# 多様体の次元を調べる方法

## Methods for Investigating the Dimension of Manifolds

空間数理研究室　BV20052 青見 健志　指導教員 亀子 正喜 教授

## 1　はじめに

どこでも好きなところに $m$ 次元の局所座標系を描ける空間を $m$ 次元多様体という．例えば, 球面は球面上のどこでも好きなところに 2 次元の局所座標系を描くことができるため, 2 次元多様体である．

私は複雑な方程式で表された空間や高次元の空間などの形を理解することに興味をもち, 多様体の次元を調べる方法を研究することにした．

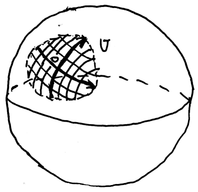



図 1: 球面に描かれた局所座標系

## 2　数式の例

**定義 2.1.** $r \geq 1$ を自然数または $\infty$ とする．位相空間 $M$ が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, $M$ を $m$ 次元 $C^r$ 級多様体という．

(1) $M$ はハウスドルフ空間である．

(2) $M$ は $m$ 次元座標近傍により被覆される．すなわち, $M$ の $m$ 次元座標近傍からなる族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ があって,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つ．

(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ であるような任意の $\alpha$, $\beta$ に対して, 座標変換

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

は $C^r$ 級写像である．

**定理 2.2.** $m$ 次元球面 $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ を

$$S^m = \{(x_1, \cdots x_{m+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると, $S^m$ は $m$ 次元 $C^\infty$ 級多様体である．

**証明.** $\mathbb{R}^{m+1}$ はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として, $S^m$ はハウスドルフ空間である．$S^m$ の $2(m+1)$ 個の開集合 $U_i^+$, $U_i^-$ $(i = 1, \cdots, m+1)$ を次のように定義する．

$$U_i^+ = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i > 0\}$$

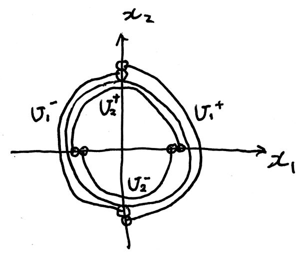
$$U_i^- = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i < 0\}$$

$S^m$ はこれら $U_i^+$, $U_i^-$ $(i = 1, \cdots, m+1)$ で被覆される．写像 $\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^m$ をそれぞれ次のように定義する．

$$\varphi_i^+(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_{m+1})$$

ここで, $\hat{x_i}$ は $x_i$ を取り去るという意味である．このとき, $\varphi_i^+$, $\varphi_i^-$ はそれぞれ, $U_i^+$, $U_i^-$ から $\mathbb{R}^m$ への射影であるから, 同相写像であり, すべての座標変換 $\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$ $(1 \leq a, b \leq 2(m+1))$ が $C^\infty$ 級であることが確かめられる．よって, $S^m$ は $m$ 次元 $C^\infty$ 級多様体であることがわかる．□



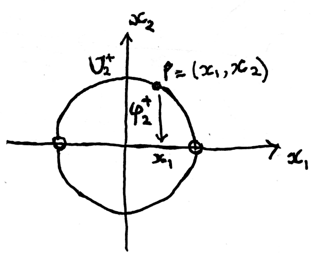




図 2: $S^1$ の開集合　図 3: $S^1$ の局所座標系

**定義 2.3.** $M$, $N$ を $C^r$ 級多様体とする．$f : M \to N$ が $C^s$ 級微分同相写像であるとは, 次の条件 (1), (2) を満たすことをいう．

(1) $f : M \to N$ は全単射 (1 対 1 かつ上への写像) である.

(2) $f : M \to N$ と $f^{-1} : N \to M$ はともに $C^s$ 級写像である.

ここで $f : M \to N$ が $C^s$ 級写像であるとは, $p \in M$, $f(p) \in N$ を含む $C^r$ 級座標近傍 $(U, \varphi)$, $(V, \psi)$ に対して $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ が $C^s$ 級写像であるということである.

**定義 2.4.** $p$ を含む座標近傍 $(U; x_1, \cdots x_m)$ を 1 つ固定する. $p$ のまわりで定義された $C^r$ 級関数 $f$ に, $p$ における $x_i$ 方向の偏微分係数を対応させる操作を $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と書く. すなわち,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

である.

**命題 2.5.** $m$ 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ は 1 次独立である.

**定義 2.6.** $m$ 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ の張るベクトル空間を, 点 $p$ における $M$ の接ベクトル空間とよび, $T_p(M)$ という記号で表す. 接ベクトル空間 $T_p(M)$ の元を接ベクトルとよぶ.

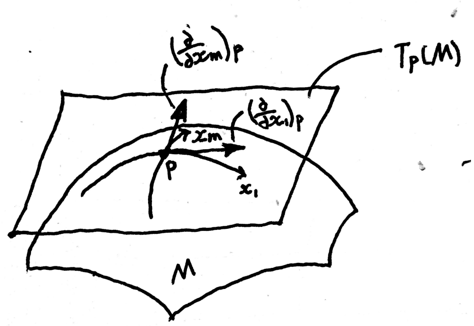



図 4: $T_p(M)$ のイメージ

$T_p(M)$ は点 $p$ のまわりの局所座標系のとり方によらず一意に定まる.

**命題 2.7.** $t = 0$ における j 曲線 $c$, $f \circ c$ の速度ベクトルをそれぞれ

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

とおくと, 係数 $v_1, \cdots, v_m$ と $w_1, \cdots, w_n$ の間には次の関係がある.

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) v_i \ (j = 1, \cdots, n)$$

またこの式を, 縦ベクトルと行列を使って書くと

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

となる. 上の $n$ 行 $m$ 列の行列を点 $p$ におけるヤコビ行列とよび, $(Jf)_p$ で表す.

**定義 2.8.**

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N), \ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \mapsto (Jf)_p \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

を, 点 $p$ における $f : M \to N$ の微分とよぶ.

**定理 2.9.** $M$, $N$ を $m$ 次元, $n$ 次元の $C^r$ 級多様体, $f : M \to N$ を $C^r$ 級写像とする. $N$ のある点 $q$ について, $f(p) = q$ となる $M$ の各点 $p$ が常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ を満たすとき, 逆像 $f^{-1}(q)$ は $(m - n)$ 次元 $C^r$ 級多様体である.

**例 2.10.** 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ は 2 次元 $C^\infty$ 級多様体になる.

$T^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ より, $C^\infty$ 級写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1)$ と定義すると, $T^2 = f^{-1}(0, 0)$ と表せる. ヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{x}}$ は

$$(Jf)_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} \in T^2$ のとき, $\mathrm{rank}(Jf)_{\boldsymbol{x}} = 2$ であるから, $T^2$ は $4 - 2 = 2$ 次元 $C^\infty$ 級多様体である.

## 参考文献


[1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.

[2] 藤岡敦, [第 2 版] 具体例から学ぶ　多様体, 裳華房, 2017.

[3] 服部晶夫, [第 1 版] 多様体, 岩波書店, 1976.