2025 年 1 月 22 日 更新

田中健一郎，岡山友昭：岩波数学叢書「変数変換型数値計算法」（岩波書店）
補足と訂正（2023 年 第 1 刷）

内容に関する補足または訂正を，以下のとおり提示いたします．誤りを見つけてくださった方は，田中 (`kenichiro@comp.isct.ac.jp`)・岡山 (`okayama@hiroshima-cu.ac.jp`) までお知らせくだされば幸いです．

- 66 頁．定理 3.10 の証明の 2–3 行目でとっている ε は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|f(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)|+|f(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)|)\,\mathrm{d}x<\infty$$

となるように（必要に応じて十分小さく）とっておく必要がある．これは，定義 2.32（43 頁）の $B(\mathscr{D}_d)$ の条件式 (2.38) により可能である．

　このとき，67 頁の二つ目の別行立ての式の直後で述べているように，「式 (3.50) で $\mathit{\Gamma}_{n,\varepsilon}$ のうち実軸に平行な経路上の積分は有限値」になる．

- 67 頁の式 (3.52).

$$\begin{aligned}&I(f)-I_{\infty,h}(f)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)\frac{\exp\left(\dfrac{2\pi\,\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}{1-\exp\left(\dfrac{2\pi\,\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}\right.\\&\qquad\left.-f(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)\frac{\exp\left(\dfrac{-2\pi\,\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}{1-\exp\left(\dfrac{-2\pi\,\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

を

$$\begin{aligned}&I(f)-I_{\infty,h}(f)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[-f(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)\frac{\exp\left(\dfrac{2\pi\,\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}{1-\exp\left(\dfrac{2\pi\,\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}\right.\\&\qquad\left.-f(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)\frac{\exp\left(\dfrac{-2\pi\,\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}{1-\exp\left(\dfrac{-2\pi\,\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)}{h}\right)}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

に訂正する．(この式以降の定理 3.10 の証明は，現状のままで正しい.)

　これは，式 (2.41) から式 (3.51) を引く際の，$f(x\pm\mathrm{i}\,d_\varepsilon)$ の係数に対する以下の計算から分かる．

∘ $f(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)$ の係数．$z_{\mathrm{p}} := \pi(x+\mathrm{i}\,d_\varepsilon)/h$ に対して，次が成立：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\cot z_{\mathrm{p}} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\exp(\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})+\exp(-\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})}{(\exp(\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})-\exp(-\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}}))/\mathrm{i}}\right)\\
&= \frac{\exp(\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})}{\exp(\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})-\exp(-\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})}\\
&= \frac{\exp(2\,\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})}{\exp(2\,\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})-1}\\
&= -\frac{\exp(2\,\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})}{1-\exp(2\,\mathrm{i}\,z_{\mathrm{p}})}.
\end{aligned}$$

∘ $f(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)$ の係数．$z_{\mathrm{m}} := \pi(x-\mathrm{i}\,d_\varepsilon)/h$ に対して，次が成立：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\cot z_{\mathrm{m}} &= -\frac{\exp(-\mathrm{i}\,z_{\mathrm{m}})}{\exp(\mathrm{i}\,z_{\mathrm{m}})-\exp(-\mathrm{i}\,z_{\mathrm{m}})}\\
&= -\frac{\exp(-2\,\mathrm{i}\,z_{\mathrm{m}})}{1-\exp(-2\,\mathrm{i}\,z_{\mathrm{m}})}.
\end{aligned}$$

- 77 頁．定理 3.26（消滅定理）の証明の 5 行目．

  「ここで δ は $d(1-\delta)>d_\varepsilon$ を満たす $\cdots$」

  を

  「ここで δ は $d(1-\delta)>d_\varepsilon$ かつ $|\operatorname{Re} z|+d<1/\delta$ を満たす $\cdots$」

  に訂正する．

- 77 頁（定理 3.26 の証明中）の最下の数式．

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leqq \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi(d(1-\delta)-|\operatorname{Im} z|)}\oint_{\partial\mathscr{D}_d(\delta)}|f(\zeta)||\mathrm{d}\zeta|\\
&\leqq \frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_{\partial\mathscr{D}_d(\delta)}|f(\zeta)||\mathrm{d}\zeta|
\end{aligned}$$

  を

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leqq \limsup_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi(d(1-\delta)-|\operatorname{Im} z|)}\oint_{\partial\mathscr{D}_d(\delta)}|f(\zeta)||\mathrm{d}\zeta|\\
&\leqq \frac{1}{2\pi\varepsilon}\limsup_{\delta\to 0}\oint_{\partial\mathscr{D}_d(\delta)}|f(\zeta)||\mathrm{d}\zeta|
\end{aligned}$$

  に訂正する．

- 77–78 頁．定理 3.26（消滅定理）の証明．この証明は,「系 2.24 の同様の変種」の証明が必要になるなど，補足すべき点が多いものとなっていた．そこで，本文書の第 A 節に，この定理 3.26 の証明を詳細に記す.（証明の方針は基本的には変わらない.）

- 195 頁．式 (9.33) の最下段．

$$\cosh(\zeta - a_1 + b_1 - a_2) + \frac{L_1 \mathrm{e}^{\zeta - b_1}}{\mathrm{e}^{\zeta - b_1} + \mathrm{e}^{-\zeta + b_1}}$$

を

$$\cosh(\zeta - a_1 + b_1 - a_2) + \frac{L_1 \mathrm{e}^{-b_1}}{\mathrm{e}^{\zeta - b_1} + \mathrm{e}^{-\zeta + b_1}}$$

に訂正する．

- 195 頁．式 (9.34) の二段目．

$$C \sinh(z - a_1 + b_1 - a_2) + CL_1 \int_0^z \frac{\mathrm{e}^{\zeta - b_1}}{\mathrm{e}^{\zeta - b_1} + \mathrm{e}^{-\zeta + b_1}} \,\mathrm{d}\zeta + D$$

を

$$C \sinh(z - a_1 + b_1 - a_2) + CL_1 \int_0^z \frac{\mathrm{e}^{-b_1}}{\mathrm{e}^{\zeta - b_1} + \mathrm{e}^{-\zeta + b_1}} \,\mathrm{d}\zeta + D$$

に訂正する．

- 198 頁．式 (9.38) の右辺．

$$\cosh(z - T) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{L_j \mathrm{e}^{z - b_j}}{\mathrm{e}^{z - b_j} + \mathrm{e}^{-z + b_j}}$$

を

$$\cosh(z - T) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{L_j \mathrm{e}^{-b_j}}{\mathrm{e}^{z - b_j} + \mathrm{e}^{-z + b_j}}$$

に訂正する．

- 199 頁．式 (9.41) の最下段．直前の項目と同様に訂正する．

- 276 頁．
  ［93］ Sugiahra, M.,
  を
  ［93］ Sugihara, M.,
  に訂正する．

A　定理 3.26（消滅定理）の証明

証明の方針は，関数 f を以下の式 (A.1) で定義される扇形の上の関数に変換し，扇形上で一定の減衰条件を満たす関数に対する消滅定理に帰着するというものである．以下の定理 A.5 がその扇形上の消滅定理である．この定理は，Phragmén-Lindelöf 型の命題である以下の補題 A.3 などから示される．以下では，最大値の原理と一致の定理（[1, 邦訳 p. 136], [4, p. 264, 第 IX 章 定理 3.8 系]）からこれらの補題や定理を示し，最終的に定理 3.26 を示す．この内容は文献 [2] および [3] に基づいている．各補題や定理の依存関係は次のとおりである．

$$\begin{tikzcd}
& & \text{一致の定理} \arrow[dr] & & \\
\text{最大値の原理} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{補題 A.1} \arrow[r] & \text{補題 A.2} \arrow[r] & \text{定理 A.5} \arrow[r] & \text{定理 3.26} \\
& \text{補題 A.3} \arrow[urr] & & & \\
& & \text{補題 A.4} \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}$$

補題 A.1 ([2, p. 1])**.** $D \subset \mathbb{C}$ を有界で単連結な開集合とし，$\zeta \in \partial D$ を D の境界上の一点とする．関数 $f : \overline{D} \setminus \{\zeta\} \to \mathbb{C}$ が連続で，D 上で正則とする．さらに，

(1) 実数 $M > 0$ に対して任意の $z \in \partial D \setminus \{\zeta\}$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立ち，

(2) 実数 $M' > 0$ に対して任意の $z \in D$ で $|f(z)| \leq M'$ が成り立つとする．

このとき，任意の $z \in \overline{D} \setminus \{\zeta\}$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立つ．

証明. D の直径を d とおき，実数 $\sigma > 0$ を一つ任意にとる．そして，$z \in \overline{D}$ に対し

$$F(z) := \begin{cases} \left(\dfrac{z-\zeta}{d}\right)^{\sigma} f(z) & (z \in \overline{D} \setminus \{\zeta\}), \\ 0 & (z = \zeta) \end{cases}$$

と定める．F は $\overline{D} \setminus \{\zeta\}$ 上で連続で，D 上で正則である．

ここで，仮定 (1) と仮定 (2) より，任意の $z \in \overline{D} \setminus \{\zeta\}$ で

$$|F(z)| = \left|\frac{z-\zeta}{d}\right|^{\sigma} |f(z)| \leq \left|\frac{z-\zeta}{d}\right|^{\sigma} \max\{M, M'\}$$

となるから，

$$\lim_{\substack{z \in \overline{D} \setminus \{\zeta\} \\ z \to \zeta}} |F(z)| = 0$$

となる．このことから，F は ζ でも連続で，したがって $\overline{D}$ 上で連続となる．

よって，**最大値の原理**より $|F(z)|$ はある $z \in \partial D$ で最大値をとる．ここで，任意の $z \in \overline{D}$ で $|z-\zeta| \leq d$ となることと $F(\zeta) = 0$ に注意すれば，仮定 (1) より，任意の $z \in \partial D$ で $|F(z)| \leq M$

が成り立つことが分かる．したがって，任意の $z \in \overline{D}$ で $|F(z)| \leq M$ となる．このとき，特に $z \in D$ に対して

$$|f(z)| \leq \left|\frac{d}{z-\zeta}\right|^{\sigma} M$$

となる．$\sigma > 0$ は任意であったので，$\sigma \to 0$ とすることで，任意の $z \in D$ で $|f(z)| \leq M$ となることが分かる．以上より，結論が得られる． $\square$

ここで，$\alpha \leq \beta$ を満たす実数 α, β と非負の実数 l に対し，

$$S(\alpha,\beta,l) := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \arg z \leq \beta,\ |z| \geq l\} \tag{A.1}$$

と定め，特に $\alpha = -\pi/2$, $\beta = \pi/2$, $l = 1$ の場合に $S(-\pi/2,\pi/2,1)$ を $S(\pi/2)$ と表す．

補題 A.2. 関数 $f : S(\pi/2) \to \mathbb{C}$ が $S(\pi/2)$ で連続で，$S(\pi/2)$ の内部 $S(\pi/2)^{\circ}$ で正則であるとする．さらに，

(1) 実数 $M > 0$ に対して任意の $z \in \partial S(\pi/2)$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立ち，

(2) 実数 $M' > 0$ に対して任意の $z \in S(\pi/2)^{\circ}$ で $|f(z)| \leq M'$ が成り立つとする．

このとき，任意の $z \in S(\pi/2)$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立つ．

証明. $T \subset \mathbb{C}$ を

$$T := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geq 0,\ |z| \leq 1\}$$

で定まる半円とする．このとき，写像 $z \mapsto 1/z$ は $T \setminus \{0\} \to S(\pi/2)$ なる全単射連続写像であり，特に $\partial T \setminus \{0\}$ は $\partial S(\pi/2)$ と一対一に対応する．また，この写像は，定義域を T° に制限すれば $T^{\circ} \to S(\pi/2)^{\circ}$ なる全単射正則写像となる．

ここで

$$F(z) := f(1/z)$$

と定めると，上で述べたことから，F は $T \setminus \{0\}$ で連続かつ T° で正則である．さらに，仮定 (1) より任意の $\partial T \setminus \{0\}$ で $|F(z)| \leq M$ が成り立ち，仮定 (2) より任意の T° で $|F(z)| \leq M'$ が成り立つ．よって**補題 A.1** より，任意の $z \in T \setminus \{0\}$ で $|F(z)| \leq M$ が成り立つ．これは，任意の $z \in S(\pi/2)$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立つことと同値である． $\square$

ここで一般に，$S(\alpha,\beta,l)$ 上の関数 $f : S(\alpha,\beta,l) \to \mathbb{C}$ に対し，

$$M_f(r,\alpha,\beta) := \max_{\alpha \leq \theta \leq \beta} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \qquad (r \geq l)$$

と定める．そして，実数 ρ に対し，

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log\left(\max\{0, \log M_f(r,\alpha,\beta)\}\right)}{\log r} \leq \rho$$

が成り立つとき，f は $S(\alpha,\beta,l)$ で ρ 次であるということにする．

補題 A.3 ([2, p. 28, Theorem 19])**.** 関数 $f : S(\pi/2) \to \mathbb{C}$ が $S(\pi/2)$ で連続で，$S(\pi/2)^\circ$ で正則であるとする．また，$0 \leq \rho < 1$ を満たす実数 ρ に対して，f は $S(\pi/2)$ で ρ 次であるとする．さらに，実数 $M > 0$ に対して任意の $z \in \partial S(\pi/2)$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立つとする．このとき，任意の $z \in S(\pi/2)$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立つ．

証明. $\rho < \gamma < 1$ を満たす実数 γ を任意にとる．そして，$\rho < \delta < \gamma$ を満たす実数 δ をとる．f は $S(\pi/2)$ で ρ 次なので，ある $r_0 > 0$ に対し，

$$\begin{aligned} r > r_0 &\implies \frac{\log\left(\max\{0, \log M_f(r, -\pi/2, \pi/2)\}\right)}{\log r} \leq \delta \\ &\implies \log M_f(r, -\pi/2, \pi/2) \leq r^\delta \end{aligned}$$

を満たす．よって

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_f(r, -\pi/2, \pi/2)}{r^\gamma} \leq \lim_{r\to\infty} r^{\delta-\gamma} = 0$$

が成り立つ．このことから，実数 $\varepsilon > 0$ を任意にとるとき，ある $r_1 > 0$ に対し，

$$\begin{aligned} r > r_1 &\implies \log M_f(r, -\pi/2, \pi/2) \leq \frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\cdot r^\gamma \\ &\implies \forall\theta \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \log|f(re^{i\theta})| \leq \frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\cdot r^\gamma \end{aligned} \tag{A.2}$$

が成り立つ．

ここで

$$F(z) := \exp(-\varepsilon z^\gamma) f(z) \tag{A.3}$$

と定める．F は $S(\pi/2)$ で連続で，$S(\pi/2)^\circ$ で正則である．以下，

$$\log|F(re^{i\theta})| = -\varepsilon\cos(\gamma\theta)\cdot r^\gamma + \log|f(re^{i\theta})|$$

を評価する．

(1) $re^{i\theta} \in \partial S(\pi/2)$ の場合は，$-\varepsilon\cos(\gamma\theta)\cdot r^\gamma \leq 0$ かつ $|f(re^{i\theta})| \leq M$ なので，$\log|F(re^{i\theta})| \leq \log M$ となる．

(2) $re^{i\theta} \in S(\pi/2)$ かつ $r > r_1$ の場合は，$0 < \gamma < 1$ に注意して得られる $\cos(\gamma\theta) \geq \cos(\gamma\pi/2)$ と，式 (A.2) より

$$\log|F(re^{i\theta})| \leq -\varepsilon\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\cdot r^\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\cdot r^\gamma = -\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\cdot r^\gamma$$

となる．よって，$0 < \gamma < 1$ から $\cos(\pi\gamma/2) > 0$ となることに注意すれば

$$\lim_{r\to\infty}\left(\max_{\theta\in[-\pi/2,\pi/2]} \log|F(re^{i\theta})|\right) = -\infty$$

が分かる．よって，ある $R_0 > 1$ に対し，

$$r \geq R_0 \implies \forall\theta \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \log|F(re^{i\theta})| \leq \log M \tag{A.4}$$

となる．

以上より，$S(\pi/2)\cap\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le R_0\}$ において F に**最大値の原理**を用いることで

$$\forall z\in S(\pi/2)\cap\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le R_0\},\quad |F(z)|\le M$$

が得られる．また，$|z|>R_0$ なる $z\in S(\pi/2)$ に対しては，式 (A.4) より，やはり $|F(z)|\le M$ となる．よって，任意の $z\in S(\pi/2)$ で $|F(z)|\le M$ が成り立つ．

したがって，式 (A.3) より，任意の $z\in S(\pi/2)$ で

$$|f(z)|\le M|\exp(\varepsilon z^\gamma)| = M|\exp(\varepsilon z^\gamma)|\le M\exp(\varepsilon|z|^\gamma)$$

が得られる．$\varepsilon>0$ は任意であったので，この式で $\varepsilon\to 0$ とすれば結論が得られる． □

$\alpha<\beta$ を満たす実数 $\alpha,\ \beta$ と正の実数 l に対し，式 (A.1) で定義される $S(\alpha,\beta,l)$ は，ある正則写像で $S(\pi/2)$ を変換することで得られる．実際，写像

$$\chi_{\alpha,\beta,l}(z):=l\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cdot z^{(\beta-\alpha)/\pi} \tag{A.5}$$

は $S(\pi/2)$ から $S(\alpha,\beta,l)$ への全単射正則写像である．以下ではこの変換を用いる．

補題 A.4 ([2, p. 28, §3.1])**.** $\alpha<\beta$ を満たす実数 $\alpha,\ \beta$ と正の実数 l に対し，連続関数 $f:S(\alpha,\beta,l)\to\mathbb{C}$ が $S(\alpha,\beta,l)$ で ρ 次であるとする．このとき，式 (A.5) の $\chi_{\alpha,\beta,l}$ を用いて定義される $S(\pi/2)$ 上の関数 $f\circ\chi_{\alpha,\beta,l}$ は，$S(\pi/2)$ で $\rho(\beta-\alpha)/\pi$ 次である．

証明. f が ρ 次なので，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $R_0>0$ が存在して

$$\begin{aligned}R>R_0 &\implies \frac{\log\left(\max\{0,\log M_f(R,\alpha,\beta)\}\right)}{\log R}\le\rho+\varepsilon\\ &\implies \log M_f(R,\alpha,\beta)\le R^{\rho+\varepsilon}\\ &\implies \forall\phi\in[\alpha,\beta],\quad \log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})|\le R^{\rho+\varepsilon}\end{aligned} \tag{A.6}$$

となる．$r\ge 1$ と $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ に対し，式 (A.5) から

$$\chi_{\alpha,\beta,l}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = lr^{(\beta-\alpha)/\pi}\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{\pi}\theta\right)\right]$$

となるので，式 (A.6) で $R=lr^{(\beta-\alpha)/\pi}$ かつ $\phi=(\beta+\alpha)/2+((\beta-\alpha)/\pi)\theta$ とおけば，

$$r>\left(\frac{R_0}{l}\right)^{\pi/(\beta-\alpha)}\quad\implies\ \forall\theta\in[-\pi/2,\pi/2],\quad \log|f(\chi_{\alpha,\beta,l}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))|\le l^{\rho+\varepsilon}r^{(\rho+\varepsilon)(\beta-\alpha)/\pi}$$

が得られる．この式から，$r>(R_0/l)^{\pi/(\beta-\alpha)}$ に対し

$$\begin{aligned}&\log M_{f\circ\chi_{\alpha,\beta,l}}(r,-\pi/2,\pi/2)\le l^{\rho+\varepsilon}r^{(\rho+\varepsilon)(\beta-\alpha)/\pi}\\ &\implies \max\{0,\log M_{f\circ\chi_{\alpha,\beta,l}}(r,-\pi/2,\pi/2)\}\le l^{\rho+\varepsilon}r^{(\rho+\varepsilon)(\beta-\alpha)/\pi}\\ &\implies \frac{\log\left(\max\{0,\log M_{f\circ\chi_{\alpha,\beta,l}}(r,-\pi/2,\pi/2)\}\right)}{\log r}\le\frac{(\rho+\varepsilon)\log l}{\log r}+(\rho+\varepsilon)(\beta-\alpha)/\pi\end{aligned}$$

が得られるので，$r \to \infty$ として

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\left(\max\{0, \log M_{f\circ\chi_{\alpha,\beta,l}}(r, -\pi/2, \pi/2)\}\right)}{\log r} \leq (\rho+\varepsilon)(\beta-\alpha)/\pi$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意であったので，$\varepsilon \to 0$ とすれば結論が得られる． □

定理 A.5 ([2, p. 37, Theorem 24])**.** 関数 $f : S(\pi/2) \to \mathbb{C}$ が $S(\pi/2)$ で連続，$S(\pi/2)^\circ$ で正則であり，$S(\pi/2)$ で 1 次であるとする．また，ある実数 $M > 0$ に対して任意の $z \in \partial S(\pi/2)$ で $|f(z)| \leq M$ が成り立つとする．さらに，ある $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ に対して

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma})|}{r} = -\infty \tag{A.7}$$

が成り立つとする．このとき，$f \equiv 0$ である．すなわち f は恒等的に 0 である．

証明. 正の実数 B を任意にとり，

$$F(z) := f(z)\exp(Bz) \tag{A.8}$$

とおくと，F は $S(\pi/2)$ で連続，$S(\pi/2)^\circ$ で正則である．また，F は $S(\pi/2)$ で 1 次である．実際，f が $S(\pi/2)$ で 1 次なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $r_0 > 1$ が存在して

$$r > r_0 \implies \log M_f(r, -\pi/2, \pi/2) \leq r^{1+\varepsilon}$$

となる．これと

$$\begin{aligned} M_F(r, -\pi/2, \pi/2) &= \max_{-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2} |F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \\ &= \max_{-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \exp(Br\cos\theta) \\ &\leq \left(\max_{-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\right)\exp(Br) \\ &= M_f(r, -\pi/2, \pi/2)\exp(Br) \end{aligned}$$

を合わせれば，$r > r_0$ で

$$\begin{aligned} \log M_F(r, -\pi/2, \pi/2) &\leq \log M_f(r, -\pi/2, \pi/2) + Br \\ &\leq r(r^\varepsilon + B) \end{aligned}$$

となることが分かる．よって，$r > r_0$ で

$$\begin{aligned} \frac{\log(\max\{0, \log M_F(r, -\pi/2, \pi/2)\})}{\log r} &\leq \frac{\log r + \log(r^\varepsilon + B)}{\log r} \\ &= 1 + \varepsilon \cdot \frac{\log(r + B^{1/\varepsilon})}{\log r} \end{aligned}$$

となるので，

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log(\max\{0,\log M_F(r,-\pi/2,\pi/2)\})}{\log r}\leq\lim_{r\to\infty}\left(1+\varepsilon\cdot\frac{\log(r+B^{1/\varepsilon})}{\log r}\right)$$
$$=1+\varepsilon$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意であったので，$\varepsilon\to 0$ とすることで，F が 1 次であることが分かる．
以下，F の絶対値を半直線 $\{z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\mid r\geq 1\}$ および $\partial S(\pi/2)$ で評価する．

(1) 半直線 $\{z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\mid r\geq 1\}$ における評価．式 (A.7) の条件より，ある $r_B>1$ に対して

$$r>r_B\implies\frac{\log|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma})|}{r}\leq-(B+1)$$
$$\iff|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma})|\leq\exp(-(B+1)r)$$

となるので，

$$r>r_B\implies|F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma})|\leq\exp(-(B+1-B\cos\gamma)r)\leq\exp(-r)$$

が成り立つ．よって，F は半直線 $\{z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\mid r\geq 1\}$ の上で有界な連続関数であり，ある実数 $L_B>0$ に対して任意の $r\geq 1$ で $|F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma})|\leq L_B$ となる．

(2) $\partial S(\pi/2)$ における評価．z が $\partial S(\pi/2)$ のうち虚軸の部分にある場合は，$|F(z)|=|f(z)|\leq M$ となる．それ以外の場合は，$\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ を用いて $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ と書けるので，$|F(z)|=|f(z)|\exp(B\cos\theta)\leq M\exp(B)$ となる．以上をまとめれば

$$\forall z\in\partial S(\pi/2),\quad|F(z)|\leq M\exp(B)\tag{A.9}$$

が分かる．

以上より，

$$\forall z\in\partial S(-\pi/2,\gamma,1)\cup\partial S(\gamma,\pi/2,1),\quad|F(z)|\leq\max\{L_B,M\exp(B)\}$$

が成り立つことが分かる．
以上の議論と**補題 A.4** より，以下のことが分かる．

(1) F の $S(-\pi/2,\gamma,1)$ への制限を，式 (A.5) の写像 $\chi_{-\pi/2,\gamma,1}$ で $S(\pi/2)$ 上の関数に変換したものを考える．この関数 $F\circ\chi_{-\pi/2,\gamma,1}$ は $S(\pi/2)$ で連続，$S(\pi/2)^\circ$ で正則であり，$S(\pi/2)$ で $(\gamma+\pi/2)/\pi$ 次である．また，任意の $z\in\partial S(\pi/2)$ で $|F(\chi_{-\pi/2,\gamma,1}(z))|\leq\max\{L_B,M\exp(B)\}$ が成り立つ．

(2) F の $S(\gamma,\pi/2,1)$ への制限を，式 (A.5) の写像 $\chi_{\gamma,\pi/2,1}$ で $S(\pi/2)$ 上の関数に変換したものを考える．この関数 $F\circ\chi_{\gamma,\pi/2,1}$ は $S(\pi/2)$ で連続，$S(\pi/2)^\circ$ で正則であり，$S(\pi/2)$ で $(\pi/2-\gamma)/\pi$ 次である．また，任意の $z\in\partial S(\pi/2)$ で $|F(\chi_{\gamma,\pi/2,1}(z))|\leq\max\{L_B,M\exp(B)\}$ が成り立つ．

ここで $(\gamma+\pi/2)/\pi<1$ および $(\pi/2-\gamma)/\pi<1$ に注意する．すると，関数 $F\circ\chi_{-\pi/2,\gamma,1}$ と $F\circ\chi_{\gamma,\pi/2,1}$ にそれぞれ**補題 A.3** を用いることで，任意の $z\in S(\pi/2)$ で $|F(\chi_{-\pi/2,\gamma,1}(z))|\leq\max\{L_B,M\exp(B)\}$ かつ $|F(\chi_{\gamma,\pi/2,1}(z))|\leq\max\{L_B,M\exp(B)\}$ が成り立つことが分かる．これは

$$\forall z\in S(\pi/2),\quad |F(z)|\leq\max\{L_B,M\exp(B)\}\tag{A.10}$$

が成り立つことを意味する．

以上の式 (A.9) と (A.10) および，冒頭に示した F の性質より，F は**補題 A.2** の仮定を（補題 A.2 の f をこの F に置き換えた上で）満たす．よって，

$$\forall z\in S(\pi/2),\quad |F(z)|\leq M\exp(B)\tag{A.11}$$

が導かれる．よって，式 (A.8) より

$$\forall r\geq 1,\ \forall\theta\in[-\pi/2,\pi/2],\quad |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\leq M\exp(B(1-r\cos\theta))$$

となる．$B>0$ は任意だったので，$r\cos\theta>1$ を満たす場合（つまり $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ の実部が 1 より大きい場合）は，$B\to\infty$ とすることで $|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|=0$ が得られる．それ以外の場合については，$S(\pi/2)^\circ$ 上で恒等的に 0 の関数と f に**一致の定理**（[1, 邦訳 p. 136], [4, p. 264, 第 IX 章 定理 3.8 系]）を用いれば，$S(\pi/2)^\circ$ 上で $f\equiv 0$ となることが示せる．あとは，$S(\pi/2)$ での f の連続性を使えば，$S(\pi/2)$ 上で $f\equiv 0$ となることが分かる．　□

定理 *3.26*（消滅定理）の証明. ε を，$\gamma(d-\varepsilon)>\pi/2$ を満たす正の実数とする．この ε に対し $d_\varepsilon:=d-\varepsilon$ とおく．このとき f は $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}}$ で有界になる．これを示すため，$z\in\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}}$ を任意にとる．そして，δ を $d(1-\delta)>d_\varepsilon$ かつ $|\operatorname{Re}z|+d<1/\delta$ を満たす十分小さい正の実数とし，

$$\mathscr{D}_d(\delta):=\{\zeta\in\mathbb{C}\mid |\operatorname{Re}\zeta|<1/\delta,\ |\operatorname{Im}\zeta|<d(1-\delta)\}$$

とおく．このとき，Cauchy の積分公式を用いた評価により

$$|f(z)|\leq\frac{1}{2\pi[d(1-\delta)-|\operatorname{Im}z|]}\oint_{\partial\mathscr{D}_d(\delta)}|f(\zeta)|\,|\mathrm{d}\zeta|$$

が得られる．ここで，$\partial\mathscr{D}_d(\delta)$ には反時計回りの向きを付けている．よって，

$$\begin{aligned}|f(z)|&\leq\limsup_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi[d(1-\delta)-|\operatorname{Im}z|]}\oint_{\partial\mathscr{D}_d(\delta)}|f(\zeta)|\,|\mathrm{d}\zeta|\\&\leq\frac{1}{2\pi\varepsilon}\limsup_{\delta\to 0}\oint_{\partial\mathscr{D}_d(\delta)}|f(\zeta)|\,|\mathrm{d}\zeta|\end{aligned}$$

となる．この式の最後の上極限は，$f\in B(\mathscr{D}_d)$ であることから（z によらない）有限値になるので，f の $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}}$ での有界性が示される．

以下，

$$\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^{\pm}:=\mathscr{D}_{d_\varepsilon}\cap\{z\in\mathbb{C}\mid \pm\operatorname{Re}z\geq 0\}$$

とおき，$\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+}$ と $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^-}$ のいずれでも $f \equiv 0$ となることを示す．一方は他方とほぼ同様に示せるので，以下では $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+}$ で $f \equiv 0$ となることを示す．

仮定 $f \in B(\mathscr{D}_d)$ より f は $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+}$ で連続，$\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+$ で正則であり，上で示したことから $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+}$ で有界である．ここで，写像 $z \mapsto (2d_\varepsilon/\pi)\log z$ を考える．これは $S(\pi/2) \to \overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+}$ なる全単射連続写像であり，特に $\partial S(\pi/2)$ は $\partial\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+$ と一対一に対応する．また，この写像は，定義域を $S(\pi/2)^\circ$ に制限すれば $\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+$ なる全単射正則写像となる．よって，$S(\pi/2)$ 上の関数 F を

$$F(z) := f\left(\frac{2d_\varepsilon}{\pi}\log z\right)$$

で定めると，この F は $S(\pi/2)$ で連続，$S(\pi/2)^\circ$ で正則であり，また $S(\pi/2)$ で有界である．したがって，特に F は $S(\pi/2)$ で 1 次であり，$\partial S(\pi/2)$ で有界である．さらに，f の実軸上での二重指数関数的減衰性の仮定より，実数 $r \geq 1$ に対し，

$$\begin{aligned}|F(r)| &\leq A\exp\left[-B\exp\left(\gamma\cdot\frac{2d_\varepsilon}{\pi}\log r\right)\right]\\ &= A\exp\left(-B\,r^{2\gamma d_\varepsilon/\pi}\right)\end{aligned}$$

が成り立ち，したがって

$$\frac{\log|F(r)|}{r} \leq \frac{\log A}{r} - B\,r^{(2\gamma d_\varepsilon/\pi)-1}$$

が成り立つ．最初の ε の取り方から $(2\gamma d_\varepsilon/\pi)-1>0$ であるから，この左辺の $r\to\infty$ の上極限は $-\infty$ となる．以上より，F は**定理 A.5** の仮定を（定理 A.5 の f をこの F に置き換えた上で）満たす．よって，$S(\pi/2)$ において $F\equiv 0$ となり，このことから $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}^+}$ で $f\equiv 0$ となる．

以上の議論から $\overline{\mathscr{D}_{d_\varepsilon}}$ で $f\equiv 0$ となるが，ε は 0 に任意に近くとれるので，結局 $\mathscr{D}_d$ 上で $f \equiv 0$ となる． □

参考文献

[1] L. V. Alfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1979. (邦訳) 笠原乾吉 訳: 複素解析, 現代数学社, 京都, 1982.

[2] M. L. Cartwright. *Integral Functions*. Cambridge University Press, London, 1956.

[3] M. Sugihara. Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach. *Numer. Math.*, Vol. 75, pp. 379–395, 1997.

[4] 杉浦光夫. 解析入門 II. 東京大学出版会, 東京, 1985.

（以上）