数量ファイナンスI - レポート 2

森研人 (37-196359)
工学系研究科 航空宇宙工学専攻 修士 2 年

提出日
2020 年 12 月 21 日

1　コレスキー分解による多変量正規分布の生成

ここでは，久保川 [1] を参考に，コレスキー分解を用いて多変量正規分布に従う乱数が生成できる背景を説明する．まず標準正規分布に独立に従う n 個の変数 Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を考える．

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)^\mathsf{T}$$

とする．Z の同時確率密度関数は，

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^\mathsf{T}\boldsymbol{z}\right)$$

である．ここで，

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^\mathsf{T}$$

として，

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}$$

という変数変換をする．これを書き下すと，

$$X_i = a_{i1}Z_1 + a_{i2}Z_2 + \cdots + a_{in}Z_n + \mu_i$$

となる．従って，$\boldsymbol{z}$ から $\boldsymbol{x}$ の変換のヤコビアンは，

$$J_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = |\boldsymbol{A}|$$

となる．

ここで，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ から，$\boldsymbol{X}$ の同時確率密度関数は,

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) &= f_{\boldsymbol{Z}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)\ J_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}} \\
&= f_{\boldsymbol{Z}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)\ \frac{1}{J_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\ J_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\ \left(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{\top}\left(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\ |\boldsymbol{A}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{A}^{-\top}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\ |\boldsymbol{A}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\top}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right)^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)
\end{aligned}
$$

となる．$\boldsymbol{X}$ の共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}$ と置く．$\boldsymbol{X}$ の平均は,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{A}\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$$

であるから，$\boldsymbol{X}$ の共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^{\top}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$$

となる．$\boldsymbol{\Sigma}$ の行列式を考えると,

$$|\boldsymbol{\Sigma}| = \left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right| = |\boldsymbol{A}|^2$$

したがって,

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}$$

となる．これらを $\boldsymbol{X}$ の同時確率密度関数に代入すると,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\ |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

が得られ，これは平均 $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多変量正規分布にほかならない．つまり，$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$ であるような $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\mu}$ を用いて，標準正規分布に従う確率変数 $\boldsymbol{Z}$ を $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}$ によって変換することで得られる確率変数 $\boldsymbol{X}$ は平均 $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多変量正規分布に従う．ところで，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に対するコレスキー分解は,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\top}$$

となる $\boldsymbol{L}$ を求めるので，コレスキー分解によって得られた $\boldsymbol{L}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}$ とすることで，求める変換を得ることができる．以上が共分散行列のコレスキー分解を利用して多変量正規分布に従う乱数を生成することができる背景である．

2　共分散行列の構造に求められる条件

コレスキー分解ができる条件は，行列が正定値対称行列のときである．そのため，共分散行列をコレスキー分解して乱数を生成するときは，共分散行列が正定値対称行列であることが求められる．$Cov(x, y) = Cov(y, x)$ であることから，共分散行列は常に対称行列である．しかし，観測から計算した共分散行列は半正定値行列になりうる．そのため，コレスキー分解ができない場合も存在する．

参考文献

[1] 久保川達也. 現代数理統計学の基礎, 2017.