

2023 年度
芝浦工業大学 システム理工学部
数理科学科

総合研究論文

多様体の次元を調べる方法

Methods for Investigating the Dimension of
Manifolds



BV20052

あ お み け ん し
青見 健志

指導教員： 亀子 正樹 教授

目 次

1	はじめに	2
2	準備	3
2.1	連続写像と C^r 級写像	3
2.2	位相空間	3
3	C^r 級多様体と C^r 級写像	4
3.1	C^r 級多様体	4
3.2	C^s 級写像	7
4	接ベクトル空間	8
4.1	接ベクトル空間	8
4.2	C^r 級写像の微分	8
5	多様体の次元を調べる方法	9
5.1	写像の局所的性質	9
5.2	C^r 級部分多様体	12
5.3	多様体の次元の具体的な計算	14
6	おわりに	15

1 はじめに

2 準備

2.1 連続写像と C^r 級写像

2.2 位相空間

3 C^r 級多様体と C^r 級写像

3.1 C^r 級多様体

定義 3.1. 位相空間 X の開集合 U から m 次元数空間 \mathbb{R}^m のある開集合 U' への同相写像

$$\varphi: U \rightarrow U'$$

があるとき, (U, φ) を m 次元座標近傍といい, φ を U 上の局所座標系という.

(U, φ) には局所座標系 (x_1, \dots, x_m) が描かれていると考え, $(U; x_1, \dots, x_m)$ とも表すこととする.

定義 3.2. (U, φ) を位相空間 X 内の局所座標近傍とする. U 内の任意の点 p に対して $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ であるから,

$$\varphi(p) = (x_1, \dots, x_m)$$

と書ける. (x_1, \dots, x_m) を (U, φ) に関する p の局所座標という.

定義 3.3. 位相空間 M が次の条件 (1), (2) を満たすとき, M を m 次元位相多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M 内の任意の点 p に対して, p を含む m 次元座標近傍 (U, φ) が存在する.

定義 3.4. m 次元位相多様体 M の 2 つの座標近傍 (U, φ) , (V, ψ) が交わっているとき, 同相写像

$$\psi \circ \varphi: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換という.

定義 3.5. $r \geq 1$ を自然数または ∞ とする. 位相空間 M が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, M を m 次元 C^r 級多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M は m 次元座標近傍により被覆される. すなわち, M の m 次元座標近傍からなる族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ があって,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つ.

(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ であるような任意の α, β に対して, 座標変換

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

は C^r 級写像である.

定理 3.6. m 次元球面 $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ を

$$S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体である.

証明. 定義 3.5 の条件 (1), (2), (3) を確かめる.

(1) \mathbb{R}^{m+1} はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として, S^m はハウスドルフ空間である.

(2) S^m の $2(m+1)$ 個の開集合 U_i^+, U_i^- ($i = 1, \dots, m+1$) を次のように定義する.

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i < 0\}$$

S^m はこれら U_i^+, U_i^- ($i = 1, \dots, m+1$) で被覆される. 写像 $\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^- : U_i^- \rightarrow \mathbb{R}^m$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})$$

ここで, \hat{x}_i は x_i を取り去るという意味である. このとき,

$$(\varphi_i^+)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_{m+1})$$

$$(\varphi_i^-)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, -\sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_{m+1})$$

であり, φ_i^+, φ_i^- はそれぞれ, U_i^+, U_i^- から \mathring{D}^m への同相写像である. ただし, \mathring{D}^m は \mathbb{R}^m の原点を中心とする m 次元単位開円板である. よって, S^m は $2(m+1)$ 個の座標近傍 $(U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), \dots, (U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+), (U_{m+1}^-, \varphi_{m+1}^-)$ で被覆される.

(3) $2(m+1)$ 個の座標近傍の間の座標変換がすべて C^∞ 級であることを示す.

$1 \leq a, b \leq 2(m+1)$ を満たす互いに異なる自然数 a, b に対して,

(i) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^+, φ_b^+)

(ii) (U_a^-, φ_a^-) と (U_b^-, φ_b^-)

(iii) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^-, φ_b^-)

の間の座標変換を調べればよい.

(i) の場合,

$$\begin{aligned} U_a^+ \cap U_b^+ &= \{(x_1, \dots, x_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_a > 0, x_b > 0\} \\ \varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) &= \{(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m \mid x_b > 0\} \\ \varphi_b^+(U_a^+ \cap U_b^+) &= \{(x_1, \dots, x_a, \dots, \hat{x}_b, \dots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m \mid x_a > 0\} \\ (\varphi_a^+)^{-1}x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1} \\ &= (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \end{aligned}$$

この式から

$$\begin{aligned} \varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1}) \\ = (x_1, \dots, \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2}, \dots, \hat{x}_b, \dots, x_{m+1}) \end{aligned}$$

これは $\|(x_1, \dots, \hat{x}_a, \dots, x_b, \dots, x_{m+1})\|^2 < 1$ の範囲で C^∞ 級なので,

$\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$ は定義域 $\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) \subset \mathring{D}^m$ で C^∞ 級である.

同様にして (ii), (iii) の場合についても座標変換が C^∞ 級であることが分かる.

以上より, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体であることが分かった. □

定義 3.7. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を m 次元 C^r 級多様体 M の 1 つの m 次元 C^r 級座標近傍とする. M の開集合 V と V から \mathbb{R}^m への写像 ψ の対 (V, ψ) が次の条件 (1), (2) を満たしているとき, (V, ψ) は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ と両立するという.

(1) $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ の像 $\psi(V)$ は \mathbb{R}^m の開集合で ψ は V から $\psi(V)$ への同相写像である.

(2) $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$ となる α に対しては, $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi(V \cap U_\alpha) \rightarrow \psi(V \cap U_\alpha)$ は C^r 級写像である.

命題 3.8. $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ がともに与えられた座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ と両立していて, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ とすると, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ は C^r 級写像となる.

証明. 任意の点 $x \in V_1 \cap V_2$ に対し, $x \in U_\alpha$ となる $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ が座標近傍系の中に存在する.

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2 \cap U_\alpha) \rightarrow \psi_2(V_1 \cap V_2 \cap U_\alpha)$$

は $(\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\psi_1 \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}$ と分解され, $(\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1}), (\psi_1 \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}$ はそれぞれ $x \in V_1 \cap V_2$ に関して C^r 級であるから, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ も x に関して C^r 級である. いま, $x \in V_1 \cap V_2$ は任意であったから, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ は C^r 級写像である. □

定義 3.9. 位相空間 M 上に C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられているとする. \mathcal{S} と両立する (V, ψ) の全体集合 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ を M 上の極大な C^r 級座標近傍系とする. ここで, 極大とは \mathcal{M} と両立する全ての (U, φ) が $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ に属することをいう. この $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ のことを \mathcal{S} から決まる M の C^r 級極大座標近傍系という.

以降, C^r 級多様体 M が C^r 級座標近傍系 \mathcal{S} によって定義されたとき, M には \mathcal{S} から決まる C^r 級極大座標近傍系 $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ を与え, $(M, \mathcal{M}(\mathcal{S}))$ を考えるものとする.

3.2 C^s 級写像

M, N を m 次元, n 次元の C^r 級多様体とし, f を連続写像とする.

定義 3.10. M, N の C^r 級座標近傍 $(U, \varphi), (V, \psi)$ が存在し,

$$f(U) \subset V$$

が成り立つ. U と V の中には座標近傍系 $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)$ があるから, $f|U : U \rightarrow V$ を

$$(y_1, \dots, y_n) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_m)$$

と表示することができる. この表示の $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ を f に書き直したものの $((y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_m))$ を $(U; x_1, \dots, x_m)$ と $(V; y_1, \dots, y_n)$ に関する f の局所座標表示という.

定義 3.11. 連続写像 $f : M \rightarrow N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるとは, p を含む M の C^r 級座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ と $f(p)$ を含む N の座標近傍 $(V; y_1, \dots, y_n)$ が存在して,

$$(1) f(U) \subset V$$

$$(2) (U; x_1, \dots, x_m) \text{ と } (V; y_1, \dots, y_n) \text{ に関する } f \text{ の局所座標表示が } C^s \text{ 級である. (ただし, } 0 \leq s \leq r \leq \infty)$$

この 2 つの条件が成り立つことである. f が任意の点 $p \in M$ で C^s 級であるとき, f は C^s 級写像であるという.

命題 3.12. 連続写像 $f : M \rightarrow N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるという性質は, $p, f(p)$ をそれぞれ含む C^r 級座標近傍 $(U, \varphi), (V, \psi)$ の選び方によらない. (ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

証明. f は $p \in M$ において $(U, \varphi), (V, \psi)$ に関して C^s 級であると仮定する. $f(U') \subset V', U' = U, V' = V$ となるような $p, f(p)$ をそれぞれ含む別の C^r 級座標近傍 $(U', \varphi'), (V, \psi')$ をとると, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi')$$

と分解される. $\psi' \circ \psi^{-1}$, $\varphi \circ \varphi'$ はそれぞれ M , N における座標変換であるから C^r 級であり, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は仮定より C^s 級であるから, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は C^s 級である. よって命題は証明された. \square

命題 3.13. M , N , Q を C^r 級多様体とする. $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow Q$ がともに C^s 級写像なら, 合成写像 $g \circ f: M \rightarrow Q$ も C^s 級である. (ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

証明. (1) p を M の任意の点とすると, g は C^s 級写像より, $g(V) \subset W$ となうような $f(p)$, $g(f(p))$ を含む座標近傍 (V, ψ) , (W, ω) が存在する. また, f は C^s 級写像より, $f(U) \subset V$ となうような p を含む座標近傍 (U, φ) が存在する. よって, 任意の点 $p \in M$ において $g \circ f(p) \in W$ となるような p , $g \circ f(p)$ を含む座標近傍 (U, φ) , (W, ω) の存在を示せた.

(2) $\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ は

$$\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\omega \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

と分解される. g は C^s 級写像より, $\omega \circ g \circ \psi^{-1}$ は C^s 級, f は C^s 級写像より, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は C^s 級であるから, $\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ は C^s 級となる.

以上より, 合成写像 $g \circ f: M \rightarrow Q$ は C^s 級である. \square

定義 3.14. M , N を C^r 級多様体とする. $f: M \rightarrow N$ が C^s 級微分同相写像であるとは, 次の条件 (1), (2) を満たすことをいう.

(1) $f: M \rightarrow N$ は全単射 (1 対 1 かつ上への写像) である.

(2) $f: M \rightarrow N$ と $f^{-1}: N \rightarrow M$ はともに C^s 級写像である.

命題 3.15. M を m 次元 C^r 級多様体, V を M の開集合, V' を \mathbb{R}^m の開集合とする. また, $\varphi: V \rightarrow V'$ を同相写像とする. このとき, (V, φ) が M の C^r 級座標近傍になるための必要十分条件は, $\varphi: V \rightarrow V'$ が, C^r 級微分同相写像であることである.

証明. まず, (V, φ) が C^r 級座標近傍なら, $\varphi: V \rightarrow V'$ が, C^r 級微分同相写像であることを証明する. $\varphi^{-1} \circ \varphi: V' \rightarrow V'$ が C^r 級であることを示せばよい. \square

4 接ベクトル空間

4.1 接ベクトル空間

4.2 C^r 級写像の微分

5 多様体の次元を調べる方法

5.1 写像の局所的性質

定理 5.1. $(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_p(N)$ が線形写像として同型なら, f は p のある開近傍から $f(p)$ のある開近傍への C^r 級微分同相写像である. すなわち, p の開近傍 U と $f(p)$ の開近傍 V が存在して, $f(U) = V$ となり, かつ, $f|_U : U \rightarrow V$ は C^r 級微分同相写像である.

定理 5.2. $f : M \rightarrow N$ を C^r 級写像とする. ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_p(N)$ が上への線形写像なら, 点 p 付近での f の様子は, 射影: $\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{m-n+1}, \dots, x_m)$ と同じである. すなわち, p のまわりの局所座標系 (x_1, \dots, x_m) と $f(p)$ のまわりの局所座標系 (y_1, \dots, y_n) をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \dots, y_n) = (c)$ が

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m) = x_{m-n+1} \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_m) = x_m \end{aligned}$$

であるようにできる.

証明. C^r 級写像 $f : M \rightarrow N$ が与えられており, ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \rightarrow T_p(N)$ が上への線形写像であるとする. このとき, $\text{rank}(df)_p = n$ (ただし, $m = \dim M \geq n = \dim N$.) 点 p , 点 $f(p)$ のまわりに, それぞれ座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$, $(V; y_1, \dots, y_n)$ をとり, f を局所座標表示すると

$$(y_1, \dots, y_n) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

ヤコビ行列 $(Jf)_p$ は $(df)_p$ を表す行列で, n 行 m 列である. $\text{rank}(df)_p = n$ であるから, $(Jf)_p$ から n 本の列ベクトルを選んで, 作った正方行列は正則である. 必要なら適当に列を入れ替えて

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

とおくと, $\det B \neq 0$ であって,

$$(Jf)_p = \left(\begin{array}{ccc|c} * & \cdots & * & \\ & & & B \\ * & \cdots & * & \end{array} \right)$$

と仮定してよい. p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ から, \mathbb{R}^m への写像 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-n}, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

と定義する. ヤコビ行列 $(J\varphi)_p$ は

$$(J\varphi)_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline * & \cdots & * & \\ & \cdots & & \\ * & \cdots & * & \end{array} \begin{array}{c} O \\ \\ B \end{array} \right)$$

となり, $\det(J\varphi)_p = \det B \neq 0$ である. したがって, 逆関数の定理 (定理??) により, 点 p を含む U を十分小さくとれば, $\varphi|U: U \rightarrow \varphi(U)$ は C^r 級微分同相写像である. よって, /refprop: cord-nabor condition より, $(U, \varphi|U)$ は p のまわりの新しい C^r 級座標近傍と思える. $(U, \varphi|U)$ の局所座標系を (z_1, \dots, z_m) とすると, 上の φ の定義式から,

$$(z_1, \dots, z_m) = \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-n}, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

を得る. とくに, $(z_{m-n+1}, \dots, z_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ であるから,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(z_1, \dots, z_m) &= f(x_1, \dots, x_m) \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) \\ &= (z_{m-n+1}, \dots, z_m) \end{aligned}$$

となる. よって, (z_1, \dots, z_m) と (y_1, \dots, y_n) に関する $f: M \rightarrow N$ の点 p のまわりでの局所座標表示

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_{m-n+1}, \dots, z_m) = (y_1, \dots, y_n)$$

である. (z_1, \dots, z_m) を改めて (x_1, \dots, x_m) と書き直せば, 定理 5.2 の主張が得られる. □

定理 5.3. $f: M \rightarrow N$ を C^r 級写像とする. $(df)_p: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ が 1 対 1 の線形写像なら, 点 p の付近での f の様子は, 包含写像 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ と同じである. すなわち, p のまわりの局所座標系 (x_1, \dots, x_m) と $f(p)$ のまわりの局所座標系 (y_1, \dots, y_n) をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \dots, y_n) \mapsto$

$(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m), 0)$ が,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m) = x_1 \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_m) = x_m \\ y_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{aligned}$$

であるようにできる.

証明. 問題は局所的であるから $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ と仮定してよい. ($m \leq n$) また, $p = \mathbf{o}$, $f(p) = \mathbf{o}$ としてよい. \mathbb{R}^m の自然な座標 (x_1, \dots, x_m) と, \mathbb{R}^n の自然な座標に関して, 与えられた C^r 級写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を局所座標表示したものを

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_m)$$

とする. $(df)_\mathbf{o}: T_\mathbf{o}(\mathbb{R}^m) \rightarrow T_\mathbf{o}(\mathbb{R}^n)$ は 1 対 1 であるから, ヤコビ行列 $(Jf)_\mathbf{o}$ から, 適当な m 行を選び出して作った m 次正方行列は正則である. 必要なら, (u_1, \dots, u_m) の並び方を変えて, $(Jf)_\mathbf{o} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ (A は m 行 m 列の正則行列) と仮定してよい. (x_1, \dots, x_m) に新しく, (x_{m+1}, \dots, x_n) を付け加えて, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ を構成し, 新しい写像 $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を,

$$\begin{aligned} &F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m), f_{m+1}(x_1, \dots, x_m) + x_{m+1}, \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) + x_n) \end{aligned}$$

と定義する. F のヤコビ行列

$$(JF)_\mathbf{o} = \left(\begin{array}{c|ccc} A & & & O \\ \hline & 1 & & \\ B & & \vdots & \\ & & & 1 \end{array} \right)$$

であり, 正則である. 逆関数の定理 5.1 により, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ における, \mathbf{o} の近傍 U と, \mathbb{R}^n における \mathbf{o} の近傍 V が存在して, $F|_U: U \rightarrow V$ は C^r 級微分同相写像になる. $\psi = (F|_U)^{-1}: V \rightarrow U$ とおく. (V, ψ) は \mathbf{o} のまわりの \mathbb{R}^n の C^r 級座標近傍と思える. この座標近傍に関する局所座標系を (y_1, \dots, y_n) とし, (x_1, \dots, x_m) と

(y_1, \dots, y_n) に関して, $f: U \cap (\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{o}\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ を局所座標表示すると,

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_n) &= \psi(f(x_1, \dots, x_m)) \\ &= \psi(F(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)) \\ &= (F|U)^{-1}(F(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)) \\ &= (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

となる. したがって, 定理 5.3 の主張する通りの局所座標表示が得られた. \square

5.2 C^r 級部分多様体

定義 5.4. n 次元 C^r 級多様体 N の部分集合 L が N の l 次元 C^r 級部分多様体であるとは,

- (1) $l = n$ のとき: L が N の開集合であることである.
- (2) $0 \leq l < n$ のとき: L の任意の点 p に対し, p を含む N の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ が存在して,

$$L \cap N = \{(x_1, \dots, x_n) \in U \mid x_{l+1} = \dots = x_n = 0\}$$

が成り立つことである.

命題 5.5. n 次元 C^r 級多様体 N の l 次元 C^r 級部分多様体 L は, それ自身 l 次元 C^r 級多様体である.

証明. (1) $l = n$ のとき, N からの相対位相によって, L は位相空間となり, N の C^r 級座標近傍を $\mathcal{S} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とすると, \mathcal{S} を L に制限した $\{U_\alpha \cap L, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap L}\}_{\alpha \in A}$ は L の C^r 局所座標系になる. よって, L はそれ自身, $l (= n)$ 次元 C^r 級多様体である.

- (2) $0 \leq l < n$ のとき, L には N からの相対位相を入れる. N がハウスドルフ空間であるから L もそうである.

L の任意の点 p に対し, p を含む N の局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_n)$ で定義 5.4 の条件を満たすものを選び, $(U_p; x_1^p, \dots, x_n^p)$ とする. $V_p = L \cap U_p$ とおくと, V_p は L の開集合である. V_p 上の U_p の局所座標系 (x_1^p, \dots, x_n^p) の x_1^p から x_l^p までを制限したもの $(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)$ を考える.

$\{(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)\}_{p \in L}$ が L を被覆することは明らかである.

V_p と V_q が交わるとする. 対応する $(U_p; x_1^p, \dots, x_n^p)$ と $(U_q; x_1^q, \dots, x_n^q)$ は, N の適当な座標近傍 $(U_\alpha; x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$, $(U_\beta; x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)$ である. この間の座標変換はある C^r 級関数 f を用いて,

$$(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta) = (f_1(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \dots, f_n(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha))$$

と書ける. $V_p \cap V_q$ 上では, $x_{l+1}^\alpha = x_n^\alpha = 0$, $x_{l+1}^\beta = x_n^\beta = 0$ が成り立つので, $V_p \cap V_q$ 上では

$$\begin{aligned} x_1^\beta &= f_1(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ x_l^\beta &= f_l(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \\ 0 &= f_{l+1}(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ 0 &= f_n(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

となっている. 改めて関数 g を

$$\begin{aligned} g(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha) &= (g_1(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha), \dots, g_l(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha)) \\ &= (f_1(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0), \dots, f_l(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha, 0, \dots, 0)) \end{aligned}$$

と定義すると, この関数は C^r 級である. そして,

$$(x_1^\beta, \dots, x_l^\beta) = g(x_1^\alpha, \dots, x_l^\alpha)$$

が $(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)$ から $(V_q; x_1^q, \dots, x_l^q)$ の座標変換を与えている.

ゆえに, $\{(V_p; x_1^p, \dots, x_l^p)\}_{p \in L}$ は L の C^r 級座標近傍になっている.

以上より, L は l 次元 C^r 級多様体である.

□

定理 5.6. M, N を m 次元, n 次元の C^r 級多様体, $f: M \rightarrow N$ を C^r 級写像とする. N のある点 q について, $f(p) = q$ となる M の各点 p が常に $\text{rank}(Jf)_p = n$ を満たすとき, 逆像 $f^{-1}(q)$ は $(m - n)$ 次元 C^r 級多様体である.

証明. 定義 5.4, 命題 5.5 より, 次のことを証明すればよい.

$q \in N$ の逆像 $f^{-1}(q)$ に属する任意の点 p に対し, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ が存在して,

$$f^{-1}(q) \cap U = \{(x_1, \dots, x_m) \in U \mid x_{m-n+1} = \dots = x_m = 0\}$$

が成り立つ.

今, $f(p) = q$ を満たす $p \in M$ について, 常に $\text{rank}(Jf)_p = n$ であるから, $(df)_p$ は上への写像である. よって, 定理 5.2 より, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ と $q (= f(p))$ のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \dots, y_n)$ が存在して, $f|U: U \rightarrow V$ は

$$(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_m) = (x_{m-n+1}, \dots, x_m)$$

と座標表示される.

$(U; x_1, \dots, x_m)$ は任意にとってきた $(V; y_1, \dots, y_n)$ に応じて選べるから, $(V; y_1, \dots, y_n)$ は点 q で $y_1 = \dots = y_n = 0$ となるようにとっておくと,

$$\begin{aligned} f^{-1}(q) \cap U &= \{p \in U \mid f(p) = q\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) \in U \mid f(x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) \in U \mid (x_{m-n+1}, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) \in U \mid x_{m-n+1} = \dots = x_m = 0\} \end{aligned}$$

となり, 条件を満たす U が存在することがわかる. これで定理 5.6 が証明できた. \square

5.3 多様体の次元の具体的な計算

6 おわりに

参考文献

- [1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.
- [2] 【論文の場合】 著者名, タイトル, 雑誌名, 巻・号, 出版年度, 頁.
- [3] 【Web ページの場合】 タイトル, ページ制作者（機関）等, URL: <http://www.shibaura-it.ac.jp/>, 最終アクセス日時: 2021/12/28 16:33.