| | |
|---|---|
| **Comenzado el** | domingo, 11 de agosto de 2024, 13:02 |
| **Estado** | Finalizado |
| **Finalizado en** | domingo, 11 de agosto de 2024, 16:58 |
| **Tiempo empleado** | 3 horas 55 minutos |
| **Puntos** | 14,83/18,00 |
| **Calificación** | **8,24** de 10,00 (**82,41**%) |

**Pregunta 1**

Incorrecta

Se puntúa 0,00 sobre 1,00

Sean los vectores $v = (-1, 3, 5)$, $w = (4, -2, 0)$.

El resultado de la operación $v \times w$ corresponde a: 10i-10j+20k ✖ .

Calculamos: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0-10)\,i - (0-20)\,j + (2-12)\,k = -10i + 20j - 10k$

**Pregunta 2**

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere la siguiente información:

Una recta $L$ contiene los puntos $P(-3,-2,1)$ y $Q(1,1,1)$

Según la información anterior, la ecuación vectorial de la recta $L$ que contiene los puntos $P(-3,-2,1)$ y $Q(1,1,1)$ corresponde a :

$L:(x,y,z)=$ (1, 1 ✔ , 1 ✔ ) + t ( 4 ✔ , 3 , 0 ✔ )

**NOTA: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo.**

Calculamos el vector $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,1,1)-(-3,-2,1)=(4,3,0)$.

Luego se tiene que la ecuación de la recta es de la forma:

$$X=(x_1,y_1,z_1)+\overrightarrow{PQ}\cdot t$$

Por lo tanto para este caso la ecuación corresponde a:

$$X=(1,1,1)+(4,3,0)\cdot t$$

**Pregunta 3**

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Dada la ecuación simétrica de la recta $l$, dada por:

$$l: \frac{1-x}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{2-z}{4}$$

Determine el punto de intersección con el plano $XZ$ .

**Solución:**

El punto de intersección corresponde a ( 11/3 , 0 , 14/3 )

**Nota: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.**

**Solución:**

El plano $XZ$ está formado por todos los puntos donde $y = 0$, lo que nos lleva a las ecuaciones:

$$\frac{1-x}{4} = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{2-z}{4} = \frac{-2}{3} \Rightarrow z = \frac{14}{3}$$

Así el punto está dado por $\left(\frac{11}{3}, 0, \frac{14}{3}\right)$

**Pregunta 4**

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\overrightarrow{u} = (2, 3, k+1) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{v} = (3, k, 0)$$

Según la información anterior, determine lo que se le solicita:

a) la expresión resultante de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, en términos del parámetro $k$, corresponde a: 3k+6 ✔ .

b) el valor del parámetro $k$, de modo que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean ortogonales, corresponde a: $k =$ -2 ✔ .

**NOTA**: Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) **solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo positivo y/o el signo negativo**. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\dfrac{a}{b}$

a) Primero se calcula el producto indicado $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ , así:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (2, 3, k+1) \cdot (3, k, 0)$$

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 6 + 3k$, o bien $3k + 6$.

b) Para que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean ortogonales, el ángulo entre ellos debe ser $90^\circ$ o bien $\dfrac{\pi}{2}$, así:

$$\cos(90^\circ) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

$$\cos(90^\circ) = \frac{6 + 3k}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

$$0 = 6 + 3k$$

Despejando el parámetro, se tiene:

$$k = -2.$$

**Pregunta 5**
Correcta
Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere la siguiente información sobre un plano $\pi$ tal que el mismo viene definido de la siguiente forma:

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 = -x - 2y + 5z \right\}$$

Según la información anterior, una base para el conjunto de vectores que se encuentran en el plano corresponde a : ( -2 , 1 , 0 ) y (5, 0, 1).

**Nota:** Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo.

**Solución:**

Se sabe que $\pi$ es un plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, por lo que es un espacio vectorial. Para encontrar una base, primero se escogen $x$, $y$ y $z$ arbitrariamente y si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ esta en $\pi$, entonces $x = -2y + 5z$. Así los vectores en $\pi$ tienen la forma :

$$\begin{pmatrix} -2y + 5z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene que $(-2, 1, 0)$ y $(5, 0, 1)$ son parte de bases que generan al plano $\pi$.

**Pregunta 6**

Parcialmente correcta

Se puntúa 0,83 sobre 1,00

Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Con lo anterior, se tiene que el vector $(1,5,7)$ no pertenece al espacio reglón de la matriz $A$, pues:

**Solución:**

$a\cdot$ ( 1 ✔ , 4 ✔ , 3 ) $+b\cdot$ ( 0 ✔ , 0 ✔ , 5 ✔ ) $=(1,5,7)\ a,b\in\mathbb{R}$.

Por lo tanto, $a=1$ y $a=$ 1 ✖ .

**Nota:** Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.

**Solución:**

Primero note que los reglones dados son Linealmente Independientes. Entonces el vector $(1,5,7)$ está en el espacio de reglones si: $a(1,4,3)+b(0,0,5)=(1,5,7)\Rightarrow(a,4a,3a+5b)=(1,5,7)\ a,b\in\mathbb{R}$. Donde se tiene el sistema:

$$\begin{cases} a = & 1 \\ 4a = & 5 \\ 3a+5b = & 7 \end{cases} \Rightarrow a=1\wedge a=\frac{5}{4}$$

Como esto no es posible, se concluye que el vector dado no está en el espacio de reglones de $A$.

**Pregunta 7**

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Considere los siguientes polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, definidos por:

$P(x) = (k+4)x^2 + 5x + (k-3) \quad Q(x) = -x^2 + 5x - 2$ y $R(x) = x^2 - x$

Según la información anterior, y considerando el parámetro $k$ una constante real:

a) el valor del parámetro $k$ que hace que el polinomio $P(x)$ sea una combinación lineal de los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, corresponde a: $k =$ -1

b) para el valor correcto del parámetro $k$, hallado en el apartado a) se puede expresar el polinomio $P(x)$ como una combinación lineal de los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, por lo que: $P(x) =$ 2 $\cdot Q(x)$ + 5 $\cdot R(x)$

**NOTA:** Recuerde que no debe usar ningún otro carácter (ni espacio, punto, coma o símbolo) **solamente debe usar números y en caso de ser necesario el signo negativo**. En caso de usar fracciones debe escribirlas de la forma a/b para representar la fracción $\frac{a}{b}$.

Considerando la información brindada, $P(x)$ es una combinación lineal de los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ si y solo si el sistema con matriz aumentada $(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{r} \mid \overrightarrow{p})$ es consistente.

Entonces, considerando los polinomios como vectores columna y aplicando operaciones elementales por fila para reducir la matriz aumentada, tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & k+4 \\ 5 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & k-3 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -k-4 \\ 5 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & k-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 2R_1 + R_3]{R_2 \to -5R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -k-4 \\ 0 & 4 & 5k+25 \\ 0 & -2 & -k-11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_2 + 2R_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -k-4 \\ 0 & 4 & 5k+25 \\ 0 & 0 & 3k+3 \end{array}\right)$$

De la última fila se obtiene que $3k + 3 = 0$, por lo que $k = -1$.

Luego, se sustituye el valor del parámetro $k$ y se continúa con la reducción de la matriz sin considerar la última fila, tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Por lo que, la combinación lineal solicitada corresponde a: $3x^2 + 5x - 4 = 2 \cdot (-x^2 + 5x - 2) + 5 \cdot (x^2 - x)$.

**Pregunta 8**

Correcta

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

1) $\pi = \{(x, y, z) : 0 = 4z + 5y - 3x\}$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$.

2) Sean $V_1 = \{(x, y, z) : 0 = 3x - 3z + 2y\}$ y $V_2 = \{(x, y, z) : 5x + y - 10z = 0\}$ subespacios de un espacio vectorial $H$, entonces $V_1 \cap V_2$ es un subespacio de $H$.

**Respuestas.**

1) $\pi = \{(x, y, z) : 0 = 4z + 5y - 3x\}$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$, es una afirmación verdadera ✔ .

2) Sean $V_1 = \{(x, y, z) : 0 = 3x - 3z + 2y\}$ y $V_2 = \{(x, y, z) : 5x + y - 10z = 0\}$ subespacios de un espacio vectorial $H$, entonces $V_1 \cap V_2$ es un subespacio de $H$, es una afirmación verdadera ✔ .

1) $\pi = \{(x, y, z) : 0 = 4z + 5y - 3x\}$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$ ya que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en un plano que pasa por el origen constituyen un espacio vectorial, por lo tanto $\pi$ cumple con la propiedad de cerradura bajo la suma y cerradura bajo la multiplicación por un escalar.

2) Si $V_1$ y $V_2$ son dos subespacios de un espacio vectorial $H$, entonces $V_1 \cap V_2$ es un subespacio de $H$.

**Pregunta 9**

Finalizado

Se puntúa 5,00 sobre 5,00

Determine los cosenos directores del vector $\vec{v} = (-11, 13, 10)$.

**Nota:** Recuerde que debe subir una fotografía del procedimiento de respuesta de este ítem. El mismo debe desarrollarlo a mano (no digital) y deberá agregar su nombre, número de cédula y firmar al final del ejercicio si esto no se presenta la respuesta no será calificada.

JessicaVargas_Ejercicio9_.jpg

Solución:

Se calcula la magnitud del vector de $\vec{v}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{(-11)^2 + 13^2 + 10^2}$ (1 punto)

$|\vec{v}| = \sqrt{390}$ (1 punto)

De esta manera, los cosenos directores del vector están definidos por:

$\cos(\alpha) = \frac{-11}{\sqrt{390}}$ (1 punto)

$\cos(\beta) = \frac{13}{\sqrt{390}}$ (1 punto)

$\cos(\gamma) = \frac{10}{\sqrt{390}}$ (1 punto)

Comentario:

Pregunta **10**

Finalizado

Se puntúa 3,00 sobre 5,00

Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Según la información anterior, determine una base el espacio nulo de $A$

**Nota:** Recuerde que debe subir una fotografía del procedimiento de respuesta de este ítem. El mismo debe desarrollarlo a mano (no digital) y deberá agregar su nombre, número de cédula y firmar al final del ejercicio si esto no se presenta la respuesta no será calificada.

JessicaVargas_Ejercicio10_.jpg

Tenemos que $N_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$, esto es, el espacio nulo de $A$. Como $A$ es de tamaño $3 \times 4$, entonces $N_A$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Así, reduciendo la matriz $A$ por filas, tenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_1 + F_3]{F_2 \to 3F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \text{ (1 punto)}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_2 + F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ (1 punto)}$$

Como $N_A$ es el espacio solución para un sistema homogéneo, se obtiene la siguiente solución para "x" y "z", en términos de "y" y "w":

$x = -3y + 2w$ y $z = \dfrac{5y}{4} - 4w$. (1 punto)

esto es:

$$\begin{pmatrix} -3y + 2w \\ y \\ \dfrac{5y}{4} - 4w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ \dfrac{5y}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w \\ 0 \\ -4w \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3y+2w \\ y \\ \frac{5y}{4}-4w \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(1 punto)}$$

Por tanto, una base para el espacio nulo de $A$ corresponde a:

$$N_A = gen\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{(1 punto)}$$

Comentario: