

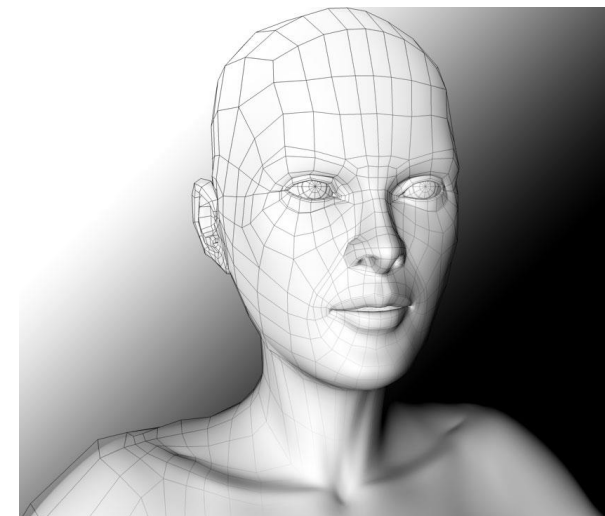
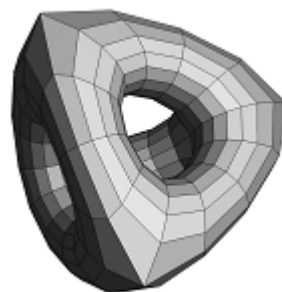
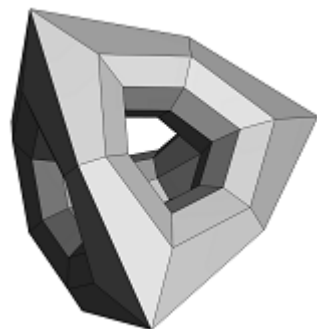
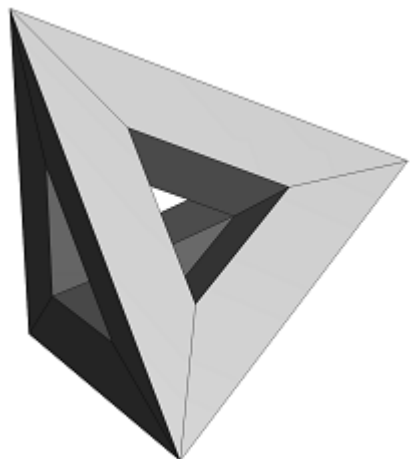
# コンピュータグラフィクス論

## －モデリング(2)－

2017年4月20日

高山 健志

# サブディビジョン曲面

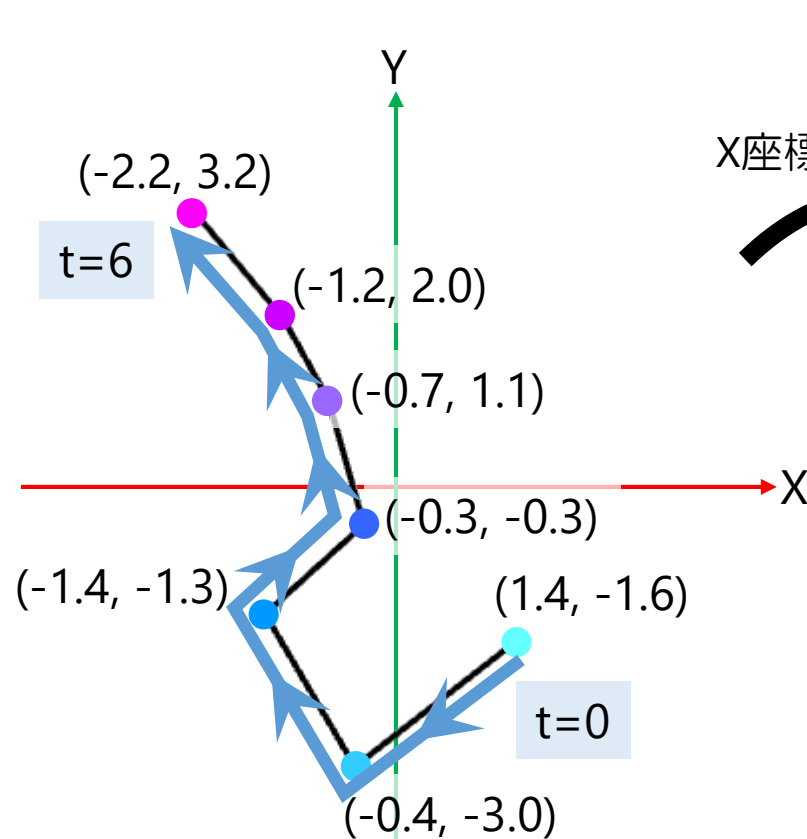


その理論的土台となる

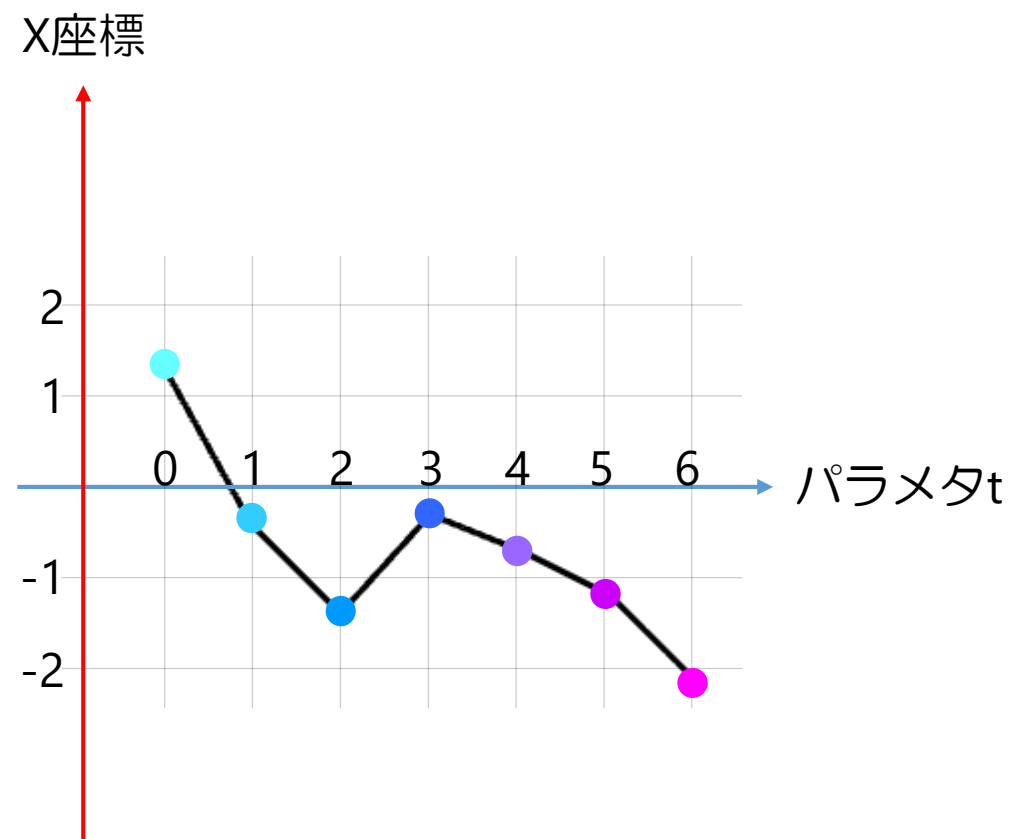
## Bスプライン曲線

Basis, 基底

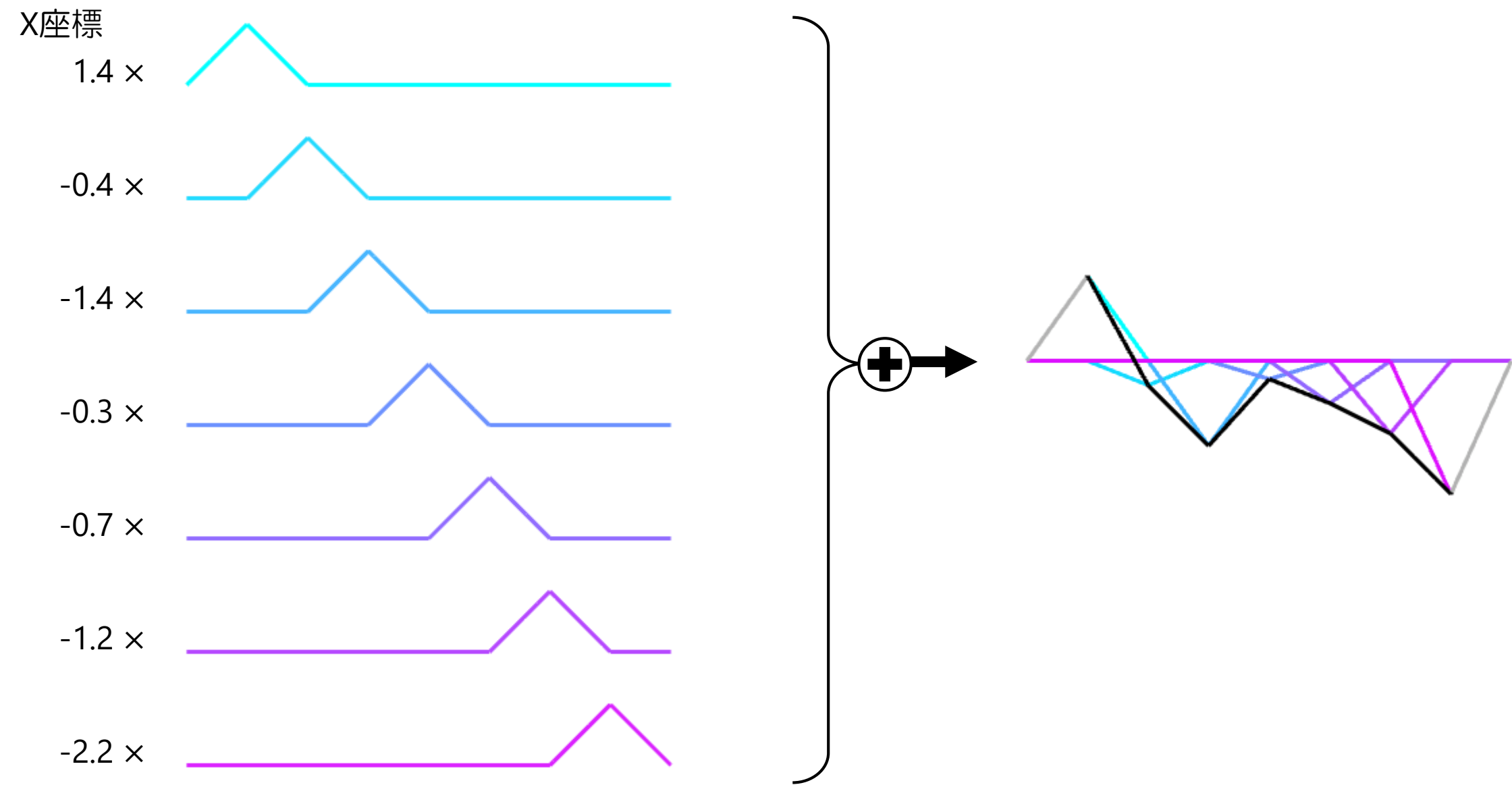
# 例：2Dの折れ線を関数として表現



X座標の関数に着目



# 1次の基底関数を用いた折れ線の表現



# de Boor の n次基底関数

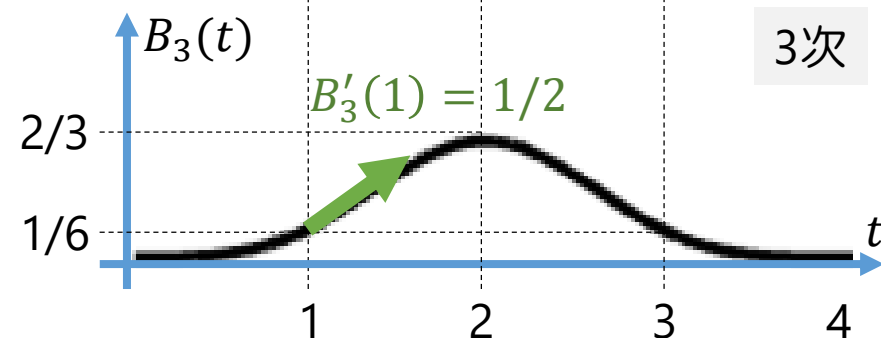
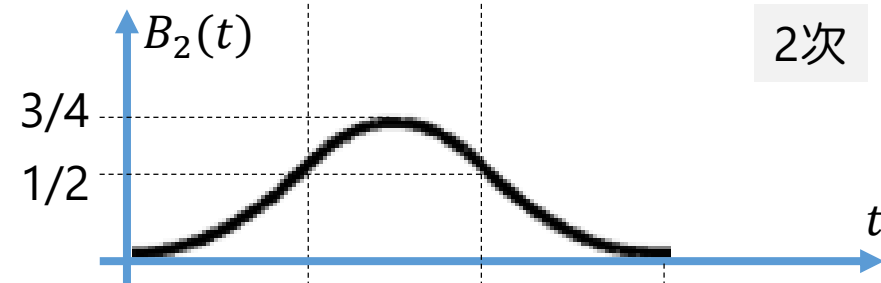
- 再帰的な定義：

- $B_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

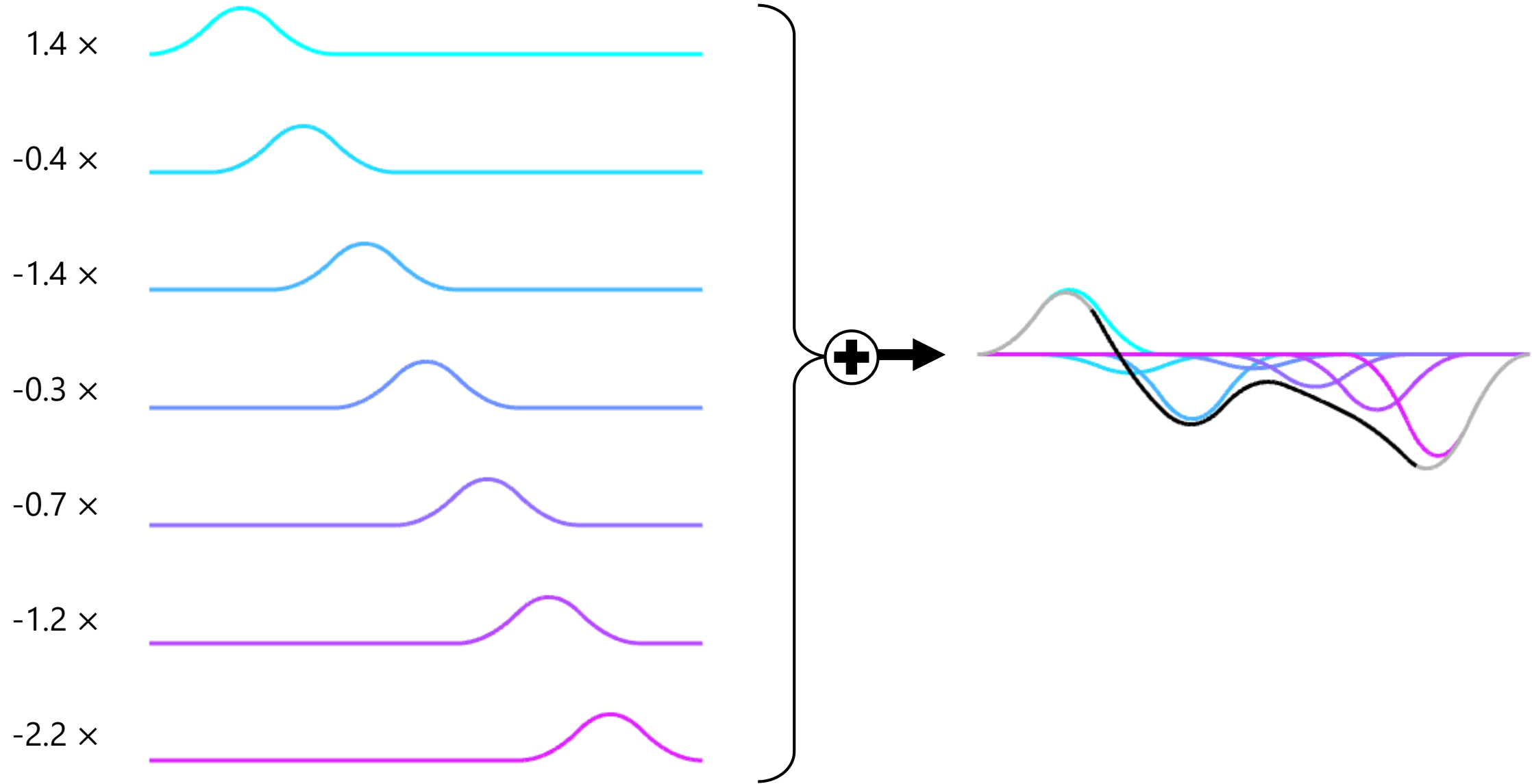
- $B_n(t) = \frac{t}{n} B_{n-1}(t) + \frac{n+1-t}{n} B_{n-1}(t-1)$

- 性質：

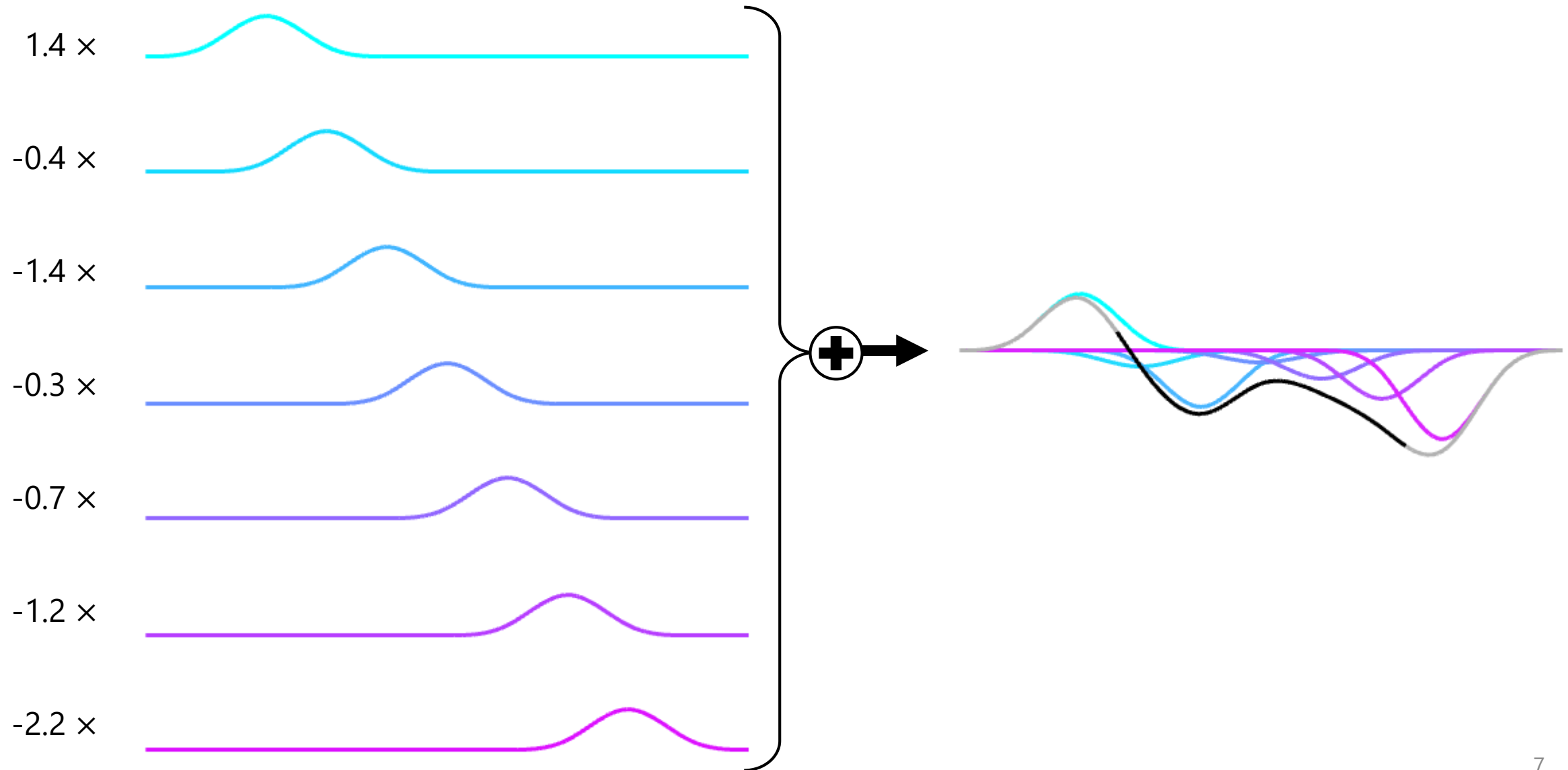
- n次区分多項式
- $[0, n+1]$  の外では常にゼロ (local support)
- $C^{n-1}$ 連続



# 2次の基底関数を使う → 2次Bスプライン



# 3次の基底関数を使う → 3次Bスプライン

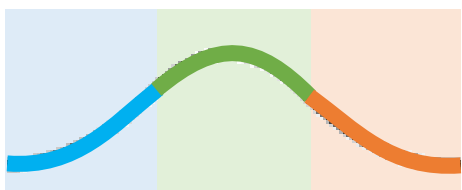


# 基底関数の大事な性質：partition-of-unity

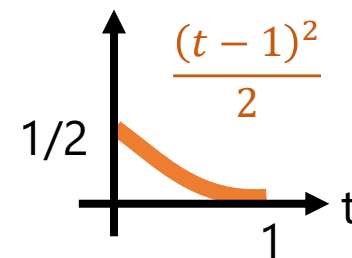
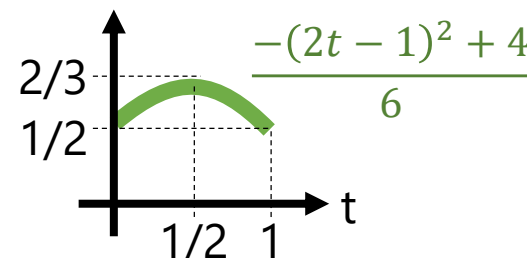
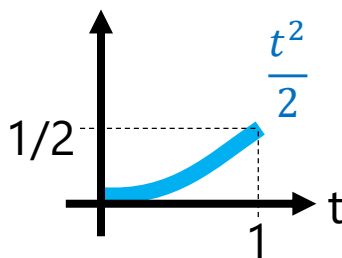
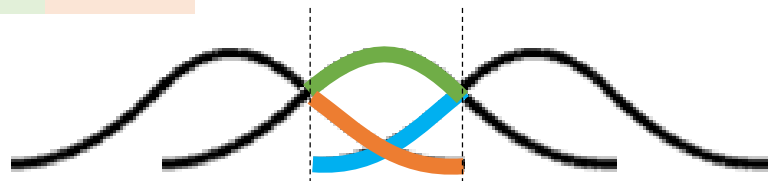
- Bスプライン曲線のX座標： $x(t) = \sum_i x_i B_n(t - i)$
- すべての制御点の座標  $x_i$  を定数  $c$  だけ平行移動することを考える：
  - $x(t) = \sum_i (x_i + c) B_n(t - i)$

$$= \sum_i x_i B_n(t - i) + c \underbrace{\sum_i B_n(t - i)}_1$$

- partition-of-unityを満たせば、曲線全体も  $c$  だけ平行移動したものになる



2次の場合





# 3次Bスプライン曲線と3次Catmull-Rom曲線

数学的な表現

区分3次曲線

区分3次曲線

定義の方法

3次基底関数の線形結合

$t = t_k$ における座標値を指定すると、  
そこでの微分値を自動設定

各区間をエルミート補間

制御点を通る？

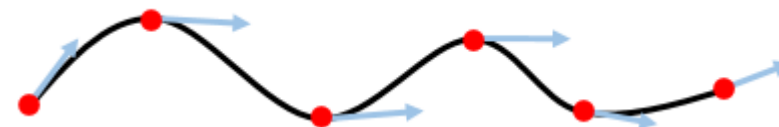
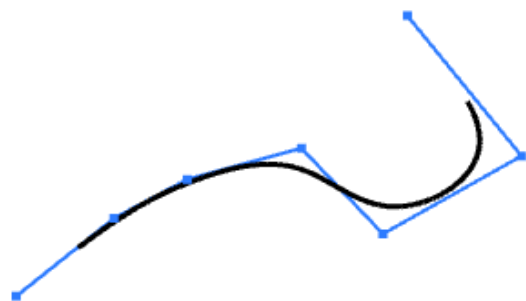
通らない

通る

区間境界の  
連続性

$C^2$ 連続

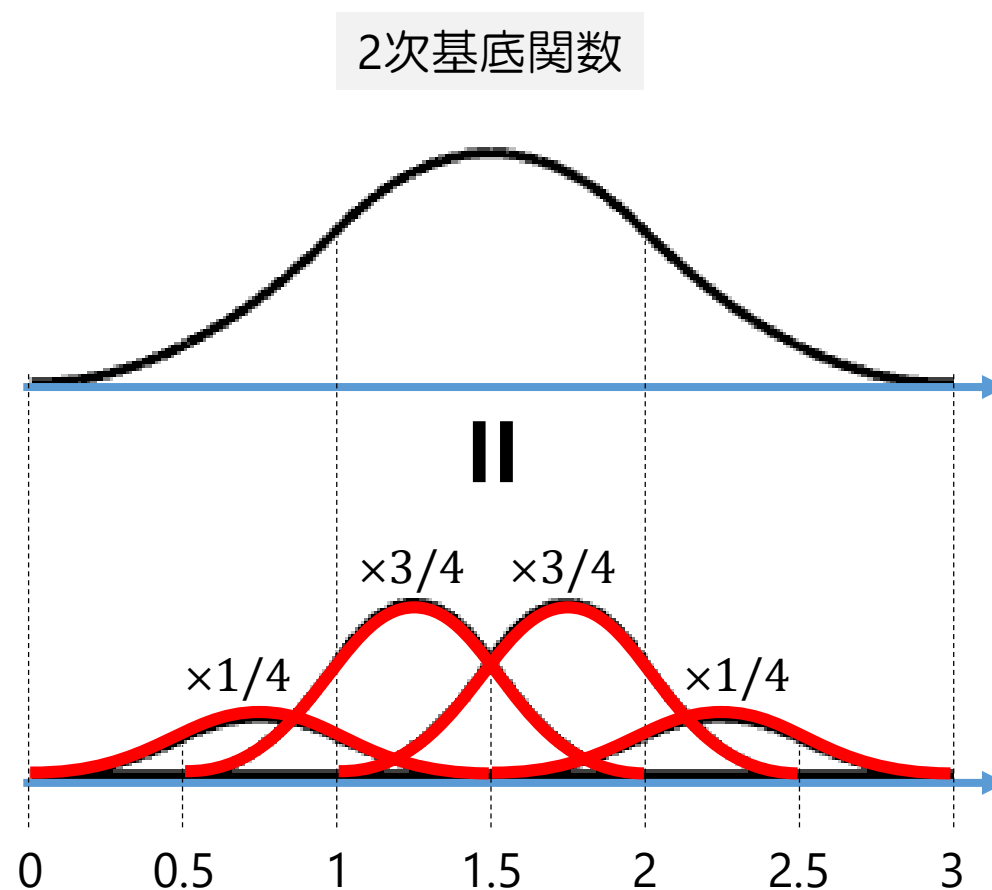
$C^1$ 連続



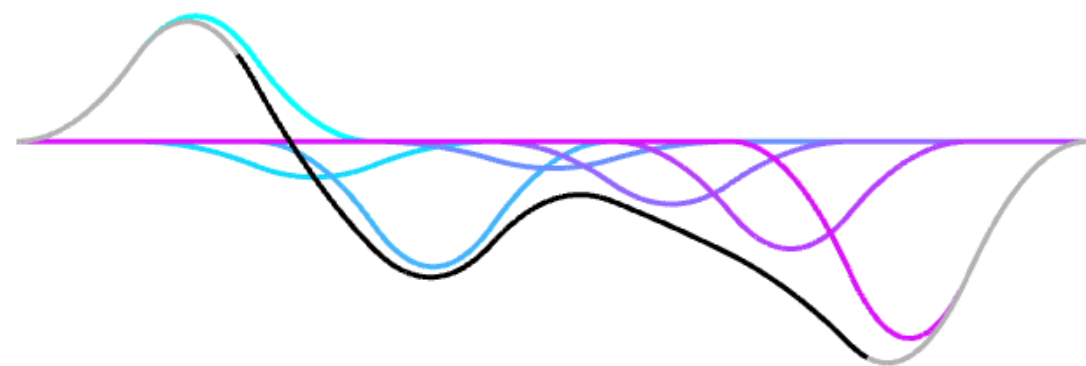
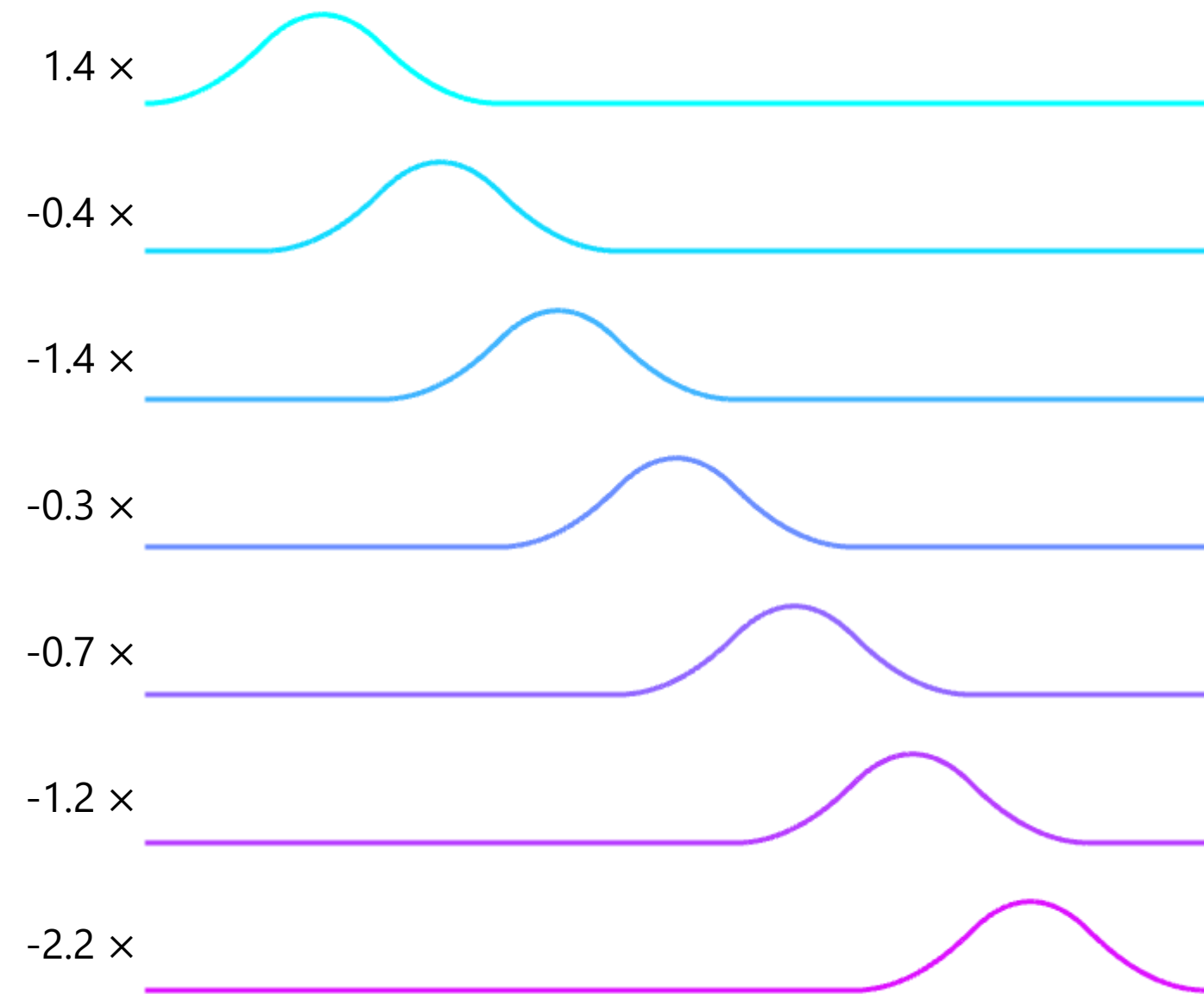
Bスプラインからサブディビジョンへ

# 基底関数のもう一つの重要な性質

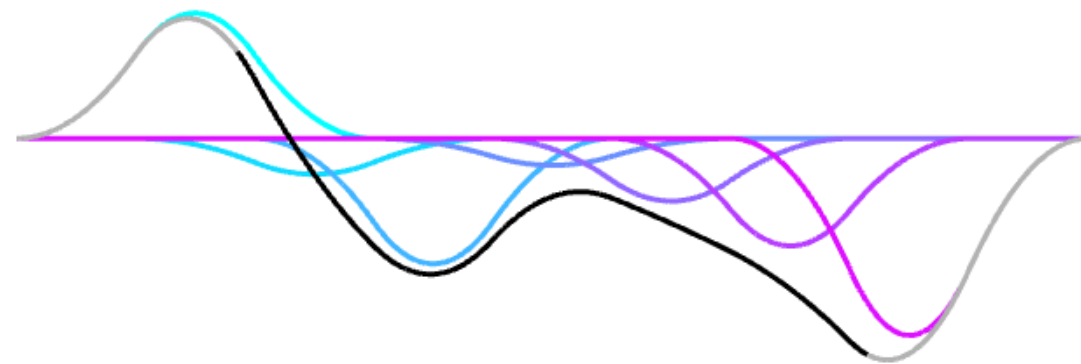
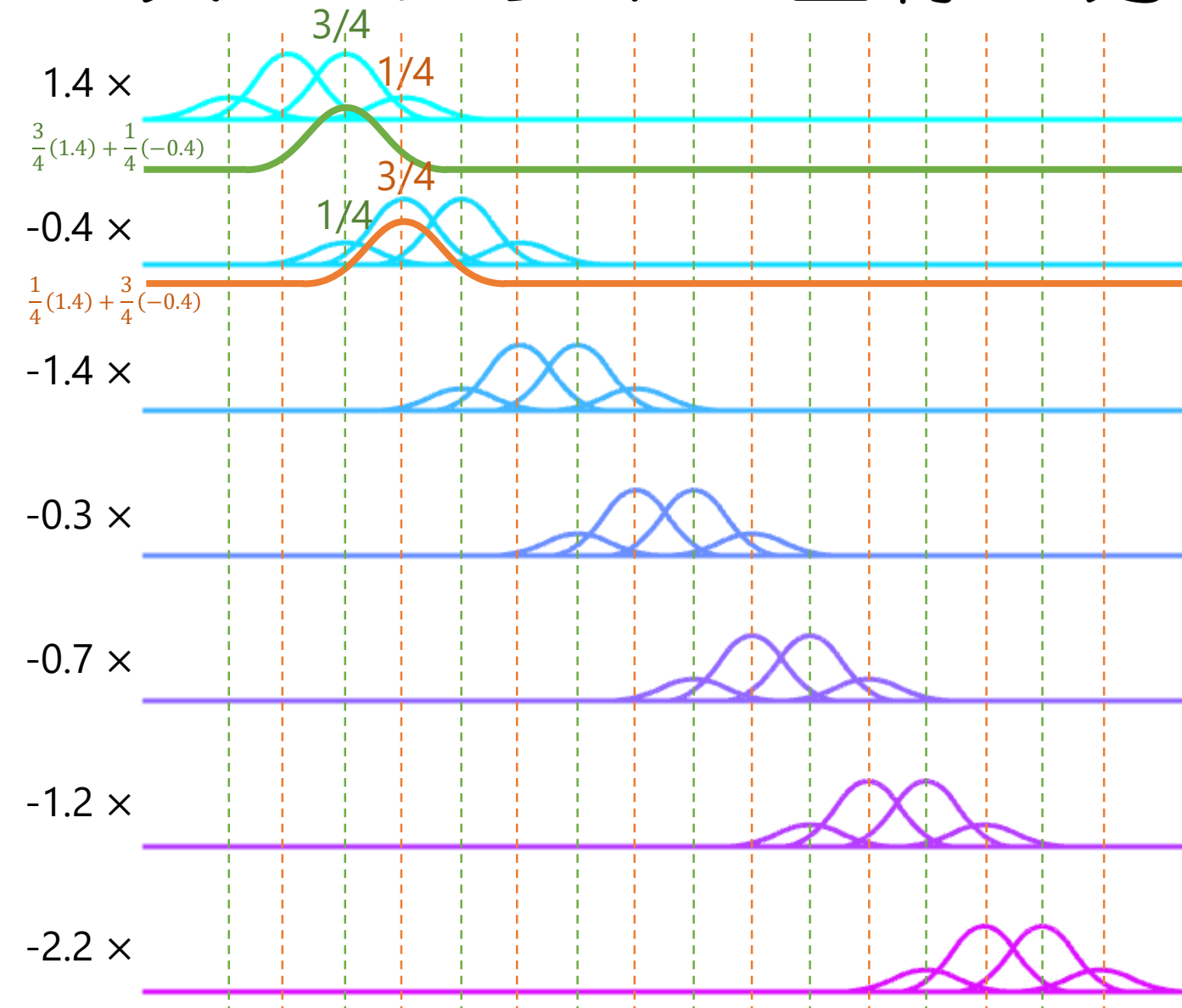
- 同じ基底関数の local support を半分にしたもの重み付け和に分解可能



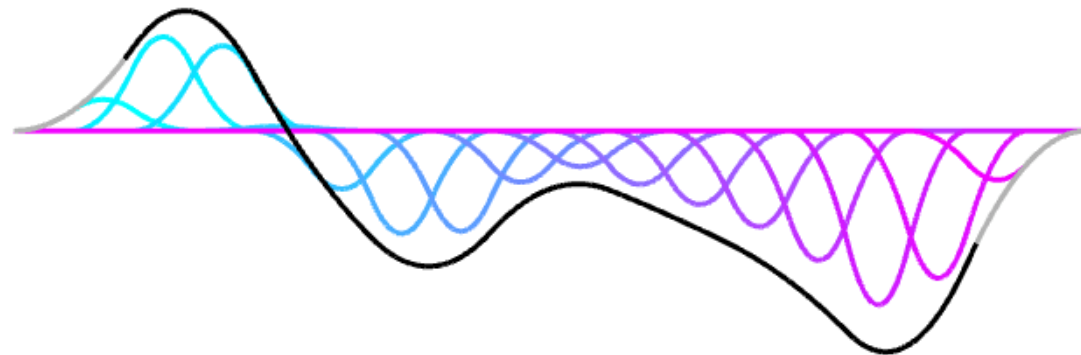
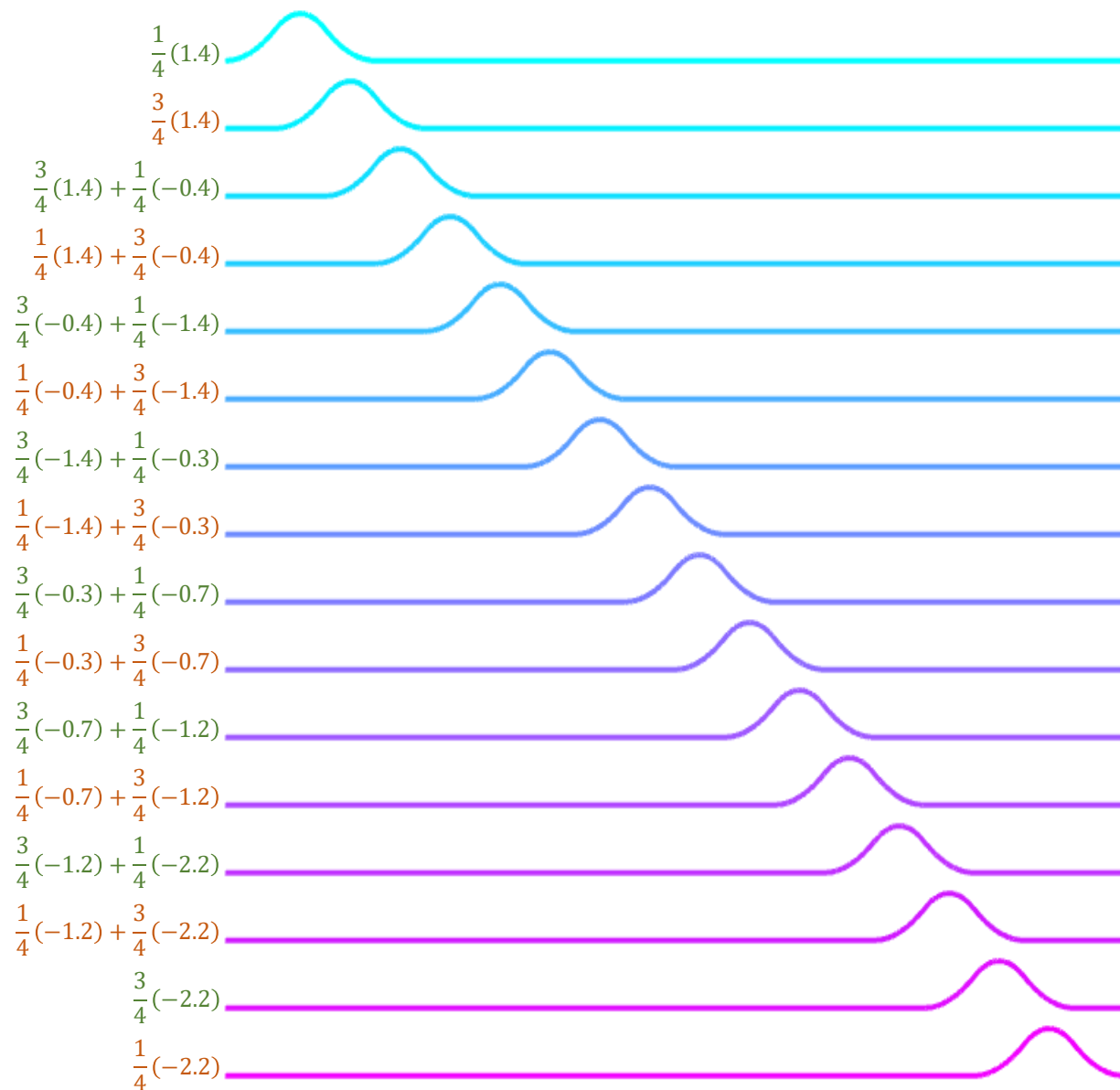
# 2次Bスプライン曲線の分割



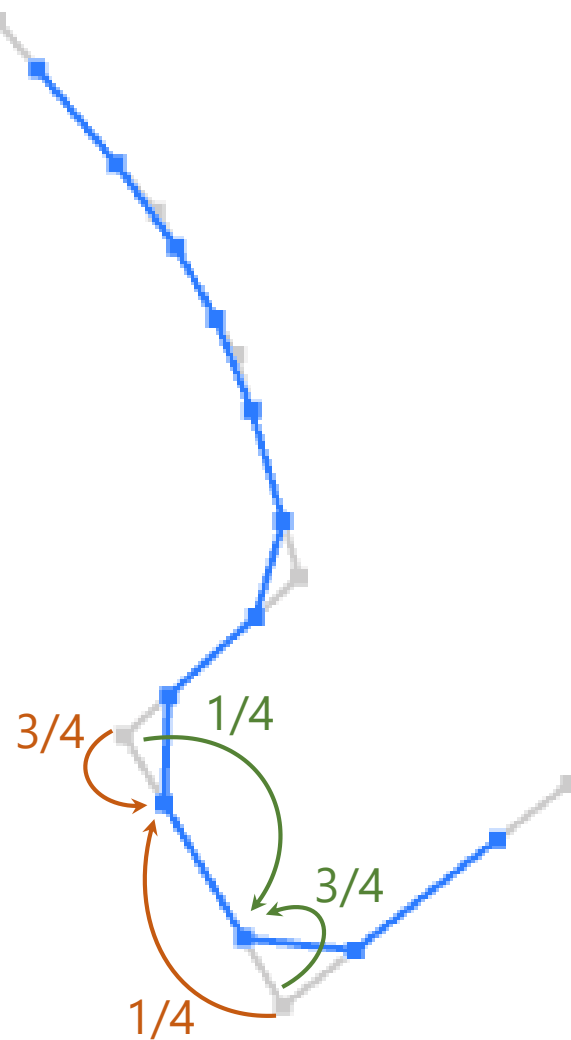
# 2次Bスプライン曲線の分割



# 2次Bスプライン曲線の分割



# サブディビジョンによる2次曲線の生成



ステンシルA

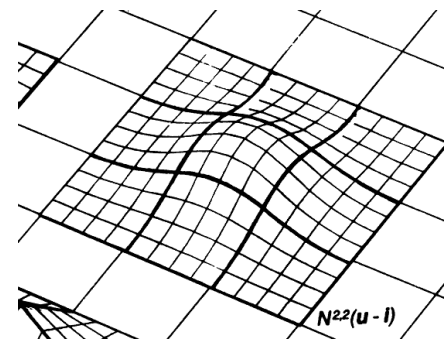


ステンシルB

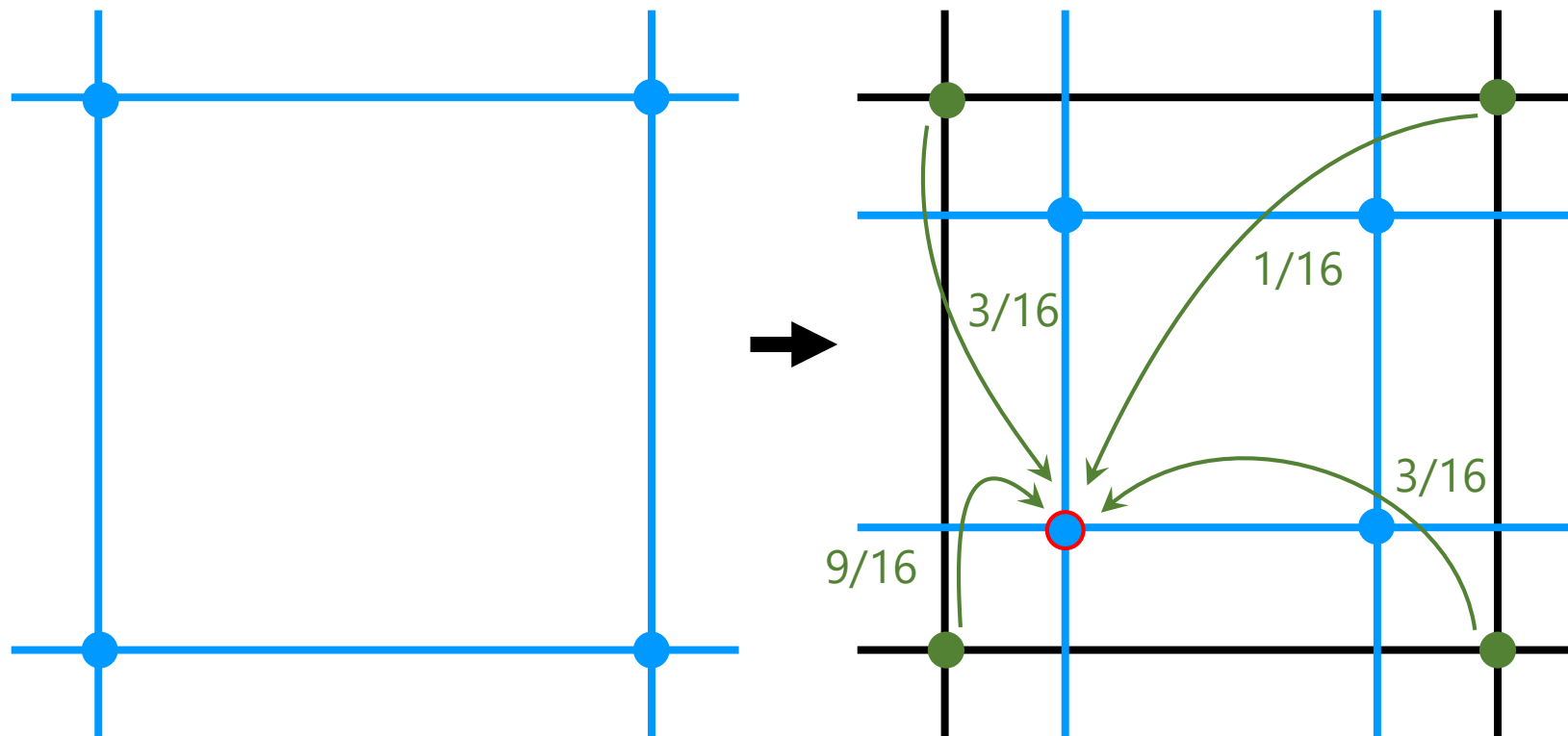


- 各頂点を、2個の頂点に分裂させる  
(= 各エッジについて、2個の頂点を生成)

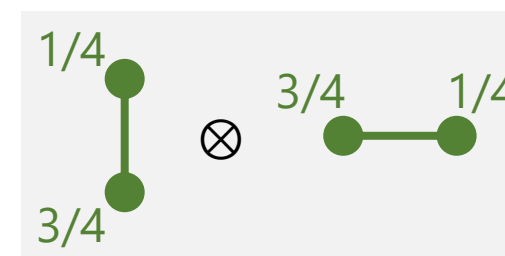
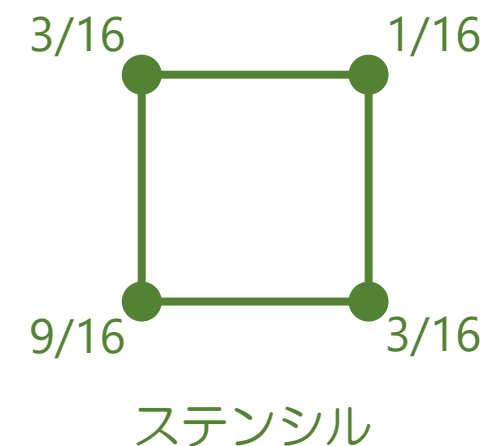
# サブディビジョンによる 2次曲面の生成



双2次基底関数  
 $B_{2,2}(s, t) = B_2(s) B_2(t)$

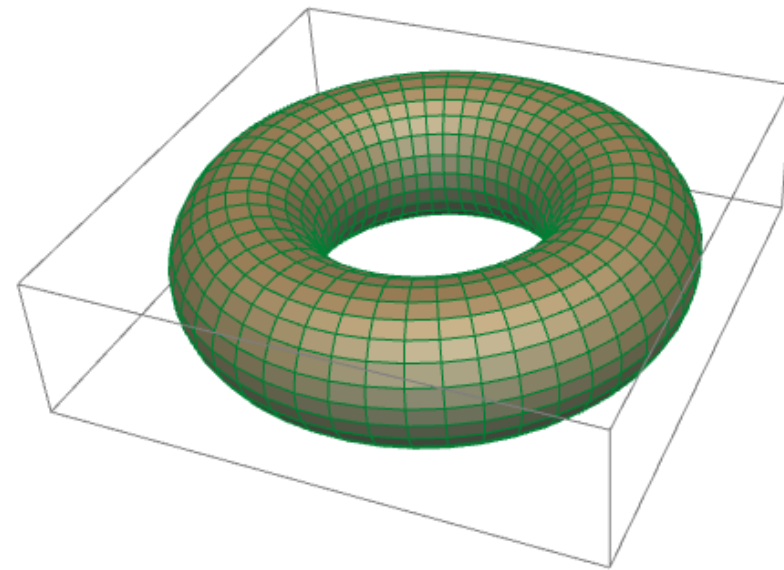
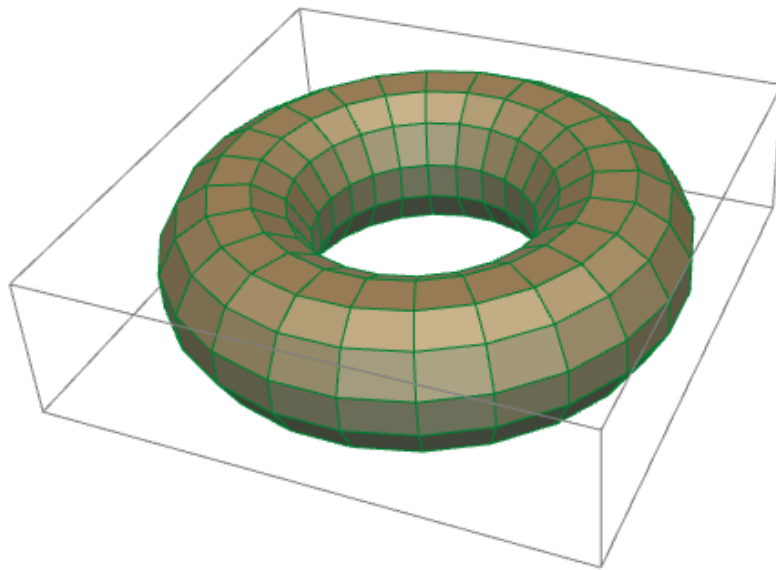
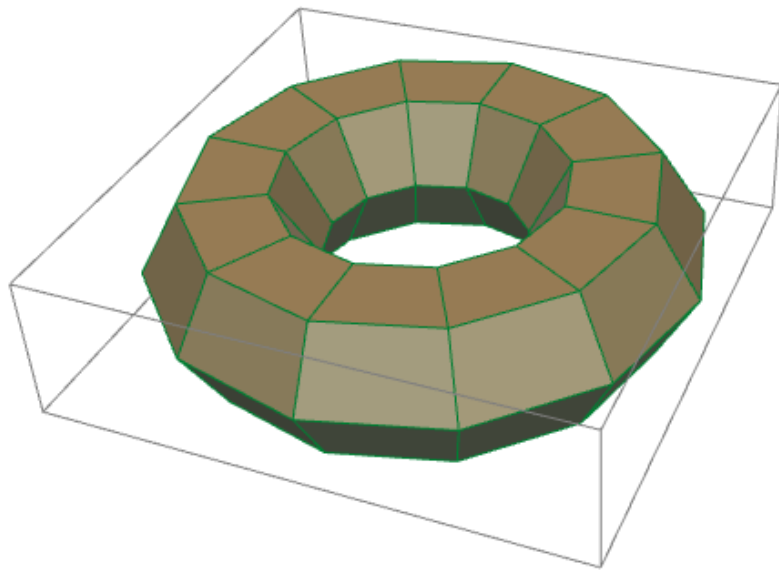


- 各頂点を、4個の頂点に分裂させる  
(= 各面について、4個の頂点を生成)

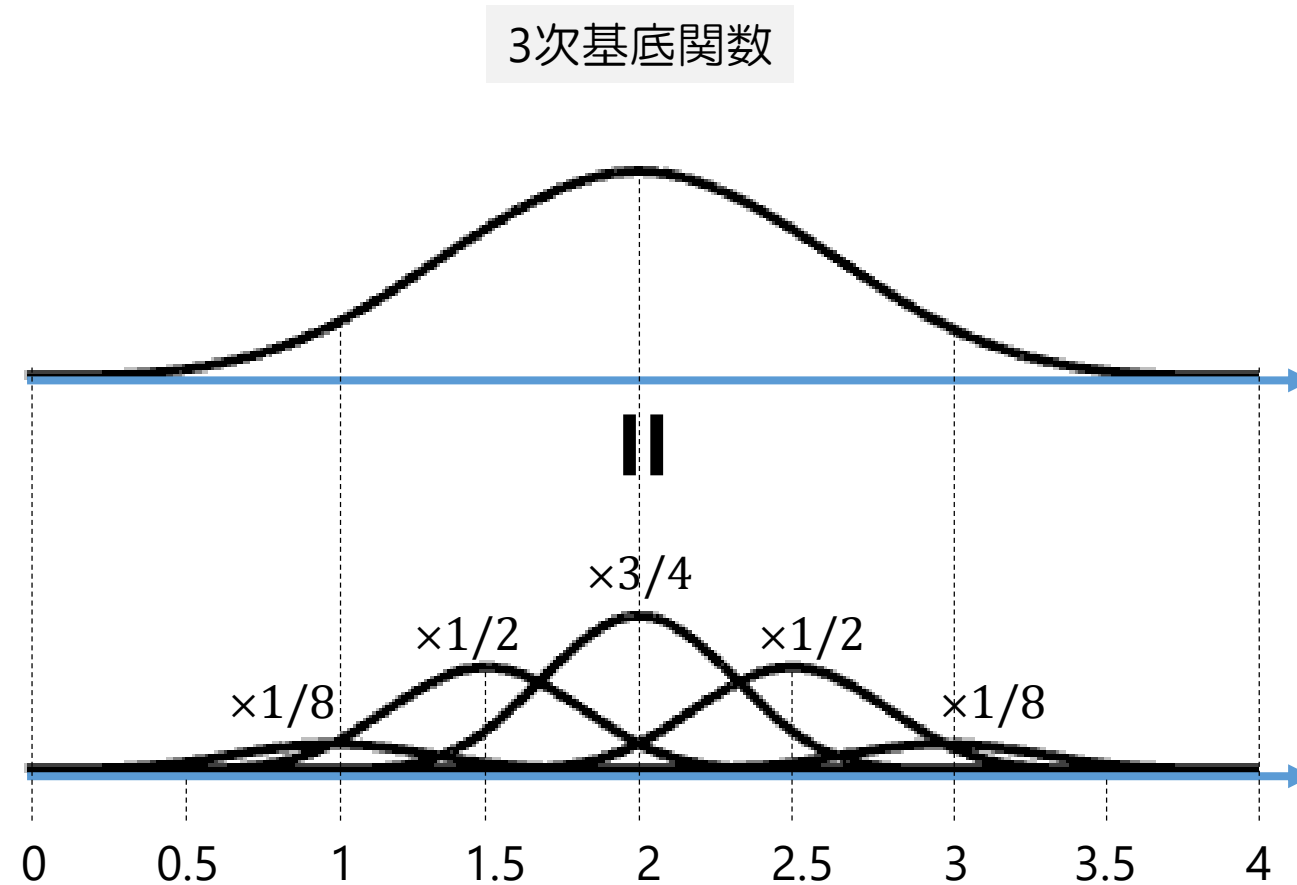




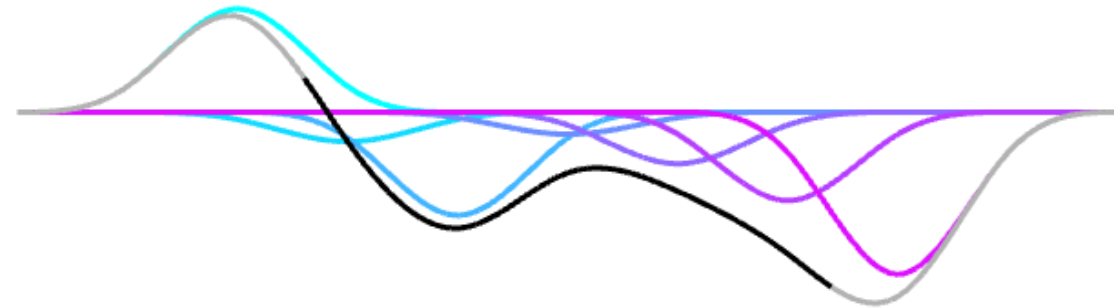
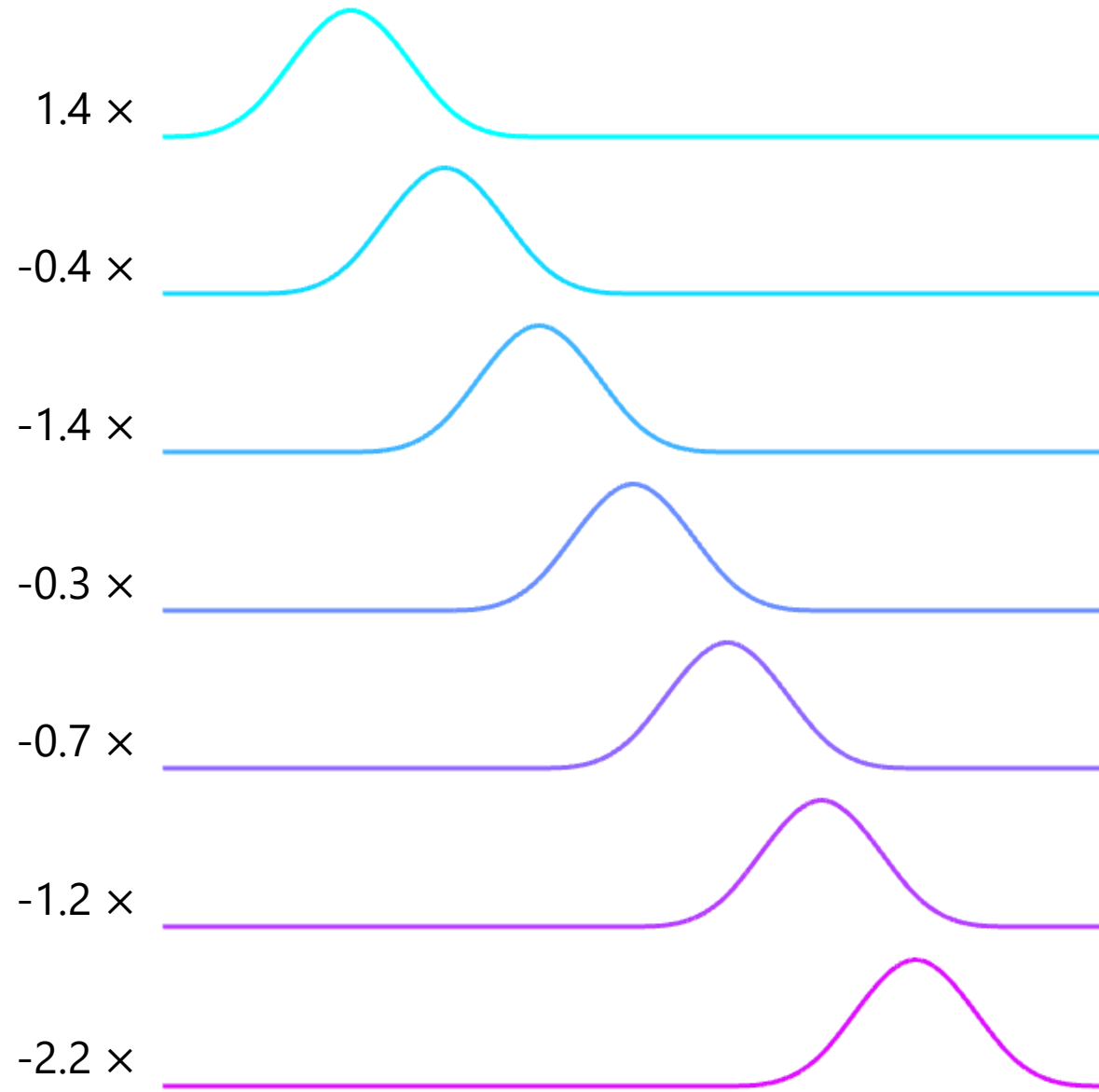
# トーラス形状への適用結果



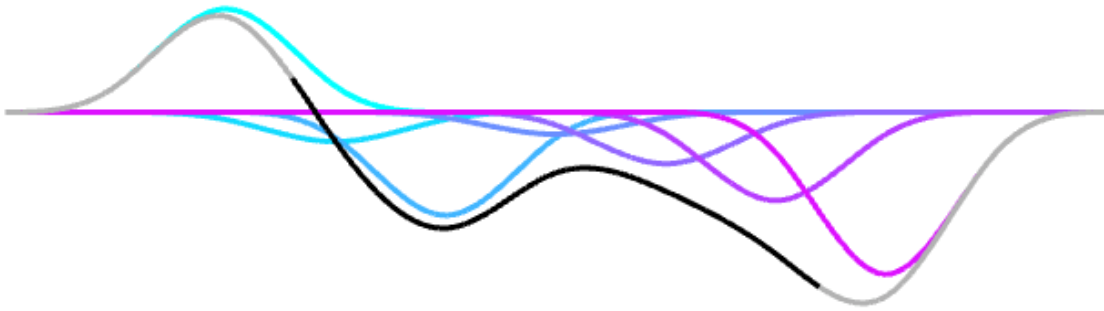
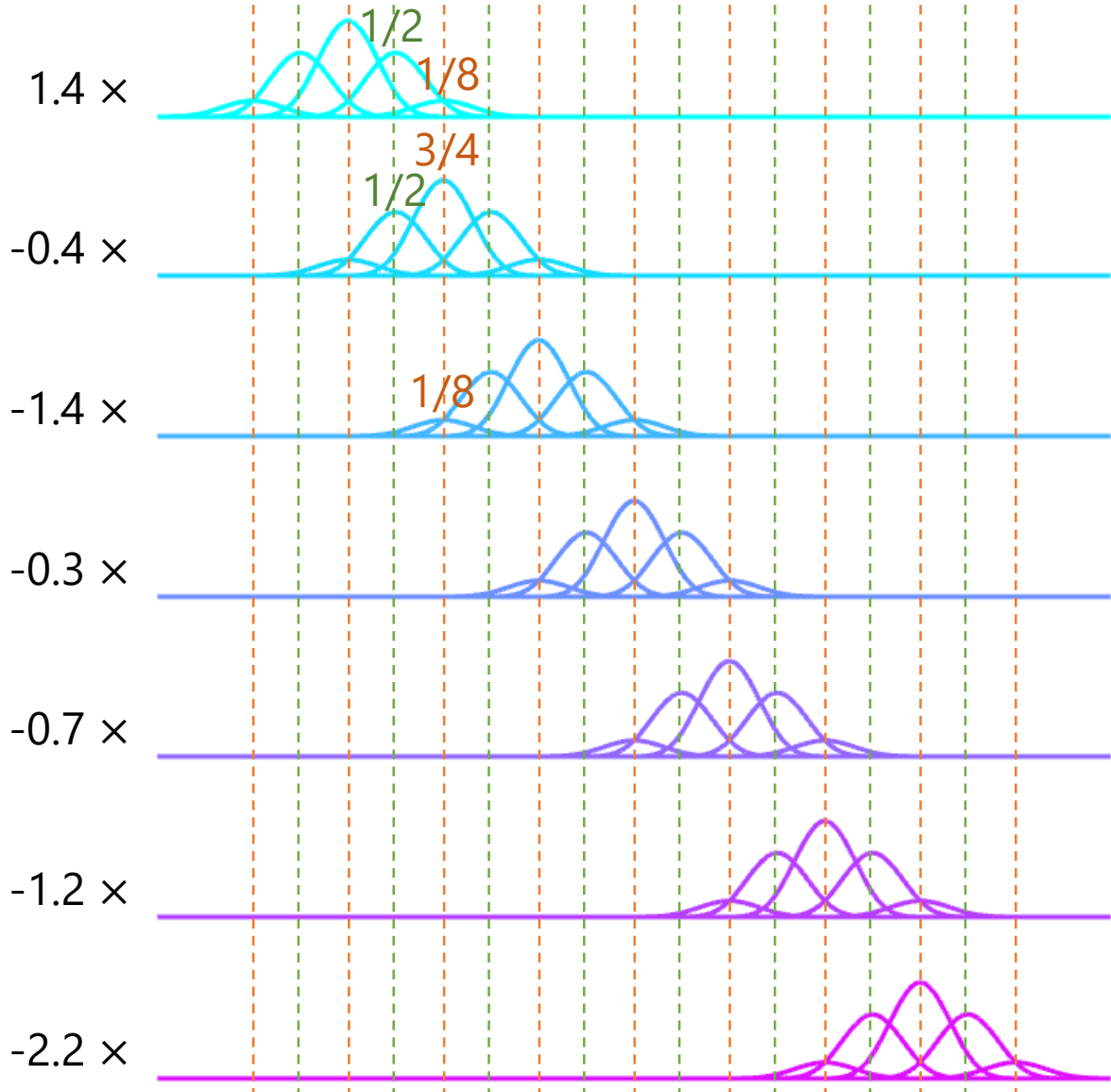
# 3次Bスプラインの場合



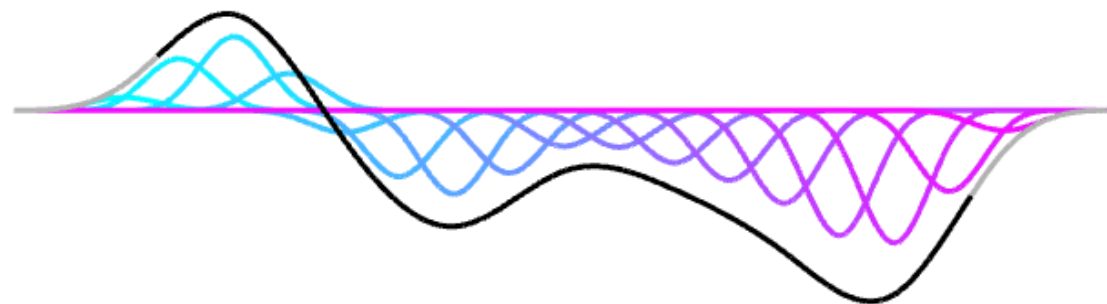
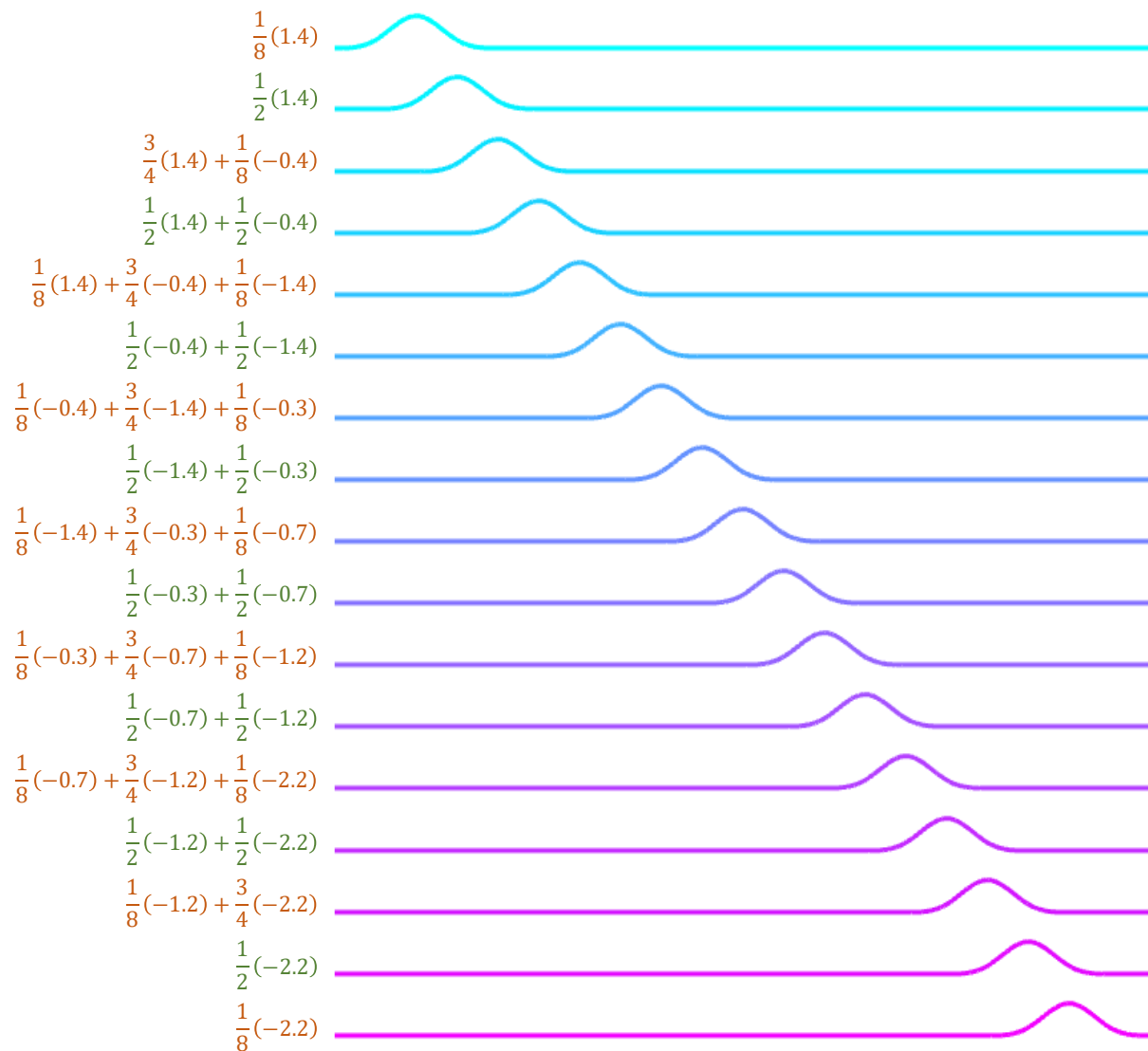
# 3次Bスプライン曲線の分割



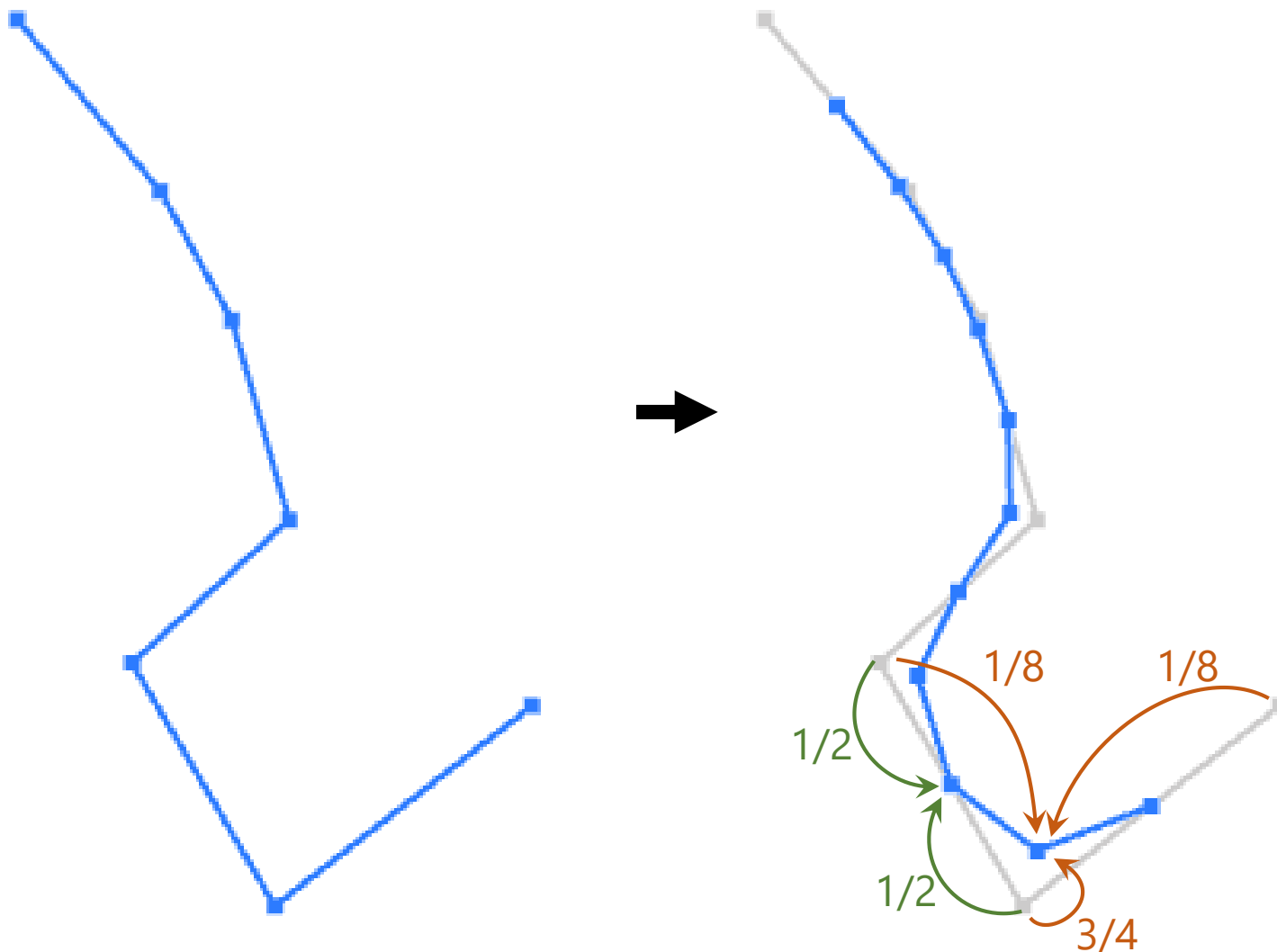
# 3次Bスプライン曲線の分割



# 3次Bスプライン曲線の分割



# サブディビジョンによる3次曲線の生成



ステンシルA

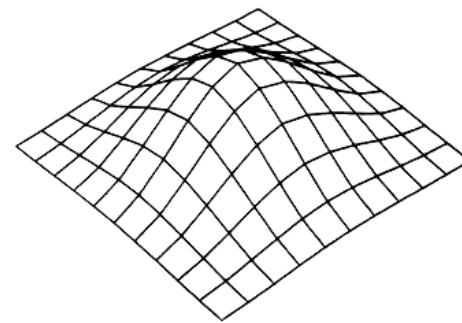


ステンシルB

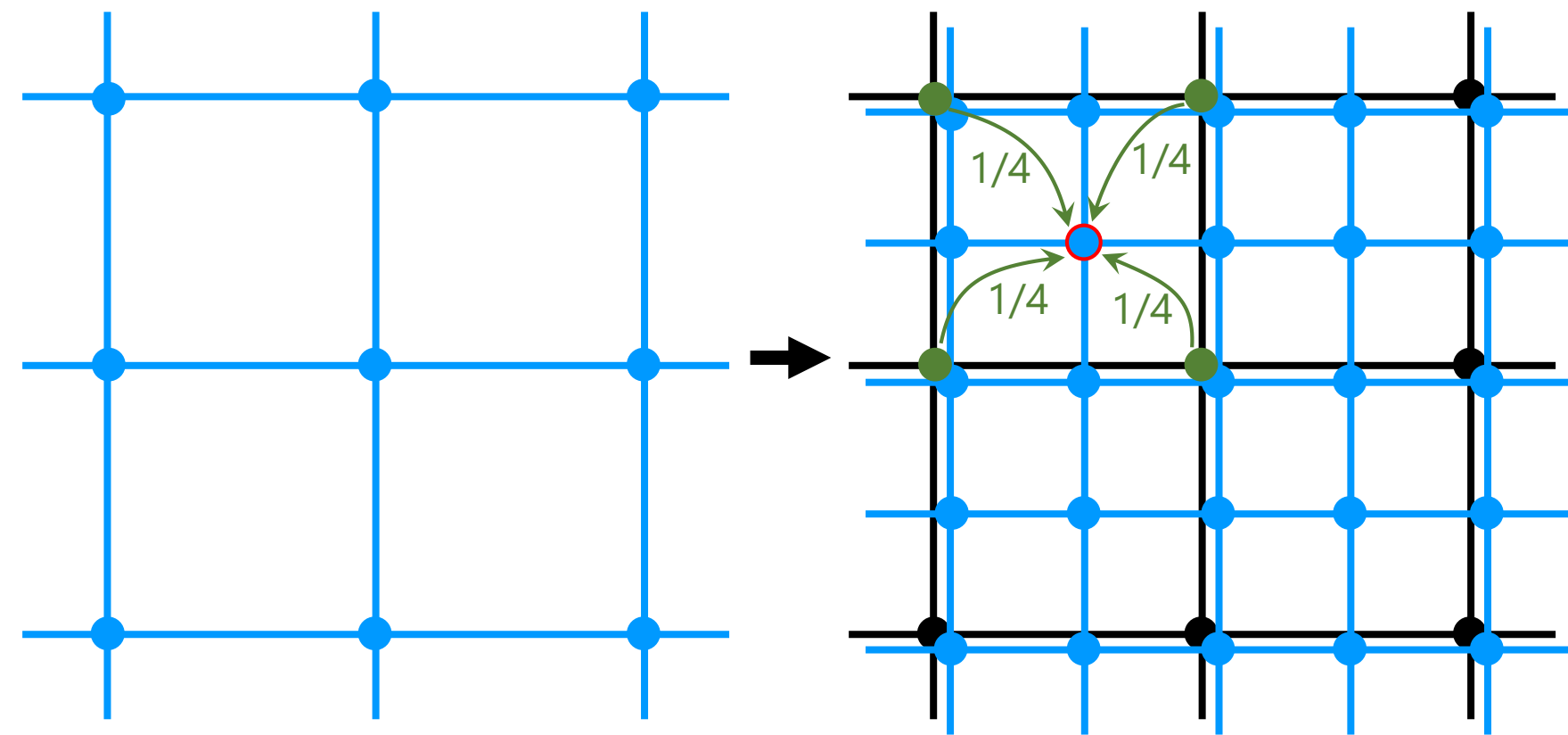


- 各エッジについて、その中点に新しい頂点を生成
- 各頂点を、周囲の頂点と重み付け平均した位置に動かす

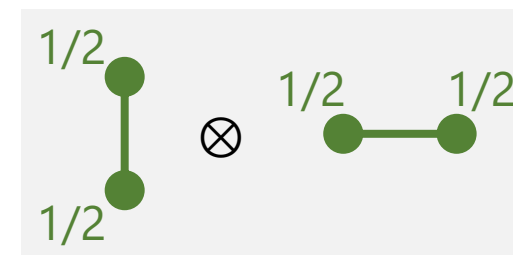
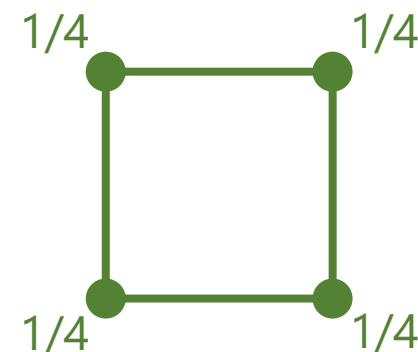
# サブディビジョンによる 3次曲面の生成



双3次基底関数  
 $B_{3,3}(s, t) = B_3(s) B_3(t)$

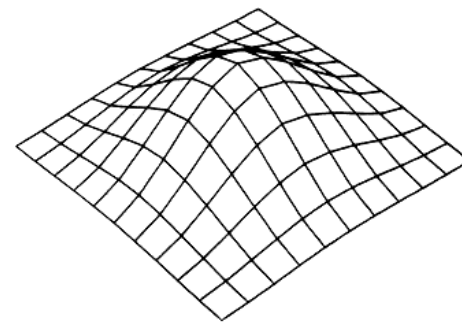


“face point” ステンシル

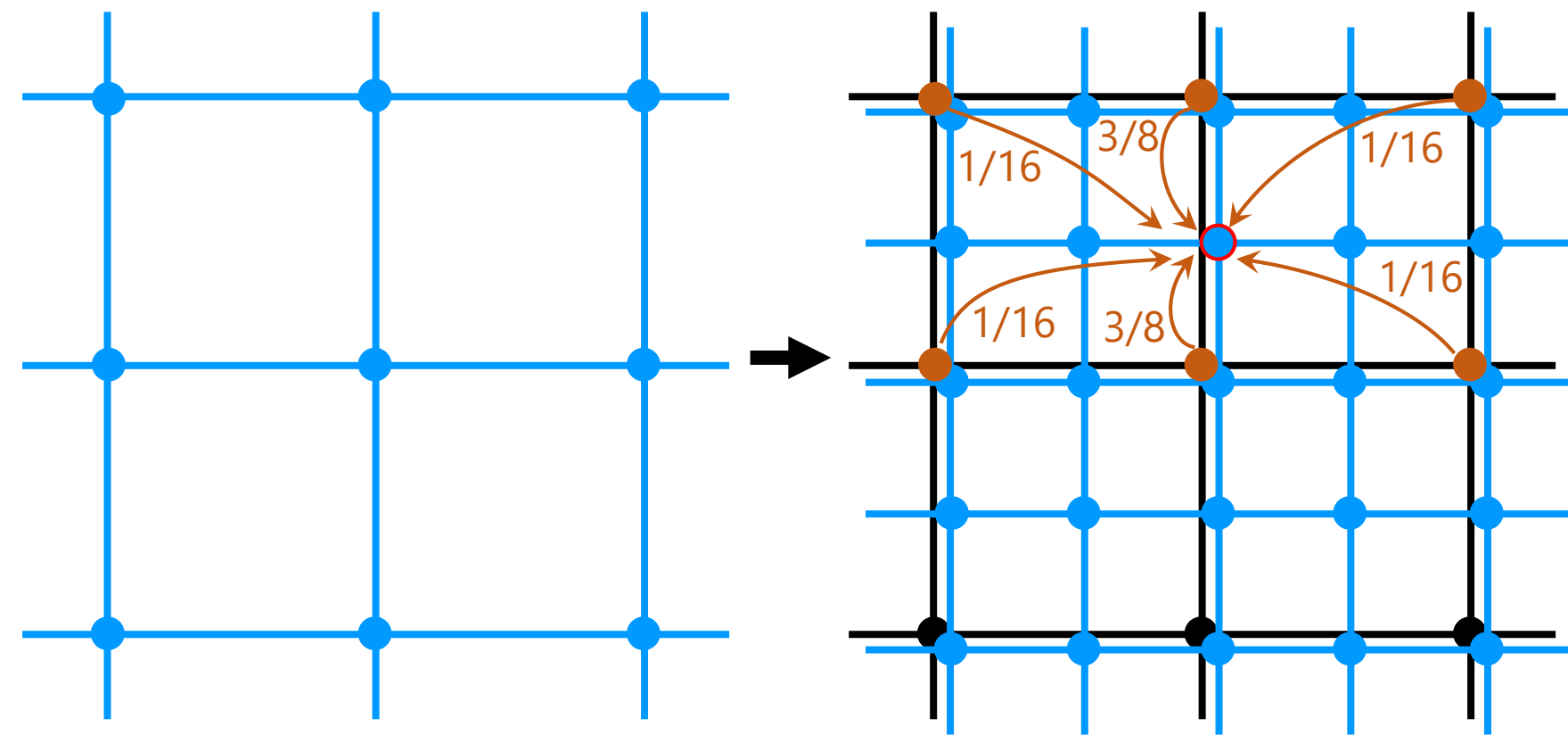


- 各面について、その重心に1個の頂点を生成

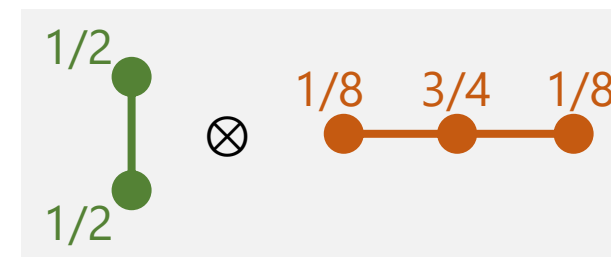
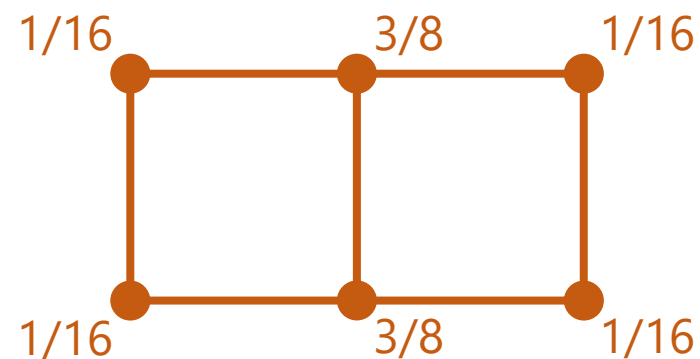
# サブディビジョンによる 3次曲面の生成



双3次基底関数  
 $B_{3,3}(s, t) = B_3(s) B_3(t)$



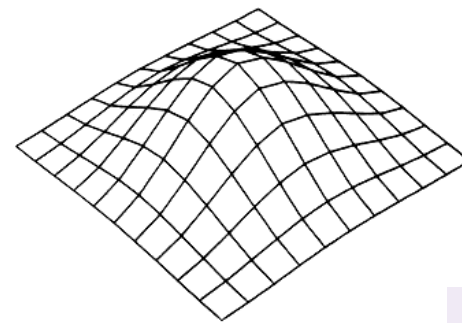
“edge point” ステンシル



- 各エッジについて、周囲の頂点を重み付き平均した位置に新しい頂点を生成

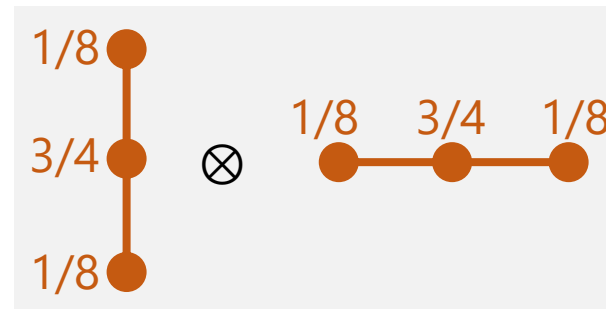
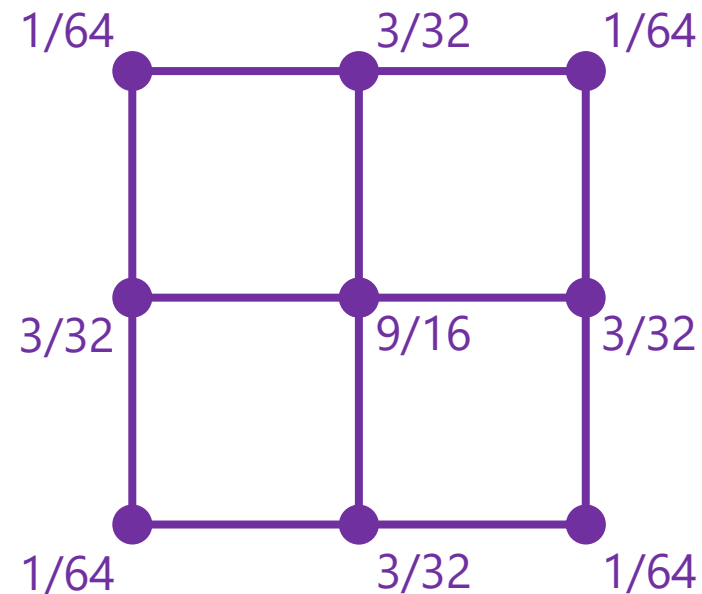


# サブディビジョンによる 3次曲面の生成



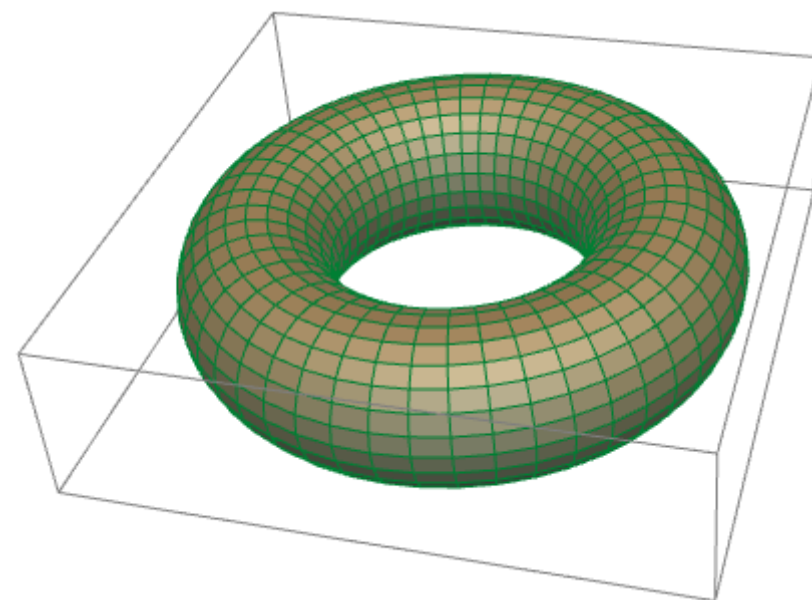
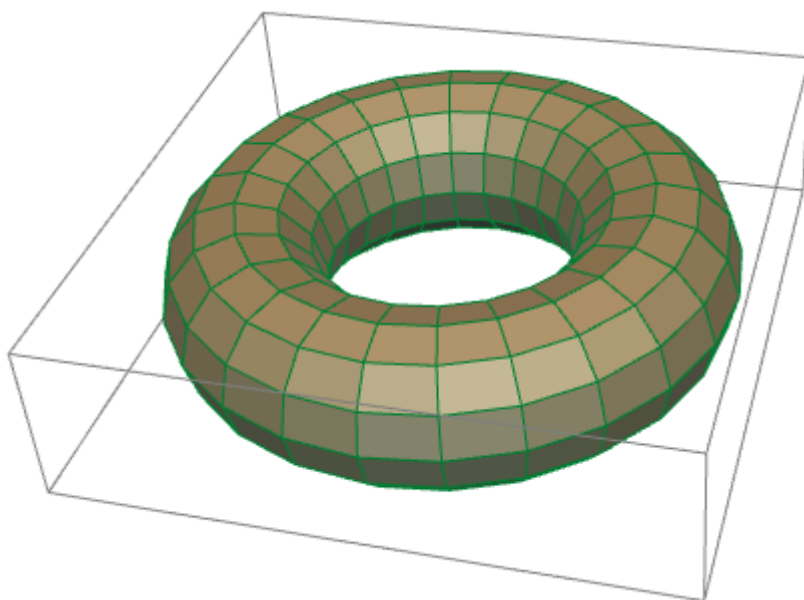
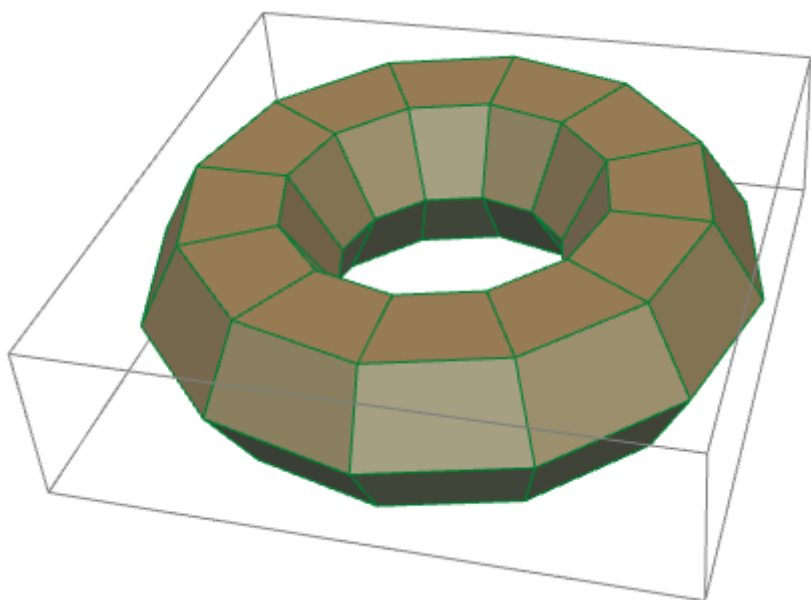
双3次基底関数  
 $B_{3,3}(s,t) = B_3(s) B_3(t)$

“vertex point” ステンシル



- 各頂点を、周囲の頂点を重み付き平均した位置に動かす

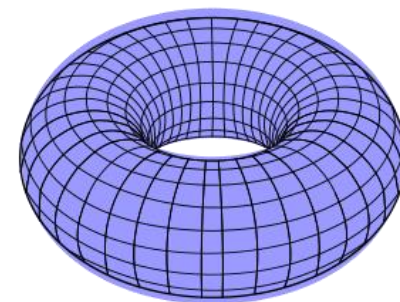
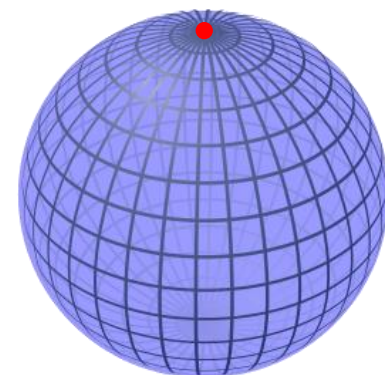
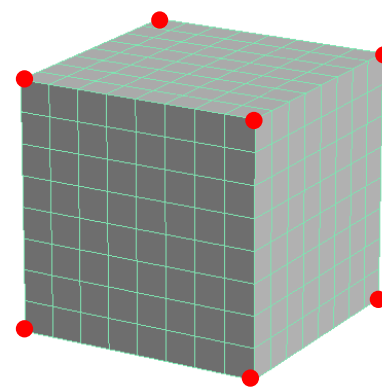
# トーラス形状への適用結果



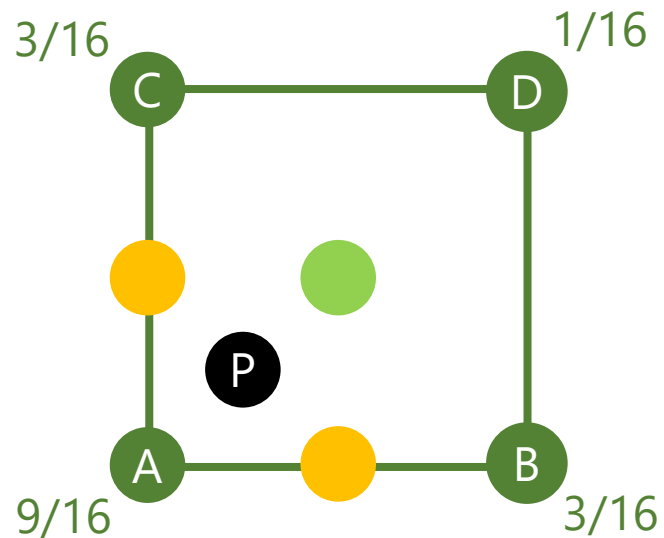
# サブディビジョンの一般化

# 先述の定式化の前提条件

- サーフェスを「きれいな」四角形メッシュに分割できること
  - 「きれいな」頂点：隣接する面の数 (valence) が4つ
    - valence が4でない頂点：特異点
- 特別な場合 (トーラス) を除き、一般には成り立たない
- サブディビジョン法のポイント：特異点にも適用可能
  - Bスプラインから導出されるステンシルを、幾何的な解釈から一般化



# 2次曲面ステンシルの一般化 (Doo-Sabin法)



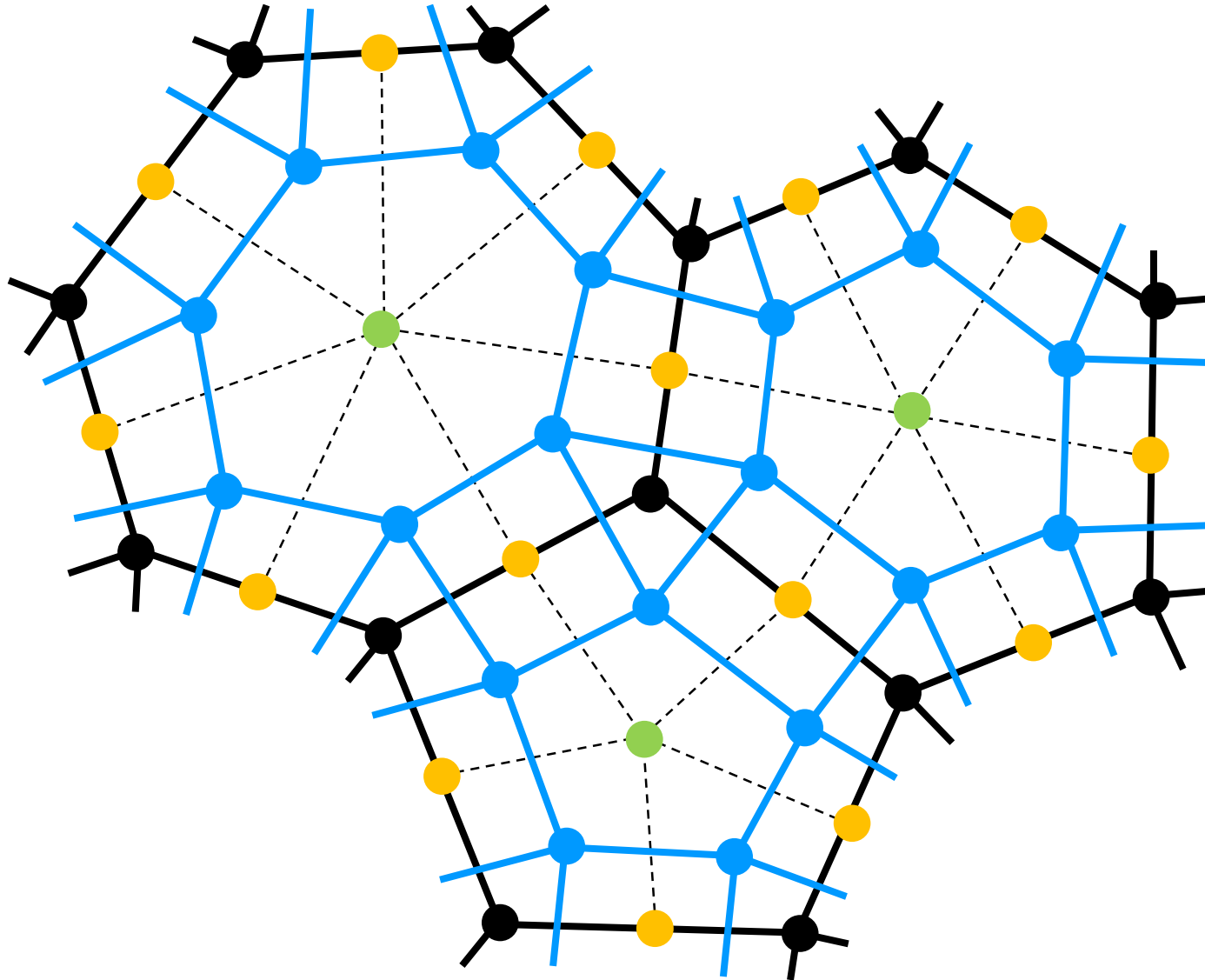
$$P = \frac{1}{16} (9A + 3B + 3C + D)$$

$$= \frac{\overset{\text{重心}}{A + B + C + D}}{4} + \frac{\overset{\text{中点}}{A + B}}{2} + \frac{\overset{\text{中点}}{A + C}}{2} + A$$

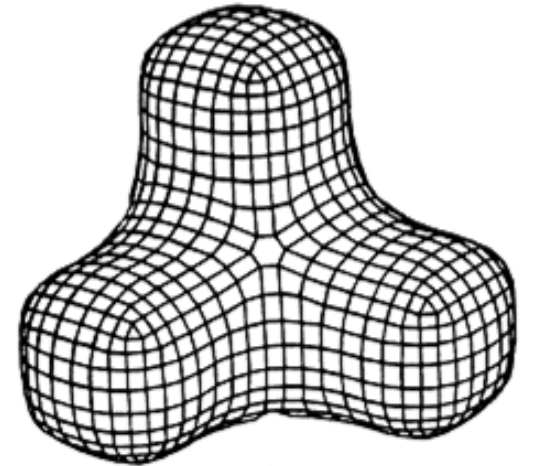
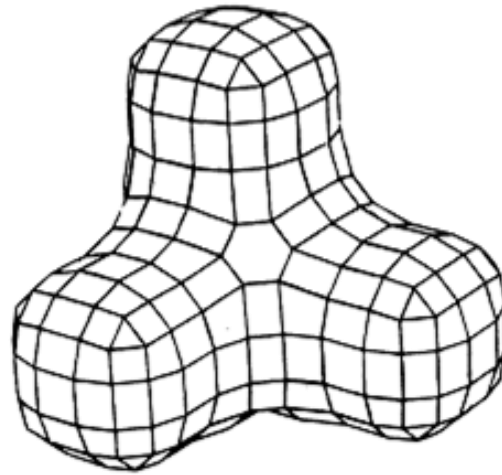
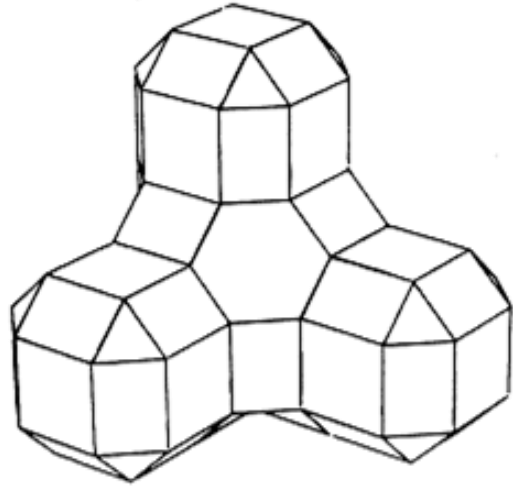
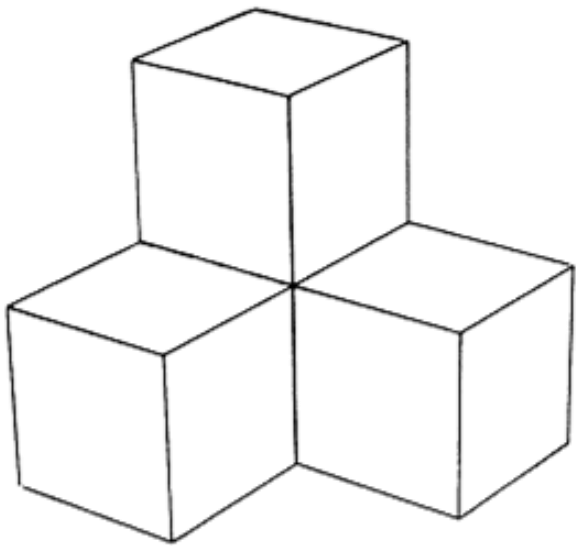
各ポリゴンの各頂点について、それに隣接する2個のエッジの中点と、ポリゴンの重心と、それ自身の平均を取った位置に頂点を生成

➔ 一般のポリゴンメッシュに適用できる

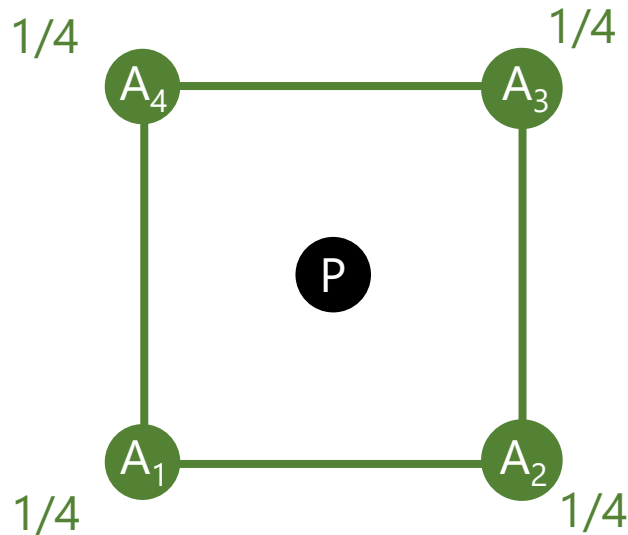
# Doo-Sabin法の適用例



# Doo-Sabin法の適用例



# 3次曲面ステンシルの一般化 (Catmull-Clark法)



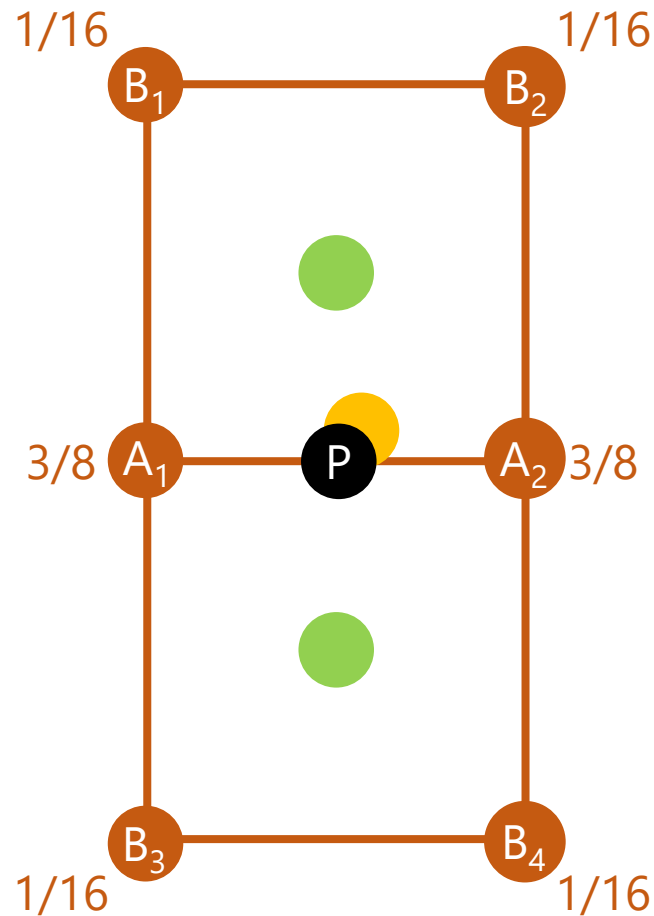
$$P = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$$

各ポリゴンについて、その重心に頂点を生成

➔ 一般のポリゴンメッシュに適用できる



# 3次曲面ステンシルの一般化 (Catmull-Clark法)



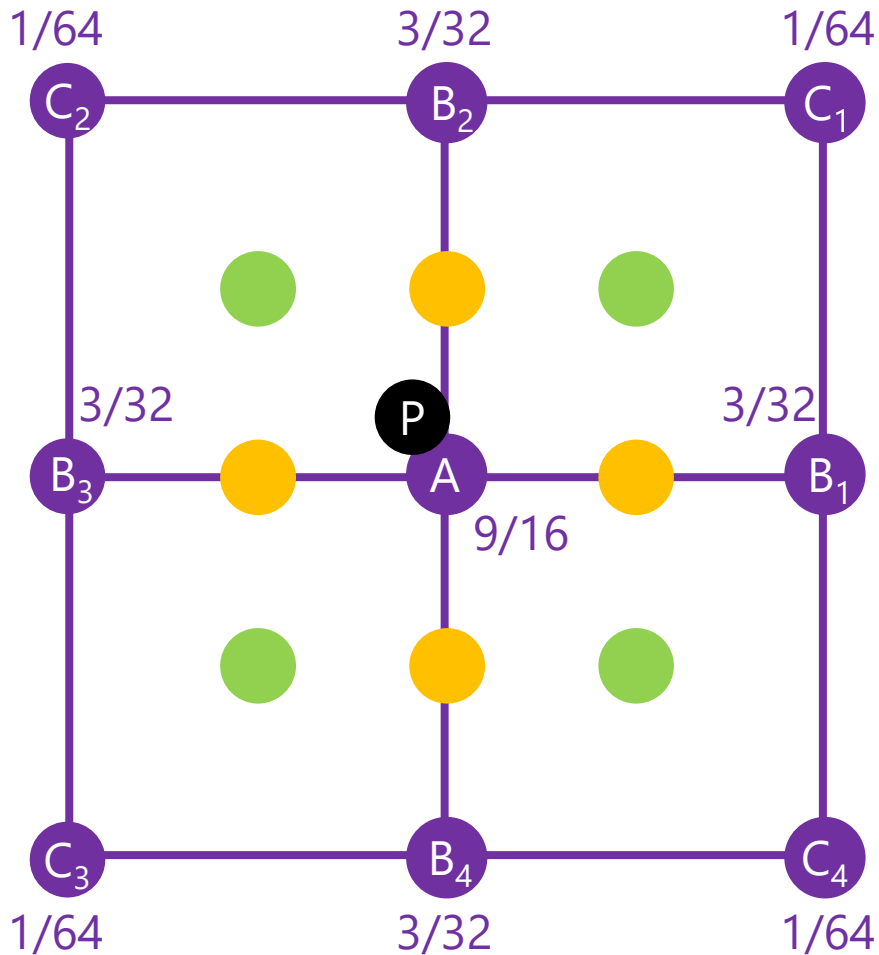
$$P = \frac{3}{8}(A_1 + A_2) + \frac{1}{16}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$$

$$= \frac{\frac{\text{重心}}{A_1 + A_2 + B_1 + B_2}}{4} + \frac{\frac{\text{重心}}{A_1 + A_2 + B_3 + B_4}}{4} + \frac{\frac{\text{中点}}{A_1 + A_2}}{2}$$

各エッジについて、それを共有する両側のポリゴンの重心の平均と、それ自身の中点の平均を取った位置に頂点を生成

→ 一般のポリゴンメッシュに適用できる

# 3次曲面ステンシルの一般化 (Catmull-Clark法)



$$P = \frac{9}{16}A + \frac{3}{32}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) + \frac{1}{64}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\text{重心} \quad A + B_1 + C_1 + B_2}{4} + \frac{\text{重心} \quad A + B_2 + C_2 + B_3}{4} + \frac{\text{重心} \quad A + B_3 + C_3 + B_4}{4} + \frac{\text{重心} \quad A + B_4 + C_4 + B_1}{4} \right\} Q$$

$$+ \frac{2}{4} \left\{ \frac{\text{中点} \quad A + B_1}{2} + \frac{\text{中点} \quad A + B_2}{2} + \frac{\text{中点} \quad A + B_3}{2} + \frac{\text{中点} \quad A + B_4}{2} \right\} R$$

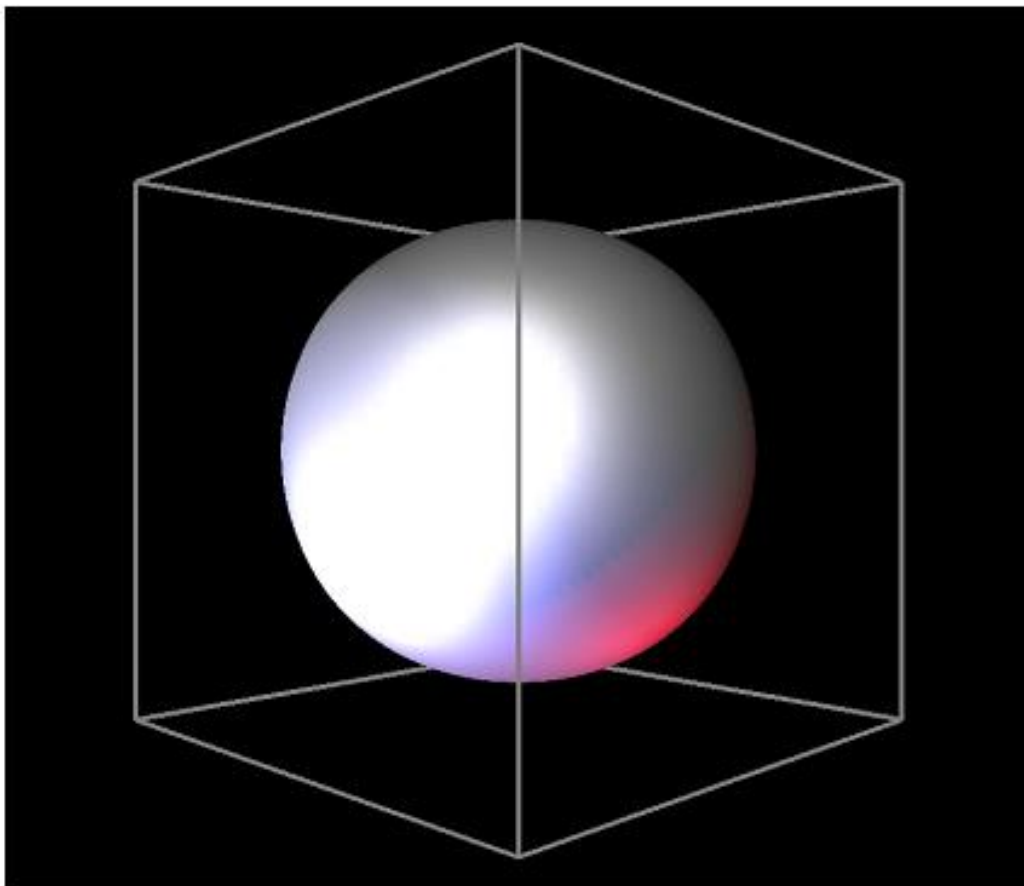
$$+ \frac{1}{4}A$$

A の valence が  $n$  のとき、

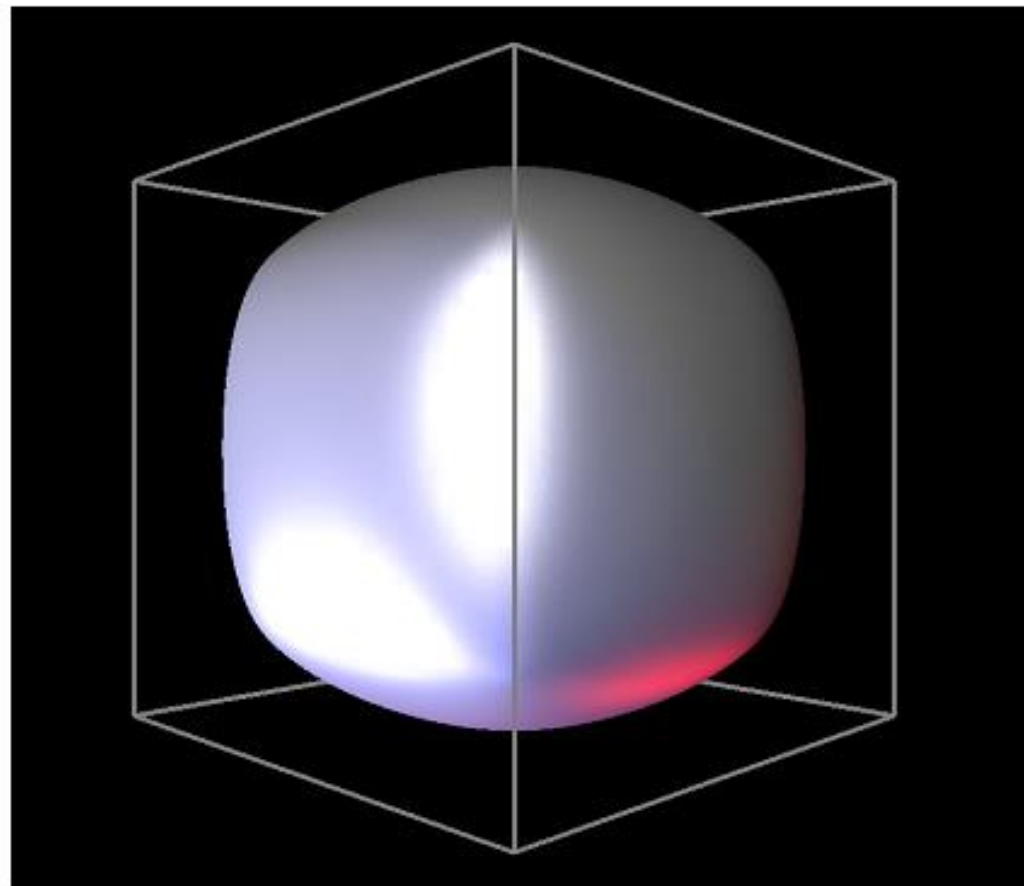
$$P = \frac{1}{n}Q + \frac{2}{n}R + \frac{n-3}{n}A$$

➔ 一般のポリゴンメッシュに適用できる

# 比較



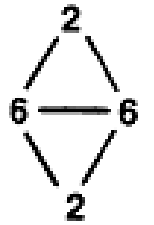
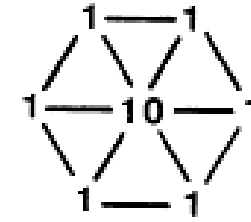
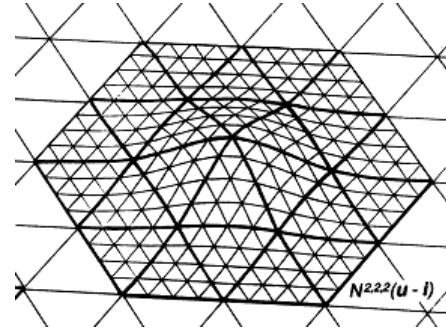
*Catmull-Clark* = 3次曲面



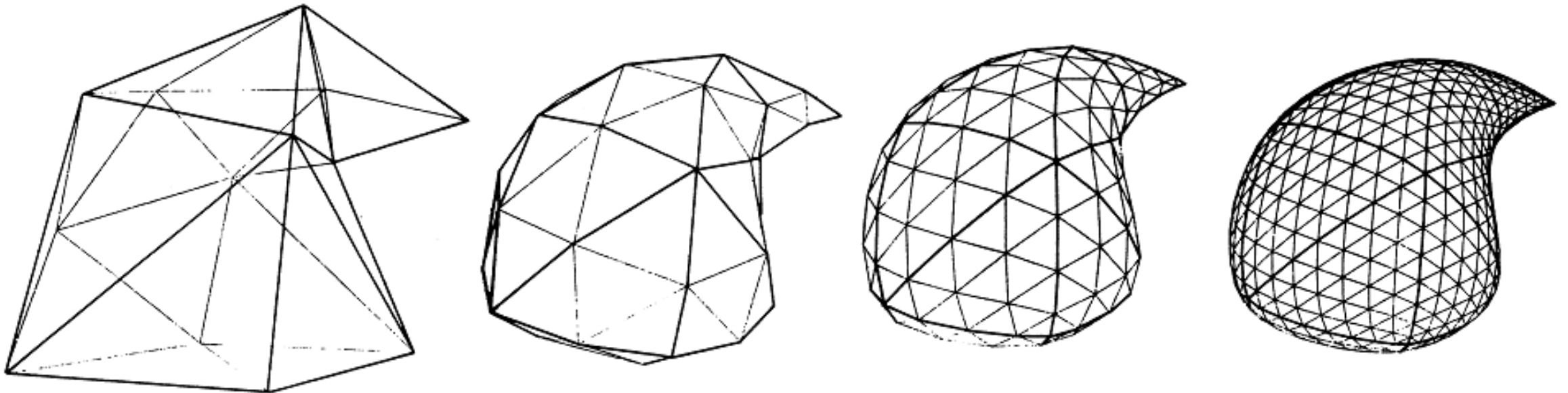
*Doo-Sabin* = 2次曲面

# 三角形メッシュのサブディビジョン (Loop法)

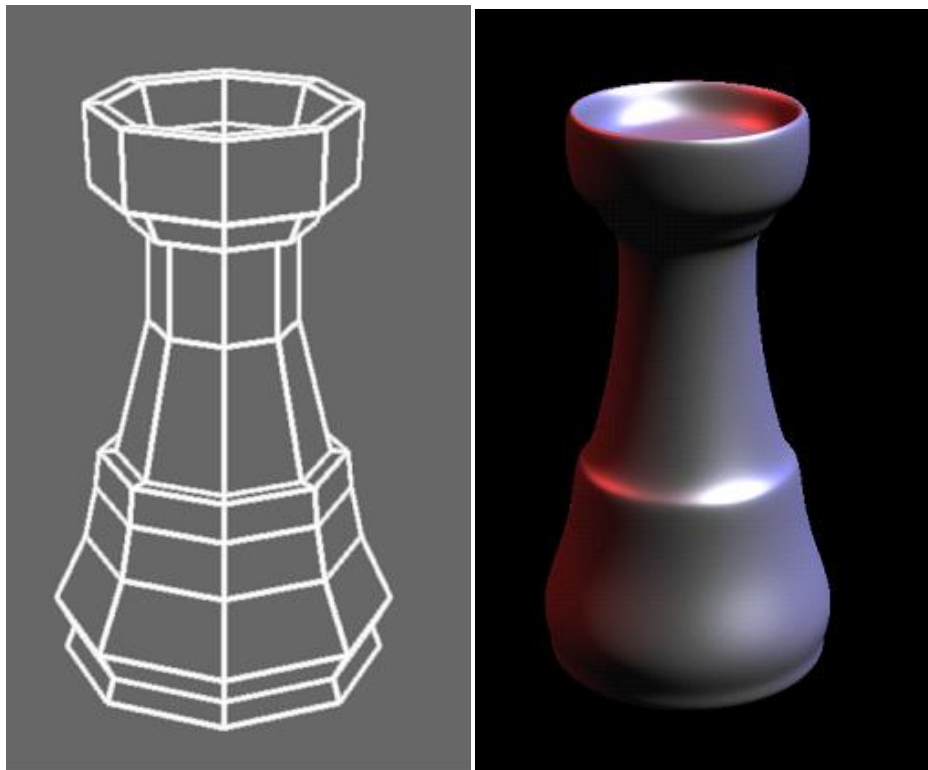
- 三角形格子上的Bスプラインに基づいて設計
- 特異点以外では $C^2$ 連続な3次曲面



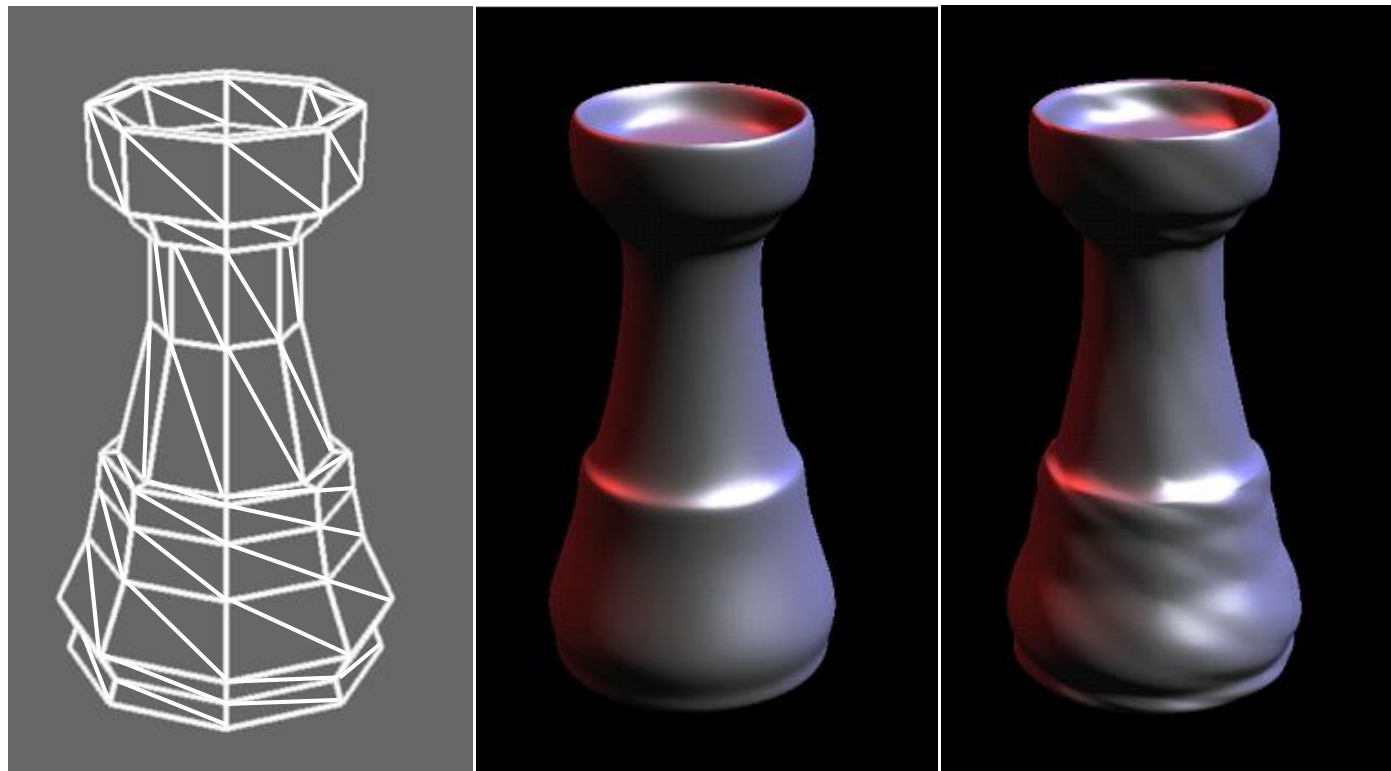
頂点のvalenceが6でない場合  
→ 難解な理論に基づいた式 (Loopの論文を参照)



# Catmull-Clark法とLoop法の比較



Catmull-Clark



Loop

Catmull-Clark

- CG業界ではCatmull-Clark法が圧倒的にポピュラー
  - 四角形メッシュだと二つの主曲率方向を自然に表せる

# その他のサブディビジョン手法

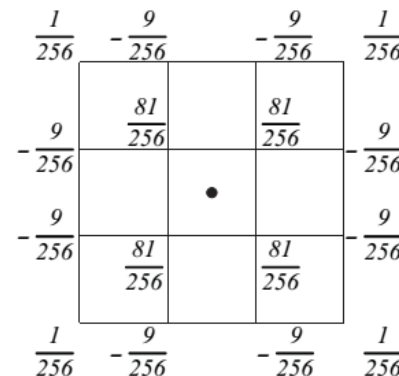
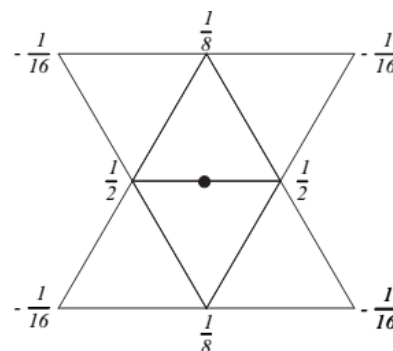
- four-point法

- 制御点を通る (interpolating)
  - $\longleftrightarrow$  approximating
- 多項式として表現できない(?)
- $C^1$ 連続
- 曲面バージョン: Butterfly法



- この他にも亜種が多数存在

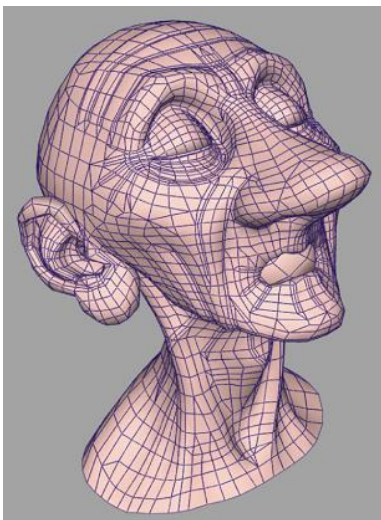
- Kobbelt法
- $\sqrt{3}$ 法
- etc...





# Geri's Game (Pixar, 1997)

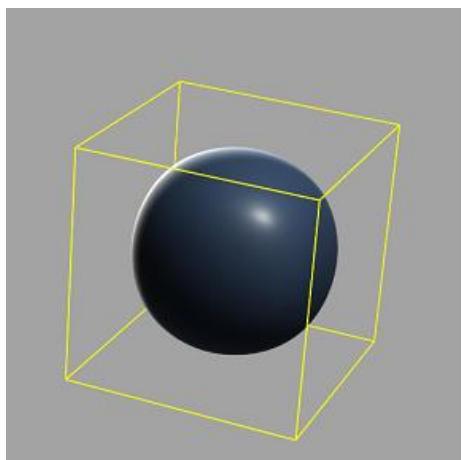
- サブディビジョンを使った最初の映画
- それ以前 (Toy Story) は Bスプラインで多大な労力をかけていた



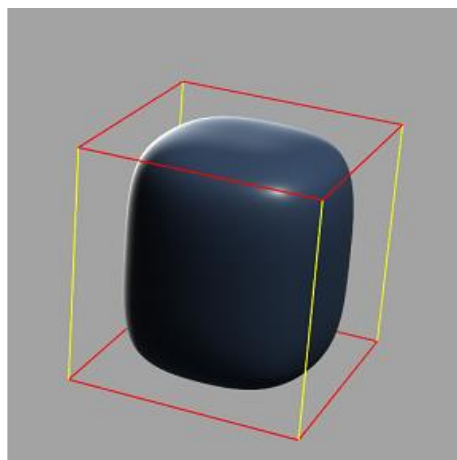
<https://www.youtube.com/watch?v=9IYRC7g2ICg>

# 滑らかさの制御

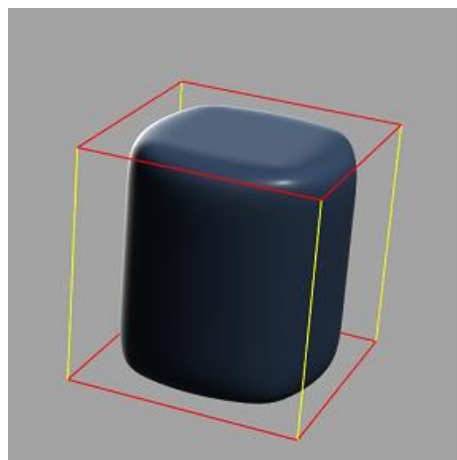
- サブディビジョンのルールを少し変えると、鋭いエッジを表現できる



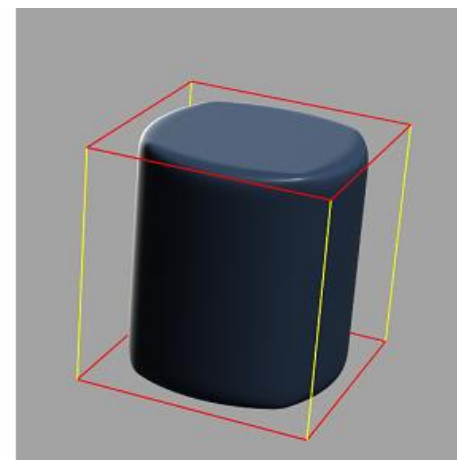
sharpness=0



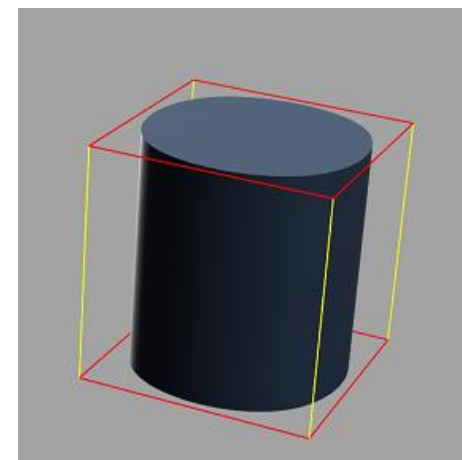
sharpness=1



sharpness=2



sharpness=3



sharpness= $\infty$



# 滑らかさの制御

- サブディビジョンのルールを少し変えると、鋭いエッジを表現できる



# サブディビジョンの解説資料

- Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles [Loop, **MSc. Thesis** 87]
  - Doo-Sabin法やCatmull-Clark法を含め、考え方を丁寧に図解
  - 間違いがあるので注意：  
<http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/CS284/TEXT/LoopErrata.txt>
- Subdivision for Modeling and Animation [SIG00 Course]
  - サブディビジョンの概説としては最も有名。でも微妙に難解
  - <http://www.cs.nyu.edu/~dzorin/sig00course/>
- OpenSubdiv from research to industry adoption [SIG13 Course]
  - 最新の話題など
  - <http://dx.doi.org/10.1145/2504435.2504451>

# ハーフエッジデータ構造

# 頂点リストと面リストによるメッシュ表現

ジオメトリ情報

トポロジ情報

| OFF file format |      |      |   |   |
|-----------------|------|------|---|---|
| OFF             |      |      |   |   |
| 8               | 6    | 0    |   |   |
| -0.5            | -0.5 | 0.5  |   |   |
| 0.5             | -0.5 | 0.5  |   |   |
| -0.5            | 0.5  | 0.5  |   |   |
| 0.5             | 0.5  | 0.5  |   |   |
| -0.5            | 0.5  | -0.5 |   |   |
| 0.5             | 0.5  | -0.5 |   |   |
| -0.5            | -0.5 | -0.5 |   |   |
| 0.5             | -0.5 | -0.5 |   |   |
| 4               | 0    | 1    | 3 | 2 |
| 4               | 2    | 3    | 5 | 4 |
| 4               | 4    | 5    | 7 | 6 |
| 4               | 6    | 7    | 1 | 0 |
| 4               | 1    | 7    | 5 | 3 |
| 4               | 6    | 0    | 2 | 4 |

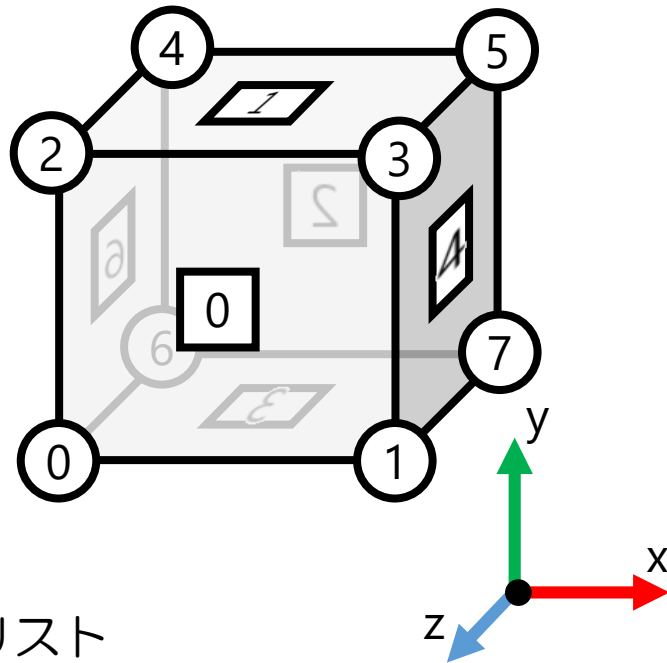
← 頂点数、面数  
← 0番目の頂点の xyz 座標

⋮

← 7番目の頂点の xyz 座標  
← 0番目の面の頂点数と頂点インデックスリスト

⋮

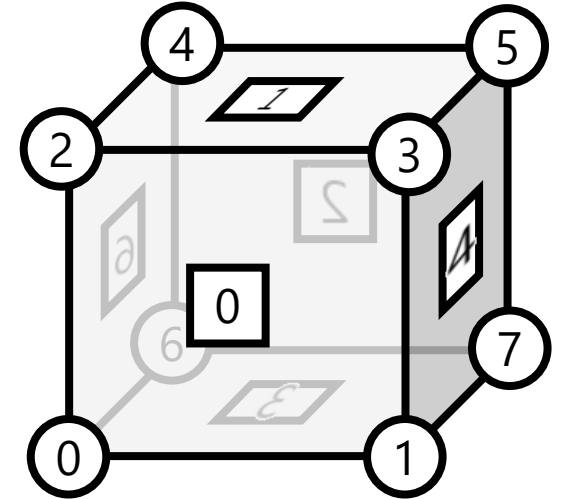
← 6番目の面の頂点数と頂点インデックスリスト



# 頂点リストと面リストによるメッシュ表現

- メッシュ処理 (サブディビジョン等) で使う情報

- ある頂点に隣接する頂点の集合
- ある面に隣接する面の集合
- あるエッジの両端の頂点
- あるエッジの両側の面
- etc...



- 「配列の配列」で保持しても良いが、メモリ消費が大きい ☹

# ハーフエッジデータ構造

- リンク情報を保持：

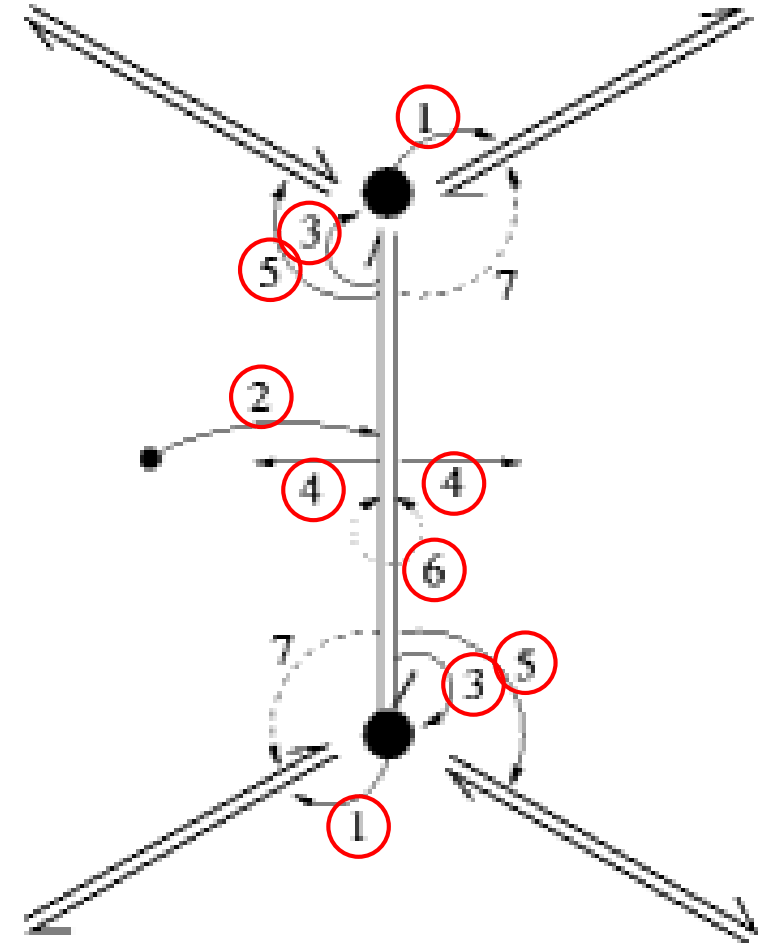
- (1) 頂点 → その頂点から出るハーフエッジの一つ
- (2) 面 → その面を構成するハーフエッジの一つ
- (3) ハーフエッジ → 行き先の頂点
- (4) ハーフエッジ → それが構成する面
- (5) ハーフエッジ → 次のハーフエッジ
- (6) ハーフエッジ → 反対側のハーフエッジ

- ある面の周りの要素をループ：

(2) → (5) → (5) → ...

- ある頂点の周りの要素をループ：

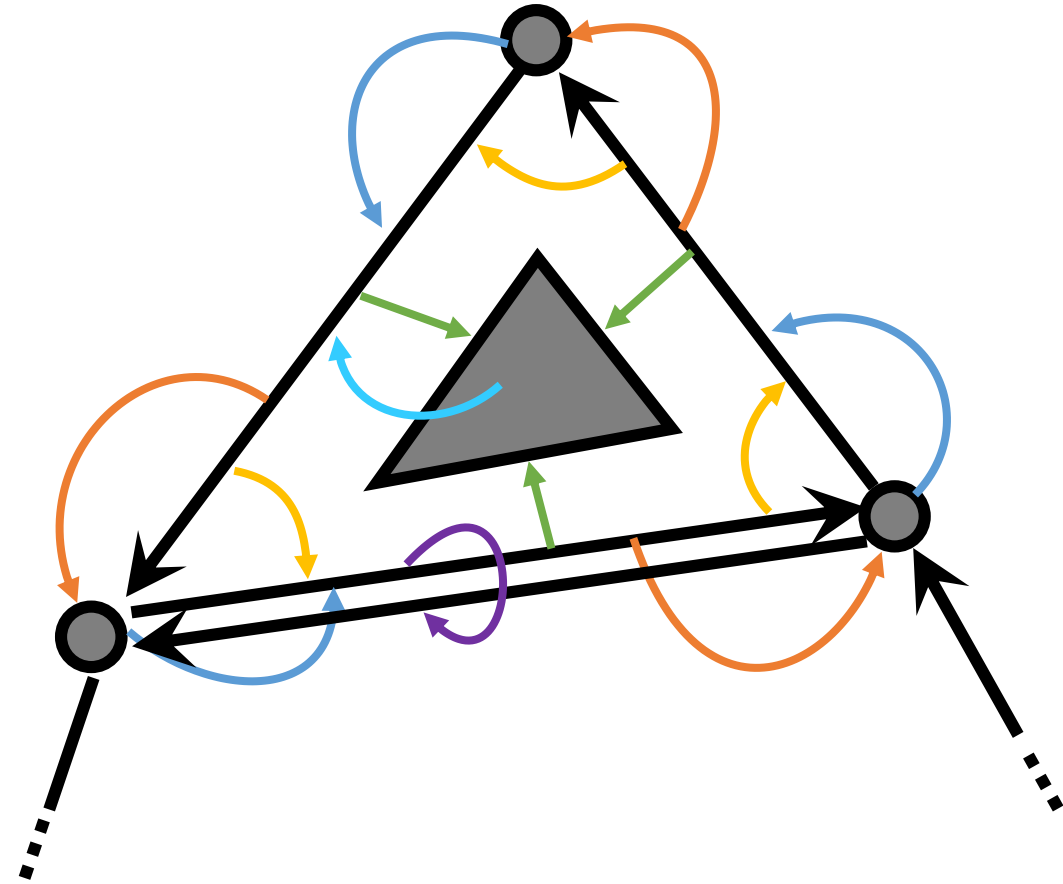
(1) → (6) → (5) → (6) → (5) → ...



<http://www.openmesh.org/>

# 面を追加する際の処理

- ハーフエッジを生成
- 頂点→ハーフエッジをリンク (1)
- ハーフエッジ→頂点をリンク (3)
- 次のハーフエッジをリンク (5)
- ハーフエッジ→面をリンク (4)
- 面→ハーフエッジをリンク (2)
- ハーフエッジ→反対向きのハーフエッジを探してリンク (6)



# 論文

- Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes [Catmull,Clark,CAD78]
- A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design [Dyn,Levin,CAGD87]
- A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control [Dyn,Levine,Gregory,TOG90]
- Sqrt(3)-subdivision [Kobbelt,SIGGRAPH00]
- Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values [Stam,SIGGRAPH98]
- Interactive multiresolution mesh editing [Zorin,Schroder,Sweldens,SIGGRAPH97]
- Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology [Zorin,Schroder,Sweldens,SIGGRAPH96]