2023 年度
芝浦工業大学　システム理工学部
数理科学科

総合研究論文

多様体の次元を調べる方法

Methods for Investigating the Dimension of Manifolds

顔写真
横 3cm
×
縦 4cm

BV20052

あおみ　けんし
青見　健志

指導教員： 亀子 正樹　教授

目 次

1　はじめに

2　準備

2.1　連続写像と C^r 級写像

2.2　位相空間

3　C^r 級多様体と C^r 級写像

3.1　C^r 級多様体

定義 3.1. 位相空間 X の開集合 U から m 次元数空間 $\mathbb{R}^m$ のある開集合 U' への同相写像

$$\varphi : U \to U'$$

があるとき, (U, φ) を m 次元座標近傍といい, φ を U 上の局所座標系という.

(U, φ) には局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ が描かれていると考え, $(U; x_1, \cdots, x_m)$ とも表すこととする.

定義 3.2. (U, φ) を位相空間 X 内の局所座標近傍とする. U 内の任意の点 p に対して $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ であるから,

$$\varphi(p) = (x_1, \cdots, x_m)$$

と書ける.$(x_1, \cdots, x_m)$ を (U, φ) に関する p の局所座標という.

定義 3.3. 位相空間 M が次の条件 (1),(2) を満たすとき, M を m 次元位相多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M 内の任意の点 p に対して, p を含む m 次元座標近傍 (U, φ) が存在する.

定義 3.4. m 次元位相多様体 M の 2 つの座標近傍 (U, φ), (V, ψ) が交わっているとき, 同相写像

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換という.

定義 3.5. $r \geq 1$ を自然数または ∞ とする. 位相空間 M が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, M を m 次元 C^r 級多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M は m 次元座標近傍により被覆される. すなわち, M の m 次元座標近傍からなる族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ があって,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つ.

(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ であるような任意の α, β に対して, 座標変換

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

は C^r 級写像である.

定理 3.6. m 次元球面 $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ を

$$S^m = \{(x_1, \cdots x_{m+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体である.

証明. 定義 3.5 の条件 (1), (2), (3) を確かめる.

(1) $\mathbb{R}^{m+1}$ はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として, S^m はハウスドルフ空間である.

(2) S^m の $2(m+1)$ 個の開集合 U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ を次のように定義する.

$$U_i^+ = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i < 0\}$$

S^m はこれら U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ で被覆される. 写像 $\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^m$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

ここで, $\hat{x}_i$ は x_i を取り去るという意味である. このとき,

$$(\varphi_i^+)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, x_{m+1})$$

$$(\varphi_i^-)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, -\sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, x_{m+1})$$

であり, φ_i^+, φ_i^- はそれぞれ, U_i^+, U_i^- から $\mathring{D}^m$ への同相写像である. ただし, $\mathring{D}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の原点を中心とする m 次元単位開円板である. よって, S^m は $2(m+1)$ 個の座標近傍 $(U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), \cdots, (U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+), (U_{m+1}^-, \varphi_{m+1}^-)$ で被覆される.

(3) 2(m+1) 個の座標近傍の間の座標変換がすべて C^∞ 級であることを示す. $1 \leq a, b \leq 2(m+1)$ を満たす互いに異なる自然数 a, b に対して,

(i) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^+, φ_b^+)

(ii) (U_a^-, φ_a^-) と (U_b^-, φ_b^-)

(iii) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^-, φ_b^-)

の間の座標変換を調べればよい.
(i) の場合,

$$
\begin{aligned}
&U_a^+ \cap U_b^+ = \{(x_1, \cdots, x_a, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_a > 0,\ x_b > 0\} \\
&\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) = \{(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m | x_b > 0\} \\
&\varphi_b^+(U_a^+ \cap U_b^+) = \{(x_1, \cdots, x_a, \cdots, \hat{x_b}, \cdots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m | x_a > 0\} \\
&(\varphi_a^+)^{-1} x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1}) \\
&= (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1})||^2}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1})
\end{aligned}
$$

この式から

$$
\begin{aligned}
&\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \\
&= (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, \hat{x_b}, \cdots, x_{m+1})
\end{aligned}
$$

これは $||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1})||^2 < 1$ の範囲で C^∞ 級なので,
$\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$ は定義域 $\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) \subset \mathring{D}^m$ で C^∞ 級である.
同様にして (ii), (iii) の場合についても座標変換が C^∞ 級であること分かる.

以上より, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体であることが分かった. □

定義 3.7. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を m 次元 C^r 級多様体 M の 1 つの m 次元 C^r 級座標近傍とする. M の開集合 V と V から $\mathbb{R}^m$ への写像 ψ の対 (V, ψ) が次の条件 (1), (2) を満たしているとき, (V, ψ) は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ と両立するという.

(1) $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ の像 $\psi(V)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合で ψ は V から $\psi(V)$ への同相写像である.

(2) $V \cap U_\alpha \neq \phi$ となる α に対しては, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(V \cap U_\alpha) \to \psi(V \cap U_\alpha)$ は C^r 級写像である.

命題 3.8. (V_1, ψ_1), (V_1, ψ_1) がともに与えられた座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ と両立していて, $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ とすると, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ は C^r 級写像となる.

証明. 任意の点 $x \in V_1 \cap V_2$ に対し, $x_\in U_\alpha$ となる $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ が座っ票近傍系の中に存在する.

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2 \cap U_\alpha) \to \psi_2(V_1 \cap V_2 \cap U_\alpha)$$

は $(\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\psi_1 \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}$ と分解され, $(\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1})$, $(\psi_1 \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}$ はそれぞれ $x \in V_1 \cap V_2$ に関して C^r 級であるから, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ も x に関して C^r 級である. いま, $x \in V_1 \cap V_2$ は任意であったから, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ は C^r 級写像である. □

定義 3.9. 位相空間 M 上に C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられているとする．$\mathcal{S}$ と両立する (V, ψ) の全体集合 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ を M 上の極大な C^r 級座標近傍系とする．ここで, 極大とは $\mathcal{M}$ と両立する全ての (U, φ) が $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ に属することをいう．この $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ のことを $\mathcal{S}$ から決まる M の C^r 級極大座標近傍系という．

以降, C^r 級多様体 M が C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ によって定義されたとき, M には $\mathcal{S}$ から決まる C^r 級極大座標近傍系 $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ を与え, $(M, \mathcal{M}(\mathcal{S}))$ を考えるものとする．

3.2 C^s 級写像

M, N を m 次元, n 次元の C^r 級多様体とし, f を連続写像とする．

定義 3.10. M, N の C^r 級座標近傍 (U, φ), (V, ψ) が存在し,

$$f(U) \subset V$$

が成り立つ．U と V の中には座標近傍系 $(x_1, \cdots x_m)$, $(y_1, \cdots y_n)$ があるから, $f|U : U \to V$ を

$$(y_1, \cdots y_n) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x_1, \cdots x_m)$$

と表示することができる．この表示の $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ を f に書き直したもの $((y_1, \cdots y_n) = f(x_1, \cdots x_m))$ を $(U; x_1, \cdots x_m)$ と $(V; y_1, \cdots y_n)$ に関する f の局所座標表示という．

定義 3.11. 連続写像 $f : M \to N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるとは, p を含む M の C^r 級座標近傍 $(U; x_1, \cdots x_m)$ と $f(p)$ を含む N の座標近傍 $(V; y_1, \cdots y_n)$ が存在して,

(1) $f(U) \subset V$

(2) $(U; x_1, \cdots x_m)$ と $(V; y_1, \cdots y_n)$ に関する f の局所座標表示が C^s 級である．(ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

この 2 つの条件が成り立つことである．f が任意の点 $p \in M$ で C^s 級であるとき, f は C^s 級写像であるという．

命題 3.12. 連続写像 $f : M \to N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるという性質は, p, $f(p)$ をそれぞれ含む C^r 級座標近傍 (U, φ), (V, ψ) の選び方によらない．(ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

証明. f は $p \in M$ において (U, φ), (V, ψ) に関して C^s 級であると仮定する．$f(U') \subset V'$, $U' = U$, $V' = V$ となるような p, $f(p)$ をそれぞれ含む別の C^r 級座標近傍 (U', φ'), (V, ψ') をとると, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi')$$

と分解される. $\psi' \circ \psi^{-1}$, $\varphi \circ \varphi'$ はそれぞれ M, N における座標変換であるから C^r 級であり, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は仮定より C^s 級であるから, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は C^s 級である. よって命題は証明された. □

命題 3.13. M, N, Q を C^r 級多様体とする. $f : M \to N$, $g : N \to Q$ がともに C^s 級写像なら, 合成写像 $g \circ f : M \to Q$ も C^s 級である. (ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

証明. (1) p を M の任意の点とすると, g は C^s 級写像より, $g(V) \subset W$ となうような $f(p)$, $g(f(p))$ を含む座標近傍 (V, ψ), (W, ω) が存在する. また, f は C^s 級写像より, $f(U) \subset V$ となうような p を含む座標近傍 (U, φ) が存在する. よって, 任意の点 $p \in M$ において $g \circ f(p) \subset W$ となるような p, $g \circ f(p)$ を含む座標近傍 (U, φ), (W, ω) の存在を示せた.

(2) $\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ は

$$\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\omega \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

と分解される. g は C^s 級写像より, $\omega \circ g \circ \psi^{-1}$ は C^s 級, f は C^s 級写像より, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は C^s 級であるから, $\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ は C^s 級となる.

以上より, 合成写像 $g \circ f : M \to Q$ は C^s 級である. □

定義 3.14. M, N を C^r 級多様体とする. $f : M \to N$ が C^s 級微分同相写像であるとは, 次の条件 (1), (2) を満たすことをいう.

(1) $f : M \to N$ は全単射（1 対 1 かつ上への写像）である.

(2) $f : M \to N$ と $f^{-1} : N \to M$ はともに C^s 級写像である.

命題 3.15. M を m 次元 C^r 級多様体, V を M の開集合, V' を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする. また, $\varphi : V \to V'$ を同相写像とする. このとき, (V, φ) が M の C^r 級座標近傍になるための必要十分条件は, $\varphi : V \to V'$ が, C^r 級微分同相写像であることである.

証明. まず, (V, φ) が C^r 級座標近傍なら, $\varphi : V \to V'$ が, C^r 級微分同相写像であることを証明する. $\varphi^{-1} \circ \varphi : V' \to V'$ が C^r 級であることを示せばよい.

□

4 接ベクトル空間

4.1 接ベクトル空間

4.2 C^r 級写像の微分

5　多様体の次元を調べる方法

5.1　写像の局所的性質

定理 5.1. $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が線形写像として同型なら, f は p のある開近傍から $f(p)$ のある開近傍への C^r 級微分同相写像である．すなわち, p の開近傍 U と $f(p)$ の開近傍 V が存在して, $f(U) = V$ となり, かつ, $f|U : U \to V$ は C^r 級微分同相写像である.

定理 5.2. $f : M \to N$ を C^r 級写像とする．ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が上への線形写像なら, 点 p 付近での f の様子は, 射影: $\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_(m-n+1), \cdots, x_m)$ と同じである．すなわち, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \cdots, y_n) = (c)$ が

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_m) = x_{m-n+1} \\
&\vdots \\
y_n &= f_n(x_1, \cdots, x_m) = x_m
\end{aligned}
$$

であるようにできる.

証明. C^r 級写像 $f : M \to N$ が与えられており, ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が上への線形写像であるとする．このとき, $\mathrm{rank}(df)_p = n$ (ただし, $m = \mathrm{dim} M \geq n = \mathrm{dim} N$．) 点 p, 点 $f(p)$ のまわりに, それぞれ座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$, $(V; y_1, \cdots, y_n)$ をとり, f を局所座標表示すると

$$(y_1, \cdots, y_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

ヤコビ行列 $(Jf)_p$ は $(df)_p$ を表す行列で, n 行 m 列である．$\mathrm{rank}(df)_p = n$ であるから, $(Jf)_p$ から n 本の列ベクトルを選んで, 作った正方行列は正則である．必要なら適当に列を入れ替えて

$$
B = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\
 & \cdots & \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p)
\end{pmatrix}
$$

とおくと, $\det B \neq 0$ であって,

$$
(Jf)_p = \left(\begin{array}{ccc|c}
* & \cdots & * & \\
 & & & B \\
* & \cdots & * &
\end{array}\right)
$$

と仮定してよい. p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ から, $\mathbb{R}^m$ への写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を

$$\varphi(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_{m-n}, f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

と定義する. やコビ行列 $(J\varphi)_p$ は

$$(J\varphi)_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 1 & \\ \hline * & \cdots & * & \\ & \cdots & & B \\ * & \cdots & * & \end{array}\right)$$

となり, $\det(J\varphi)_p = \det B \neq 0$ である. したがって, 逆関数の定理（定理**??**）により, 点 p を含む U を十分小さくとれば, $\varphi|U : U \to \varphi(U)$ は C^r 級微分同相写像である. よって, /refprop: cord-nabor condition より,$(U, \varphi|U)$ は p のまわりの新しい C^r 級座標近傍と思える. $(U, \varphi|U)$ の局所座標系を $(z_1, \cdots, z_m)$ とすると, 上の φ の定義式から,

$$(z_1, \cdots, z_m) = \varphi(x_1, \cdots x_m) = (x_1, \cdots x_{m-n}, f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

を得る. とくに, $(z_{m-n+1}, \cdots, z_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$ であるから,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(z_1, \cdots z_m) &= f(x_1, \cdots x_m) \\ &= (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)) \\ &= (z_{m-n+1}, \cdots, z_m) \end{aligned}$$

となる. よって, $(z_1, \cdots, z_m)$ と $(y_1, \cdots, y_n)$ に関する $f : M \to N$ の点 p のまわりでの局所座標表示

$$(z_1, \cdots, z_m) \mapsto (z_{m-n+1}, \cdots, z_m) = (y_1, \cdots, y_n)$$

である. $(z_1, \cdots, z_m)$ を改めて $(x_1, \cdots, x_m)$ と書き直せば, 定理 5.2 の主張が得られる. □

定理 5.3. $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が 1 対 1 の線形写像なら, 点 p の付近での f の様子は, 包含写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$ と同じである. すなわち, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \cdots, y_n) \mapsto$

$(f_1(x_1,\cdots x_m),\cdots,f_n(x_1,\cdots x_m),)$ が,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\cdots x_m) = x_1 \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1,\cdots x_m) = x_m \\ y_{m+1} &= f_{m+1}(x_1,\cdots x_m) = 0 \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1,\cdots x_m) = 0 \end{aligned}$$

であるようにできる.

証明. 問題は局所的であるから $M=\mathbb{R}^m$, $N=\mathbb{R}^n$ と仮定してよい. $(m \leq n)$ また, $p=\boldsymbol{o}$, $f(p)=\boldsymbol{o}$ としてよい. $\mathbb{R}^m$ の自然な座標 $(x_1,\cdots,x_m)$ と, $\mathbb{R}^n$ の自然な座標に関して, 与えられた C^r 級写像 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を局所座標表示したものを

$$u_1 = f_1(x_1,\cdots,x_m),\ \cdots, u_n = f_n(x_1,\cdots,x_m)$$

とする. $(df)_{\boldsymbol{o}}:T_{\boldsymbol{o}}(\mathbb{R}^m) \to T_{\boldsymbol{o}}(\mathbb{R}^n)$ は1対1であるから, ヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{o}}$ から, 適当な m 行を選び出して作った m 次正方行列は正則である. 必要なら, $(u_1,\cdots,u_m)$ の並び方を変えて, $(Jf)_{\boldsymbol{o}} = \begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix}$ (A は m 行 m 列の正則行列) と仮定してよい.

$(x_1,\cdots,x_m)$ に新しく, $(x_{m+1},\cdots,x_n)$ を付け加えて, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ を構成し, 新しい写像 $F:\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ を,

$$\begin{aligned} &F(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots x_n) \\ &= (f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m),f_{m+1}(x_1,\cdots,x_m)+x_{m+1},\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_m)+x_n) \end{aligned}$$

と定義する.F のヤコビ行列

$$(Jf)_{\boldsymbol{o}} = \left(\begin{array}{c|ccc} A & & O & \\ \hline & 1 & & \\ B & & \vdots & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

であり, 正則である. 逆関数の定理 5.1 により, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ における, $\boldsymbol{o}$ の近傍 U と, $\mathbb{R}^n$ における $\boldsymbol{o}$ の近傍 V が存在して, $F|U:U \to V$ は C^r 級微分同相写像になる. $\psi = (F|U)^{-1}:V \to U$ とおく. (V,ψ) は $\boldsymbol{o}$ のまわりの $\mathbb{R}^n$ の C^r 級座標近傍と思える. この座標近傍に関する局所座標系を $(y_1,\cdots y_n)$ とし, $(x_1,\cdots,x_m)$ と

$(y_1, \cdots y_n)$ に関して, $f : U \cap (\mathbb{R}^m \times \{\boldsymbol{o}\}) \to \mathbb{R}^n$ を局所座標表示すると,

$$\begin{aligned}(y_1, \cdots, y_n) &= \psi(f(x_1, \cdots, x_m)) \\ &= \psi(F(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots 0)) \\ &= (F|U)^{-1}(F(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots 0)) \\ &= (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)\end{aligned}$$

となる. したがって, 定理 5.3 の主張する通りの局所座標表示が得られた. □

5.2 C^r 級部分多様体

定義 5.4. n 次元 C^r 級多様体 N の部分集合 L が N の l 次元 C^r 級部分多様体であるとは,

(1) $l = n$ のとき:L が N の開集合であることである.

(2) $0 \leq l < n$ のとき:L の任意の点 p に対し, p を含む N の座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ が存在して,

$$L \cap N = \{(x_1, \cdots, x_n) \in U | x_{l+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

が成り立つことである.

命題 5.5. n 次元 C^r 級多様体 N の l 次元 C^r 級部分多様体 L は, それ自身 l 次元 C^r 級多様体である.

証明. (1) $l = n$ のとき, N からの相対位相によって, L は位相空間となり, N の C^r 級座標近傍を $\mathcal{S} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とすると, $\mathcal{S}$ を L に制限した $\{U_\alpha \cap L, \varphi_\alpha | U_\alpha \cap L\}_{\alpha \in A}$ は L の C^r 局所座標系になる. よって, L はそれ自身, $l(= n)$ 次元 C^r 級多様体である.

(2) $0 \leq l < n$ のとき, L には N からの相対位相を入れる. N がハウスドルフ空間であるから L もそうである.
L の任意の点 p に対し, p を含む N の局所座標系 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ で定義 5.4 の条件を満たすものを選び, $(U_p; x_1^p, \cdots, x_n^p)$ とする. $V_p = L \cap U_p$ とおくと, V_p は L の開集合である. V_p 上の U_p の局所座標系 $(x_1^p, \cdots, x_n^p)$ の x_1^p から x_l^p までを制限したもの $(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)$ を考える.
$\{(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)\}_{p \in L}$ が L を被覆することは明らかである.
V_p と V_q が交わるとする. 対応する $(U_p; x_1^p, \cdots, x_n^p)$ と $(U_q; x_1^q, \cdots, x_n^q)$ は, N の適当な座標近傍 $(U_\alpha; x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha)$, $(U_\beta; x_1^\beta, \cdots, x_n^\beta)$ である. この間の座標変換はある C^r 級関数 f を用いて,

$$(x_1^\beta, \cdots, x_n^\beta) = (f_1(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha), \cdots, f_n(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha))$$

と書ける．$V_p \cap V_q$ 上では，$x^\alpha_{l+1} = x^\alpha_n = 0$, $x^\beta_{l+1} = x^\beta_n = 0$ が成り立つので，$V_p \cap V_q$ 上では

$$
\begin{aligned}
x^\beta_1 &= f_1(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
x^\beta_l &= f_l(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0) \\
0 &= f_{l+1}(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
0 &= f_n(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0)
\end{aligned}
$$

となっている．改めて関数 g を

$$
\begin{aligned}
g(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l) &= (g_1(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l), \cdots, g_l(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l)) \\
&= (f_1(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0), \cdots, f_l(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l, 0, \cdots, 0))
\end{aligned}
$$

と定義すると，この関数は C^r 級である．そして，

$$(x^\beta_1, \cdots, x^\beta_l) = g(x^\alpha_1, \cdots, x^\alpha_l)$$

が $(V_p; x^p_1, \cdots x^p_l)$ から $(V_q; x^q_1, \cdots x^q_l)$ の座標変換を与えている．
ゆえに，$\{(V_p; x^p_1, \cdots, x^p_l)\}_{p \in L}$ は L の C^r 級座標近傍になっている．
以上より，L は l 次元 C^r 級多様体である．

□

定理 5.6. M, N を m 次元，n 次元の C^r 級多様体，$f : M \to N$ を C^r 級写像とする．N のある点 q について，$f(p) = q$ となる M の各点 p が常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ を満たすとき，逆像 $f^{-1}(q)$ は $(m-n)$ 次元 C^r 級多様体である．

証明. 定義 5.4, 命題 5.5 より，次のことを証明すればよい．

$q \in N$ の逆像 $f^{-1}(q)$ に属する任意の点 p に対し，p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots .x_m)$ が存在して，

$$f^{-1}(q) \cap U = \{(x_1, \cdots x_m) \in U | x_{m-n+1} = \cdots = x_m = 0\}$$

が成り立つ．

今，$f(p) = q$ を満たす $p \in M$ について，常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ であるから，$(df)_p$ は上への写像である．よって，定理 5.2 より，p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ と $q(= f(p))$ のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_n)$ が存在して，$f|U : U \to V$ は

$$(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots x_m) = (x_{m-n+1}, \cdots, x_m)$$

と座標表示される.
$(U; x_1, \cdots x_m)$ は任意にとってきた $(V; y_1, \cdots, y_n)$ に応じて選べるから, $(V; y_1, \cdots, y_n)$ は点 q で $y_1 = \cdots = y_n = 0$ となるようにとっておくと,

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(q) \cap U &= \{p \in U | f(p) = q\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_m) \in U | f(x_1, \cdots x_m) = (0, \cdots, 0)\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_m) \in U | (x_{m-n+1}, \cdots x_m) = (0, \cdots, 0)\} \\
&= \{(x_1, \cdots x_m) \in U | x_{m-n+1} = \cdots = x_m = 0\}
\end{aligned}
$$

となり, 条件を満たす U が存在することがわかる. これで定理5.6 が証明できた. □

5.3 多様体の次元の具体的な計算

6　おわりに

参考文献

[1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.

[2] 【論文の場合】著者名，タイトル，雑誌名，巻・号，出版年度，頁.

[3] 【Web ページの場合】 タイトル，ページ制作者（機関）等，URL: http://www.shibaura-it.ac.jp/，最終アクセス日時: 2021/12/28 16:33.