \underbrace{\vec{v}}_{\text{ベクトル部}}) \quad \in \mathbb{H}$

- $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = (s_1,\ \overrightarrow{v_1})(s_2,\ \overrightarrow{v_2})$
$$= (s_1 s_2 - \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2},\ s_1\overrightarrow{v_2} + s_2\overrightarrow{v_1} + \underbrace{\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}}_{\text{可換でないのは外積があるため}})$$

共役とノルムと逆元

- 複素数 $\mathbf{c} \coloneqq (a, b) \in \mathbb{C}$
  - $\bar{\mathbf{c}} \coloneqq (a, -b)$
  - $\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} = (a, b)(a, -b) = (a^2 + b^2, 0) =: |\mathbf{c}|^2$
  - $\mathbf{c}\underbrace{(\bar{\mathbf{c}}/|\mathbf{c}|^2)}_{= \mathbf{c}^{-1}} = 1$

- クオータニオン $\mathbf{q} \coloneqq (s, \vec{v}) \in \mathbb{H}$
  - $\bar{\mathbf{q}} \coloneqq (s, -\vec{v})$
  - $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = (s, \vec{v})(s, -\vec{v}) = (s^2 + |\vec{v}|^2, 0) =: |\mathbf{q}|^2$
  - $\mathbf{q}\underbrace{(\bar{\mathbf{q}}/|\mathbf{q}|^2)}_{= \mathbf{q}^{-1}} = 1$

特に $|\mathbf{q}| = 1$のとき、$\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}}$

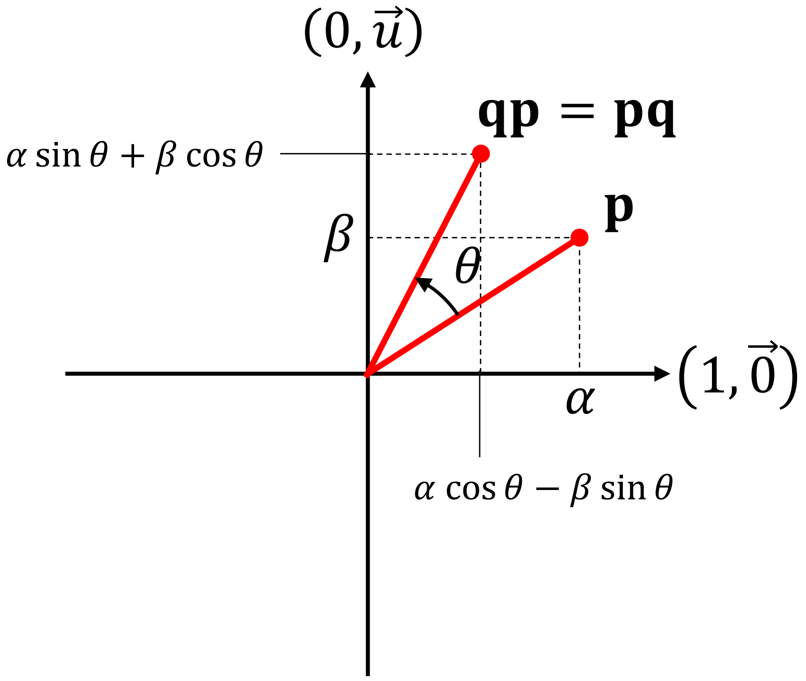
$\vec{u}$ を軸とする回転を表すクオータニオン

- $\mathbf{q} \coloneqq (\cos\theta\,,\ \vec{u}\sin\theta)$ ただし $|\vec{u}| = 1$ つまり $|\mathbf{q}| = 1$
- なぜ？？？
- クオータニオン空間 $\mathbb{H}$ の部分空間として、以下の2つの平面を考える：
  - $P_{\parallel} \coloneqq \{\,(\alpha,\ \beta\vec{u}) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,\} \subset \mathbb{H}$
  - $P_{\perp} \coloneqq \left\{\left(0,\ \alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{H}$ $\overrightarrow{u_\perp}$： $\vec{u}$に直交する任意の単位ベクトル
- これらに属するクオータニオンに対し、$\mathbf{q}$ がどのように作用するか？

Dr. Scott Schaeferによる説明 https://people.engr.tamu.edu/schaefer/teaching/441_Fall2017/lectures/Quaternions.ppt

$\mathbf{p} \in P_{\parallel}$ に対する $\mathbf{q}$ の作用

- $\mathbf{q} \coloneqq (\cos\theta\,,\ \vec{u}\sin\theta)$
- $\mathbf{p} \coloneqq (\alpha,\ \beta\vec{u}) \in P_{\parallel}$
- 左から掛ける：
  - $\mathbf{qp} = (\cos\theta\,,\ \vec{u}\sin\theta)(\alpha,\ \beta\vec{u})$
    $= (\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta\,, (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)\vec{u})$
- 右から掛ける：
  - $\mathbf{pq} = (\alpha,\ \beta\vec{u})(\cos\theta\,,\ \vec{u}\sin\theta)$
    $= (\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta\,, (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)\vec{u})$
    $= \mathbf{qp}$
- $\mathbf{qp\bar{q}} = \mathbf{\bar{q}}(\mathbf{qp}) = \mathbf{p}$



$\mathbf{p} \in P_\perp$ に対する $\mathbf{q}$ の作用

- $\mathbf{q} \coloneqq (\cos\theta\,,\ \vec{u}\sin\theta)$
- $\mathbf{p} \coloneqq \left(0,\ \alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right) \in P_\perp$
- 左から掛ける：
  - $\mathbf{qp} = (\cos\theta\,,\ \vec{u}\sin\theta)\left(0,\ \alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right)$

$$= \left(0, \cos\theta\left(\alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right) + (\vec{u}\sin\theta)\times\left(\alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right)\right)$$

$$= \left(0, (\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)\overrightarrow{u_\perp} + (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right)$$

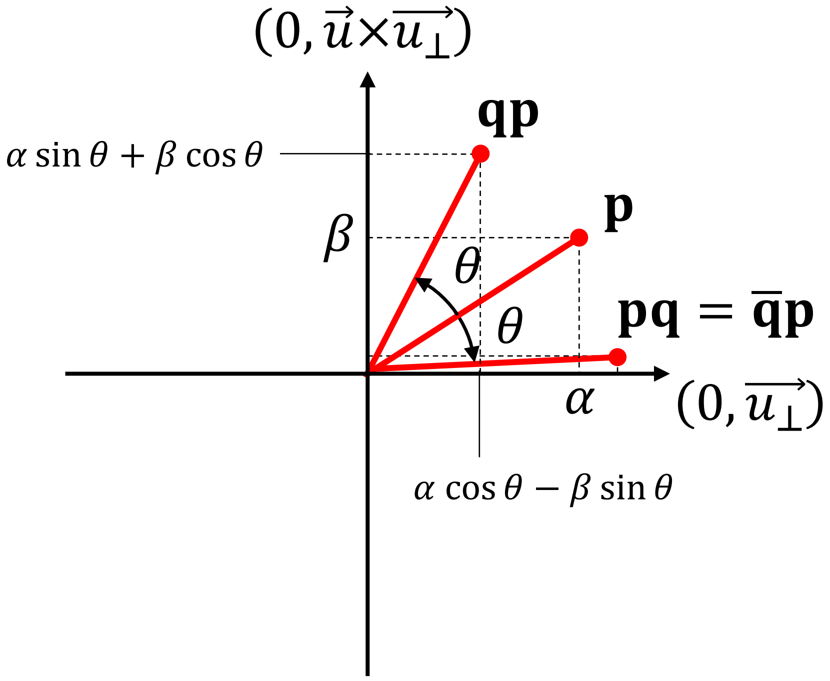
$\vec{u}\times(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp}) = -\overrightarrow{u_\perp}$

- 右から掛ける：
  - $\mathbf{pq} = \left(0,\ \alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right)(\cos\theta\,,\ \vec{u}\sin\theta)$

$$= \left(0, (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)\overrightarrow{u_\perp} + (-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right)$$

$$= \overline{\mathbf{q}}\mathbf{p}$$

- $\mathbf{qp}\overline{\mathbf{q}} = \overline{(\overline{\mathbf{q}})}(\mathbf{qp}) = \mathbf{q}^2\mathbf{p}$



任意の3D座標 $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ の $\mathbf{q}$ による回転

- $\vec{p}$ は 3つのベクトル $\vec{u}, \overrightarrow{u_\perp}, \vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp}$ の線形結合として表現できる：
  - $\vec{p} = \alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp}) + \gamma\vec{u}$

- $$\mathbf{p} \coloneqq (0, \vec{p}) = \underbrace{(0, \gamma\vec{u})}_{\mathbf{p}_\parallel \in P_\parallel} + \underbrace{\left(0, \alpha\overrightarrow{u_\perp} + \beta(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp})\right)}_{\mathbf{p}_\perp \in P_\perp}$$

- $$\begin{aligned} \mathbf{q}\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q}(\mathbf{p}_\parallel + \mathbf{p}_\perp)\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\mathbf{p}_\parallel\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\mathbf{p}_\perp\bar{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{p}_\parallel + \mathbf{q}^2\mathbf{p}_\perp \\ &= (0, \underbrace{(\alpha\cos 2\theta - \beta\sin 2\theta)\overrightarrow{u_\perp} + (\alpha\sin 2\theta + \beta\cos 2\theta)(\vec{u}\times\overrightarrow{u_\perp}) + \gamma\vec{u}}_{\vec{p}\text{ を }\vec{u}\text{ 軸周りで }2\theta\text{ 回転させた座標}}) \end{aligned}$$

- θ だけ回転させるには $\mathbf{q} \coloneqq \left(\cos\frac{\theta}{2},\ \vec{u}\sin\frac{\theta}{2}\right)$ とする

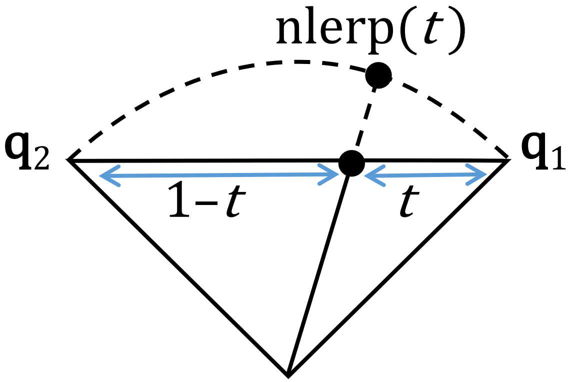
行列とクオータニオンの比較

	行列	クオータニオン
サイズ	9	4
3D座標の回転に必要な掛け算の回数	9	28
回転の合成に必要な掛け算の回数	27	16

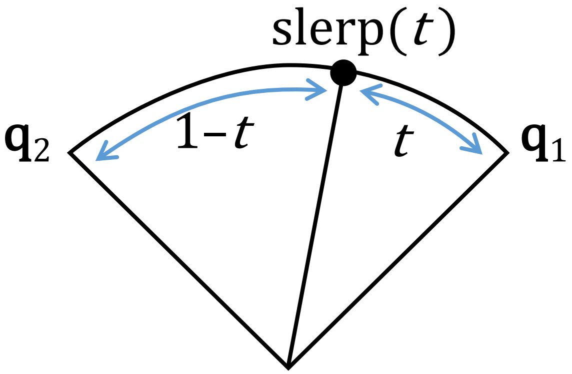
- 合成や補間にはクオータニオンを使い、最終的な座標変換の計算には行列を使う

クオータニオンによる回転の補間

- 線形補間＋正規化 (nlerp)
  - $\mathrm{nlerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) \coloneqq \mathrm{normalize}\big((1-t)\mathbf{q}_1 + t\,\mathbf{q}_2\big)$
  - ☺計算が少ない、☹角速度が一定でない



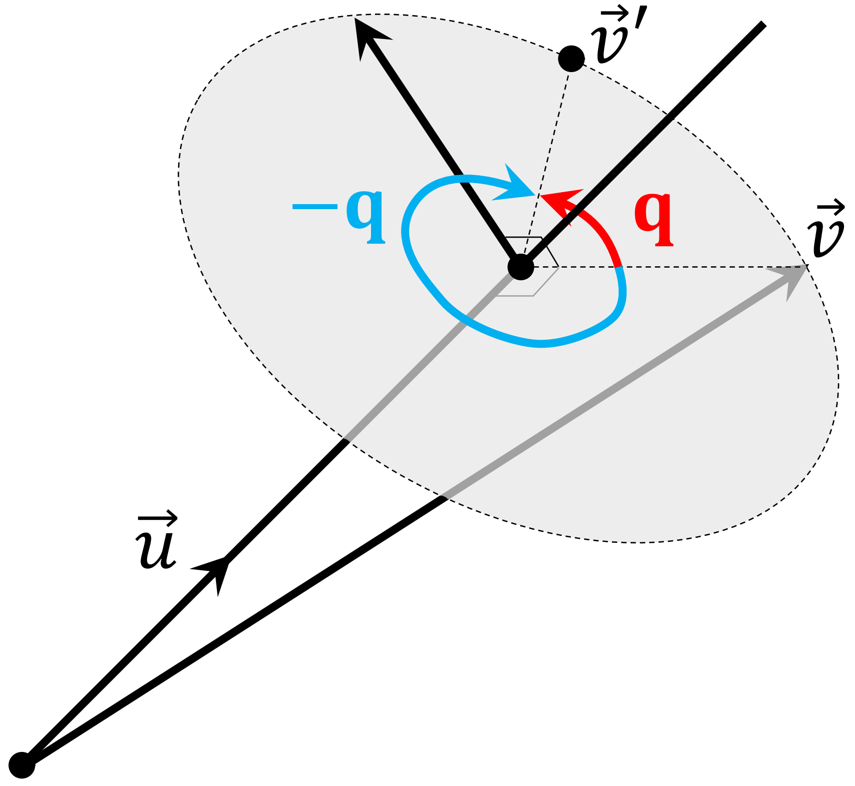
- 球面線形補間 (slerp)
  - $\Omega = \cos^{-1}(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)$
  - $\mathrm{slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) \coloneqq \dfrac{\sin(1-t)\Omega}{\sin\Omega}\mathbf{q}_1 + \dfrac{\sin t\Omega}{\sin\Omega}\mathbf{q}_2$
  - ☹計算が多い、☺角速度が一定



Animating rotation with quaternion curves. Shoemake, SIGGRAPH 1985
http://number-none.com/product/Understanding%20Slerp,%20Then%20Not%20Using%20It/

正負のクオータニオン

- 回転角がθのクオータニオン：
  - $\mathbf{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{u}\sin\frac{\theta}{2}$
- 回転角が$\theta - 2\pi$のクオータニオン：
  - $\cos\frac{\theta-2\pi}{2} + \vec{u}\sin\frac{\theta-2\pi}{2} = -\mathbf{q}$



- $\mathbf{q}_1$から$\mathbf{q}_2$へ補間する際、$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2$ が負であれば$\mathbf{q}_2$を反転してから補間する
  - そうしないと補間過程が最短でなくなる