Comenzado el	domingo, 11 de agosto de 2024, 13:02
Estado	Finalizado
Finalizado en	domingo, 11 de agosto de 2024, 14:45
Tiempo empleado	1 hora 42 minutos
Puntos	17,86/18,00
Calificación	**9,92** de 10,00 (**99,21**%)

Pregunta 1

Parcialmente correcta

Se puntúa 0,86 sobre 1,00

Considere los siguientes vértices de un triángulo

$P=(1,0,3)$, $Q=(-1,2,1)$ y $R=(-4,-4,-2)$.

Determine el área del triángulo formado por los vértices dados anteriormente.

Solución:

Los vectores directores son:

$\overrightarrow{PQ}=$ (-2 ✔ , 2 ✔ , -2 ✔)

$\overrightarrow{PR}=$ (-5 ✔ , -4 ✔ , -5 ✔)

Por lo tanto, el área del triángulo corresponde a: $A_{\triangle}=$ 18 ✖ $\cdot\sqrt{2}\ (ul)^2$.

Nota: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo. Además, no se le olvide que las respuestas se dan en forma ascendente, es decir, de menor a mayor. Si es fracciones se escribe de la forma a/b por ejemplo para $\frac{a}{b}$.

Solución:

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ pueden considerarse como dos lados del triángulo. Puesto que

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,2,-2)$ y $\overrightarrow{PR}=R-P=(-5,-4,-5)$

Entonces tenemos que

$$\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -4 & -5\end{vmatrix} i-\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -5 & -5\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -5 & -4\end{vmatrix} k=-18i-0j+18k$$

Así , se tiene que

$$A_{\triangle}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}{2}=$$

$$\frac{18\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}(ul)^2$$

Pregunta 2

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere la ecuación simétrica de la recta l dada por:

$$l : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$$

Según la información anterior, determine el punto de intersección con el plano XY.

Respuesta.

El punto de intersección de la recta l con el plano XY corresponde al punto (-1 , 3 , 0)

Nota: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.

Tomamos $z = 0$, lo que nos lleva a las ecuaciones:

$$\frac{x+1}{3} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\frac{y-3}{-1} = 0 \Rightarrow y-3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Así el punto está dado por $(-1, 3, 0)$

Pregunta 3

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

El punto en el cual la recta $\ell_1 : x - 1 = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-9}{2}$ interseca al plano con ecuación $\pi : 4x - 7y + 8z = -26$ corresponde a:

(-2 ✔ , 6 ✔ , 3 ✔)

Nota: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$x = 1 + t$, $y = -3 - 3t$ y $z = 9 + 2t$

donde, al sustituir estos valores en la ecuación del plano se tiene:

$4x - 7y + 8z = -26$

$4(1+t) - 7(-3-3t) + 8(9+2t) = -26$

$4 + 4t + 21 + 21t + 72 + 16t = -26$

$41t + 97 = -26$

$41t = -123$

$t = -3$

Por lo tanto, al reemplazar $t = -3$ en las ecuaciones de la recta $x = 1 - 3 = -2$, $y = -3 - 3 \cdot -3 = 6$ y $z = 9 + 2 \cdot -3 = 3$ se obtiene el punto de intersección $(-2, 6, 3)$. ■

Pregunta 4
Correcta
Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\overrightarrow{u} = (2, 3, k+1) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{v} = (3, k, 0)$$

Según la información anterior, determine lo que se le solicita:

a) la expresión resultante de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, en términos del parámetro k, corresponde a: 6+3k ✔ .

b) el valor del parámetro k, de modo que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean ortogonales, corresponde a: $k =$ -2 ✔ .

NOTA: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) **solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo positivo y/o el signo negativo**. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\dfrac{a}{b}$

a) Primero se calcula el producto indicado $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, así:

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (2, 3, k+1) \cdot (3, k, 0)$

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 6 + 3k$, o bien $3k + 6$.

b) Para que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean ortogonales, el ángulo entre ellos debe ser 90° o bien $\dfrac{\pi}{2}$, así:

$$\cos(90^\circ) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

$$\cos(90^\circ) = \frac{6 + 3k}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

$0 = 6 + 3k$

Despejando el parámetro, se tiene:

$k = -2.$

Pregunta 5

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere el siguiente conjunto S de vectores en $\mathbb{R}^3$ dado a continuación:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Según la información anterior, determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

Respuestas.

1) Los tres vectores son linealmente independientes, es una afirmación falsa ✔ .

2) Los vectores son una base de $\mathbb{R}^3$, es una afirmación falsa ✔

1) Para que un conjunto finito de vectores sean linealmente independientes su determinante debe ser distinto de cero, calculando el determinante se tiene que es cero.

Por lo tanto, no son linealmente independientes y la afirmación es falsa.

2) Dado que los tres vectores son linealmente dependientes no pueden generar $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto se concluye que no es una base.

Pregunta 6

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Sean $m = (1, 2, 3)$ y $n = (1, -3, 8)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Si el vector $p = (3, -4, \alpha + 29)$ pertenece a $gen\{m, n\}$, entonces:

$\alpha =$ -10

Calculamos p como combinación lineal de m y n:

$(3, -4, \alpha + 29) = x(1, 2, 3) + y(1, -3, 8)$

Así se obtiene que:

$x + y = 3$

$2x - 3y = -4$

$3x + 8y = \alpha + 29$

Tomando el sistema de ecuaciones para formar una matriz aumentada y resolviendo la misma mediante el método de Gauss - Jordan, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & \alpha+29 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 = -2R_1 + R_2 \\ \longrightarrow \\ R_3 = -3R_1 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 5 & \alpha+20 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 = R_2 + R_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & \alpha+10 \end{array}\right)$$

De donde $\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = -10$

Pregunta 7

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere los siguientes vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, definidos por:

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} k-7 \\ 1 \\ k+10 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Según lo información anterior, y considerando el parámetro k una constante real, determine:

a) el valor del parámetro k para el cual se cumple que $\overrightarrow{u}$ es una combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, corresponde a: $k =$ 4 ✔

b) para el valor correcto del parámetro k, hallado en el apartado a), la expresión que representa al vector $\overrightarrow{u}$ como una combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, corresponde a: $\overrightarrow{u}$ = -8 ✔ $\cdot \overrightarrow{v}$ + -5 ✔ $\cdot \overrightarrow{w}$.

NOTA: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) **solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo**. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.

Considerando la información brindada, $\overrightarrow{u}$ es una combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ si y solo si el sistema con matriz aumentada $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \,|\, \overrightarrow{u})$ es compatible.

Usando operaciones elementales para reducir la matriz aumentada, se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k-7 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & k+10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 3R_1+R_3]{R_2 \to 2R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k-7 \\ 0 & 1 & 2k-13 \\ 0 & -1 & 4k-11 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_2+R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k-7 \\ 0 & 1 & 2k-13 \\ 0 & 0 & 6k-24 \end{array}\right)$$

De la última fila se obtiene que $6k - 24 = 0$, por lo que el valor del parámetro es $k = 4$.

Ahora, para escribir la combinación lineal del vector $\overrightarrow{u}$, se continúa con el trabajo de la matriz, sin la última fila, pero sustituyendo el valor del parámetro $k = 4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_2+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Por lo que, la combinación lineal del vector $\overrightarrow{u}$ respecto a los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ viene dada por: $\overrightarrow{u} = -8 \cdot \overrightarrow{v} - 5 \cdot \overrightarrow{w}$.

Pregunta 8

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Dado el espacio vectorial,

$$E = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}^+$$

con las operaciones:

$(a, b, c) + (x, y, z) = (ax, by, zc)$

$\lambda(x, y, z) = (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

Con certeza se cumple que el inverso aditivo de (a, b, c) corresponde a:

Inverso aditivo: (1/a ✔ , 1/b ✔ , 1/c ✔)

Nota: Recuerde que no debe usar ningún otro caracter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.

Si (x, y, z) es el inverso aditivo de (a, b, c), entonces:

$(a, b, c) + (x, y, z) = (1, 1, 1)$

$(ax, by, cz) = (1, 1, 1)$

De esta forma:

$ax = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$

$by = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{b}$

$cz = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{c}$

Por lo tanto, el inverso aditivo de (a, b, c) corresponde a $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$.

Pregunta 9

Finalizado

Se puntúa 5,00 sobre 5,00

Se sabe que tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son coplanares si y solo si $w \cdot (u \times v) = 0$.Considere los siguientes vectores:

$$u = 2i + 3j$$

$$v = -i + j + k$$

$$w = i + 4j - k$$

Según la información anterior:

1. Verifique que los tres vectores no son coplanares.
2. Determine el volumen del parelelepídedo formado por dicho vectores.

Nota: Recuerde que debe subir una fotografía del procedimiento de respuesta de este ítem. El mismo debe desarrollarlo a mano (no digital) y deberá agregar su nombre, número de cédula y firmar al final del ejercicio si esto no se presenta la respuesta no será calificada.

[respuesta a la pregunta 9.jpeg]

1. Verifique que los tres vectores no son coplanares.

Calculamos la fórmula que nos menciona el enunciado:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{j} \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k} \qquad (1 \text{ punto})$$

Luego resolvemos el producto escalar:

$$w \cdot (u \times v) = (1, 4, -1) \cdot (3, -2, 5) \qquad (1 \text{ punto})$$
$$= 3 - 8 - 5 = -10 \qquad (1 \text{ punto})$$

Como el valor de $w \cdot (u \times v)$ es diferente de cero, los vectores no son coplanares. (1 punto)

2. Determine el volumen del parelelepídedo formado por dicho vectores.

Como los vectores dados no son coplanares, forman un paralelepípedo que tiene un volumen igual a: (2 puntos)

$$|w \cdot (u \times v)| = |-10| = 10 \; (u.l)^3$$

Comentario:

Pregunta 10

Finalizado

Se puntúa 5,00 sobre 5,00

Considere el conjunto H, denotado por:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,|\, 2a + 3d = 0 \land c = b \right\}$$

Según la información anterior, demuestre que H es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

Nota: Recuerde que debe subir una fotografía del procedimiento de respuesta de este ítem. El mismo debe desarrollarlo a mano (no digital) y deberá agregar su nombre, número de cédula y firmar al final del ejercicio si esto no se presenta la respuesta no será calificada.

respuesta a la pregunta 10.jpeg

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H \Rightarrow 2a + 3d = 0 \land b = c$ y sea $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in H \Rightarrow 2w + 3z = 0 \land x = y$. (1 punto)

Veamos que la suma de vectores y la multiplicación esacalar por vector en H sean cerradas:

$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a + w & \alpha \cdot b + x \\ \alpha \cdot c + y & \alpha \cdot d + z \end{pmatrix}$, en ese caso
$2(\alpha \cdot a + w) + 3(\alpha \cdot d + z) = 2\alpha a + 2w + 3\alpha d + 3z = \alpha(2a + 3d) + 2w + 3z = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$. (3 puntos)

Además $\alpha \cdot b + x = \alpha \cdot c + y$.

Por lo anterior $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in H$, es decir la suma y la multiplicación escalar por vector es cerrada en H, entonces se concluye que H es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$. (1 punto)

Comentario: