Comenzado el	domingo, 9 de julio de 2023, 13:00
Estado	Finalizado
Finalizado en	domingo, 9 de julio de 2023, 17:42
Tiempo empleado	4 horas 41 minutos
Puntos	24,67/36,00
Calificación	**6,85** de 10,00 (**68,52**%)

Pregunta **1**

Correcta

Se puntúa 3,00 sobre 3,00

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2 \\ \beta & 5 & \theta \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Los valores de α, β, θ que cumplen que $A = B$ corresponden a:

- a. $\alpha = 0, \beta = -2, \theta = 5$
- b. $\alpha = -1, \beta = 5, \theta = -2$
- c. $\alpha = 0, \beta = -1, \theta = -2$ ✔
- d. $\alpha = -1, \beta = -4, \theta = -3$

Respuesta correcta

Como cada entrada debe ser igual una a una, entonces tenemos que $\alpha = 0, \beta = -1, \theta = -2$

La respuesta correcta es: $\alpha = 0, \beta = -1, \theta = -2$

Pregunta **2**

Correcta

Se puntúa 4,00 sobre 4,00

Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \\ 4 & -6 & 23 \end{pmatrix}$$

Según la información anterior, al aplicar la factorización LU a la matriz A. La matriz triangular superior U corresponde a:

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-3} & \boxed{4} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Nota: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) **solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo.**

Solución:

Se escribe la matriz A como un producto LU:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \\ 4 & -6 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Donde $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ corresponde a una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

Multiplicando se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \\ 4 & -6 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ a & -3a+x & 4a+y \\ b & -3b+xc & 4b+cy+z \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que:

$$a = 2,\, b = 4$$

Además

$$-3a + x = -3 \Rightarrow -3 \cdot 2 + x = -3 \Rightarrow x = -3 + 6 = 3$$

$$4a + y = 9 \Rightarrow 4 \cdot 2 + y = 9 \Rightarrow y = 9 - 8 = 1$$

$$-3b + xc = -6 \Rightarrow -3 \cdot 4 + 3c = -6 \Rightarrow c = \frac{-6 + 12}{3} = 2$$

$$4b + cy + z = 23 \Rightarrow 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + z = 23 \Rightarrow z = 23 - 18 = 5$$

Por tanto, la matriz U viene dada por:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pregunta **3**

Correcta

Se puntúa 3,00 sobre 3,00

Si se sebe que la siguiente matriz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -5 & -8 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

es la matriz inversa de la matriz A asociada al sistema $Ax = b$, donde $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Según la información anterior, la solución única x corresponde a:

a. $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$ ✔

c. $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -15 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$

Respuesta correcta

Sabemos por teorema 3.4.4 que si A es invertible, el sistema $Ax = b$ tiene una solución unica $x = A^{-1}b$.

Procedemos a hacer la multiplicación de $A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -5 & -8 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$

La respuesta correcta es: $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$

Pregunta **4**

Correcta

Se puntúa 4,00 sobre 4,00

Para los vectores $u(4,5,-2)$, $v(3,-1,1)$ la expresíon $u \cdot v$ corresponde a

5

Tenemos que:

$$(4,5,-2) \cdot (3,-1,1) = 12 - 5 - 2 = 5$$

Pregunta **5**

Finalizado

Se puntúa 2,00 sobre 5,00

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine una matriz C, de dimensión 2×2 tal que satisface $AC + B = I$ sin usar sistemas de ecuaciones.

Nota: Recuerde que debe subir una fotografía del procedimiento de respuesta de este ítem. El mismo debe desarrollarlo a mano (no digital) y deberá agregar su nombre, número de cédula y firmar al final del ejercicio si esto no se presenta la respuesta no será calificada.

WhatsApp Image 2023-07-09 at 5.14.05 PM.jpeg

Solución:

Tenemos la siguiente expresión:

$AC + B = I$

Restando B a ambos lados de la igualdad se obtiene:

$AC = I - B$

Luego multiplicando por A^{-1} por el lado izquierdo, se otiene:

$A^{-1}AC = A^{-1}(I - A) \Leftrightarrow IC = A^{-1}(I - B) \Leftrightarrow C = A^{-1}(I - B)$

Entonces calculando A^{-1} se obtiene:

$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Luego calculamos $I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 16 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

Comentario:

Pregunta **6**

Correcta

Se puntúa 3,00 sobre 3,00

El valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 8 & 7 & -11 & 17 \\ -15 & 5 & 10 & -25 \\ 3 & 7 & 13 & 17 \end{vmatrix}$$

corresponde a 0 ✔

Nota: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.

Notemos que $R_3 = -5R_1$, entonces

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 8 & 7 & -11 & 17 \\ -15 & 5 & 10 & -25 \\ 3 & 7 & 13 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

Pregunta 7

Incorrecta

Se puntúa 0,00 sobre 2,00

Considere la matriz

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde se sabe que el valor de

$$|P| = 2$$

Con base en lo anterior y, aplicando propiedades de los determinantes, el resultado de

$$\begin{vmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

corresponde a: 2 ✖

Observe que haciendo uso de la propiedad 4.2.3: "Si \(A\) y \(B\) son dos matrices de \(n x n\) que son iguales excepto por la columna \(j\) (renglón \(i\)) y \(C\) es la matriz que es idéntica a Si \(A\) y \(B\) excepto que la columna \(j\) (renglón \(i\)) de \(C\) es la suma de la columna\(A\) y la columna \(B\) (renglón \(i\) de \(A\) y renglón \(i\) de \(B\)), entonces \(|A|+ |B|=|C|\)" se obtiene:

\[\left|\begin{matrix} a+2&b+4&c+6\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix} \right|=\left|\begin{matrix} a&b&c\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right|+ \left|\begin{matrix} 2&4&6\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right| \]

Ahora aplicamos 2 veces la propiedad 4.2.2 (" Si el renglón \(i\) o columna \(j\) de una matriz A se multiplica por un escalar \(c\), entonces \(\mbox{det}\; A\) se multiplica por \(c\)") se obtiene:

\begin{align*}
 \left|\begin{matrix} a+2&b+4&c+6\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix} \right| &= \left|\begin{matrix} a&b&c\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right|+ \left|\begin{matrix} 2&4&6\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right| \\
 \\
 &= -1\left|\begin{matrix} a&b&c\\ 1&0&1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right|+ -1\cdot 2\cdot \left|\begin{matrix} 1&2&3\\ 1&0&1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right| \\
\end{align*}

Finalmente, en el segundo determinante podemos aplicar la propiedad 4.2.5 Si \(|A|\) tiene dos renglones o columnas iguales, entonces \(|A|=0\), por lo cual tenemos:

\begin{align*}
 \left|\begin{matrix} a+2&b+4&c+6\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix} \right| &= \left|\begin{matrix} a&b&c\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right|+ \left|\begin{matrix} 2&4&6\\ -1&0&-1\\ 1&2&3 \\ \end{matrix}\right| \\
 \\

```
    &= -1\left|\begin{matrix} a&b&c\\ 1&0&1\\  1&2&3 \\ \end{matrix}\right|+ -1\cdot 2\cdot \left|\begin{matrix}
1&2&3\\ 1&0&1\\  1&2&3 \\ \end{matrix}\right| \\
    \\
      &= -1\cdot \left|A\right|+ -1\cdot 2\cdot 0 \\
    \\
    &=-1\cdot 2=-2
\end{align*}
```

Pregunta **8**

Parcialmente correcta

Se puntúa 1,67 sobre 3,00

Considere la siguiente matriz \(A\) de tamaño \(5 \times 5\):

\(A = \left({\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
1&9&{ - 4}&{11}&{12} \\
4&5&0&0&{ - 2} \\
2&7&7&0&9 \\
0&{ - 6}&9&{ - 8}&8 \\
2&{ - 3}&9&{ - 9}&1
\end{array}} \right)\)

De acuerdo con la información anterior, se puede determinar \({M_{11}}\) con respecto a esa matriz \(A\). Ahora, se define la matriz \({{M'}_{23}} \) como la menor de la matriz \({M_{11}}\).

Entonces, la matriz \({{M'}_{23}}\) corresponde a:

\({{M'}_{23}} = \)

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ -6 & -8 & 8 \\ -3 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Recuerde que **no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo)** solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo **negativo**. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma **a/b** para representar la fracción \(\dfrac{a}{b}\).

Solución:

La \({M_{11}}\) de la matriz \(A\), corresponde a:

\(A = \left({\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
1&9&{ - 4}&{11}&{12} \\
4&5&0&0&{ - 2} \\
2&7&7&0&9 \\
0&{ - 6}&9&{ - 8}&8 \\
2&{ - 3}&9&{ - 9}&1
\end{array}} \right) \Rightarrow {M_{11}} = \left({\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
5&0&0&{ - 2} \\
7&7&0&9 \\
{ - 6}&9&{ - 8}&8 \\
{ - 3}&9&{ - 9}&1
\end{array}} \right)\)

Ahora \({{M'}_{23}} =\) de la matriz \({M_{11}}\) corresponde a:

$${M_{11}} = \left({\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr} 5&0&0&{ - 2} \\ 7&7&0&9 \\ { - 6}&9&{ - 8}&8 \\ { - 3}&9&{ - 9}&1 \end{array}} \right) \Rightarrow {{M'}_{23}} = \left({\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr} 5&0&{ - 2} \\ { - 6}&9&8 \\ { - 3}&9&1 \end{array}} \right)$$

Pregunta **9**

Correcta

Se puntúa 4,00 sobre 4,00

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$\left\lbrace \begin{array}{l} 3x+4y-z=7\\ 5x-2y+z=23 \\ -10x+5y+2z=69 \end{array} \right.$

Al resolver el sistema de ecuaciones dado, usando la regla de Cramer, con certeza, se puede asegurar que

- a. $\Delta_x=-224$ y $\Delta_z=3024$
- b. $\Delta=-112$ y $\Delta_z=-3024$ ✔
- c. $\Delta_y=-784$ y $\Delta=112$
- d. $\Delta_y=784$ y $\Delta_x=-224$

Respuesta correcta

Solución:

Se calcula el determinante Δ, que corresponde a la matriz de los coeficientes de las variables, para posteriormente hacer la sustitución de las columnas.

$$\Delta= \left| \begin{array}{ccc} 3 & 4&-1\\ 5 & -2&1\\ -10 & 5&2 \end{array} \right|=-112 $$

Luego se calcula el valor de Δ_x:

$$\Delta_x= \left| \begin{array}{ccc} 7 & 4&-1\\ 23 & -2&1\\ 69 &5&2 \end{array} \right|=-224$$

Se calcula Δ_y

$$\Delta_y= \left| \begin{array}{ccc} 3 & 7&-1\\ 5 &23&1\\ -10 & 69&2 \end{array} \right|=-784$$

Se calcula Δ_z

$$\Delta_z= \left| \begin{array}{ccc} 3 & 4&7\\ 5 & -2&23\\ -10 &5&69 \end{array} \right|=-3024 $$

La respuesta correcta es: $\Delta=-112$ y $\Delta_z=-3024$

Pregunta **10**

Finalizado

Se puntúa 0,00 sobre 5,00

Considere la siguiente matriz:

$A=\left(\begin{array}{ccc} 0&3&1\\ -2&0&2\\ 3&4&0\\ \end{array} \right)$

Según la información anterior, determine, mediante desarrollo por cofactores sobre la fila 1, si se cumple que $det \, A=0$.

Nota: Recuerde que debe subir una fotografía del procedimiento de respuesta de este ítem. El mismo debe desarrollarlo a mano (no digital) y deberá agregar su nombre, número de cédula y firmar al final del ejercicio si esto no se presenta la respuesta no será calificada.

WhatsApp Image 2023-07-09 at 5.38.31 PM.jpeg

Haciendo el desarrollo por cofactores sobre la primera fila, tenemos:

$det \, A= \left| \begin{array}{ccc} 0&3&1\\ -2&0&2\\ 3&4&0\\ \end{array}\right|$

$det \, A= 0 \cdot A_{11}+3\cdot A_{12}+1 \cdot A_{13}$ (1 punto)

$det \, A= 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \left|\begin{array}{cc} 0&2\\ 4&0\\ \end{array}\right| + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \left|\begin{array}{cc} -2&2\\ 3&0\\ \end{array}\right| + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \left|\begin{array}{cc} -2&0\\ 3&4\\ \end{array}\right|$ (1 punto)

$det \, A= 0-3(-2 \cdot 0 - 3 \cdot 2)+1(-2 \cdot 4-3 \cdot 0)$ (1 punto)

$det \, A=-3\cdot -6 - 8$

$det \, A=10$ (1 punto)

Por tanto, haciendo el desarrollo por cofactores sobre la fila 1 se tiene que $det \, A \neq 0$. (1 punto)

Comentario: