2023 年度
芝浦工業大学　システム理工学部
数理科学科

総合研究論文

多様体の次元を調べる方法

Methods for Investigating the Dimension of Manifolds

顔写真
横 3cm
×
縦 4cm

BV20052

あおみ　けんし
青見　健志

指導教員： 亀子 正樹　教授

目 次

1 はじめに **2**

2 準備 **3**

2.1 m 次元数空間 3

2.2 ベクトル空間 3

2.3 連続写像と C^r 級写像 6

2.4 位相空間 7

3 C^r 級多様体と C^r 級写像 **10**

3.1 C^r 級多様体 10

3.2 C^s 級写像 13

4 接ベクトル空間 **14**

4.1 接ベクトル空間 14

4.2 C^r 級写像の微分 18

5 多様体の次元を調べる方法 **25**

5.1 写像の局所的性質 25

5.2 C^r 級部分多様体 28

5.3 多様体の次元の具体的な計算 30

6 おわりに **35**

1　はじめに

多様体の次元を調べる方法を書きます.

2　準備

2.1　m 次元数空間

定義 2.1. m を 1 以上の自然数とする．m 個の実数を並べた組

$$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

の全体からなる集合を m 次元数空間とよび，記号 $\mathbb{R}^m$ で表す．ただし，$\mathbb{R}^1$ は $\mathbb{R}$ と書くこととする．

$\mathbb{R}^m$ の元を $\mathbb{R}^m$ の点とよび，

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

と表す．x_i を $\boldsymbol{x}$ の第 i 座標または第 i 成分という．

すべての座標が 0 である点 $\boldsymbol{o} = (0, \cdots, 0)$ を $\mathbb{R}^m$ の原点という．

定義 2.2. $\mathbb{R}^m$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ の距離とは

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2}$$

という実数のことである．これを $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ という記号で表す．

定義 2.3. $\boldsymbol{a}$ を $\mathbb{R}^m$ の 1 点，ϵ を正数とする．点 $\boldsymbol{a}$ の $\mathbb{R}^m$ における ϵ-近傍 $N_\epsilon(\boldsymbol{a}; \mathbb{R}^m)$ とは，$\boldsymbol{a}$ からの距離が ϵ であるような点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ の全体のなす集合のことである．すなわち，

$$N_\epsilon(\boldsymbol{a}; \mathbb{R}^m) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m | d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \epsilon)\}$$

である．$N_\epsilon(\boldsymbol{a}; \mathbb{R}^m)$ を単に $N_\epsilon(\boldsymbol{a})$ と書くこともある．

定義 2.4. $\mathbb{R}^m$ の部分集合 U が $\mathbb{R}^m$ の開集合であるとは，U に含まれる任意の点 $\boldsymbol{a}$ について，$\epsilon > 0$ を十分小さくとると

$$N_\epsilon(\boldsymbol{a}; \mathbb{R}^m) \subset U$$

が成り立つことである．開集合でない部分集合を閉集合という．

2.2　ベクトル空間

定義 2.5. 集合 V が次の条件 (I), (II) を満たすとき，V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間という．

(I) V の 2 元 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して和とよばれる第 3 の元 (これを $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ と表す) が定まり，次の法則が成り立つ．

(1) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (交換法則)

(3) ゼロベクトルとよばれる元 (これを $\boldsymbol{o}$ と表す) がただひとつ存在し, V のすべての元 $\boldsymbol{v}$ に対して,

$$\boldsymbol{o}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$$

が成り立つ.

(4) V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ に対し, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v'}=\boldsymbol{o}$ となる V の元 $\boldsymbol{v'}$ がただひとつ存在する. これを $-\boldsymbol{v}$ と表す.

(II) V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ と任意の実数 a に対し, $\boldsymbol{v}$ の a 倍とよばれるもうひとつの元 (これを $a\boldsymbol{v}$ と表す) が定まり, 次の法則が成り立つ.

(5) $(a+b)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}$,

(6) $a(\boldsymbol{u}+boldsymbolv)=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$,

(7) $(ab)\boldsymbol{v}=a(b\boldsymbol{v})$,

(8) $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$.

V の元をベクトルという.

例 2.6. m 次元数空間 $\mathbb{R}^m$ は ($\mathbb{R}$ 上の) ベクトル空間である. $\mathbb{R}^m$ の 2 元 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)$ に対して和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ と a 倍 $a\boldsymbol{x}$ を次のように定義すればよい.

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\cdots,x_m+y_m)$$
$$a\boldsymbol{x}=(ax_1,\cdots,ax_m)$$

このように定義したとき, R^m が定義2.2 の条件 (I), (II) を満たすことがわかる. よって, $\mathbb{R}^m$ は ($\mathbb{R}$ 上の) ベクトル空間である. ただし, ゼロベクトルは $\boldsymbol{o}=(0,\cdots,0)$ であり, $-\boldsymbol{x}$ は $(-x_1,\cdots,-x_m)$ である. ベクトル空間としての $\mathbb{R}^m$ を (m 次元) 数ベクトル空間といい, その元 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)$ を (m 次元) 数ベクトルという.

定義 2.7. ベクトル空間 V のいくつかのベクトル $\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_k}$ について, それぞれを実数倍して加えた和

$$a_1\boldsymbol{v_1}+\cdots+a_k\boldsymbol{v_k}$$

のことを $boldsymbolv_1,\cdots,\boldsymbol{v_k}$ の 1 次結合という.

定義 2.8. $\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_k}$ が 1 次独立であるとは,

$$a_1\boldsymbol{v_1}+\cdots+a_k\boldsymbol{v_k}=\boldsymbol{o} \text{ ならば } a_1=\cdots=a_k=0$$

が成り立つことである. $\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_k}$ が 1 次独立でないとき, それらは 1 次従属であるという.

例 2.9. $\mathbb{R}^m$ の中の m 個のベクトル $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_m}$ を

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_m = (0, 0, \cdots, 1)$$

と定義すると, これらは1次独立である. なぜなら, $\mathbb{R}^m$ における和と実数倍の定義によって

$$a_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_m\boldsymbol{e_m} = (a_1, \cdots, a_m)$$

となり, $a_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_m\boldsymbol{e_m} = \boldsymbol{o}$ ならば $a_1 = \cdots = a_m = 0$ でなければならないからである.

$\boldsymbol{e_i}$ を i 方向の基本ベクトルという.

定義 2.10. ベクトル空間 V のベクトルの集合 $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_k}$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき, $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_k}$ を V の基底とよぶ.

(1) $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_k}$ は1次独立である.

(2) V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_k}$ の1次結合として表される.

例 2.11. $\mathbb{R}^m$ の m 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_m}$ は $\mathbb{R}^m$ の基底である.

(1) 例2.9 より, $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_m}$ は1次独立である.

(2) $\mathbb{R}^m$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ は $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_m}$ の1次結合 $x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_m\boldsymbol{e_m}$ で表される.

よって, $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_m}$ は $\mathbb{R}^m$ の基底である.

定義 2.12. 基底を構成するベクトルの個数 k を V の次元とよび,

$$k = \mathrm{dim}V$$

と書く.

定義 2.13. ベクトル空間 V の部分集合 W が次の条件 (1), (2) を満たすとき, W を V の部分ベクトル空間という. ただし, $W \neq \phi$ とする.

(1) $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in W$ ならば, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$

(2) $\boldsymbol{u} \in W$, $a \in \mathbb{R}$ ならば, $a\boldsymbol{u} \in W$

ベクトル空間 V の部分ベクトル空間 W はそれ自信ベクトル空間である. また, 部分ベクトル空間 W の次元は V の次元以下である ($\mathrm{dim}W \leq \mathrm{dim}V$).

2.3 連続写像と C^r 級写像

U, V をそれぞれ $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ の開集合とする.

定義 2.14. 写像 $f : U \to V$ が点 $\boldsymbol{a} \in U$ で連続であるとは, $\boldsymbol{a}$ の像 $f(\boldsymbol{a})$ の任意の ϵ-近傍 $N_\epsilon(f(\boldsymbol{a}))$ に対して, $\delta > 0$ を十分小さくとれば

$$f(N_\delta(\boldsymbol{a})) \subset N_\epsilon(f(\boldsymbol{a}))$$

が成り立つことである. f が U の各点で連続のとき, $f : U \to V$ を連続写像という.

定義 2.15. 写像 $f : U \to V$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき, f は同相写像であるという.

(1) $f : U \to V$ は全単射である.

(2) $f : U \to V$ も $f^{-1} : V \to U$ も, ともに連続写像である.

U と V との間に同相写像 $f : U \to V$ が存在するとき, U と V は互いに位相同形であるといい,

$$U \approx V$$

と書き表す.

$f : U \to V$, $g : V \to W$ がともに同相写像なら合成 $g \circ f : U \to W$ も同相写像である.

定義 2.16. 写像 $f : U \to V$ について, $\boldsymbol{x} \in U$ の像 $f(\boldsymbol{x})$ は $V(\subset \mathbb{R}^n)$ の点であるから, $f(\boldsymbol{x}) = (y_1, \cdots, y_n)$ と $\mathbb{R}^n$ の座標で書ける. ここで各座標 y_i の値は $\boldsymbol{x}$ によって決まるので, y_i は U 上の関数になる. この関数を f_i とおくと,

$$y_i = f_i(\boldsymbol{x})$$

であって, $f(\boldsymbol{x})$ は

$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))$$

と表せる. このような表し方を写像 $f : U \to V$ の座標表示という.

$f : U \to V$ の座標表示を単に $f = (f_1, \cdots, f_n)$ と書くこともある.

$f : U \to V$ が連続写像であるための必要十分条件は f の座標表示 $(f_1, \cdots, f_n)$ に現れる関数 $f_1, \cdots, f_n$ がすべて連続関数になることである.

定義 2.17. (1) r を自然数 $(r \geq 1)$ とする. U 上の関数 f が C^r 級であるとは, f の 1 階から r 階までのすべての偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}$ $(i = 1, \cdots m)$ が存在して f 自信も含めてそれらがみな U 上で連続であることをいう.

(2) f が任意の自然数 r について C^r 級であるとき, f を C^∞ 級関数でという.
なお, 連続関数のことを C^0 級関数ということがある.

定義 2.18. 写像 $h : U \to V$ が C^r 級写像であるとは, h の座標表示 $h = (h_1, \cdots, h_n)$ に現れる関数 $h_1, \cdots, h_n$ がすべて U 上の C^r 級関数になることである.

命題 2.19. C^r 級関数の 1 次結合や積は C^r 級関数である (ただし, $0 \leq r \leq \infty$).

命題 2.20. 写像 $h : U \to V$ の座標表示に現れる関数 $h_1, \cdots, h_n$ と V 上の関数 f が C^1 級関数であるとすると, 合成関数 $f \circ h$ も C^1 級であり, かつ次の公式 (合成関数の微分法) が成り立つ.

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \circ h\right) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_n} \circ h\right) \cdot \frac{\partial h_n}{\partial x_i}$$

ただし, ふつうは簡単に

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \cdot \frac{\partial h_n}{\partial x_i}$$

と書くこととする.

命題 2.21. $h : U \to V$ が C^r 級写像, $f : V \to \mathbb{R}$ が C^r 級関数なら, 合成関数 $f \circ h : U \to \mathbb{R}$ も C^r 級関数である (ただし, $0 \leq r \leq \infty$).

命題 2.22. U, V, W がそれぞれ $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^l$ の開集合のとき, 2 つの C^r 級写像 $f : U \to V$, $g : V \to W$ の合成写像 $g \circ f : U \to W$ は C^r 級である.

定義 2.23. 写像 $f : U \to V$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき, f を C^r 級微分同相写像という.

(1) $f : U \to V$ は全単射である.

(2) $f : U \to V$ も $f^{-1} : V \to U$ もともに C^r 級写像である.

U と V との間に C^r 級微分同相写像 $f : U \to V$ が存在するとき, U と V は互いに C^r 級微分同相であるという.

$f : U \to V$, $g : V \to W$ がともに C^r 級微分同相写像なら合成 $g \circ f : U \to W$ も C^r 級微分同相写像である.

2.4 位相空間

定義 2.24. 集合 X び部分集合族 $\mathcal{O}$ が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, $\mathcal{O}$ を X の位相とよび, X と $\mathcal{O}$ の対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という.

(1) $X \in \mathcal{O}$ かつ $\phi \in \mathcal{O}$

(2) $U_1, U_2, \cdots, U_k \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$

(3) 任意の集合族 $\{U_\lambda\}_\Lambda$ について $U_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$ ならば

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$$

位相 $\mathcal{O}$ を位相空間 X の開集合系とよぶことがある．X の部分集合 U が $\mathcal{O}$ に属するとき, U を X の開集合という．位相空間 X の個々の元を X の点という．

例 2.25. m 次元数空間 $\mathbb{R}^m$ の開集合全体のなす集合族を $\mathcal{O}^{(m)}$ とする．このとき, $\mathcal{O}^{(m)}$ は上の定義 2.24 の条件 (1), (2), (3) を満たす (ただし, $X = \mathbb{R}^m$)．したがって, $\mathcal{O}^{(m)}$ は $\mathbb{R}^m$ の位相であり, $(\mathbb{R}^m, \mathcal{O}^{(m)})$ は位相空間である．

　$\mathcal{O}^{(m)}$ を $\mathbb{R}^m$ の自然な位相という．通常, $\mathbb{R}^m$ を位相空間と考えるときは, この位相 $\mathcal{O}^{(m)}$ が指定されているものとする．

定義 2.26. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の任意の部分空間とすると, A の部分集合族

$$\mathcal{O}_A = \{U \cap A | U \in \mathcal{O}\}$$

を A の位相として, A をそれ自身ひとつの位相空間と考えることができる．

　この $\mathcal{O}_A$ を X の位相 $\mathcal{O}$ から導かれた A の相対位相とよび, 位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ を $(X, \mathcal{O})$ の部分空間とよぶ．

定義 2.27. 2 つの位相空間 $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O}')$ の間の写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるとは, Y の任意の開集合 U について, $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ となることである．

　一般に逆像 $f^{-1}(U)$ とは

$$f^{-1}(U) = \{p \in X | f(p) \in U\}$$

で定義される X の部分集合のことである．

　位相空間 X, Y をそれぞれ $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ の開集合 V, W とすると上の定義 2.27 の連続写像の概念と, 定義 2.14 の連続写像の概念は一致する．

定義 2.28. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O}')$ の間の写像 $f : X \to Y$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき, f を同相写像という．

(1) $f : X \to Y$ は全単射である．

(2) $f : X \to Y$ も $f^{-1} : Y \to X$ もともに連続写像である．

　X と Y との間に同相写像 $f : X \to Y$ が存在するとき, X と Y は互いに位相同形であるといい,

$$X \approx Y$$

と書き表す．

明らかに, この定義 2.28 は定義 2.15 の拡張である.

また, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ がともに同相写像なら合成 $g \circ f : X \to Z$ も同相写像である.

3　C^r 級多様体と C^r 級写像

3.1　C^r 級多様体

定義 3.1. 位相空間 X の開集合 U から m 次元数空間 $\mathbb{R}^m$ のある開集合 U' への同相写像

$$\varphi : U \to U'$$

があるとき, (U, φ) を m 次元座標近傍といい, φ を U 上の局所座標系という.

(U, φ) には局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ が描かれていると考え, $(U; x_1, \cdots, x_m)$ とも表すこととする.

定義 3.2. (U, φ) を位相空間 X 内の局所座標近傍とする. U 内の任意の点 p に対して $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ であるから,

$$\varphi(p) = (x_1, \cdots, x_m)$$

と書ける.$(x_1, \cdots, x_m)$ を (U, φ) に関する p の局所座標という.

定義 3.3. 位相空間 M が次の条件 (1),(2) を満たすとき, M を m 次元位相多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M 内の任意の点 p に対して, p を含む m 次元座標近傍 (U, φ) が存在する.

定義 3.4. m 次元位相多様体 M の 2 つの座標近傍 (U, φ), (V, ψ) が交わっているとき, 同相写像

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換という.

定義 3.5. $r \geq 1$ を自然数または ∞ とする. 位相空間 M が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, M を m 次元 C^r 級多様体という.

(1) M はハウスドルフ空間である.

(2) M は m 次元座標近傍により被覆される. すなわち, M の m 次元座標近傍からなる族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ があって,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つ.

(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ であるような任意の α, β に対して, 座標変換

$$\psi \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

は C^r 級写像である.

定理 3.6. m 次元球面 $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ を

$$S^m = \{(x_1, \cdots x_{m+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

と定義すると, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体である.

証明. 定義 3.5 の条件 (1), (2), (3) を確かめる.

(1) $\mathbb{R}^{m+1}$ はハウスドルフ空間であるから, その部分空間として, S^m はハウスドルフ空間である.

(2) S^m の $2(m+1)$ 個の開集合 U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ を次のように定義する.

$$U_i^+ = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \cdots x_i, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_i < 0\}$$

S^m はこれら U_i^+, U_i^- $(i = 1, \cdots, m+1)$ で被覆される. 写像 $\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^m$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

ここで, $\hat{x}_i$ は x_i を取り去るという意味である. このとき,

$$(\varphi_i^+)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, x_{m+1})$$

$$(\varphi_i^-)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, -\sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, x_{m+1})$$

であり, φ_i^+, φ_i^- はそれぞれ, U_i^+, U_i^- から $\mathring{D}^m$ への同相写像である. ただし, $\mathring{D}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の原点を中心とする m 次元単位開円板である. よって, S^m は $2(m+1)$ 個の座標近傍 $(U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), \cdots, (U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+), (U_{m+1}^-, \varphi_{m+1}^-)$ で被覆される.

(3) 2(m+1) 個の座標近傍の間の座標変換がすべて C^∞ 級であることを示す. $1 \leq a, b \leq 2(m+1)$ を満たす互いに異なる自然数 a, b に対して,

(i) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^+, φ_b^+)

(ii) (U_a^-, φ_a^-) と (U_b^-, φ_b^-)

(iii) (U_a^+, φ_a^+) と (U_b^-, φ_b^-)

の間の座標変換を調べればよい.
(i) の場合,

$$
\begin{aligned}
&U_a^+ \cap U_b^+ = \{(x_1, \cdots, x_a, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \in S^m | x_a > 0,\ x_b > 0\} \\
&\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) = \{(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m | x_b > 0\} \\
&\varphi_b^+(U_a^+ \cap U_b^+) = \{(x_1, \cdots, x_a, \cdots, \hat{x_b}, \cdots, x_{m+1}) \in \mathring{D}^m | x_a > 0\} \\
&(\varphi_a^+)^{-1} x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1}) \\
&= (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1})||^2}, \cdots, x_b, \cdots x_{m+1})
\end{aligned}
$$

この式から

$$
\begin{aligned}
&\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1}) \\
&= (x_1, \cdots, \sqrt{1 - ||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1})||^2}, \cdots, \hat{x_b}, \cdots, x_{m+1})
\end{aligned}
$$

これは $||(x_1, \cdots, \hat{x_a}, \cdots, x_b, \cdots, x_{m+1})||^2 < 1$ の範囲で C^∞ 級なので,
$\varphi_b^+ \circ (\varphi_a^+)^{-1}$ は定義域 $\varphi_a^+(U_a^+ \cap U_b^+) \subset \mathring{D}^m$ で C^∞ 級である.
同様にして (ii), (iii) の場合についても座標変換が C^∞ 級であること分かる.

以上より, S^m は m 次元 C^∞ 級多様体であることが分かった. □

定義 3.7. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を m 次元 C^r 級多様体 M の 1 つの m 次元 C^r 級座標近傍とする. M の開集合 V と V から $\mathbb{R}^m$ への写像 ψ の対 (V, ψ) が次の条件 (1), (2) を満たしているとき, (V, ψ) は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ と両立するという.

(1) $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ の像 $\psi(V)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合で ψ は V から $\psi(V)$ への同相写像である.

(2) $V \cap U_\alpha \neq \phi$ となる α に対しては, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(V \cap U_\alpha) \to \psi(V \cap U_\alpha)$ は C^r 級写像である.

命題 3.8. (V_1, ψ_1), (V_1, ψ_1) がともに与えられた座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ と両立していて, $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ とすると, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ は C^r 級写像となる.

証明. 任意の点 $x \in V_1 \cap V_2$ に対し, $x_\in U_\alpha$ となる $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ が座っ票近傍系の中に存在する.

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2 \cap U_\alpha) \to \psi_2(V_1 \cap V_2 \cap U_\alpha)$$

は $(\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\psi_1 \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}$ と分解され, $(\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1})$, $(\psi_1 \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}$ はそれぞれ $x \in V_1 \cap V_2$ に関して C^r 級であるから, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ も x に関して C^r 級である. いま, $x \in V_1 \cap V_2$ は任意であったから, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ は C^r 級写像である. □

定義 3.9. 位相空間 M 上に C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられているとする．$\mathcal{S}$ と両立する (V, ψ) の全体集合 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ を M 上の極大な C^r 級座標近傍系とする．ここで, 極大とは $\mathcal{M}$ と両立する全ての (U, φ) が $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ に属することをいう．この $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{S})$ のことを $\mathcal{S}$ から決まる M の C^r 級極大座標近傍系という.

以降, C^r 級多様体 M が C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ によって定義されたとき, M には $\mathcal{S}$ から決まる C^r 級極大座標近傍系 $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ を与え, $(M, \mathcal{M}(\mathcal{S}))$ を考えるものとする.

3.2 C^s 級写像

M, N を m 次元, n 次元の C^r 級多様体とし, f を連続写像とする.

定義 3.10. M, N の C^r 級座標近傍 (U, φ), (V, ψ) が存在し,

$$f(U) \subset V$$

が成り立つ. U と V の中には座標近傍系 $(x_1, \cdots x_m)$, $(y_1, \cdots y_n)$ があるから, $f|U : U \to V$ を

$$(y_1, \cdots y_n) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x_1, \cdots x_m)$$

と表示することができる．この表示の $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ を f に書き直したもの ($(y_1, \cdots y_n) = f(x_1, \cdots x_m)$) を $(U; x_1, \cdots x_m)$ と $(V; y_1, \cdots y_n)$ に関する f の局所座標表示という.

定義 3.11. 連続写像 $f : M \to N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるとは, p を含む M の C^r 級座標近傍 $(U; x_1, \cdots x_m)$ と $f(p)$ を含む N の座標近傍 $(V; y_1, \cdots y_n)$ が存在して,

(1) $f(U) \subset V$

(2) $(U; x_1, \cdots x_m)$ と $(V; y_1, \cdots y_n)$ に関する f の局所座標表示が C^s 級である．(ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

この 2 つの条件が成り立つことである．f が任意の点 $p \in M$ で C^s 級であるとき, f は C^s 級写像であるという.

命題 3.12. 連続写像 $f : M \to N$ が 1 点 $p \in M$ において C^s 級であるという性質は, p, $f(p)$ をそれぞれ含む C^r 級座標近傍 (U, φ), (V, ψ) の選び方によらない．(ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

証明. f は $p \in M$ において (U, φ), (V, ψ) に関して C^s 級であると仮定する．$f(U') \subset V'$, $U' = U$, $V' = V$ となるような p, $f(p)$ をそれぞれ含む別の C^r 級座標近傍 (U', φ'), (V, ψ') をとると, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi')$$

と分解される. $\psi' \circ \psi^{-1}$, $\varphi \circ \varphi'$ はそれぞれ M, N における座標変換であるから C^r 級であり, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は仮定より C^s 級であるから, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は C^s 級である. よって命題は証明された. □

命題 3.13. M, N, Q を C^r 級多様体とする. $f : M \to N$, $g : N \to Q$ がともに C^s 級写像なら, 合成写像 $g \circ f : M \to Q$ も C^s 級である. (ただし, $0 \leq s \leq r \leq \infty$)

証明. (1) p を M の任意の点とすると, g は C^s 級写像より, $g(V) \subset W$ となうような $f(p)$, $g(f(p))$ を含む座標近傍 (V, ψ), (W, ω) が存在する. また, f は C^s 級写像より, $f(U) \subset V$ となうような p を含む座標近傍 (U, φ) が存在する. よって, 任意の点 $p \in M$ において $g \circ f(p) \subset W$ となるような p, $g \circ f(p)$ を含む座標近傍 (U, φ), (W, ω) の存在を示せた.

(2) $\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ は

$$\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\omega \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

と分解される. g は C^s 級写像より, $\omega \circ g \circ \psi^{-1}$ は C^s 級, f は C^s 級写像より, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は C^s 級であるから, $\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ は C^s 級となる.

以上より, 合成写像 $g \circ f : M \to Q$ は C^s 級である. □

定義 3.14. M, N を C^r 級多様体とする. $f : M \to N$ が C^s 級微分同相写像であるとは, 次の条件 (1), (2) を満たすことをいう.

(1) $f : M \to N$ は全単射 (1 対 1 かつ上への写像) である.

(2) $f : M \to N$ と $f^{-1} : N \to M$ はともに C^s 級写像である.

命題 3.15. M を m 次元 C^r 級多様体, V を M の開集合, V' を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする. また, $\varphi : V \to V'$ を同相写像とする. このとき, (V, φ) が M の C^r 級座標近傍になるための必要十分条件は, $\varphi : V \to V'$ が, C^r 級微分同相写像であることである.

証明. まず, (V, φ) が C^r 級座標近傍なら, $\varphi : V \to V'$ が, C^r 級微分同相写像であることを証明する. $\varphi^{-1} \circ \varphi : V' \to V'$ が C^r 級であることを示せばよい.

□

4 接ベクトル空間

4.1 接ベクトル空間

M を m 次元 C^r 級多様体とし $(1 \leq r \leq \infty)$, M の 1 点 p を通る C^r 級曲線 c を考える. ここで, c のパラメータ t は $-\epsilon \leq t \leq \epsilon$ の範囲を動くとし, $c(0) = p$ であるとする.

定義 4.1. 点 p における方向微分 $\boldsymbol{v}$ とは, 点 p の開近傍上で定義された C^r 級関数 f に実数 $\boldsymbol{v}(f)$ を対応させる操作であって, 次の性質 (0), (1), (2) をもつものである.

(0) f と g が点 p の十分小さな近傍で上で一致すれば, $\boldsymbol{v}(f) = \boldsymbol{v}(g)$.

(1) $\boldsymbol{v}(af + bg) = a\boldsymbol{v}(f) + a\boldsymbol{v}(g)(a, b \in \mathbb{R})$

(2) $\boldsymbol{v}(fg) = \boldsymbol{v}(f)g(p) + \boldsymbol{v}(g)f(p)$

例 4.2. c に沿う ($t = 0$ における) 方向微分点 $p \in M$ の開近傍 U で定義された任意の C^r 級関数 f を考える. $c : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ と $f : U \to \mathbb{R}$ の合成関数 $f(c(t))$ の $t = 0$ における通常の微分係数

$$\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} \quad \left(\lim_{t\to 0} \frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t}\right)$$

を考える. 関数 f に上の微分係数を対応させる対応

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} : f \mapsto \left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

を曲線 c の $t = 0$ における速度ベクトルという. 曲線 c の $t = 0$ における速度ベクトルは方向微分である. 実際,

(0) f, g が点 p の開近傍上で定義された C^r 級関数で, p のある十分小さな開近傍上で $f = g$ ならば,

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(f) = \left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dg(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(g)$$

(1) f, g が点 p の開近傍上で定義された C^r 級関数で, $a, b \in \mathbb{R}$ のとき,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(af + bg) &= \left.\frac{d(af(c(t)) + bg(c(t)))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= a \left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} + b \left.\frac{dg(c(t))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= a \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(f) + b \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(g)
\end{aligned}$$

(2) f, g が点 p の開近傍上で定義された C^r 級関数で, fg をそれらの積とすれば,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(fg) &= \left\{\frac{df(c(t))}{dt} g(c(t)) + f(c(t)) \frac{dg(c(t))}{dt}\right\}_{t=0} \\
&= \left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} g(p) + f(p) \left.\frac{dg(c(t))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(f)g(p) + f(p) \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(g)
\end{aligned}$$

例 4.3. p を含む座標近傍 $(U; x_1, \cdots x_m)$ を 1 つ固定する．p のまわりで定義された C^r 級関数 f に, p における x_i 方向の偏微分係数を対応させる操作を $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と書く．すなわち,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

．このとき, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ は p における方向微分の性質 (0), (1), (2) を満たす.

定義 4.4. 点 $p \in M$ における方向微分全ての集合を

$$D^r_p(M)$$

と表す．$D^r_p(M)$ の 2 元 u, v と実数 a に対して, 和 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ と実数倍 $a\boldsymbol{u}$ を

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})(f) = \boldsymbol{u}(f) + \boldsymbol{v}(v)$$

$$a\boldsymbol{u}(f) = a(\boldsymbol{u}(f))$$

と定めると, $D^r_p(M)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．ただし, $D^r_p(M)$ のゼロベクトルは任意の f に 0 を対応させる自明な方向微分 $\mathbf{0}$ である.

命題 4.5. ベクトル空間 $D^r_p(M)$ の元として, m 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ は 1 次独立である.

証明. 実数 $a_1, \cdots a_m$ に対して $a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p = \mathbf{0}$ ならば, $a_1 = \cdots = a_m = 0$ であることを示せばよい．$a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p = \mathbf{0}$ と仮定すると, 点 p のまわりで定義された任意の C^r 級関数 f について $a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (f) + \cdots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p (f) = 0$ が成り立つ．つまり, $a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + a_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) = 0$ となる．f は任意であったから, $f = x_1$ という関数をとってくると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &= 0 \ (i \geq 2) \end{aligned}$$

であるから, 最初の項のみが a_1 となって残り, あとは消える．よって $a_1 = 0$ がわかる．同様に $f = x_2, \cdots x_m$ を次々に代入して, $a_1 = \cdots = a_m = 0$ が示される．これで命題が証明された. □

定義 4.6. m 個のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ の張る $D^r_p(M)$ の部分ベクトル空間を, 点 p における M の接ベクトル空間とよび,

$$T_p(M)$$

という記号で表す．接ベクトル空間 $T_p(M)$ の元を接ベクトルとよぶ.

命題 4.7. $T_p(M)$ は点 p のまわりの局所座標系のとり方によらず一意に定まる. つまり, 点 p のまわりで $(x_1, \cdots, x_m)$ と別の局所座標系 $(y_1, \cdots, y_m)$ を選んだとき, 方向微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p$$

の張る $D_p^r(M)$ の部分ベクトル空間は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

の張る部分ベクトル空間に一致する.

証明. 点 p のまわりで定義された任意の C^r 級関数 f について, 次の変換公式が成り立つ.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}(p).$$

方向微分の記号を使ってかくと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$$

を得る. 右辺の $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)$ を単なる実数と思うと, この式は, 方向微分 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ $(i = 1, \cdots m)$ が $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p$ の 1 次結合で表されるということを意味している. したがって, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ は $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p$ の張るベクトル空間に属している. $(x_1, \cdots, x_m)$ と $(y_1, \cdots, y_m)$ の役割を入れ換えて同じ議論をすれば, 逆に $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p$ が $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ の張るベクトル空間に属していることも証明される. したがって, 両者の張るベクトル空間は一致する. □

上の証明中に出てきた基底の変換公式は重要であるから改めて命題の形で述べておく.

命題 4.8. 点 p のまわりに 2 つの局所座標系 $(x_1, \cdots x_m)$, $(y_1, \cdots, y_m)$ があると, それに応じて $T_p(M)$ の基底

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\rangle, \left\langle d\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p \right\rangle$$

が定まる. それらの間には次の関係式が成り立つ.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$$

命題 4.9. 曲線 c の $t=0$ における速度ベクトル $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ は $T_p(M)$ の元, すなわち接ベクトルである.

証明. 点 p のまわりの局所座標系 $(x_1,\cdots,x_m)$ を任意に固定する. $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ が $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ という形の方向微分の 1 次結合として表されていることを証明すればよい. p のまわりで定義された任意の C^r 級関数 f ををとり, 関数 f と曲線 c を局所座標表示したものがそれぞれ,

$$f(x_1,\cdots,x_m),\ c(t)=(x_1(t),\cdots x_m(t))$$

であったとすると,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(f) &= \left.\frac{d}{dt}f(x_1(t),\cdots,x_m(t))\right|_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{dx_i}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\end{aligned}$$

と計算される (合成関数の微分法). f は任意であったから, 方向微分としての等式

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{m}\frac{dx_i}{dt}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

を得る. 右辺の $\frac{dx_1}{dt}(0),\cdots,\frac{dx_m}{dt}(0)$ を単なる実数と思うと, $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ が $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ の 1 次結合で表されることがわかる. これで命題が証明された. □

4.2 C^r 級写像の微分

M, N をそれぞれ m 次元, n 次元の C^r 級多様体, $f:M\to N$ を C^r 級写像とし $(1\le r\le\infty)$, 点 $p\in M$ を通る M 上の C^r 曲線を

$$c:(-\epsilon,\epsilon)\to M,\ c(0)=p$$

とする. この曲線を写像 f でうつすと, 点 $q=f(p)$ を通る N 上の C^r 曲線

$$f\circ c:(-\epsilon,\epsilon)\to N, f^\circ c(0)=q$$

が得られる. $t=0$ における曲線 c の速度ベクトル

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}\in T_p(M)$$

と, $t=0$ における曲線 $f\circ c$ の速度ベクトル

$$\left.\frac{d(f\circ c)}{dt}\right|_{t=0}\in T_q(M)$$

の関係を調べる.

命題 4.10. $t=0$ における c と $f\circ c$ の速度ベクトルをそれぞれ

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{m}v_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\quad \left.\frac{d(f\circ c)}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n}w_j\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

とおくと, 係数 $v_1,\cdots,v_m$ と $w_1,\cdots,w_n$ の間には次の関係がある.

$$w_j=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)v_i\ (j=1,\cdots,n)$$

またこの式を, 縦ベクトルと行列を使って書くと

$$\begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}$$

となる.

証明. 点 p を含む M の座標近傍 $(U;x_1,\cdots x_m)$ と, $q=f(p)$ を含む N の座標近傍 $(V;y_1,\cdots y_n)$ を $f(U)\subset V$ となるようにとる. f を $(U;x_1,\cdots x_m)$ と $(V;y_1,\cdots y_n)$ に関して局所座標表示したものが

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\cdots,x_m)\\ &\vdots\\ y_n &= f_n(x_1,\cdots,x_m)\end{aligned}$$

であるとする. 右辺の関数は $(x_1,\cdots x_m)$ に関して C^r 級である. パラメータ t の動く範囲 $-\epsilon\leq t\epsilon$ を十分小さくとれば, 曲線 c は $(U;x_1,\cdots x_m)$ の中に含まれるとしてよい. 局所座標系 $(x_1,\cdots,x_m)$ に関する c の局所座標表示を

$$c(t)=(x_1(t),\cdots,x_m(t))$$

とすると, 曲線 $f\circ c$ の $(y_1,\cdots,y_n)$ に関する局所座標表示は

$$\begin{aligned} f\circ c(t) &= (y_1(t),\cdots,y_n(t))\\ &= (f_1(x_1(t),\cdots,x_m(t)),\cdots,f_n(x_1(t),\cdots,x_m(t)))\end{aligned}$$

で与えられる. 曲線 c の $t=0$ における速度ベクトルを

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}=v_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p+\cdots+v_m\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

とおく. ただし $v_1, \cdots, v_m$ は実数である. 命題 4.9 より, $v_i = \frac{dx_i}{dt}(0)$ $(i = 1, \cdots, m)$ である. 曲線 $f \circ c$ の速度ベクトルを求めると

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{f \circ c}{dt}\right|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{dy_j}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1(t), \cdots, x_m(t))|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \frac{dx_i}{dt}(0) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) v_i \right\} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q
\end{aligned}
$$

となる. 速度ベクトル $\left.\frac{f \circ c}{dt}\right|_{t=0}$ の係数を $w_1, \cdots, w_n$ とすると,

$$
w_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) v_i \ (j = 1, \cdots, n)
$$

を得る. よって命題は証明された. □

定義 4.11. 命題 4.10 に現れた n 行 m 列の行列

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p)
\end{pmatrix}
$$

を, 点 p における写像 $f : M \to N$ のヤコビ行列とよび, 記号で

$$
(Jf)_p
$$

と表す. ヤコビ行列 $(Jf)_p$ は, 局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $(y_1, \cdots, y_n)$ を選ぶことによって決まる行列である.

命題 4.10 より次の系が分かる.

系 4.12. $\left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0}$ は $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ のみに依存して定まり, 点 p から離れたところでの c の振る舞いによらない. すなわち, 点 $p \in M$ を通る曲線 2 本を

$$
c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \ (c(0) = p)
$$

$$
c' : (-\epsilon, \epsilon) \to M \ (c'(0) = p)
$$

とし, $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dc'}{dt}\right|_{t=0}$ と仮定すると, $\left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f \circ c')}{dt}\right|_{t=0}$ が成り立つ. なぜなら f を固定しておけば, ベクトル $(w_1, \cdots, w_n)$ は, ベクトル $(v_1, \cdots, v_m)$ のみから計算されるからである.

命題 4.13. $T_p(M)_p$ に属する任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し, 点 p を通る C^r 級曲線

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \ (c(0) = p)$$

が存在して, $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \boldsymbol{v}$ が成り立つ.

証明. p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ を固定して考える. このとき,

$$\boldsymbol{v} = v_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + v_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

であるとする. これに応じて, 曲線 c を

$$c(t) = (a_1 + v_1 t, \cdots, a_m + v_m t)$$

と定義すればよい. ここに, $(a_1, \cdots, a_m)$ は P の局所座標である. 速度ベクトル $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ を計算すれば, $\boldsymbol{v}$ に一致することが確かめられる. □

系 4.12 と命題 4.13 により, 次のような写像

$$T_p(M) \to T_q(N), \ \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} \mapsto \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0} \ (q = f(p))$$

が自然に定義できる.

定義 4.14. こうして得られた写像を

$$(df)_p : T_p(M) \to T_q(N)$$

と書き, 点 p における $f : M \to N$ の微分とよぶ.

命題 4.15. $(df)_p : T_p(M) \to T_p(M)$ は線型写像である.

証明. 線型写像とはベクトルの和をベクトルの和にうつし, ベクトルの a 倍をベクトルの a 倍にうつすような写像である. p, q のまわりにそれぞれ局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m), (y_1, \cdots, y_n)$ をとり, $T_p(M), T_q(N)$ の中に基底 $\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\rangle$, $\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p \right\rangle$ を固定すると, 任意の $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ は

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と書け, 数ベクトル $(v_1, \cdots, v_m)$ と 1 対 1 に対応する. 同様に, 任意の $\boldsymbol{w} \in T_q(N)$ は

$$\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

と書け, 数ベクトル $(w_1, \cdots, w_n)$ と1対1に対応する. 今, $\boldsymbol{w} = (df)_p(\boldsymbol{v})$ であるとすると, $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{v}$ に対応する数ベクトルを縦ベクトルに書いたとして,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (Jf)_p \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

の関係がある. $(Jf)_p$ は点 p における f のヤコビ行列である. この関係から $(df)_p : \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w}$ が線型写像であることがわかる. □

命題 4.16. 点 p, q のまわりでそれぞれ局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$, $(y_1, \cdots, y_n)$ を固定し, それによって f を

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_m) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \cdots, x_m) \end{aligned}$$

と局所座標表示する. このとき, 次の公式が成り立つ.

$$(df)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q$$

証明. $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ を $\sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ の形で表すと, $v_i = 1,\ v_k = 0\ (k \neq i)$ である. $(df)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q$ とおいたときの w_j は

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

であるから, $v_i = 1,\ v_k = 0\ (k \neq i)$ を代入して,

$$w_j = v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

を得る. よって,

$$(df)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q$$

が成り立つことが分かる. □

命題 4.17. $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. M の点 p における任意の接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ と, N の点 $f(p)$ のまわりで定義された任意の C^r 級関数 ξ について

$$((df)_p(\boldsymbol{v}))(\xi) = \boldsymbol{v}(\xi \circ f)$$

が成り立つ.

証明. $\boldsymbol{v} = \frac{dc}{dt}\Big|_{t=0}$ であるような C^r 級曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $c(0) = p$ をとる. $(df)_p$ の定義より,

$$(df)_p(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0}$$

である. 速度ベクトル $\left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0}$ を方向微分と考えると,

$$\left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0}(\xi) = \left.\frac{d\xi(f \circ c(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}
(df)_p(\boldsymbol{v})(\xi) &= \left.\frac{d\xi(f \circ c(t))}{dt}\right|_{t=0}(\xi) \\
&= \left.\frac{d\xi(f \circ c(t))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d(\xi \circ f(c(t)))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(\xi \circ f) \\
&= \boldsymbol{v}(\xi \circ f)
\end{aligned}$$

となり, 命題は証明された. □

命題 4.18. M, N, Q をそれぞれ, m 次元, n 次元, q 次元の C^r 級多様体, $f : M \to N$, $g : N \to Q$ を C^r 級写像, p を M の点とする $(1 \leq r \leq \infty)$. このとき

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p : T_p(M) \to T_{g \circ f(p)}(Q)$$

が成り立つ.

証明. 任意の接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ をとる. $\boldsymbol{v} = \frac{dc}{dt}\Big|_{t=0}$ であるような C^r 級曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $c(0) = p$ をとる.

$$\begin{aligned}
d(g \circ f)_p(\boldsymbol{v}) &= d(g \circ f)_p \left(\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} \right) \\
&= \left.\frac{d(g \circ f) \circ c}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{dg \circ (f \circ c)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= (dg)_{f(p)} \left(\left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0} \right) \\
&= (dg)_{f(p)} \circ (df)_p \left(\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} \right) \\
&= (dg)_{f(p)} \circ (df)_p(\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

となる. ここで, $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ は任意であったから, $d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$ が成り立つ. □

$(df)_p$, $(dg)_{f(p)}$, $d(g \circ f)_p$ はそれぞれヤコビ行列 $(Jf)_p$, $(Jg)_{f(p)}$, $J(g \circ f)_p$ で表現されるから, 次の系が得られる.

系 4.19. $J(g \circ f)_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$ である.

系 4.20. (i) $M = N$ のとき, $d(id_M)_p = id_{T_p(M)}$ である ($d(id_M)_p$, $id_{T_p(M)}$ はそれぞれ M, $T_p(M)$ の恒等写像).

(ii) $f : M \to N$ が C^r 級微分同相写像なら, 任意の $p \in M$ について, $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ は線型写像として同型であって,

$$(df^{-1})_{f(p)} = (df)_p^{-1}$$

が成り立つ.

この系をヤコビ行列を使って書き直すと次の系が得られる.

系 4.21. (i) $M = N$ のとき, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ を固定すれば, $J(id_M)_p = E_m$ である (E_m は m 次単位行列).

(ii) $f : M \to N$ が C^r 級微分同相写像なら, p, $f(p)$ のまわりで局所座標系 $(x_1, \cdots x_m)$, $(y_1, \cdots, y_n)$ を固定すれば, $(Jf)_p$ は正則行列, すなわち, 逆行列をもつ正方行列であって,

$$(Jf^{-1})_{f(p)} = (Jf)_p^{-1}$$

が成り立つ.

とくに, 次が分かる.

系 4.22. C^r 級微分同相写像 $f : M \to N$ が存在すれば, M の次元 m と N の次元 n は等しい. つまり,

$$\mathrm{dim} M = \mathrm{dim} N$$

が成り立つ.

5　多様体の次元を調べる方法

5.1　写像の局所的性質

定理 5.1. $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が線型写像として同型なら, f は p のある開近傍から $f(p)$ のある開近傍への C^r 級微分同相写像である. すなわち, p の開近傍 U と $f(p)$ の開近傍 V が存在して, $f(U) = V$ となり, かつ, $f|U : U \to V$ は C^r 級微分同相写像である.

定理 5.2. $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が上への線型写像なら, 点 p 付近での f の様子は, 射影: $\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_(m-n+1), \cdots, x_m)$ と同じである. すなわち, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \cdots, y_n) = (c)$ が

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_m) = x_{m-n+1} \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \cdots, x_m) = x_m \end{aligned}$$

であるようにできる.

証明. C^r 級写像 $f : M \to N$ が与えられており, ある点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_p(M) \to T_p(N)$ が上への線型写像であるとする. このとき, $\mathrm{rank}(df)_p = n$ (ただし, $m = \mathrm{dim}M \geq n = \mathrm{dim}N$.) 点 p, 点 $f(p)$ のまわりに, それぞれ座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$, $(V; y_1, \cdots, y_n)$ をとり, f を局所座標表示すると

$$(y_1, \cdots, y_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

ヤコビ行列 $(Jf)_p$ は $(df)_p$ を表す行列で, n 行 m 列である. $\mathrm{rank}(df)_p = n$ であるから, $(Jf)_p$ から n 本の列ベクトルを選んで, 作った正方行列は正則である. 必要なら適当に列を入れ替えて

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-n+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

とおくと, $\mathrm{det}B \neq 0$ であって,

$$(Jf)_p = \left(\begin{array}{ccc|c} * & \cdots & * & \\ & & & B \\ * & \cdots & * & \end{array} \right)$$

と仮定してよい. p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ から, $\mathbb{R}^m$ への写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を

$$\varphi(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_{m-n}, f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

と定義する. やコビ行列 $(J\varphi)_p$ は

$$(J\varphi)_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 1 & \\ \hline * & \cdots & * & \\ & \cdots & & B \\ * & \cdots & * & \end{array}\right)$$

となり, $\det(J\varphi)_p = \det B \neq 0$ である. したがって, 逆関数の定理 (定理 5.1) により, 点 p を含む U を十分小さくとれば, $\varphi|U : U \to \varphi(U)$ は C^r 級微分同相写像である. よって, /refprop: cord-nabor condition より,$(U, \varphi|U)$ は p のまわりの新しい C^r 級座標近傍と思える. $(U, \varphi|U)$ の局所座標系を $(z_1, \cdots, z_m)$ とすると, 上の φ の定義式から,

$$(z_1, \cdots, z_m) = \varphi(x_1, \cdots x_m) = (x_1, \cdots x_{m-n}, f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$$

を得る. とくに, $(z_{m-n+1}, \cdots, z_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$ であるから,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(z_1, \cdots z_m) &= f(x_1, \cdots x_m) \\ &= (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)) \\ &= (z_{m-n+1}, \cdots, z_m) \end{aligned}$$

となる. よって, $(z_1, \cdots, z_m)$ と $(y_1, \cdots, y_n)$ に関する $f : M \to N$ の点 p のまわりでの局所座標表示

$$(z_1, \cdots, z_m) \mapsto (z_{m-n+1}, \cdots, z_m) = (y_1, \cdots, y_n)$$

である. $(z_1, \cdots, z_m)$ を改めて $(x_1, \cdots, x_m)$ と書き直せば, 定理 5.2 の主張が得られる. $\square$

定理 5.3. $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が 1 対 1 の線型写像なら, 点 p の付近での f の様子は, 包含写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$ と同じである. すなわち, p のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ と $f(p)$ のまわりの局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をうまく選んで, f の局所座標表示 $(y_1, \cdots, y_n) \mapsto$

$(f_1(x_1,\cdots x_m),\cdots,f_n(x_1,\cdots x_m),)$ が,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\cdots x_m)=x_1 \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1,\cdots x_m)=x_m \\ y_{m+1} &= f_{m+1}(x_1,\cdots x_m)=0 \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1,\cdots x_m)=0 \end{aligned}$$

であるようにできる.

証明. 問題は局所的であるから $M=\mathbb{R}^m$, $N=\mathbb{R}^n$ と仮定してよい. $(m\leq n)$ また, $p=\boldsymbol{o}$, $f(p)=\boldsymbol{o}$ としてよい. $\mathbb{R}^m$ の自然な座標 $(x_1,\cdots,x_m)$ と, $\mathbb{R}^n$ の自然な座標に関して, 与えられた C^r 級写像 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ を局所座標表示したものを

$$u_1=f_1(x_1,\cdots,x_m),\ \cdots,u_n=f_n(x_1,\cdots,x_m)$$

とする. $(df)_{\boldsymbol{o}}:T_{\boldsymbol{o}}(\mathbb{R}^m)\to T_{\boldsymbol{o}}(\mathbb{R}^n)$ は1対1であるから, ヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{o}}$ から, 適当な m 行を選び出して作った m 次正方行列は正則である. 必要なら, $(u_1,\cdots,u_m)$ の並び方を変えて, $(Jf)_{\boldsymbol{o}}=\left(\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right)$ (A は m 行 m 列の正則行列) と仮定してよい.
$(x_1,\cdots,x_m)$ に新しく, $(x_{m+1},\cdots,x_n)$ を付け加えて, $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$ を構成し, 新しい写像 $F:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^n$ を,

$$\begin{aligned} &F(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots x_n) \\ &=(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m),f_{m+1}(x_1,\cdots,x_m)+x_{m+1},\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_m)+x_n) \end{aligned}$$

と定義する.F のヤコビ行列

$$(Jf)_{\boldsymbol{o}}=\left(\begin{array}{c|ccc} A & & O & \\ \hline & 1 & & \\ B & & \vdots & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

であり, 正則である. 逆関数の定理 5.1 により, $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$ における, $\boldsymbol{o}$ の近傍 U と, $\mathbb{R}^n$ における $\boldsymbol{o}$ の近傍 V が存在して, $F|U:U\to V$ は C^r 級微分同相写像になる. $\psi=(F|U)^{-1}:V\to U$ とおく. (V,ψ) は $\boldsymbol{o}$ のまわりの $\mathbb{R}^n$ の C^r 級座標近傍と思える. この座標近傍に関する局所座標系を $(y_1,\cdots y_n)$ とし, $(x_1,\cdots,x_m)$ と

$(y_1, \cdots y_n)$ に関して, $f : U \cap (\mathbb{R}^m \times \{\boldsymbol{o}\}) \to \mathbb{R}^n$ を局所座標表示すると,

$$\begin{aligned}(y_1, \cdots, y_n) &= \psi(f(x_1, \cdots, x_m)) \\ &= \psi(F(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots 0)) \\ &= (F|U)^{-1}(F(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots 0)) \\ &= (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)\end{aligned}$$

となる. したがって, 定理 5.3 の主張する通りの局所座標表示が得られた. □

5.2 C^r 級部分多様体

定義 5.4. n 次元 C^r 級多様体 N の部分集合 L が N の l 次元 C^r 級部分多様体であるとは,

(1) $l = n$ のとき:L が N の開集合であることである.

(2) $0 \leq l < n$ のとき:L の任意の点 p に対し, p を含む N の座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ が存在して,

$$L \cap N = \{(x_1, \cdots, x_n) \in U | x_{l+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

が成り立つことである.

命題 5.5. n 次元 C^r 級多様体 N の l 次元 C^r 級部分多様体 L は, それ自身 l 次元 C^r 級多様体である.

証明. (1) $l = n$ のとき, N からの相対位相によって, L は位相空間となり, N の C^r 級座標近傍を $\mathcal{S} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とすると, $\mathcal{S}$ を L に制限した $\{U_\alpha \cap L, \varphi_\alpha | U_\alpha \cap L\}_{\alpha \in A}$ は L の C^r 局所座標系になる. よって, L はそれ自身, $l(= n)$ 次元 C^r 級多様体である.

(2) $0 \leq l < n$ のとき, L には N からの相対位相を入れる. N がハウスドルフ空間であるから L もそうである.
L の任意の点 p に対し, p を含む N の局所座標系 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ で定義 5.4 の条件を満たすものを選び, $(U_p; x_1^p, \cdots, x_n^p)$ とする. $V_p = L \cap U_p$ とおくと, V_p は L の開集合である. V_p 上の U_p の局所座標系 $(x_1^p, \cdots, x_n^p)$ の x_1^p から x_l^p までを制限したもの $(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)$ を考える.
$\{(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)\}_{p \in L}$ が L を被覆することは明らかである.
V_p と V_q が交わるとする. 対応する $(U_p; x_1^p, \cdots, x_n^p)$ と $(U_q; x_1^q, \cdots, x_n^q)$ は, N の適当な座標近傍 $(U_\alpha; x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha)$, $(U_\beta; x_1^\beta, \cdots, x_n^\beta)$ である. この間の座標変換はある C^r 級関数 f を用いて,

$$(x_1^\beta, \cdots, x_n^\beta) = (f_1(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha), \cdots, f_n(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha))$$

と書ける. $V_p \cap V_q$ 上では, $x^\alpha_{l+1} = x^\alpha_n = 0$, $x^\beta_{l+1} = x^\beta_n = 0$ が成り立つので, $V_p \cap V_q$ 上では

$$\begin{aligned} x_1^\beta &= f_1(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha, 0, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ x_l^\beta &= f_l(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha, 0, \cdots, 0) \\ 0 &= f_{l+1}(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha, 0, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ 0 &= f_n(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha, 0, \cdots, 0) \end{aligned}$$

となっている. 改めて関数 g を

$$\begin{aligned} g(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha) &= (g_1(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha), \cdots, g_l(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha)) \\ &= (f_1(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha, 0, \cdots, 0), \cdots, f_l(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha, 0, \cdots, 0)) \end{aligned}$$

と定義すると, この関数は C^r 級である. そして,

$$(x_1^\beta, \cdots, x_l^\beta) = g(x_1^\alpha, \cdots, x_l^\alpha)$$

が $(V_p; x_1^p, \cdots x_l^p)$ から $(V_q; x_1^q, \cdots x_l^q)$ の座標変換を与えている.
ゆえに, $\{(V_p; x_1^p, \cdots, x_l^p)\}_{p \in L}$ は L の C^r 級座標近傍になっている.
以上より, L は l 次元 C^r 級多様体である.

□

定理 5.6. M, N を m 次元, n 次元の C^r 級多様体, $f : M \to N$ を C^r 級写像とする. N のある点 q について, $f(p) = q$ となる M の各点 p が常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ を満たすとき, 逆像 $f^{-1}(q)$ は $(m-n)$ 次元 C^r 級多様体である.

証明. 定義 5.4, 命題 5.5 より, 次のことを証明すればよい.

$q \in N$ の逆像 $f^{-1}(q)$ に属する任意の点 p に対し, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots .x_m)$ が存在して,

$$f^{-1}(q) \cap U = \{(x_1, \cdots x_m) \in U | x_{m-n+1} = \cdots = x_m = 0\}$$

が成り立つ.

今, $f(p) = q$ を満たす $p \in M$ について, 常に $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ であるから, $(df)_p$ は上への写像である. よって, 定理 5.2 より, p のまわりの座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ と $q(= f(p))$ のまわりの座標近傍 $(V; y_1, \cdots, y_n)$ が存在して, $f|U : U \to V$ は

$$(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots x_m) = (x_{m-n+1}, \cdots, x_m)$$

と座標表示される.
$(U; x_1, \cdots x_m)$ は任意にとってきた $(V; y_1, \cdots, y_n)$ に応じて選べるから, $(V; y_1, \cdots, y_n)$ は点 q で $y_1 = \cdots = y_n = 0$ となるようにとっておくと,

$$\begin{aligned} f^{-1}(q) \cap U &= \{p \in U | f(p) = q\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_m) \in U | f(x_1, \cdots x_m) = (0, \cdots, 0)\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_m) \in U | (x_{m-n+1}, \cdots x_m) = (0, \cdots, 0)\} \\ &= \{(x_1, \cdots x_m) \in U | x_{m-n+1} = \cdots = x_m = 0\} \end{aligned}$$

となり, 条件を満たす U が存在することがわかる. これで定理 5.6 が証明できた. □

5.3 多様体の次元の具体的な計算

最後に定理 5.6 を用いて多様体の次元を具体的に計算していく.

例 5.7. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

は n 次元 C^∞ 級多様体である.
C^∞ 級写像 (C^∞ 級関数) $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$$

で定義すると,

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}) | f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0\} = f^{-1}(0)$$

より, S^n は逆像 $f^{-1}(0)$ となっている. ヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{x}}$ を調べると,

$$\begin{aligned} (Jf)_{\boldsymbol{x}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{x}) \right) \\ &= (2x_1, \cdots, 2x_{n+1}) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots x_{n+1}) \in S^n$ のとき, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ $(:= (0, \cdots, 0))$ であるから,

$$(Jf)_{\boldsymbol{x}} = (2x_1, \cdots, 2x_{n+1}) \neq \boldsymbol{o}$$

となり, $(Jf)_{\boldsymbol{x}}$ の階数は 1 となる. よって, S^n は $(n+1) - 1 = n$ 次元 C^∞ 級多様体である.

例 5.8. 2 次元トーラス

$$T^2 := S^1 \times S^1 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^1\}$$

は 2 次元 C^∞ 級多様体である.

2 次元トーラス T^2 は $\mathbb{R}^3$ の中で xz 平面上の中心が $(R, 0)$, 半径が r の円を z 軸のまわりに 1 回転させた図形 (ただし, $(0 < r < R)$) と考えられるので,

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\} \ (0 < r < R)$$

と表すことができる. C^∞ 級写像 (C^∞ 級関数) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$$

と定義すると,

$$T^2 = f^{-1}(0)$$

となる. $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ におけるヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{p}}$ を調べると,

$$\begin{aligned} (Jf)_{\boldsymbol{p}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}), \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}) \right) \\ &= \left(\frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - R)x}{sqrtx^2 + y^2}, \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - R)y}{sqrtx^2 + y^2}, 2z \right) \end{aligned}$$

であり, $\boldsymbol{p} \in T^2$ のとき, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{o}$ つまり, 常に $x \neq 0$ または $y \neq 0$ または $z \neq 0$ が成り立ち, $\sqrt{x^2 + y^2} - R = 0$ のときは $z = \pm r \neq 0$ となる. よって,

$$(Jf)_{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - R)x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - R)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right) \neq \boldsymbol{o}$$

となり, $\mathrm{rank}(Jf)_{\boldsymbol{p}} = 1$ を得る. したがって, T^2 は $3 - 1 = 2$ 次元 C^∞ 級多様体である.

例 5.9. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ であることに注意すると 2 次元トーラス T^2 は $\mathbb{R}^4$ の部分集合として,

$$T^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

と表せる. この表し方においても T^2 は 2 次元 C^∞ 級多様体になる.

C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1)$$

と定義すると,

$$T^2 = f^{-1}(0, 0)$$

と表せる．点 $\boldsymbol{p} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ におけるヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{p}}$ を調べると，

$$\begin{aligned}(Jf)_{\boldsymbol{p}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{p} \in T^2$ のとき，$x_1 \neq 0$ または $x_2 \neq 0$ で，さらに $x_3 \neq 0$ または $x_4 \neq 0$ でもあるので，$(Jf)_{\boldsymbol{p}}$ の 2 つの行ベクトル $(2x_1, 2x_2, 0, 0)$, $(0, 0, 2x_3, 2x_4)$ は 1 次独立である．行列の階数はその行列の 1 次独立な行ベクトルの個数に一致するから，$\mathrm{rank}(Jf)_{\boldsymbol{p}} = 2$ よって，T^2 は $4 - 2 = 2$ 次元 C^∞ 級多様体である．

例 5.10. らせん $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \cos z, y = \sin z\}$ は 1 次元 C^∞ 級多様体である．

C^∞ 級写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y, z) = (x - \cos z, y - \sin z)$$

と定義すると，

$$H = f^{-1}(0, 0)$$

となる．点 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ におけるヤコビ行列 $(Jf)_{\boldsymbol{p}}$ を調べると，

$$\begin{aligned}(Jf)_{\boldsymbol{p}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin z \\ 0 & 1 & -\cos z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．$(Jf)_{\boldsymbol{p}}$ の 2 つの行ベクトル $(1, 0, \sin z)$, $(0, 1, -\cos z)$ は 1 次独立であるから，$\mathrm{rank}(Jf)_{\boldsymbol{p}} = 2$ よって，H は $3 - 2 = 1$ 次元 C^∞ 級多様体である．

定義 5.11. $\mathbb{R}^m$ の直交 k 枠とは，$\mathbb{R}^m$ の中の k 個のベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$ であって，次の条件 (1), (2) を満たすものをいう．(ただし，$1 \leq k \leq m$ とする．)

(1) $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$ $(i = 1, \cdots, k)$

(2) $\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ は直交する．$(i \neq j,\ i, j = 1, \cdots k)$

$\mathbb{R}^m$ の中の直交 k 枠の全体のなす集合を

$$V_{m,k}$$

と表し，(m, k) 型のシュティーフェル多様体とよぶ．

以下, $m=2$ のときのシュティーフェル多様体 $V_{2,k}$ を調べる.

例 5.12. $k=1$ のとき, シュティーフェル多様体 $V_{2,1}$ は 1 次元 C^∞ 級多様体になる.

定義より,

$$\begin{aligned} V_{2,1} &= \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 | \|\boldsymbol{v}\| = 1\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 | v_1^2 + v_2^2 = 1\} = S^1 \end{aligned}$$

となり, $V_{2,1}$ は 1 次元球面 S^1 と等しいことがわかる. よって $V_{2,1}$ は 1 次元 C^∞ 級多様体になる.

例 5.13. $k=2$ のとき, シュティーフェル多様体 $V_{2,2}$ は 1 次元 C^∞ 級多様体になる.

$\boldsymbol{v}_1 = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (y_1, y_2)$ を $\mathbb{R}^2$ の直交 2 枠の 2 つのベクトルとすると, 定義 5.11 の条件 (1), (2) はそれぞれ次のように表せる.

(1) $x_1^2 + x_2^2 = 1, y_1^2 + y_2^2 = 1$

(2) $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$

よって $V_{2,2}$ は

$$V_{2,2} = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = 1, y_1^2 + y_2^2 = 1, x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0\}$$

と書き表せる. C^∞ 写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, y_1^2 + y_2^2 - 1, x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

と定義すると,

$$V_{2,2} = f^{-1}(0, 0, 0)$$

となる. 点 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ におけるヤコビ行列 $(Jf)_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}$ を計算すると,

$$(Jf)_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 \\ y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$(Jf)_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}$ の 3 つの行ベクトル $(2x_1, 2x_2, 0, 0)$, $(0, 0, 2y_1, 2y_2)$, (y_1, y_2, x_1, x_2) が 1 次独立であることを示す. a, b, c を実数として,

$$a(2x_1, 2x_2, 0, 0) + b(0, 0, 2y_1, 2y_2) + c(y_1, y_2, x_1, x_2) = (0, 0, 0, 0)$$

と仮定すると,

$$2a(\boldsymbol{v}_1, 0, 0) + 2b(0, 0, \boldsymbol{v}_2) + c(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) = (0, 0, 0, 0)$$

であるから, これを整理して,

$$(2a\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2, 2b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_1) = (0,0,0,0)$$

を得る. よって,

$$2a\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2 = (0,0),\ 2b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_1 = (0,0)$$

となるが, いま, $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立であるから, $a = c = 0$, $b = c = 0$ が導かれ, $a = b = c = 0$ であることがわかる. したがって, $(2x_1, 2x_2, 0, 0)$, $(0, 0, 2y_1, 2y_2)$, (y_1, y_2, x_1, x_2) は 1 次独立である. ゆえに, $\mathrm{rank}(Jf)_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)} = 3$ であるから, $V_{2,2}$ は $4 - 3 = 1$ 次元 C^∞ 級多様体となる.

6　おわりに

多様体の次元を調べる方法を書きました.

参考文献

[1] 松本幸夫, [第 30 版] 多様体の基礎, 東京大学出版会, 2018.

[2] 藤岡敦, [第 2 版] 具体例から学ぶ　多様体, 裳華房, 2017.

[3] 服部晶夫, [第 1 版] 多様体, 岩波書店, 1976.