多様体の次元を調べる方法

青見健志

空間数理研究室

令和 6 年 2 月 8 日

はじめに

どこでも好きなところに m 次元の局所座標系を描ける空間を m 次元多様体という．例えば, 球面は球面上のどこでも好きなところに 2 次元の局所座標系を描くことができるため, 2 次元多様体である．
私は空間の多様体としての次元を調べることで複雑な方程式で表された空間や高次元の空間などの形を理解できることに興味をもち, 多様体の次元を調べる方法を研究することにした．

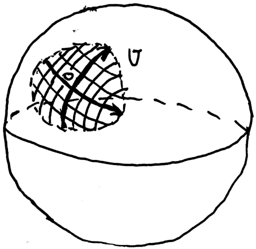


Figure: 球面に描かれた局所座標系

準備

定義

位相空間 X の開集合 U から, m 次元数空間 $\mathbb{R}^m$ のある開集合 U' への同相写像 $\varphi : U \to U'$ があるとき φ を U 上の局所座標系といい, (U, φ) を m 次元座標近傍という.

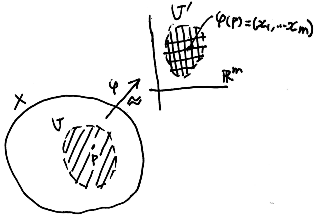


Figure: U 上の局所座標系

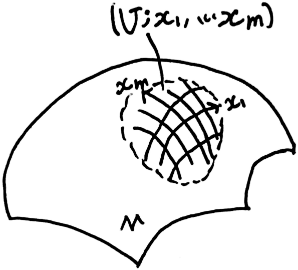


Figure: 描かれた局所座標系

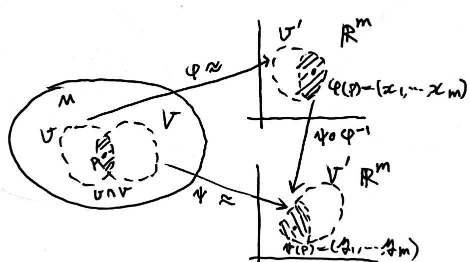
定義

2 つの座標近傍 (U, φ), (V, ψ) が交わっているとき, 同相写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換という.

局所座標系が描かれているだけでなく, 重なっている場合はその間の座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}$ が微分可能 (座標近傍の張り合わせが滑らか) なものを考える.



定義

r を自然数または ∞ とする．位相空間 M が条件 (1), (2), (3) をみたすとき，M を m 次元 C^r 級多様体という．
(1)M はハウスドルフ空間である．
(2)M は m 次元座標近傍によって被覆される．
(3)$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ であるような座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) について座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は C^r 級写像である．

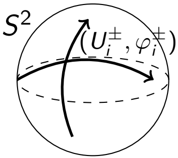
多様体の例

定理

m 次元球面 $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ を

$$S^m = \{(x_1, \cdots x_{m+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体である.



$\mathbb{R}^{m+1}$ はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として, S^m はハウスドルフ空間である. S^m の $2(m+1)$ 個の開集合 U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ を次のように定義する.

$$U_i^+ = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i < 0\}$$

S^m はこれら U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ で被覆される. 写像 $\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^m$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

ここで, $\hat{x}_i$ は x_i を取り去るという意味である.

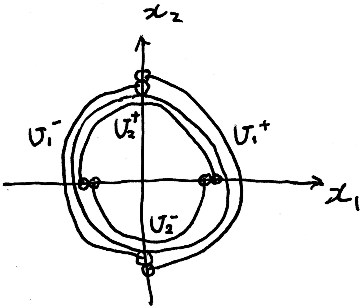


Figure: S^1 の開集合

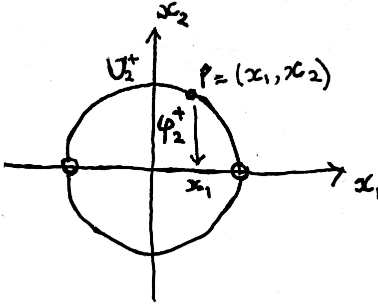


Figure: S^1 の局所座標系

このとき, φ_i^+, φ_i^- はそれぞれ, U_i^+, U_i^- から $\mathbb{R}^m$ への射影であるから, 同相写像であり, すべての座標変換 $\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$ $(1 \leq a, b \leq 2(m+1))$ が C^∞ 級であることが確かめられる. よって, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体であることがわかる.

C^s 級写像とその微分

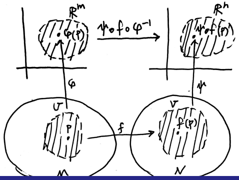
定義

C^r 級多様体 M(m 次元), N (n 次元) 間の写像 $f : M \to N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるとは, p を含む M の C^r 級座標近傍 (U, φ) と $f(p)$ を含む N の座標近傍 (V, ψ) が存在して,

(1) $f(U) \subset V$

(2) (U, φ) と (V, ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が C^s 級である. (ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

この 2 つの条件が成り立つことである. f が任意の点 $p \in M$ で C^s 級であるとき, f は C^s 級写像であるという.



定義

M, N を C^r 級多様体とする. $f: M \to N$ が C^s 級微分同相写像であるとは, 次の条件 (1), (2) を満たすことをいう.

(1) $f: M \to N$ は全単射 (1 対 1 かつ上への写像) である.

(2) $f: M \to N$ と $f^{-1}: N \to M$ はともに C^s 級写像である.

定理

m 次元 C^r 級多様体, M に座標近傍系 $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられているとする. V を M の開集合, V' を $\mathbb{R}^m$ の開集合とし, $\varphi: V \to V'$ を C^r 級微分同相写像であるとすると, $\mathcal{S}$ に (V, ψ) を加えた集合 $\mathcal{S} \cup (V, \psi)$ も C^r 級座標近傍系になる.

定義

このような (V, ψ) の全体集合 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ を $\mathcal{S}$ から決まる M の C^r 級極大座標近傍系という.

これによって, いくらでも小さい開近傍 U' や, 新しい局所座標系 φ' による座標近傍 (U', φ') も同時に考えられるようになる.

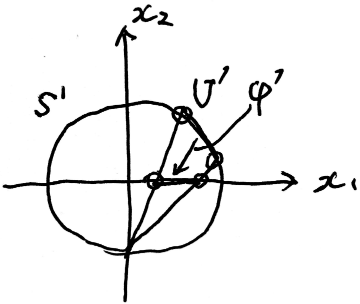


Figure: 小さい U' とステレオ投影 φ'

定義

$p \in M$ のまわりの座標近傍 (U, φ) 上の C^r 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に, p における x_i 方向の偏微分係数を対応させる操作を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : f \mapsto \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

と表す.

和と a 倍 $(a \in \mathbb{R})$ を

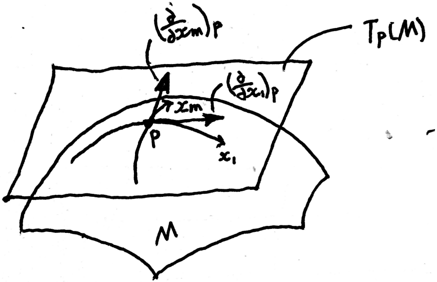
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p : f \mapsto \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p)) + \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j}(\varphi(p))$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : f \mapsto a\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

と定義すると, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ の 1 次結合全体の集合はベクトル空間となり, m 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ はその基底になっている.

定義

m 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ の張るベクトル空間を，点 p における M の接ベクトル空間とよび，$T_p(M)$ という記号で表す．接ベクトル空間 $T_p(M)$ の元 $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ を接ベクトルとよぶ．



定義

任意の接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ を $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ とし，m 次元数ベクトル $(v_1, \cdots, v_m)$ とみなすとき，

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N), \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \mapsto (Jf)_p \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

を，点 p における $f : M \to N$ の微分とよぶ．ただし，$(Jf)_p$ は点 p におけるヤコビ行列

$$(Jf)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_1}{\partial x_1}(\varphi(p)) & \cdots & \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_1}{\partial x_m}(\varphi(p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_n}{\partial x_1}(\varphi(p)) & \cdots & \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_n}{\partial x_m}(\varphi(p)) \end{pmatrix}$$

であるとする．

写像の局所的性質

定理

$(df)_p : T_p(M) \to T_f(p)(N)$ が線型写像として同型 $(\det(Jf)_p \neq 0)$ なら, f は p のある開近傍から $f(p)$ のある開近傍への C^r 級微分同相写像である. すなわち, p の開近傍 U と $f(p)$ の開近傍 V が存在して, $f(U) = V$ となり, かつ, $f|U : U \to V$ は C^r 級微分同相写像である.

これを逆関数の定理という.

例

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ とすると, $(Jf)_x = 2x$ となり, $x \neq 0$ のとき $\det(Jf)_x \neq 0$ となるので, 十分小さい p の開近傍上 U で $f|U$ は C^∞ 級微分同相写像である. 実際 $p > 0$ のとき, p の十分小さい開近傍 U で $f|U^{-1} : f|U^{-1}(x) = \sqrt{x}$ が存在し, C^∞ 級であるので, $f|U$ が C^∞ 級微分同相写像であることがわかる.

定理

$f : M \to N$ を C^r 級写像とする．ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \to T_f(p)(N)$ が上への線型写像 $(\mathrm{rank}(Jf)_p = n)$ なら，点 p 付近での f の様子は，射影と同じ，つまり，$f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ に対して p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ をうまく選んで，f の局所座標表示 $(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots, x_m)$ が

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_m) = x_{m-n+1} \\
&\vdots \\
y_n &= f_n(x_1, \cdots, x_m) = x_m
\end{aligned}
$$

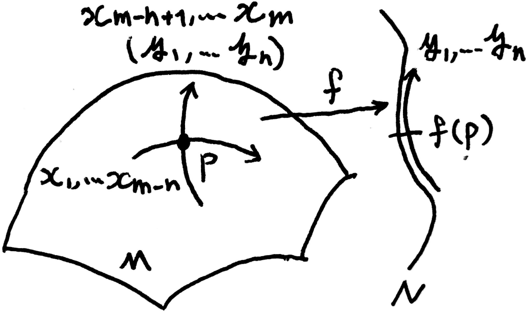
であるようにできる．

これを射影の定理とよぶこととする．

p のまわりの座標近傍が $(U; x_1, \cdots, x_m)$ のとき,

$$\varphi(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_{m-n+1}, f_1(x_1 \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

ととると $\det(J\varphi)_p \neq 0$ となり, 逆関数の定理を利用して $\varphi|U$ が C^r 級微分同相写像であることがわかる. $(U, \varphi|U)$ が新しい C^r 級座標近傍になり, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ はこのように選べば良いことが分かる.



定義

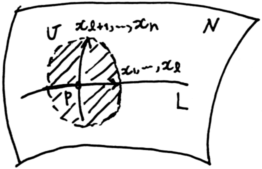
n 次元 C^r 級多様体 N の部分集合 L が N の l 次元 C^r 級部分多様体であるとは,

(1) $l = n$ のとき:L が N の開集合であることである.

(2) $0 \leq l < n$ のとき:L の任意の点 p に対し, p を含む N の座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ が存在して,

$$L \cap N = \{(x_1, \cdots, x_n) \in U | x_{l+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

が成り立つことである.



命題

n 次元 C^r 級多様体 N の l 次元 C^r 級部分多様体 L は, それ自身 l 次元 C^r 級多様体である.

定理

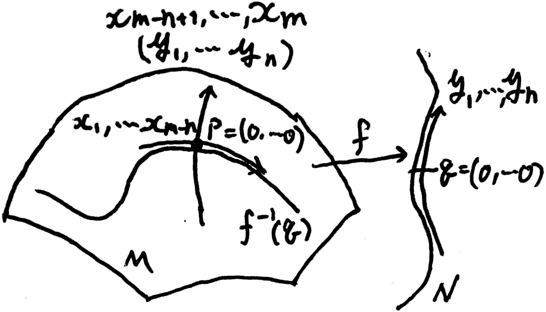
M, N を m 次元, n 次元の C^r 級多様体, $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. N のある点 q について, $f(p) = q$ となる M の各点 p が常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ を満たすとき, 逆像 $f^{-1}(q)$ は $(m-n)$ 次元 C^r 級多様体である.

$q \in N$ の逆像 $f^{-1}(q)$ に属する任意の点 p に対し, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots .x_m)$ が存在して,

$$f^{-1}(q) \cap U = \{(x_1, \cdots x_m) \in U | x_{m-n+1} = \cdots = x_m = 0\}$$

が成り立つこと ($(m-n)$ 次元 C^r 級部分多様体の条件) を証明すればよい.

今，$f(p)=q$ を満たす $p \in M$ について，常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ であるから，$(df)_p$ は上への写像である．よって，$q(=f(p))$ のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_n)$ に対して，$(V; y_1, \cdots, y_n)$ は点 q で $y_1 = \cdots = y_n = 0$ となるようにとっておくと，射影の定理より p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ をとってきて以下のようにできる．



多様体の次元の具体的な計算

例

n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

は n 次元 C^∞ 級多様体である.

C^∞ 級写像 (C^∞ 級関数) $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$$

で定義すると,
$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}) | f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0\} = f^{-1}(0)$ より, S^n は逆像 $f^{-1}(0)$ となっている. ヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{x}}$ を調べると, $\boldsymbol{x} \in S^1$ のとき,

$$(Jf)_{\boldsymbol{x}} = (2x_1, \cdots, 2x_{n+1}) \neq \boldsymbol{o}$$

となり, $(Jf)_{\boldsymbol{x}}$ の階数は 1 となる. よって, S^n は $(n+1) - 1 = n$ 次元 C^∞ 級多様体である.

例

2 次元トーラス

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{T^2 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

$(0 < r < R)$ は 2 次元 C^∞ 級多様体である.

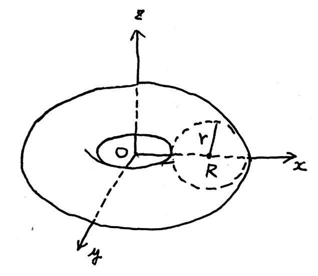


Figure: $\mathbb{R}^3$ の中の 2 次元トーラス T^2

C^∞ 級写像 (C^∞ 級関数) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$$

と定義すると,

$$T^2 = f^{-1}(0)$$

となる. $\boldsymbol{p} = (x,y,z)$ におけるヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{p}}$ を調べると, であり,
$\boldsymbol{p} \in T^2$ のとき,

$$(Jf)_{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2+y^2} - R)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2} - R)}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right) \neq \boldsymbol{o}$$

となり, $\mathrm{rank}(Jf)_{\boldsymbol{p}} = 1$ を得る. したがって, T^2 は $3-1=2$ 次元 C^∞ 級多様体である.

例

2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ は 2 次元 C^∞ 級多様体になる.

$T^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ より，C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1)$ と定義すると，$T^2 = f^{-1}(0, 0)$ と表せる．ヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{x}}$ は

$$(Jf)_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} \in T^2$ のとき，$\mathrm{rank}(Jf)_{\boldsymbol{x}} = 2$ であるから，T^2 は $4 - 2 = 2$ 次元 C^∞ 級多様体である.

おわりに

空間を多様体 M, N の間の C^r 級写像 $f : M \to N$ の逆像 $f^{-1}(q)$ (ただし q は N のある 1 点) とみなせれば, f のヤコビ行列の階数を計算することで多様体としての次元を調べることができるということが分かった.
今後の課題としては, 多様体が部分多様体として実現できる空間の条件 (埋め込み可能性) について調べたい.

参考文献

[1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.

[2] 藤岡敦, [第 2 版] 具体例から学ぶ　多様体, 裳華房, 2017.

[3] 服部晶夫, [第 1 版] 多様体, 岩波書店, 1976.

命題

連続写像 $f : M \to N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるという性質は, p, $f(p)$ をそれぞれ含む C^r 級座標近傍 (U, φ), (V, ψ) の選び方によらない. (ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

f は $p \in M$ において (U, φ), (V, ψ) に関して C^s 級であると仮定する. $f(U') \subset V'$, $U' = U$, $V' = V$ となるような p, $f(p)$ をそれぞれ含む別の C^r 級座標近傍 (U', φ'), (V, ψ') をとると, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi')$$

と分解される. $\psi' \circ \psi^{-1}$, $\varphi \circ \varphi'$ はそれぞれ M, N における座標変換であるから C^r 級であり, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は仮定より C^s 級であるから, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は C^s 級である.

命題

n 次元 C^r 級多様体 N の l 次元 C^r 級部分多様体 L は，それ自身 l 次元 C^r 級多様体である．

$0 \leq l < n$ のとき，点 $p \in L$ に対し，p を含む N の局所座標系で部分多様体の定義の条件を満たすものを選び，$(U_p; x_1^p, \cdots, x_n^p)$, $(U_q; x_1^q, \cdots, x_n^q)$ とし，$V_p = L \cap U_p$, $V_q = L \cap U_q$ とおく．U_p, U_q の間の座標変換はある C^r 級関数 f を用いて，

$$
\begin{aligned}
x_1^q &= f_1(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
x_l^q &= f_l(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0) \\
0 &= f_{l+1}(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
0 &= f_n(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0)
\end{aligned}
$$

改めて関数 g を

$$\begin{aligned} g(x_1^p, \cdots, x_l^p) &= (g_1(x_1^p, \cdots, x_l^p), \cdots, g_l(x_1^p, \cdots, x_l^p)) \\ &= (f_1(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0), \cdots, f_l(x_1^p, \cdots, x_l^p, 0, \cdots, 0)) \end{aligned}$$

と定義すると，この関数は C^r 級である．そして，

$$(x_1^\beta, \cdots, x_l^\beta) = g(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha)$$

が $(V_p; x_1^p, \cdots x_l^p)$ から $(V_q; x_1^q, \cdots x_l^q)$ の座標変換を与えている．
ゆえに，$\{(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)\}_{p \in L}$ は L の C^r 級座標近傍になっている．
以上より，L は l 次元 C^r 級多様体である．

今, $f(p) = q$ を満たす $p \in M$ について, 常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ であるから, $(df)_p$ は上への写像である. よって, $q(= f(p))$ のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_n)$ に対して, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ をとってきて

$$f|U : U \to V, \ (y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots x_m) = (x_{m-n+1}, \cdots, x_m)$$

とすることができる.
$(V; y_1, \cdots, y_n)$ は点 q で $y_1 = \cdots = y_n = 0$ となるようにとっておくと,

$$\begin{aligned} f^{-1}(q) \cap U &= \{p \in U | f(p) = q\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_m) \in U | f(x_1, \cdots x_m) = (0, \cdots, 0)\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_m) \in U | (x_{m-n+1}, \cdots x_m) = (0, \cdots, 0)\} \\ &= \{(x_1, \cdots x_m) \in U | x_{m-n+1} = \cdots = x_m = 0\} \end{aligned}$$

となり, 条件を満たす U が存在することがわかる.