2023年度
芝浦工業大学　システム理工学部
数理科学科

総合研究論文

多様体の次元を調べる方法

Methods for Investigating the Dimension of Manifolds

顔写真
横3cm
×
縦4cm

BV20052

あおみ　けんし
青見　健志

指導教員： 亀子 正樹　教授

目 次

1　はじめに

2　準備

2.1　連続写像と C^r 級写像

2.2　位相空間

3 C^r 級多様体と C^r 級写像

定義 3.1. 位相空間 X の開集合 U から m 次元数空間 $\mathbb{R}^m$ のある開集合 U' への同相写像

$$\varphi : U \to U'$$

があるとき, (U, φ) を m 次元座標近傍といい, φ を U 上の局所座標系という.

定義 3.2. (U, φ) を位相空間 X 内の局所座標近傍とする. U 内の任意の点 p に対して $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ であるから,

$$\varphi(p) = (x_1, \cdots, x_m)$$

と書ける.$(x_1, \cdots, x_m)$ を (U, φ) に関する p の局所座標という.

定義 3.3. 位相空間 M が次の条件 (1),(2) を満たすとき, M を m 次元位相多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M 内の任意の点 p に対して, p を含む m 次元座標近傍 (U, φ) が存在する.

定義 3.4. m 次元位相多様体 M の 2 つの座標近傍 (U, φ), (V, ψ) が交わっているとき, 同相写像

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換という.

定義 3.5. $r \geq 1$ を自然数または ∞ とする. 位相空間 M が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, M を m 次元 C^r 級多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M は m 次元座標近傍により被覆される. すなわち, M の m 次元座標近傍からなる族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ があって,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つ.

(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ であるような任意の α, β に対して, 座標変換

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

は C^r 級写像である.

定理 3.6. m 次元球面 $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ を

$$S^m = \{(x_1, \cdots x_{m+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体である.

証明. 定義3.5 の条件 (1), (2), (3) を確かめる.

(1) $\mathbb{R}^{m+1}$ はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として, S^m はハウスドルフ空間である.

(2) S^m の $2(m+1)$ 個の開集合 U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ を次のように定義する.

$$U_i^+ = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i < 0\}$$

S^m はこれら U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ で被覆される. 写像 $\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^m$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

ここで, $\hat{x}_i$ は x_i を取り去るという意味である. このとき,

$$(\varphi_i^+)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, x_{m+1})$$

$$(\varphi_i^-)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, -\sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, x_{m+1})$$

であり, φ_i^+, φ_i^- はそれぞれ, U_i^+, U_i^- から $\mathring{D}^m$ への同相写像である. ただし, $\mathring{D}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の原点を中心とする m 次元単位開円板である. よって, S^m は $2(m+1)$ 個の座標近傍 $(U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), \cdots, (U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+), (U_{m+1}^-, \varphi_{m+1}^-)$ で被覆される.

(3) 2(m+1) 個の座標近傍の間の座標変換がすべて C^∞ 級であることを示す.
$1 \leq a, b \leq 2(m+1)$ を満たす互いに異なる自然数 a, b に対して,

(i) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^+, φ_b^+)

(ii) (U_a^-, φ_a^-) と (U_b^-, φ_b^-)

(iii) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^-, φ_b^-)

の間の座標変換を調べればよい.
(i) の場合,

$$
\begin{aligned}
&U_a^+ \cap U_b^+ = \{(x_1, \cdots, x_a, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_a > 0,\ x_b > 0\} \\
&\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) = \{(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m | x_b > 0\} \\
&\varphi_b^+(U_a^+ \cap U_b^+) = \{(x_1, \cdots, x_a, \cdots, \hat{x_b}, \cdots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m | x_a > 0\} \\
&(\varphi_a^+)^{-1} x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1}) \\
&= (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1})||^2}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1})
\end{aligned}
$$

この式から

$$
\begin{aligned}
&\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \\
&= (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, \hat{x_b}, \cdots, x_{m+1})
\end{aligned}
$$

これは $||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1})||^2 < 1$ の範囲で C^∞ 級なので,
$\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$ は定義域 $\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) \subset \mathring{D}^m$ で C^∞ 級である.
同様にして (ii), (iii) の場合についても座標変換が C^∞ 級であること分かる.

以上より, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体であることが分かった. □

命題 3.7. aaaa

4 接ベクトル空間

4.1 接ベクトル空間

4.2 C^r 級写像の微分

5　多様体の次元を調べる方法

5.1　写像の局所的性質

定理 5.1. $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が線形写像として同型なら, f は p のある開近傍から $f(p)$ のある開近傍への C^r 級微分同相写像である. すなわち, p の開近傍 U と $f(p)$ の開近傍 V が存在して, $f(U) = V$ となり, かつ, $f|U : U \to V$ は C^r 級微分同相写像である.

定理 5.2. $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が上への線形写像なら, 点 p 付近での f の様子は, 射影: $\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_(m-n+1), \cdots, x_m)$ と同じである. すなわち, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \cdots, y_n) = (c)$ が

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_m) = x_{m-n+1} \\
&\vdots \\
y_n &= f_n(x_1, \cdots, x_m) = x_m
\end{aligned}
$$

であるようにできる.

証明. C^r 級写像 $f : M \to N$ が与えられており, ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が上への線形写像であるとする. このとき, $\mathrm{rank}(df)_p = n$ (ただし, $m = \mathrm{dim}M \geq n = \mathrm{dim}N$.) 点 p, 点 $f(p)$ のまわりに, それぞれ座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$, $(V; y_1, \cdots, y_n)$ をとり, f を局所座標表示すると

$$(y_1, \cdots, y_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

ヤコビ行列 $(Jf)_p$ は $(df)_p$ を表す行列で, n 行 m 列である. $\mathrm{rank}(df)_p = n$ であるから, $(Jf)_p$ から n 本の列ベクトルを選んで, 作った正方行列は正則である. 必要なら適当に列を入れ替えて

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

とおくと, $\mathrm{det}B \neq 0$ であって,

$$(Jf)_p = \left(\begin{array}{ccc|c} * & \cdots & * & \\ & & & B \\ * & \cdots & * & \end{array} \right)$$

と仮定してよい. p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ から, $\mathbb{R}^m$ への写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を

$$\varphi(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_{m-n}, f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

と定義する. やコビ行列 $(J\varphi)_p$ は

$$(J\varphi)_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 1 & \\ \hline * & \cdots & * & \\ & \cdots & & B \\ * & \cdots & * & \end{array}\right)$$

となり, $\det(J\varphi)_p = \det B \neq 0$ である. したがって, 逆関数の定理（定理**??**）により, 点 p を含む U を十分小さくとれば, $\varphi|U : U \to \varphi(U)$ は C^r 級微分同相写像である. よって, /refprop: cord-nabor condition より,$(U, \varphi|U)$ は p のまわりの新しい C^r 級座標近傍と思える. $(U, \varphi|U)$ の局所座標系を $(z_1, \cdots, z_m)$ とすると, 上の φ の定義式から,

$$(z_1, \cdots, z_m) = \varphi(x_1, \cdots x_m) = (x_1, \cdots x_{m-n}, f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

を得る. とくに, $(z_{m-n+1}, \cdots, z_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$ であるから,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(z_1, \cdots z_m) &= f(x_1, \cdots x_m) \\ &= (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)) \\ &= (z_{m-n+1}, \cdots, z_m) \end{aligned}$$

となる. よって, $(z_1, \cdots, z_m)$ と $(y_1, \cdots, y_n)$ に関する $f : M \to N$ の点 p のまわりでの局所座標表示

$$(z_1, \cdots, z_m) \mapsto (z_{m-n+1}, \cdots, z_m) = (y_1, \cdots, y_n)$$

である. $(z_1, \cdots, z_m)$ を改めて $(x_1, \cdots, x_m)$ と書き直せば, 定理 5.2 の主張が得られる. $\square$

定理 5.3. $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が 1 対 1 の線形写像なら, 点 p の付近での f の様子は, 包含写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$ と同じである. すなわち, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \cdots, y_n) \mapsto$

$(f_1(x_1, \cdots x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots x_m),)$ が,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \cdots x_m) = x_1 \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \cdots x_m) = x_m \\ y_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, \cdots x_m) = 0 \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \cdots x_m) = 0 \end{aligned}$$

であるようにできる.

証明. 問題は局所的であるから $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ と仮定してよい. $(m \leq n)$ また, $p = \boldsymbol{o}$, $f(p) = \boldsymbol{o}$ としてよい. $\mathbb{R}^m$ の自然な座標 $(x_1, \cdots, x_m)$ と, $\mathbb{R}^n$ の自然な座標に関して, 与えられた C^r 級写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を局所座標表示したものを

$$u_1 = f_1(x_1, \cdots, x_m),\ \cdots, u_n = f_n(x_1, \cdots, x_m)$$

とする. $(df)_{\boldsymbol{o}} : T_{\boldsymbol{o}}(\mathbb{R}^m) \to T_{\boldsymbol{o}}(\mathbb{R}^n)$ は 1 対 1 であるから, ヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{o}}$ から, 適当な m 行を選び出して作った m 次正方行列は正則である. 必要なら, $(u_1, \cdots, u_m)$ の並び方を変えて, $(Jf)_{\boldsymbol{o}} = \left(\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right)$ (A は m 行 m 列の正則行列) と仮定してよい. $(x_1, \cdots, x_m)$ に新しく, $(x_{m+1}, \cdots, x_n)$ を付け加えて, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ を構成し, 新しい写像 $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ を,

$$\begin{aligned} &F(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots x_n) \\ &= (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m), f_{m+1}(x_1, \cdots, x_m) + x_{m+1}, \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m) + x_n) \end{aligned}$$

と定義する.F のヤコビ行列

$$(Jf)_{\boldsymbol{o}} = \left(\begin{array}{c|ccc} A & & O & \\ \hline & 1 & & \\ B & & \vdots & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

であり, 正則である. 逆関数の定理 5.1 により, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ における, $\boldsymbol{o}$ の近傍 U と, $\mathbb{R}^n$ における $\boldsymbol{o}$ の近傍 V が存在して, $F|U : U \to V$ は C^r 級微分同相写像になる. $\psi = (F|U)^{-1} : V \to U$ とおく. (V, ψ) は $\boldsymbol{o}$ のまわりの $\mathbb{R}^n$ の C^r 級座標近傍と思える. この座標近傍に関する局所座標系を $(y_1, \cdots y_n)$ とし, $(x_1, \cdots, x_m)$ と

$(y_1, \cdots y_n)$ に関して, $f : U \cap (\mathbb{R}^m \times \{\boldsymbol{o}\}) \to \mathbb{R}^n$ を局所座標表示すると,

$$\begin{aligned}(y_1, \cdots, y_n) &= \psi(f(x_1, \cdots, x_m)) \\ &= \psi(F(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots 0)) \\ &= (F|U)^{-1}(F(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots 0)) \\ &= (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)\end{aligned}$$

となる. したがって, 定理 5.3 の主張する通りの局所座標表示が得られた. □

5.2 C^r 級部分多様体

定義 5.4. n 次元 C^r 級多様体 N の部分集合 L が N の l 次元 C^r 級部分多様体であるとは,

(1) $l = n$ のとき:L が N の開集合であることである.

(2) $0 \leq l < n$ のとき:L の任意の点 p に対し, p を含む N の座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ が存在して,

$$L \cap N = \{(x_1, \cdots, x_n) \in U | x_{l+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

が成り立つことである.

命題 5.5. n 次元 C^r 級多様体 N の l 次元 C^r 級部分多様体 L は, それ自身 l 次元 C^r 級多様体である.

証明. (1) $l = n$ のとき, N からの相対位相によって, L は位相空間となり, N の C^r 級座標近傍を $\mathcal{S} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とすると, $\mathcal{S}$ を L に制限した $\{U_\alpha \cap L, \varphi_\alpha | U_\alpha \cap L\}_{\alpha \in A}$ は L の C^r 局所座標系になる. よって, L はそれ自身, $l(= n)$ 次元 C^r 級多様体である.

(2) $0 \leq l < n$ のとき, L には N からの相対位相を入れる. N がハウスドルフ空間であるから L もそうである.
L の任意の点 p に対し, p を含む N の局所座標系 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ で定義 5.4 の条件を満たすものを選び, $(U_p; x_1^p, \cdots, x_n^p)$ とする. $V_p = L \cap U_p$ とおくと, V_p は L の開集合である. V_p 上の U_p の局所座標系 $(x_1^p, \cdots, x_n^p)$ の x_1^p から x_l^p までを制限したもの $(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)$ を考える.
$\{(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)\}_{p \in L}$ が L を被覆することは明らかである.
V_p と V_q が交わるとする. 対応する $(U_p; x_1^p, \cdots, x_n^p)$ と $(U_q; x_1^q, \cdots, x_n^q)$ は, N の適当な座標近傍 $(U_\alpha; x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha)$, $(U_\beta; x_1^\beta, \cdots, x_n^\beta)$ である. この間の座標変換はある C^r 級関数 f を用いて,

$$(x_1^\beta, \cdots, x_n^\beta) = (f_1(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha), \cdots, f_n(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha))$$

と書ける. $V_p \cap V_q$ 上では, $x^\alpha_{l+1} = x^\alpha_n = 0$, $x^\beta_{l+1} = x^\beta_n = 0$ が成り立つので, $V_p \cap V_q$ 上では

$$
\begin{aligned}
x^\beta_1 &= f_1(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
x^\beta_l &= f_l(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0) \\
0 &= f_{l+1}(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
0 &= f_n(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0)
\end{aligned}
$$

となっている. 改めて関数 g を

$$
\begin{aligned}
g(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l) &= (g_1(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l), \cdots, g_l(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l)) \\
&= (f_1(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0), \cdots, f_l(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0))
\end{aligned}
$$

と定義すると, この関数は C^r 級である. そして,

$$(x^\beta_1, \cdots, x^\beta_l) = g(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l)$$

が $(V_p; x^p_1, \cdots x^p_l)$ から $(V_q; x^q_1, \cdots x^q_l)$ の座標変換を与えている.
ゆえに, $\{(V_p; x^p_1, \cdots, x^p_l)\}_{p \in L}$ は L の C^r 級座標近傍になっている.
以上より, L は l 次元 C^r 級多様体である.

$\square$

定理 5.6. M, N を m 次元, n 次元の C^r 級多様体, $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. N のある点 q について, $f(p) = q$ となる M の各点 p が常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ を満たすとき, 逆像 $f^{-1}(q)$ は $(m-n)$ 次元 C^r 級多様体である.

証明. 定義 5.4, 命題 5.5 より, 次のことを証明すればよい.

$q \in N$ の逆像 $f^{-1}(q)$ に属する任意の点 p に対し, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots .x_m)$ が存在して,

$$f^{-1}(q) \cap U = \{(x_1, \cdots x_m) \in U | x_{m-n+1} = \cdots = x_m = 0\}$$

が成り立つ.

今, $f(p) = q$ を満たす $p \in M$ について, 常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ であるから, $(df)_p$ は上への写像である. よって, 定理 5.2 より, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ と $q(= f(p))$ のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_n)$ が存在して, $f|U : U \to V$ は

$$(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots x_m) = (x_{m-n+1}, \cdots, x_m)$$

と座標表示される.
$(U;x_1,\cdots x_m)$ は任意にとってきた $(V;y_1,\cdots,y_n)$ に応じて選べるから, $(V;y_1,\cdots,y_n)$ は点 q で $y_1=\cdots=y_n=0$ となるようにとっておくと,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(q)\cap U &= \{p\in U|f(p)=q\}\\
&= \{(x_1,\cdots,x_m)\in U|f(x_1,\cdots x_m)=(0,\cdots,0)\}\\
&= \{(x_1,\cdots,x_m)\in U|(x_{m-n+1},\cdots x_m)=(0,\cdots,0)\}\\
&= \{(x_1,\cdots x_m)\in U|x_{m-n+1}=\cdots=x_m=0\}
\end{aligned}$$

となり, 条件を満たす U が存在することがわかる. これで定理5.6 が証明できた. □

5.3 多様体の次元の具体的な計算

6　おわりに

参考文献

[1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.

[2] 【論文の場合】著者名，タイトル，雑誌名，巻・号，出版年度，頁.

[3] 【Web ページの場合】 タイトル，ページ制作者（機関）等，URL: `http://www.shibaura-it.ac.jp/`，最終アクセス日時: 2021/12/28 16:33.