

2023 年度
芝浦工業大学 システム理工学部
数理科学科

総合研究論文

多様体の次元を調べる方法

Methods for Investigating the Dimension of
Manifolds



BV20052

あ お み け ん し
青見 健志

指導教員： 亀子 正樹 教授

目 次

1	はじめに	2
2	C^r 級多様体と C^r 級写像	3
2.1	小節のタイトル	5
2.1.1	小小節のタイトル	5
3	おわりに	6

1 はじめに

2 C^r 級多様体と C^r 級写像

定義 2.1. 位相空間 X の開集合 U から m 次元数空間 \mathbb{R}^m のある開集合 U' への同相写像

$$\varphi : U \rightarrow U'$$

があるとき, (U, φ) を m 次元座標近傍といい, φ を U 上の局所座標系という.

定義 2.2. (U, φ) を位相空間 X 内の局所座標近傍とする. U 内の任意の点 p に対して $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ であるから,

$$\varphi(p) = (x_1, \dots, x_m)$$

と書ける. (x_1, \dots, x_m) を (U, φ) に関する p の局所座標という.

定義 2.3. 位相空間 M が次の条件 (1), (2) を満たすとき, M を m 次元位相多様体という.

- (1) M はハウスドルフ空間である.
- (2) M 内の任意の点 p に対して, p を含む m 次元座標近傍 (U, φ) が存在する.

定義 2.4. m 次元位相多様体 M の 2 つの座標近傍 $(U, \varphi), (V, \psi)$ が交わっているとき, 同相写像

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換という.

定義 2.5. $r \geq 1$ を自然数または ∞ とする. 位相空間 M が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, M を m 次元 C^r 級多様体という.

- (1) M はハウスドルフ空間である.
- (2) M は m 次元座標近傍により被覆される. すなわち, M の m 次元座標近傍からなる族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ があって,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つ.

- (3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ であるような任意の α, β に対して, 座標変換

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

は C^r 級写像である.

定理 2.6. m 次元球面 $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ を

$$S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) | x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体である.

証明. 定義 2.5 の条件 (1), (2), (3) を確かめる.

(1) \mathbb{R}^{m+1} はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として, S^m はハウスドルフ空間である.

(2) S^m の $2(m+1)$ 個の開集合 U_i^+, U_i^- ($i = 1, \dots, m+1$) を次のように定義する.

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) \in S^m | x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) \in S^m | x_i < 0\}$$

S^m はこれら U_i^+, U_i^- ($i = 1, \dots, m+1$) で被覆される. 写像 $\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^- : U_i^- \rightarrow \mathbb{R}^m$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})$$

ここで, \hat{x}_i は x_i を取り去るという意味である. このとき,

$$(\varphi_i^+)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_{m+1})$$

$$(\varphi_i^-)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, -\sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_{m+1})$$

であり, φ_i^+, φ_i^- はそれぞれ, U_i^+, U_i^- から \mathring{D}^m への同相写像である. ただし, \mathring{D}^m は \mathbb{R}^m の原点を中心とする m 次元単位開円板である. よって, S^m は $2(m+1)$ 個の座標近傍 $(U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), \dots, (U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+), (U_{m+1}^-, \varphi_{m+1}^-)$ で被覆される.

(3) $2(m+1)$ 個の座標近傍の間の座標変換がすべて C^∞ 級であることを示す.

$1 \leq a, b \leq 2(m+1)$ を満たす互いに異なる自然数 a, b に対して,

(i) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^+, φ_b^+)

(ii) (U_a^-, φ_a^-) と (U_b^-, φ_b^-)

(iii) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^-, φ_b^-)

の間の座標変換を調べればよい.

(i) の場合,

$$\begin{aligned}
U_a^+ \cap U_b^+ &= \{(x_1, \dots, x_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_a > 0, x_b > 0\} \\
\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) &= \{(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m \mid x_b > 0\} \\
\varphi_b^+(U_a^+ \cap U_b^+) &= \{(x_1, \dots, x_a, \dots, \hat{x}_b, \dots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m \mid x_a > 0\} \\
(\varphi_a^+)^{-1}x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \\
&= (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})
\end{aligned}$$

この式から

$$\begin{aligned}
&\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \\
&= (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, \hat{x}_b, \dots, x_{m+1})
\end{aligned}$$

これは $\|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2 < 1$ の範囲で C^∞ 級なので,

$\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$ は定義域 $\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) \subset \mathring{D}^m$ で C^∞ 級である.

同様にして (ii), (iii) の場合についても座標変換が C^∞ 級であることが分かる.

以上より, S^m は m 次元 C^{infy} 級多様体であることが分かった. □

2.1 小節のタイトル

2.1.1 小小節のタイトル

3 おわりに

参考文献

- [1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.
- [2] 【論文の場合】 著者名, タイトル, 雑誌名, 巻・号, 出版年度, 頁.
- [3] 【Web ページの場合】 タイトル, ページ制作者（機関）等, URL: <http://www.shibaura-it.ac.jp/>, 最終アクセス日時: 2021/12/28 16:33.