

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK3220/MEK4220 — Kontinuumsmekanikk
Eksamensdag: Onsdag 3. desember 2014.
Tid for eksamen: 09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 7 sider.
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: Mathematische Formelsammlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes. Svar som f.eks ja/nei eller venstre/høyre teller ikke som svar.

Tips:

1. Youngs modul E og Poisson modul ν :
Lamé parameterne λ og μ er relatert til E og ν på følgende måte:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1)$$

2. Hooke's lov for et isotropt materiale

$$\mathcal{P} = \lambda \operatorname{tr}(\epsilon) + 2\mu\epsilon$$

eller

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}(P_{ij} - \nu(P_{kk}\delta_{ij} - P_{ij}))$$

3. Newtonsk væske:

$$\sigma = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}$$

4. Spenningens arbeid i en Newtonsk væske:

$$\sigma : \nabla v$$

Oppgave 1.

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor a, b, c, d er konstanter.

- a) Er \mathcal{P} en gyldig spenningstensor?
- b) Finn spenningen på plan med normalvektoren $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ hvor \mathbf{i} og \mathbf{j} er enhetsvektorene i henholdsvis x og y retning.
- c) Bestem normalspenningen og tangensialspenningen på planet definert i b).
- d) Finn prinsipspenningene og prinsipalretningene.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal vi se på strømmingen mellom to plater med avstand h , hvorav den ene beveger seg med (stasjonær) hastighet U , som vist i Figur 1.

- a) Argumenter for at strømmingen i dette tilfelle vil være på formen:
 $\mathbf{u} = u(z)\mathbf{i}$ (gitt at strømmingen er laminær).
- b) Utled analytisk løsning for hastighet under forutsetning av at trykket er 0.
- c) Regn ut normal- og skjær-spenningen på veggene.
- d) Anta nå at strømmingen utsettes for et trykkfall slik at $\nabla p = \beta\mathbf{i}$ og regn ut analytisk løsning.
- e) Hvilken retning strømmer væsken dersom β er positiv og hvilken retning strømmer det dersom β er negativ?

Oppgave 3.

I denne oppgaven skal vi se på elastiske tøyninger.

(Fortsettes side 3.)

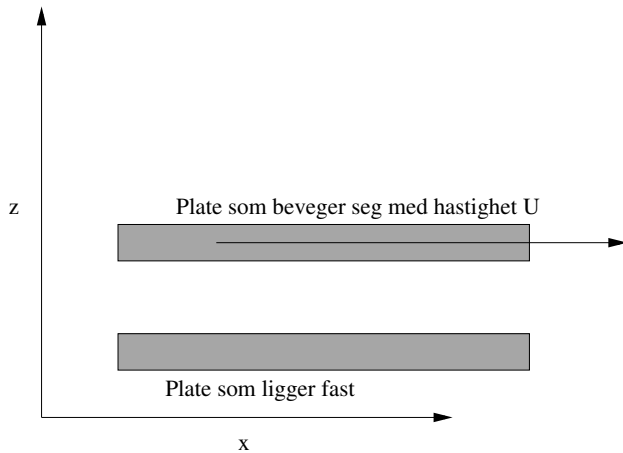


Figure 1: Strømning mellom to plater hvor den øverste beveger seg.

- Figur 2 viser et tau med lengde l laget av et materiale med Youngs modul E og Poisson modul ν festet til et tak. I den andre enden av tauet er det festet et lodd med masse m . Tauet har sirkulært tversnitt med radius a . Vekten til tauet er neglisjerbar. Koordinatsystemet tenkes slik at z -aksen er vertikalt nedover, mens x - og y -aksene er i planet definert av tversnittet til tauet. Vi antar at spenningen i tauet er konstant og komponentene til spenningstensoren kan skrives som:

$$P_{zz} = \sigma \quad P_{xx} = P_{yy} = P_{xy} = P_{yz} = P_{xz} = 0,$$

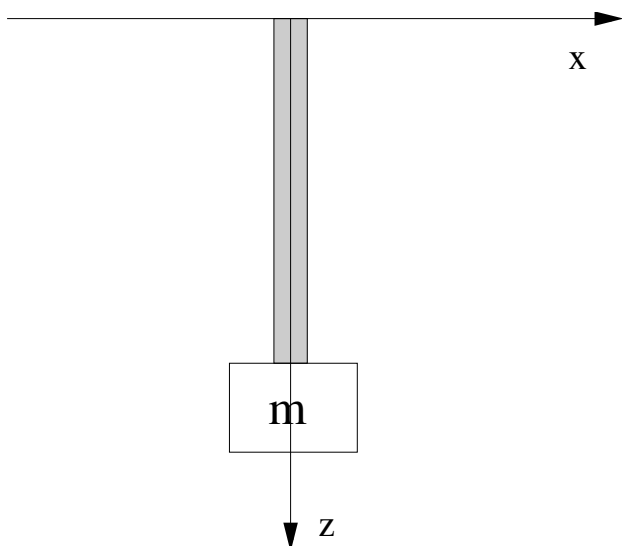
hvor σ er gitt ved:

$$\sigma = \frac{gm}{A}, \quad (2)$$

hvor g er tyngdens akselerasjon og A det opprinnelige udeformerte tversnittsarealet til tauet.

- Finn komponentene til tøyings tensoren ϵ med hjelp av Hookes lov uttrykt med E og ν .
 - Finn forskyvningfeltet fra komponentene til tøyings tensoren ϵ .
 - Hvilke betingelser angående translasjon og rotasjon gjelder det for tauet. Hva slags konsekvenser har det for integrasjonsparametrene i b).
 - Finn et uttrykk for lengden l' av tauet etter deformasjon som funksjon av spenningen σ . Hvor mye har tversnittet til tauet forandret seg?
- Vi betrakter nå geometrien i figur 3 hvor en lampe med masse M er hengt i et tau med lengde $2L$ før lampen ble hengt opp. Etter at lampen ble hengt opp har tauet strukket som vist på figuren, dvs at midtpunktet på tauet har forskjøvet seg med en lengde H .

(Fortsettes side 4.)

Figure 2: Strekkning av tauet med et lodd med massen m festet på enden.

- a) Finn, ved hjelp av resultatet i d), et uttrykk for massen M .
- b) Anta at $H = 0.5312456873245$ m, at avstanden mellom husene er omtrent 10m, slik at $L=5$ m, at lampens volum er 10 liter, at tauet's diameter er 1cm og har Youngs modul $E=189$ MPa. Hvilket materiale består lampen av?

	Vanlige materialer på vestkanten:						
	Carbon	Sølv	Gull	Platina	Domaine de la Romanée-Conti Grand Cru Côté de Nuits	Li-Batterier	Diamant
$\rho [kg/m^3]$	1800	10500	19300	21450	994	2100	3510
	Vanlige materialer på østkanten:						
	Knark	Papp	Rust	Dram	Sot	Glasskår	
$\rho [kg/m^3]$	600	400	5100	920	2260	2200	

4 Appendix: Bakgrunn for problemstilling i oppgave 3. Bør ikke leses med mindre man har god tid!

Bærum kommune gjennomførte nylig en oppgradering av infrastrukturen hvor spesielt gatelyktene ble oppgradert. I lys (eller kanskje man heller burde si mørket) av et knapt budsjett bestemte kommunen seg, til tross

(Fortsettes side 5.)

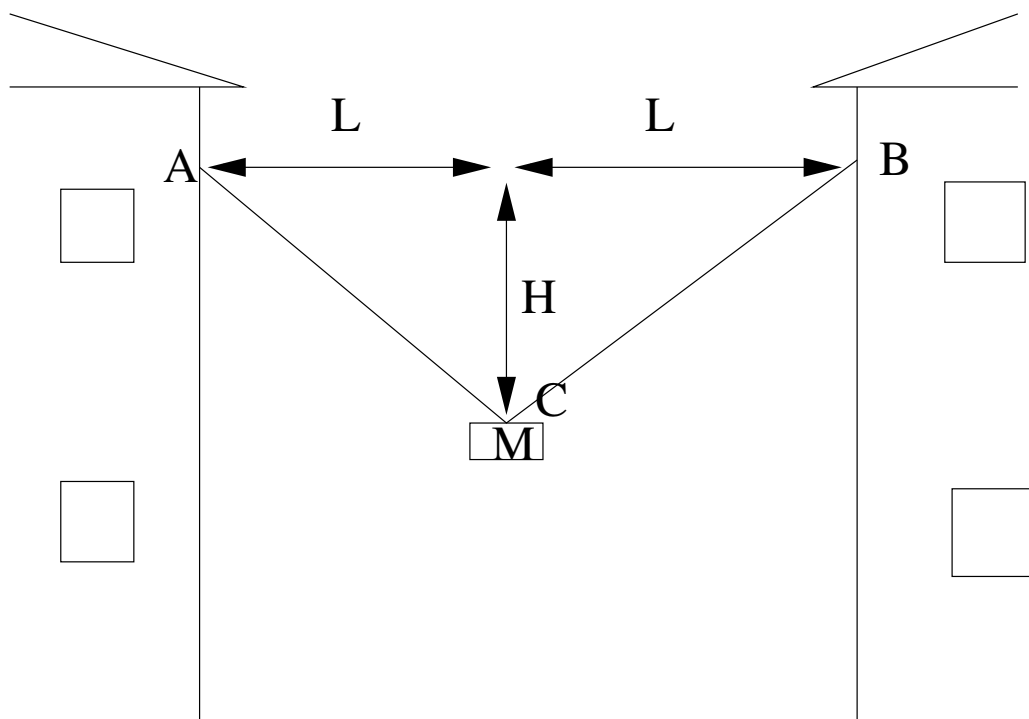


Figure 3: Illustrasjon av gatelysene.

for store protester fra befolkningen, for å droppe planene om å ha lampene laget av diamant. I stedet ble det bestemt at de skulle støps i rent gull. Oppdraget ble vunnet av firmaet Kvakksalver AS. Lampene ble hengt over gatene som vist i Figur 1.

En regnfull novemberdag var Harry Hole på tur i Bærum, i et strøk fornuftige folk vanligvis unngikk. Han sto på gata, rullet sneipen mellom fingrene og tok en klunk fra lommelerken sin. Plutselig ble han oppmerksom på et gult merke i den strålende, blanke lerken han holdt i hendene. Også rundt han var asfalten dynket med gule merker. Han rettet blikket opp mot himmelen og så en lampe et stykke over seg. Gul væske rant fra lampen. Her var det noe som ikke stemte. Harry fikk noe å tenke på og tenkte seg grunding om.

På kontoret sitt satt Beate Lønn og pønsket på en mulighet for en ny sykemelding. Etter å ha innsett at telefonen neppe ville slutte å ringe med mindre hun tok den, løftet hun hun røret. 'Nei, Harry,' svarte hun, 'jeg er ikke på jobb nå. Det er planleggingsdag i barnehagen de neste ti dagene og jeg sitter derfor hjemme. Jeg har ikke mulighet til å svare på dette nå, ok, ok, et spørsmål da. Om gull løses opp i vann? Nei selvfølgelig ikke, det er jo et edelt metall som ikke ruster.'

Harry kontaktet Bærum kommune for å spørre om hva som foregikk med gatelysene. Svaret han fikk fra pressebyrået var heller formelt: 'Bærum kommune har full tiltro til utførelsen av arbeidet foretatt av Kvakksalver AS. Vi forsikrer Dem at styret i kommunen har kvalitetsikret hele prosessen. Videre, etter forespørsel til Kvakksalver AS, kan vi opplyse Dem om at slike avfargningene er helt naturlig og ikke bekymringsverdig'.

(Fortsettes side 6.)

Harry ga seg ikke. Han tok bussen til Bærum's kommunale driftsenter. Etter en lang kjøretur med mye kø og mye klunk er han omsider fremme ved porten av driftsenteret. Utenfor står en gruppe menn som røyker og drikker kaffe. For å få kontakt med mennene uten å vekke mistenksomhet spør han: 'Har dere fyr?'. 'Vær så god!' svarer den velkleddede mannen som tydeligvis er midtpunktet i gjengen. 'Fine gatelys dere har her i Bærum!', 'Er du fra østkanten, eller?' spør midtpunktet. 'Nei, fra Nordstrand.', løy Harry. Blikkene til mennene antydte at de slappet av. 'Egentlig syntes vi de er stusselige. Det hadde vært bedre med diamant. Det er slik fordi østkanten bruker opp alle pengene i Oslo på sosial bistand og annet tøys. Vi får bare råd til disse trauste lampene.' Harry spurte om de hadde lagt merke til noe rart da de monterte dem. 'Herregud, begynner du også nå! Da vi hang opp disse lampene så maste den jævlige sommerstudenten hele tiden om at de lampene var for lett til å være laget av gull' 'Javel' sier Harry. 'Poenget', sukker mannen, 'er at det er irrelevant. Vi har kun ansvaret for planleggingen. Monteringen ble foretatt av vikaren til den sykemeldte vikaren til Jonas som var i permisjon. Vi prosjekterte derfor administrasjonen av prosessen til sommerstudenten. Han var veldig opptatt av dette med lampene. Faktisk prøvde han å finne ut lettheten, eller noe. Dette var forøvrig midt under kaffekrisen i sommer hvor kaffetrakteren vår var tilstoppet i to dager mens vikaren til kaffetraktansvarlig som var sykmeldt var på permisjon.'

Harry skjønnte med en gang hva han måtte gjøre. Uten å sløse bort mer tid¹ tok han taxi til Chateau Neuf. Der fant han sommerstudenten bøyd over en Weißbier. 'Ja, lampene var altfor lette.', sa studenten da Harry spurte om hans observasjoner. 'Noe var ikke rart med dem. Jeg prøvde å finne tettheten ρ til lampene.' 'Og?' spurte Harry videre, småskjev av spenning, 'Hva fant du ut?' 'Vel jeg hadde flere problemer. Formen til lampene var så komplisert at det var vanskelig å finne ut volumet V . Derfor,' fortalte studenten videre med dårlig skjult stolthet, 'puttet jeg lampen opp i kaffetrakteren på driftsentralen'. 'Men', avbrutt Harry studenten, 'hvordan fikk den lampen plass i en kaffetrakter?' 'Det er ikke en vanlige kaffetrakter man har på kommunalt nivå. De er store. Dermed kunne jeg måle mengde kaffe som lampen fortrengete og estimerte at lampen hadde volum V .' 'Okay,' undret Harry seg, 'nå vet vi at lampen har volum V , men vi vil jo vite hva tettheten ρ til denne lampen er?'" Studenten sukket, 'Ja nettopp, det er problemet. Vikaren til den ansvarlige for vekten var sykmeldt og dermed fikk jeg ikke tak i en vekt. Nå henger lampene i ti meter høyde og er ikke lenger mulig å få veid. Jeg hadde så mye å gjøre med obliken til MEK3220 ved siden av sommerjobben min, at jeg ikke fikk ikke tid til å skaffe ei vekt selv.'

Harry begynte å gruble. 'Hva er MEK3220 egentlig?'. 'Det er et kurs om kontinuumsmekanikk' svarte studenten 'Det handler om spenninger og deformasjon i elastiske medier blant annet. Vi beregnet for eksempel hvordan bjelker bøyer seg ved last.' 'Eureka!' ropte Harry, sprang opp, betalte for sine fem Doppelbock og syklet umiddelbart til Blindern. På Blindern fikk han tak i den underbetalte, midlertidlig ansatte med ansvar for gruppe-

¹Sløse bort tid som du gjør nå dersom du leser dette under eksamen.

undervisningen i MEK3220 (som hele tiden regnet feil på tavla). Den underbetalte, midlertidlig ansatte jobbet da med å lage eksameneoppgaver og hadde ikke mulighet for å hjelpe Harry. Men etter en lang runde med forhandlinger og en enda lengre runde på puben ble de enig om at problemstillingen kanskje kunne egne seg som en eksamensoppgave.

SLUTT