1

私は多様体の次元を調べる方法というテーマで研究をしました。

2

今回の話の流れはこのようになっています。

3

初めに研究の背景と動機について説明します。

どこでも好きなところに m 次元の局所座標系を描ける空間を m 次元多様体といいます. 例えば, 球面は球面上のどこでも好きなところに 2 次元の局所座標 系を描くことができるため, 2 次元多様体であるといえます. 私は空間の多様体としての次元を調べることで複雑な方程式で表された空間や高次元の空間などの形を理解できることに興味をもち, 多様体の次元を調べる方法を研究することにしました。

4

まず, 空間に局所座標系が描かれているということの定義は

位相空間Xの開集合UがRmの開集合と同相になっていることをいいます。

このときの同相写像を局所座標系といい, 開集合Uと局所座標系ファイの対を

M次元座標近傍といいます。

5

2つの座標近傍が図のように交わっているときこの写像を座標変換

といいます。今後局所座標系が描かれているだけでなく, 重なっている場合はその間の座標変 換 ψ ◦ φ −1 が微分可能 ( 座標近傍の張り合わせが滑らか) なものを考ます。

6

これらの概念を用いてm 次元 C r 級多様体を定義します。その条件は

(1)M はハウスドルフ空間である.

(2)M は m 次元座標近傍によって被覆される.

(3)座標 変換はC r 級写像である.

という条件です。

7.

多様体の例としてはm 次元球面が挙げられます。

8

実際開集合と局所座標系を次のように定義するとm 次元 C r 級多様体

の条件を満たす。

9

S1(円周)の場合は4つの開集合とその上の射影の組を

座標近傍とすれば1次元 C∞ 級多様体であるこ とがわかります

10

C r 級多様体の上でCs級写像を定義します.

多様体の間の写像の微分可能性はp,f(p)のまわりの

局所座標系の間の写像ψ ◦ f ◦ φ −1

の微分可能性を対応させます。

これをfの局所座標表示といいます。

11

Cs級写像が定義できたので

C s 級微分同相写像もていぎできます。

これによる定理としては

V を M の開集合, V ′ を R m の開集合とし, psi : V → V ′ を C r 級 微分同相写像であるときに(V, ψ)もC r 級座標近傍になりうるという定理があります。

12

これによって, いくらでも小さい開近傍 U ′ や, 新しい局所座標系 φ ′ による 座標近傍 (U ′ , φ′ ) も同時に考えられるようになります。

図は, 先ほど紹介した開集合よりも小さい開集合U’とステレオ投影φ ′ です。

ステレオ投影φC∞級微分同相であるから,

(U ′ , φ′ )を新しい座標近傍として採用することができます。

ステレオ投影は平面図法の地図などに応用されています。

13

次にC r 級関数 f : M → R の偏微分操作を定義します。これも、ｍ次元

局所座標系からRへの関数（fの局所座標表示）についての偏微分操作

を考えます

これに和と実数倍を定義することでの 1 次結合全体の集合はベクトル空間 となり, m 個のベクトル ( ∂ ∂x1 ) p , · · · ( ∂ ∂xm ) p はその基底になります。

14

m 個のベクトル ( ∂ ∂x1 ) p , · · · ( ∂ ∂xm ) p の張るベクトル空間を, 点 p における M の接ベクトル空間とよび, Tp(M) という記号で表す. 接ベクトル空間 Tp(M) の元 v ∈ Tp(M) を接ベクトルとよびます。

15

さらに、多様体の間の写像の微分を定義します。これについても

Fの局所座標表示の微分（つまりヤコビ行列による点pでの

写像fの線型近似）を対応させることとします。

これはユークリッド空間内での普通の微分の拡張になっているので,

普通の微分に関する定理が多様体の間の写像の微分でも成り立ちます。

16

代表的な定理が次の定理です。Cr写像fのPにおけるヤコビアンが0でないなら

ｐの十分小さい開近傍上でCr級なfの逆関数が存在する（つまり

f|UがC r 級微分同相写像）という定理です。

例えば, …….

17

逆関数の定理を利用して次の定理が導けます。

ヤコビ行列の階数がn（行先の多様体の次元に等しい）なら

f (p) のまわりの局所座標系 (y1, · · · , yn) に対して p のまわりの局所座標系 (x1, · · · , xm) をうまく選ん で, 射影と同じ,にできるという定理です。

これを射影の定理とよぶこととします。

18

証明のポイントはf (p) のまわりの局所座標系 (y1, · · · , yn)に対して

写像ファイをこのように定義すると十分小さい開近傍Uにおいて

φ が C r 級微分 同相写像であるから、（Ｓ１でステレオ投影による

新しい座標近傍を新しく採用したように）（Ｕ，φ）を

新しいpの座標近傍として採用できるということです。

19

部分多様体の定義をします。

L=nのときは単にNの開集合のことをいいます

0 ≤ l < n のときはp を含む N の座標近傍 (U; x1, · · · , xn) が存在して,

L ∩ Ｕの各点の座標の第l成分から後ろが0になることをいいます。

図で表すとこのようになります。

20

部分多様体はそれ自身それ自身 l 次元 C r 級多様体になります。

21

そしてこれが最も伝えたい定理になります。

（読む）

ある多様体が

Fの逆像として表現できるとき, fのヤコビ行列の階数を見ることで

その次元をが分かるという定理です。

証明はこの(m − n) 次元 C r 級部分多様体の条件を示します。

一般性を失わないのでQ=0000のときの証明をします。

rank(Jf )p = nなので射影の定理を利用できて, pの座標の

ｍ－ｎ成分以降をq＝０００００にできるようなＭの局所座標Uが存在すること

がわかります。図を見ると(m − n) 次元 C r 級部分多様体の条件を満たしていること

がわかります。

最後に多様体の次元の具体的な計算を紹介します。

1番最初に紹介したn次元球面は開集合とそれに対応する局所座標系

を恣意的に定義することでn次元C∞ 級多様体であることを示しましたが、

C∞ 級写像 (C∞ 級関数) f : R n+1 → R を f (x1, · · · , xn+1) = x 2 1 + · · · + x 2 n+1 – 1

とみることで,

最後に紹介した定理によって, fのヤコビ行列の階数の計算に帰着することができます。

このように簡単に多様体の次元を調べられることが分かりました。

おわりに

（読む）