UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK2200 — Kontinuumsmekanikk
Eksamensdag:	Torsdag 19. desember 2024.
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottman: Mathematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes. Svar som f.eks ja/nei, 0 eller π teller ikke som svar. Som i boken brukes fet skrift på vektorer ($\mathbf{u}$) og kalligrafisk skrift på tensorer $\mathcal{P}$ eller som σ, ε.

Oppgave 1

a

La A, A_S, B være matriser, hvor B er symmetrisk og $A_S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ er den symmetriske delen av A. Vis at $A : B = A_S : B$. Her betegner $A : B = A_{ij}B_{ij}$ matriseindreproduktet.

b

Vis at $\nabla\mathbf{u} : \varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u})^2$. Her er $\epsilon(\mathbf{u})$ tøyningstensoren tilhørende vektorfeltet $\mathbf{u}$.

c

Hookes lov for et isotropt linear elastisk medium er $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Vis at $\nabla \cdot \sigma = (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u}$.

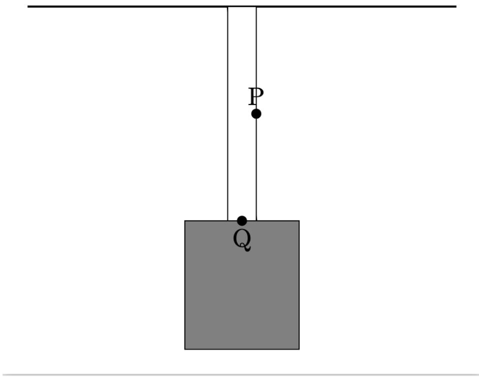
Oppgave 2

a

Utled bevegelseslikningen på generell form, dvs:

$$\rho\,\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathcal{P} + \mathbf{f}.$$

(Fortsettes på side 2.)



Figur 1: Opphengt stav med lodd.

b

Utled videre Navier's statiske likning for et linjært elastisk isotropisk medium

$$\nabla \cdot \sigma = (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

c

Hva er spenningen normalt på overflatene i punktene P, Q i Figur 1?

d

Utled et utrykk for deformeringen av staven.

e

Hva er spenningen tangentielt til overflatene i punktene P, Q i Figur 1?

Oppgave 3

I denne oppgaven betrakter vi vinddreven strøm over en del av havet ved (tilnærmet) uendelig dyp. Vi antar et konstant og uniformt vindstress τ_w i x-retning, at strømmen er laminær og stasjonær. I denne oppgaven lar vi $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}$ betegne enhetsvektor i henholdsvis x- og y-retning

(Fortsettes på side 3.)

a

Vis at bevegelseslikningene i dette tilfellet forenkles til

$$\begin{aligned} \text{i } x\text{-retning: } 0 &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, && (1) \\ \text{i } z\text{-retning: } \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, && (2) \\ \text{på overflaten: } \frac{\partial v_x}{\partial z}(0) &= \tau_w/\mu, && (3) \\ \text{i dypet: } \lim_{z\to-\infty} v_x(z) &= 0. && (4) \end{aligned}$$

b

Finn hastighetsfeltet v_x og trykkfeltet p.

c

Havet er stort nok til at vi ikke egentlig kan betrakte koordinatsystemet vårt som stillestående, men blir nødt til å tenke på systemet som et roterende referansesystem. Vanligvis modelleres dette ved et ekstra akselerasjonsledd, som gir at

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right). \tag{5}$$

Her er $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{k}$ en konstant rotasjonsvektor. Vis at bevegelseslikningene nå blir:

$$\begin{aligned} \text{i } x\text{-retning: } -2\,\Omega\, v_y &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, && (6) \\ \text{i } y\text{-retning: } 2\,\Omega\, v_x &= \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, && (7) \\ \text{i } z\text{-retning: } \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, && (8) \\ \text{på overflaten: } \frac{\partial v_x}{\partial z}(0) &= \tau_w/\mu, && (9) \\ \text{på overflaten: } \frac{\partial v_y}{\partial z}(0) &= 0, && (10) \\ \text{i dypet: } \lim_{z\to-\infty} v_x(z) &= \lim_{z\to-\infty} v_y(z) = 0. && (11) \end{aligned}$$

Vi antar fremdeles stasjonær og laminær strøm.

d

Vis at hvis vi innfører $w = v_x + i v_y$, der $i = \sqrt{-1}$, så kan vi kombinere momentumlikningene i x- og y-retning til

$$\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2\Omega i w, \tag{12}$$

(Fortsettes på side 4.)

e

Likninger på formen til likning 12 har en generell løsning

$$w = C_1 e^{\beta z} e^{i\beta z} + C_2 e^{-\beta z} e^{-i\beta z}. \tag{13}$$

Finn konstantene C_1, C_2 og β, og bruk definisjonen av w til å finne uttrykk for v_x og v_y. Hva slags vinkel danner hastighetsfeltet $\vec{v} = v_x \mathbf{e_x} + v_y \mathbf{e_y}$ på vindfeltet $\tau = \tau_w \mathbf{e_x}$?

SLUTT