

# Obligatorisk oppgave 1, MEK2200, høst 2024

## Oppgave 1

I et kartesisk koordinatsystem  $x, y, z$ , er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor  $a, b$  og  $c$  er konstanter.

- Hvilke  $a, b$ , og  $c$  gir opphav til gyldige spenningstensorer og hvorfor?
- Finn spenningen på plan med normalvektoren  $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$  hvor  $\mathbf{i}$  og  $\mathbf{j}$  er enhetsvektorene i henholdsvis  $x$  og  $y$  retning.
- Bestem normalspenningen og tangensialspenningen på planet definert i b).
- Finn prinsipspenningene og prinsipalretningene for tilfellene  $a = 1, b = 2, c = 3$  og  $a = 1, b = 2, c = 10$ . (Hint: Kontroller resultatet ved å bruke matlab/python(sympy modul) til å løse egenverdi problemet. Se også "principal stresses and stress invariants" under stress(mechanics) på wikipedia for løsningsmetode.

## Oppgave 2

La  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  være vektorfelt.

- Skriv ut indreproduktet og ytre/tensor produktet av  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i vektor og dyade form.
- Skriv ut  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ .
- Skriv ut indreproduktet og ytre/tensor produktet av  $\nabla$  og  $\mathbf{u}$  i vektor og dyade form.
- Skriv ut  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}$ .

## Oppgave 3

Et to-dimensjonalt forskyvningsfelt i  $x, y$  planet er gitt ved

$$\mathbf{u} = \{\alpha y, \alpha x\},$$

hvor  $0 < \alpha \ll 1$ .

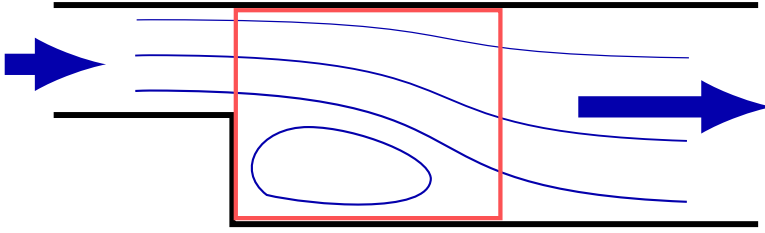
- Skisser hvordan et kvadrat med hjørner  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, a)$  og  $(0, -a)$  deformeres. Hvordan endres arealet for det deformerte kvadratet?
- Finn forskyvningsforskjellen  $\Delta \mathbf{u}$  mellom to vilkårlige punkter i feltet med vektoriell avstand  $\{\Delta x, \Delta y\}$ . Bestem tensoren for relative forskyvningsforskjeller.
- Finn tensoren for deformasjoner uten volumendring for det gitte feltet.

## Oppgave 4

Vi skal se på strømmingen i en kanal som plutselig utvider seg og doubler bredde. Her får man en liten virvel som man kan se skissert på figuren. Pilene viser strømningsretningen. Området dere har fått utdelt data om på filen "bfs.npy" er merket med rød firkant på figuren.

Data om strømmingen er utlevet i numpy-format og kan hentes ut av fila med denne koden

```
import numpy as np
x, y, vx, vy, p = np.load("bfs.npy")
```



Vi kan bruke quiver eller streamplot til å plote hastighetsfeltet. Her er det et eksempel på hvordan dette kan gjøres:

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.quiver(x, y, vx, vy)
plt.show()
```

eller

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.streamplot(x, y, vx, vy)
plt.show()
```

- Lag et plot av hastighetene (se kode over) og et konturplot av trykkfeltet. Du vil se en plass der trykket har en diskontinuitet (stiger eller synker veldig mye i et lite område). Hvor er dette? Kan du tenke deg hvorfor?
- Regn ut gradienten av hastighetsfeltet,  $\nabla \mathbf{u}$ . Hvordan ser denne matrisen ut for posisjonen midt i datasettet (indeks [10,10]).
- Regn ut den symmetriske gradienten,  $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ . Hvordan ser matrisen ut midt i datasettet (posisjonen med indeks [10,10]). Er den symmetrisk?
- Regn ut spenningen i fluidet,

$$\sigma = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \mathbf{I}p,$$

eller på indeksnotasjon,

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij}.$$

Hva er spenningstensoren på posisjon [10,10]?

- Regn ut hovedspenningene og hovedspenningsretningene (prinsipalspenningene og prinsipalretningene) til spenningstensoren i midten av datasettet. Tips: se på `numpy.linalg.eig`. Bonus: plot et konturplot med største hovedspenning over alt i datasettet.

## Krav til innlevering og godkjenning

For alle deloppgaver gis det maksimalt 5 poeng for hver. For godkjenning kreves 80% av det som maksimalt kan oppnåes. For nærmere informasjon om regler se <https://www.uio.no/studier/eksamen/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html>. Tidsfrister er gitt på kurssidene til MEK2200.

Du kan bruke Latex eller levere en håndskrevet besvarelse. Det er lov å samarbeide, men alle må levere individuelle besvarelser.

Hvis man er usikker på noen av svarene så anbefales det at man møter opp i gruppetimen slik at man får spurt om tekniske detaljer og blir trygg på besvarelsen.