1

私は多様体の次元を調べる方法というテーマで研究をしました。

2

今回の話の流れはこのようになっています。

3

初めに研究の背景と動機について説明します。

どこでも好きなところに m 次元の局所座標系を描ける空間を m 次元多様体といいます. 例えば, 球面は球面上のどこでも好きなところに 2 次元の局所座標 系を描くことができるため, 2 次元多様体であるといえます. 私は空間の多様体としての次元を調べることで複雑な方程式で表された空間や高次元の空間などの形を理解できることに興味をもち, 多様体の次元を調べる方法を研究することにしました。

4

まず, 空間に局所座標系が描かれているということの定義は

位相空間Xの開集合UがRmの開集合と同相になっていることをいいます。

このときの同相写像を局所座標系といい, 開集合Uと局所座標系φの対を

M次元座標近傍といいます。

5

2つの座標近傍が図のように交わっているときこの写像を座標変換

といいます。今後局所座標系が描かれているだけでなく, 重なっている場合はその間の座標変換 ψ ◦ φ −1 が微分可能 ( 座標近傍の張り合わせが滑らか) なものを考えます。

6

これらの概念を用いてm 次元 C r 級多様体を定義します。その条件は

(1)M はハウスドルフ空間である.

(2)M は m 次元座標近傍によって被覆される.

(3)座標変換はC r 級写像である.という条件です。

7.

まず, 直接先ほどの多様体条件を確かめることで

多様体の次元を調べることができる例を紹介します。

多様体の例としてはm 次元球面が挙げられます。m次元球面は

m+1次元数空間内で原点からの距離が1の点の集合です.

8

実際開集合と局所座標系を次のように定義するとm 次元 C r 級多様体

の条件を満たす。

9

S1(円周)の場合は4つの開集合とその上の射影の組を

座標近傍とすれば1次元 1次元C∞ 級多様体であることがわかります

10

C r 級多様体の上でCs級写像を定義します.

多様体の間の写像の微分可能性はp, f(p)のまわりの

局所座標系の間の写像ψ ◦ f ◦ φ −1

の微分可能性を対応させます。

これをfの局所座標表示といいます。

11

Cs級写像が定義できたので

C s 級微分同相写像もこのように定義することができます。

これによる定理としては

V を M の開集合, V ′ を R m の開集合とし, VからV’への

写像psi : V → V ′ を C r 級微分同相写像であるときに(V, ψ)もC r 級座標近傍の1つ

になりうるという定理があります。

12

この定理によって, いくらでも小さい開近傍 U ′ や, 新しい局所座標系 φ ′ による 座標近傍 (U ′ , φ′ ) も同時に考えられるようになります。

図は, 先ほど紹介した開集合よりも小さい開集合U’とステレオ投影φ ′ です。

このとき, ステレオ投影φはC∞級微分同相であるから,

(U ′ , φ′ )を新しい座標近傍として採用することができます。

ステレオ投影は平面図法の地図などに応用されています。

13

次にC r 級関数 f : M → R の点pにおける偏微分操作を定義します。

これも、fの局所座標表示であるf○φ^{-1}の点pについての偏微分操作

を考えます。

これに和と実数倍を定義することでの 1 次結合全体の集合はベクトル空間 となり, m 個の点pにおける偏微分操作はその基底になります。

14

m 個の点pにおける偏微分操作の張るベクトル空間を, 点 p における M の接ベクトル空間とよび, Tp(M) という記号で表す. 接ベクトル空間 Tp(M) の元 v ∈ Tp(M) を接ベクトルとよびます。

15

さらに、多様体の間の写像の微分を定義します。これについても

Fの局所座標表示の微分（つまりヤコビ行列による点pでの

写像fの線型近似）を対応させることとします。

これはユークリッド空間内での普通の微分の拡張になっているので,

普通の微分に関する定理が多様体の間の写像の微分でも成り立ちます。

16

代表的な定理が次の定理です。Cr写像fのPにおけるヤコビアンが0でないなら

ｐの十分小さい開近傍上でCr級なfの逆関数が存在する（つまり

f|UがC r 級微分同相写像）という定理です。

例えば, …….

17

逆関数の定理を利用して次の定理が導けます。

ヤコビ行列の階数がn（行先の多様体の次元に等しい）なら

f (p) のまわりの局所座標系 (y1, · · · , yn) に対して p のまわりの局所座標系 (x1, · · · , xm) をうまく選ん で, 射影と同じ,にできるつまり局所座標系 (x1, · · · , xm)の

後半のn成分をy1からynに一致させることができるという定理です。

これを射影の定理とよぶこととします。

18

証明のポイントはf (p) のまわりの局所座標系 (y1, · · · , yn)に対して

写像φをこのように定義すると十分小さい開近傍Uにおいて

φ が C r 級微分同相写像であるから、（Ｓ１でステレオ投影による

新しい座標近傍を新しく採用したように）（Ｕ，φ）を

新しいpの座標近傍として採用できるということです。

19

ここで, 部分多様体の定義をします。

L=nのときは単にNの開集合のことをいいます

0 ≤ l < n のときはp を含む N の座標近傍 (U; x1, · · · , xn) が存在して,

L ∩ Ｕの各点の座標の第l+1成分以降が0になることをいいます。

図で表すとこのようになります。

20

l 次元 C r 級部分多様体はそれ自身l 次元 C r 級多様体になります。

21

そしてこれが最も伝えたい定理になります。

（読む）

ある多様体がCr級写像fのqにおける逆像として表現できるとき, fのヤコビ行列の階数が

nならばその多様体は(m − n) 次元 C r 級多様体であるという定理です。

証明はこの(m − n) 次元 C r 級部分多様体の条件を示します。

一般性を失わないのでqの座標が0000のときの証明をします。

rank(Jf )p = nなので射影の定理を利用できて, pの座標の

後半n成分をq＝０００００にできるようなＭの局所座標Uが存在すること

がわかります。図を見ると(m − n) 次元 C r 級部分多様体の条件を満たしていること

がわかります。

最後に多様体の次元の具体的な計算を紹介します。

1番最初に紹介したn次元球面は開集合とそれに対応する局所座標系

を恣意的に定義することでn次元C∞ 級多様体であることを示しましたが、

C∞ 級写像 (C∞ 級関数) f : R n+1 → R f (x1, · · · , xn+1) = x 2 1 + · · · + x 2 n+1 – 1

の0における逆像f^{-1}(0)とみることで

最後に紹介した定理によって, fのヤコビ行列の階数の計算に帰着することができます。

この場合ヤコビ行列の階数は1であるのでS1は2-1=1次元C無限級多様体である

ことがわかります。

このように最初よりも簡単に多様体S1の次元を調べられることが分かりました。

おわりに

（読む）