

2023 年度  
芝浦工業大学 システム理工学部  
数理科学科

## 総合研究論文

# 多様体の次元を調べる方法

Methods for Investigating the Dimension of  
Manifolds



BV20052

あ お み け ん し  
青見 健志

指導教員： 亀子 正樹 教授

# 目 次

1	はじめに	2
2	準備	3
2.1	連続写像と $C^r$ 級写像	3
2.2	位相空間	3
3	$C^r$ 級多様体と $C^r$ 級写像	4
4	接ベクトル空間	6
4.1	接ベクトル空間	6
4.2	$C^r$ 級写像の微分	6
5	多様体の次元を調べる方法	7
5.1	写像の局所的性質	7
5.2	$C^r$ 級部分多様体	10
5.3	多様体の次元の具体的な計算	11
6	おわりに	12

# 1 はじめに

## 2 準備

### 2.1 連続写像と $C^r$ 級写像

### 2.2 位相空間

### 3 $C^r$ 級多様体と $C^r$ 級写像

**定義 3.1.** 位相空間  $X$  の開集合  $U$  から  $m$  次元数空間  $\mathbb{R}^m$  のある開集合  $U'$  への同相写像

$$\varphi : U \rightarrow U'$$

があるとき,  $(U, \varphi)$  を  $m$  次元座標近傍といい,  $\varphi$  を  $U$  上の局所座標系という.

**定義 3.2.**  $(U, \varphi)$  を位相空間  $X$  内の局所座標近傍とする.  $U$  内の任意の点  $p$  に対して  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$  であるから,

$$\varphi(p) = (x_1, \dots, x_m)$$

と書ける.  $(x_1, \dots, x_m)$  を  $(U, \varphi)$  に関する  $p$  の局所座標という.

**定義 3.3.** 位相空間  $M$  が次の条件 (1), (2) を満たすとき,  $M$  を  $m$  次元位相多様体という.

(1)  $M$  はハウスドルフ空間である.

(2)  $M$  内の任意の点  $p$  に対して,  $p$  を含む  $m$  次元座標近傍  $(U, \varphi)$  が存在する.

**定義 3.4.**  $m$  次元位相多様体  $M$  の 2 つの座標近傍  $(U, \varphi), (V, \psi)$  が交わっているとき, 同相写像

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

を  $(U, \varphi)$  から  $(V, \psi)$  への座標変換という.

**定義 3.5.**  $r \geq 1$  を自然数または  $\infty$  とする. 位相空間  $M$  が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき,  $M$  を  $m$  次元  $C^r$  級多様体という.

(1)  $M$  はハウスドルフ空間である.

(2)  $M$  は  $m$  次元座標近傍により被覆される. すなわち,  $M$  の  $m$  次元座標近傍からなる族  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  があって,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つ.

(3)  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  であるような任意の  $\alpha, \beta$  に対して, 座標変換

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

は  $C^r$  級写像である.

**定理 3.6.**  $m$  次元球面  $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$  を

$$S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) | x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると,  $S^m$  は  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体である.

**証明.** 定義 3.5 の条件 (1), (2), (3) を確かめる.

(1)  $\mathbb{R}^{m+1}$  はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として,  $S^m$  はハウスドルフ空間である.

(2)  $S^m$  の  $2(m+1)$  個の開集合  $U_i^+, U_i^-$  ( $i = 1, \dots, m+1$ ) を次のように定義する.

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) \in S^m | x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) \in S^m | x_i < 0\}$$

$S^m$  はこれら  $U_i^+, U_i^-$  ( $i = 1, \dots, m+1$ ) で被覆される. 写像  $\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi_i^- : U_i^- \rightarrow \mathbb{R}^m$  をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})$$

ここで,  $\hat{x}_i$  は  $x_i$  を取り去るという意味である. このとき,

$$(\varphi_i^+)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_{m+1})$$

$$(\varphi_i^-)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, -\sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_{m+1})$$

であり,  $\varphi_i^+, \varphi_i^-$  はそれぞれ,  $U_i^+, U_i^-$  から  $\mathring{D}^m$  への同相写像である. ただし,  $\mathring{D}^m$  は  $\mathbb{R}^m$  の原点を中心とする  $m$  次元単位開円板である. よって,  $S^m$  は  $2(m+1)$  個の座標近傍  $(U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), \dots, (U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+), (U_{m+1}^-, \varphi_{m+1}^-)$  で被覆される.

(3)  $2(m+1)$  個の座標近傍の間の座標変換がすべて  $C^\infty$  級であることを示す.

$1 \leq a, b \leq 2(m+1)$  を満たす互いに異なる自然数  $a, b$  に対して,

$$(i) (U_a^+, \varphi_a^+) \text{ と } (U_b^+, \varphi_b^+)$$

$$(ii) (U_a^-, \varphi_a^-) \text{ と } (U_b^-, \varphi_b^-)$$

$$(iii) (U_a^+, \varphi_a^+) \text{ と } (U_b^-, \varphi_b^-)$$

の間の座標変換を調べればよい.

(i) の場合,

$$\begin{aligned}
U_a^+ \cap U_b^+ &= \{(x_1, \dots, x_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_a > 0, x_b > 0\} \\
\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) &= \{(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m \mid x_b > 0\} \\
\varphi_b^+(U_a^+ \cap U_b^+) &= \{(x_1, \dots, x_a, \dots, \hat{x}_b, \dots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m \mid x_a > 0\} \\
&= (\varphi_a^+)^{-1} x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1} \\
&= (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})
\end{aligned}$$

この式から

$$\begin{aligned}
&\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1} (x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \\
&= (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, \hat{x}_b, \dots, x_{m+1})
\end{aligned}$$

これは  $\|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2 < 1$  の範囲で  $C^\infty$  級なので,

$\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$  は定義域  $\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) \subset \mathring{D}^m$  で  $C^\infty$  級である.

同様に (ii), (iii) の場合についても座標変換が  $C^\infty$  級であることが分かる.

以上より,  $S^m$  は  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体であることが分かった. □

**命題 3.7.** aaaa

## 4 接ベクトル空間

### 4.1 接ベクトル空間

### 4.2 $C^r$ 級写像の微分

## 5 多様体の次元を調べる方法

### 5.1 写像の局所的性質

**定理 5.1.**  $(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_p(N)$  が線形写像として同型なら,  $f$  は  $p$  のある開近傍から  $f(p)$  のある開近傍への  $C^r$  級微分同相写像である. すなわち,  $p$  の開近傍  $U$  と  $f(p)$  の開近傍  $V$  が存在して,  $f(U) = V$  となり, かつ,  $f|_U : U \rightarrow V$  は  $C^r$  級微分同相写像である.

**定理 5.2.**  $f : M \rightarrow N$  を  $C^r$  級写像とする. ある点  $p \in M$  における微分  $(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_p(N)$  が上への線形写像なら, 点  $p$  付近での  $f$  の様子は, 射影:  $\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{m-n+1}, \dots, x_m)$  と同じである. すなわち,  $p$  のまわりの局所座標系  $(x_1, \dots, x_m)$  と  $f(p)$  のまわりの局所座標系  $(y_1, \dots, y_n)$  をうまく選んで,  $f$  の局所座標表示  $(y_1, \dots, y_n) = (c)$  が

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m) = x_{m-n+1} \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_m) = x_m \end{aligned}$$

であるようにできる.

**証明.**  $C^r$  級写像  $f : M \rightarrow N$  が与えられており, ある点  $p \in M$  における微分  $(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_p(N)$  が上への線形写像であるとする. このとき,  $\text{rank}(df)_p = n$  (ただし,  $m = \dim M \geq n = \dim N$ .) 点  $p$ , 点  $f(p)$  のまわりに, それぞれ座標近傍  $(U; x_1, \dots, x_m)$ ,  $(V; y_1, \dots, y_n)$  をとり,  $f$  を局所座標表示すると

$$(y_1, \dots, y_n) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

ヤコビ行列  $(Jf)_p$  は  $(df)_p$  を表す行列で,  $n$  行  $m$  列である.  $\text{rank}(df)_p = n$  であるから,  $(Jf)_p$  から  $n$  本の列ベクトルを選んで, 作った正方行列は正則である. 必要なら適当に列を入れ替えて

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

とおくと,  $\det B \neq 0$  であって,

$$(Jf)_p = \left( \begin{array}{ccc|c} * & \cdots & * & \\ & & & B \\ * & \cdots & * & \end{array} \right)$$



と仮定してよい.  $p$  のまわりの座標近傍  $(U; x_1, \dots, x_m)$  から,  $\mathbb{R}^m$  への写像  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  を

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-n}, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

と定義する. ヤコビ行列  $(J\varphi)_p$  は

$$(J\varphi)_p = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline * & \cdots & * & \\ & \cdots & & \\ * & \cdots & * & \end{array} \begin{array}{c} O \\ \\ B \end{array} \right)$$

となり,  $\det(J\varphi)_p = \det B \neq 0$  である. したがって, 逆関数の定理 (定理??) により, 点  $p$  を含む  $U$  を十分小さくとれば,  $\varphi|U: U \rightarrow \varphi(U)$  は  $C^r$  級微分同相写像である. よって, /refprop: cord-nabor condition より,  $(U, \varphi|U)$  は  $p$  のまわりの新しい  $C^r$  級座標近傍と思える.  $(U, \varphi|U)$  の局所座標系を  $(z_1, \dots, z_m)$  とすると, 上の  $\varphi$  の定義式から,

$$(z_1, \dots, z_m) = \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-n}, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

を得る. とくに,  $(z_{m-n+1}, \dots, z_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$  であるから,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(z_1, \dots, z_m) &= f(x_1, \dots, x_m) \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) \\ &= (z_{m-n+1}, \dots, z_m) \end{aligned}$$

となる. よって,  $(z_1, \dots, z_m)$  と  $(y_1, \dots, y_n)$  に関する  $f: M \rightarrow N$  の点  $p$  のまわりでの局所座標表示

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_{m-n+1}, \dots, z_m) = (y_1, \dots, y_n)$$

である.  $(z_1, \dots, z_m)$  を改めて  $(x_1, \dots, x_m)$  と書き直せば, 定理 5.2 の主張が得られる. □

**定理 5.3.**  $f: M \rightarrow N$  を  $C^r$  級写像とする.  $(df)_p: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  が 1 対 1 の線形写像なら, 点  $p$  の付近での  $f$  の様子は, 包含写像  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  と同じである. すなわち,  $p$  のまわりの局所座標系  $(x_1, \dots, x_m)$  と  $f(p)$  のまわりの局所座標系  $(y_1, \dots, y_n)$  をうまく選んで,  $f$  の局所座標表示  $(y_1, \dots, y_n) \mapsto$

$(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m), 0)$  が,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m) = x_1 \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_m) = x_m \\ y_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{aligned}$$

であるようにできる.

**証明.** 問題は局所的であるから  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $N = \mathbb{R}^n$  と仮定してよい. ( $m \leq n$ ) また,  $p = \mathbf{o}$ ,  $f(p) = \mathbf{o}$  としてよい.  $\mathbb{R}^m$  の自然な座標  $(x_1, \dots, x_m)$  と,  $\mathbb{R}^n$  の自然な座標に関して, 与えられた  $C^r$  級写像  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  を局所座標表示したものを

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_m)$$

とする.  $(df)_\mathbf{o}: T_\mathbf{o}(\mathbb{R}^m) \rightarrow T_\mathbf{o}(\mathbb{R}^n)$  は 1 対 1 であるから, ヤコビ行列  $(Jf)_\mathbf{o}$  から, 適当な  $m$  行を選び出して作った  $m$  次正方行列は正則である. 必要なら,  $(u_1, \dots, u_m)$  の並び方を変えて,  $(Jf)_\mathbf{o} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  ( $A$  は  $m$  行  $m$  列の正則行列) と仮定してよい.  $(x_1, \dots, x_m)$  に新しく,  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$  を付け加えて,  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  を構成し, 新しい写像  $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  を,

$$\begin{aligned} &F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m), f_{m+1}(x_1, \dots, x_m) + x_{m+1}, \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) + x_n) \end{aligned}$$

と定義する.  $F$  のヤコビ行列

$$(JF)_\mathbf{o} = \left( \begin{array}{c|ccc} A & & & O \\ \hline & 1 & & \\ B & & \vdots & \\ & & & 1 \end{array} \right)$$

であり, 正則である. 逆関数の定理 5.1 により,  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  における,  $\mathbf{o}$  の近傍  $U$  と,  $\mathbb{R}^n$  における  $\mathbf{o}$  の近傍  $V$  が存在して,  $F|_U: U \rightarrow V$  は  $C^r$  級微分同相写像になる.  $\psi = (F|_U)^{-1}: V \rightarrow U$  とおく.  $(V, \psi)$  は  $\mathbf{o}$  のまわりの  $\mathbb{R}^n$  の  $C^r$  級座標近傍と思える. この座標近傍に関する局所座標系を  $(y_1, \dots, y_n)$  とし,  $(x_1, \dots, x_m)$  と

$(y_1, \dots, y_n)$  に関して,  $f: U \cap (\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{o}\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  を局所座標表示すると,

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_n) &= \psi(f(x_1, \dots, x_m)) \\ &= \psi(F(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)) \\ &= (F|U)^{-1}(F(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)) \\ &= (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

となる. したがって, 定理 5.3 の主張する通りの局所座標表示が得られた.  $\square$

## 5.2 $C^r$ 級部分多様体

**定義 5.4.**  $n$  次元  $C^r$  級多様体  $N$  の部分集合  $L$  が  $N$  の  $l$  次元  $C^r$  級部分多様体であるとは,

- (1)  $l = n$  のとき:  $L$  が  $N$  の開集合であることである.
- (2)  $0 \leq l < n$  のとき:  $L$  の任意の点  $p$  に対し,  $p$  を含む  $N$  の座標近傍  $(U; x_1, \dots, x_n)$  が存在して,

$$L \cap N = \{(x_1, \dots, x_n) \in U \mid x_{l+1} = \dots = x_n = 0\}$$

が成り立つことである.

**命題 5.5.**  $n$  次元  $C^r$  級多様体  $N$  の  $l$  次元  $C^r$  級部分多様体  $L$  は, それ自身  $l$  次元  $C^r$  級多様体である.

**証明.** (1)  $l = n$  のとき,  $N$  からの相対位相によって,  $L$  は位相空間となり,  $N$  の  $C^r$  級座標近傍を  $\mathcal{S} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  とすると,  $\mathcal{S}$  を  $L$  に制限した  $\{U_\alpha \cap L, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap L}\}_{\alpha \in A}$  は  $L$  の  $C^r$  局所座標系になる. よって,  $L$  はそれ自身,  $l (= n)$  次元  $C^r$  級多様体である.

- (2)  $0 \leq l < n$  のとき,  $L$  には  $N$  からの相対位相を入れる.  $N$  がハウスドルフ空間であるから  $L$  もそうである.

$L$  の任意の点  $p$  に対し,  $p$  を含む  $N$  の局所座標系  $(U; x_1, \dots, x_n)$  で定義 5.4 の条件を満たすものを選び,  $(U_p; x_1^p, \dots, x_n^p)$  とする.  $V_p = L \cap U_p$  とおくと,  $V_p$  は  $L$  の開集合である.  $V_p$  上の  $U_p$  の局所座標系  $(x_1^p, \dots, x_n^p)$  の  $x_1^p$  から  $x_l^p$  までを制限したもの  $(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)$  を考える.

$\{(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)\}_{p \in L}$  が  $L$  を被覆することは明らかである.

$V_p$  と  $V_q$  が交わるとする. 対応する  $(U_p; x_1^p, \dots, x_n^p)$  と  $(U_q; x_1^q, \dots, x_n^q)$  は,  $N$  の適当な座標近傍  $(U_\alpha; x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ ,  $(U_\beta; x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)$  である. この間の座標変換はある  $C^r$  級関数  $f$  を用いて,

$$(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta) = (f_1(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \dots, f_n(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha))$$

と書ける.  $V_p \cap V_q$  上では,  $x_{l+1}^\alpha = x_n^\alpha = 0$ ,  $x_{l+1}^\beta = x_n^\beta = 0$  が成り立つので,  $V_p \cap V_q$  上では

$$\begin{aligned} x_1^\beta &= f_1(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ x_l^\beta &= f_l(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \\ 0 &= f_{l+1}(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ 0 &= f_n(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

となっている. 改めて関数  $g$  を

$$\begin{aligned} g(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha) &= (g_1(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha), \dots, g_l(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha)) \\ &= (f_1(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0), \dots, f_l(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0)) \end{aligned}$$

と定義すると, この関数は  $C^r$  級である. そして,

$$(x_1^\beta, \dots, x_l^\beta) = g(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha)$$

が  $(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)$  から  $(V_q; x_1^q, \dots, x_l^q)$  の座標変換を与えている.

ゆえに,  $\{(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)\}_{p \in L}$  は  $L$  の  $C^r$  級座標近傍になっている.

以上より,  $L$  は  $l$  次元  $C^r$  級多様体である.

□

**定理 5.6.**  $M, N$  を  $m$  次元,  $n$  次元の  $C^r$  級多様体,  $f: M \rightarrow N$  を  $C^r$  級写像とする.  $N$  のある点  $q$  について,  $f(p) = q$  となる  $M$  の各点  $p$  が常に  $\text{rank}(Jf)_p = n$  を満たすとき, 逆像  $f^{-1}(q)$  は  $M$  の  $(m - n)$  次元  $C^r$  級多様体である.

### 5.3 多様体の次元の具体的な計算

## 6 おわりに

## 参考文献

- [1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.
- [2] 【論文の場合】 著者名, タイトル, 雑誌名, 巻・号, 出版年度, 頁.
- [3] 【Web ページの場合】 タイトル, ページ制作者（機関）等, URL: <http://www.shibaura-it.ac.jp/>, 最終アクセス日時: 2021/12/28 16:33.