〈二つの平均値の差の検定〉

二つの分析法 A, B の分析結果に差異が認められるかどうか，すなわち，A, B 法の分析値の母平均に差があるかどうかを，A 法とB 法のそれぞれ n_A 個，n_B 個の分析値の平均 $\bar{x}_A$，$\bar{x}_B$ の差から判断するときの検定法を述べる。

母分散の等しい二つの正規母集団 $N(\mu_A, \sigma^2)$, $N(\mu_B, \sigma^2)$ からそれぞれ大きさ n_A, n_B なる標本をとり，その標本平均を $\bar{x}_A$，$\bar{x}_B$ とすると，$\bar{x}_A$ と $\bar{x}_B$ はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A, \sigma^2/n_A)$, $N(\mu_B, \sigma^2/n_B)$ に従うものとする。また $\bar{x}_A$，$\bar{x}_B$ が互いに独立であれば，$\bar{x}_A$ と $\bar{x}_B$ の差の期待値と分散は次のようになり，

$$E(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = \mu_A - \mu_B$$
$$E(x_i - \mu)^2 = \sigma^2$$
$$E(\bar{x} - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma^2(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = \frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B}$$

$(\bar{x}_A - \bar{x}_B)$ は正規分布 $N\left(\mu_A - \mu_B, \dfrac{\sigma^2}{n_A} + \dfrac{\sigma^2}{n_B}\right)$ に従うので，基準化すれば，

$$\boxed{u = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}} \qquad (1)$$

となり，u は正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う。帰無仮説を $\mathrm{H}_0: \mu_A = \mu_B$ とすれば，これが成立するもとで(1)式は，

$$\boxed{u = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}} \qquad (2)$$

となる。例えば，有意水準 5%で両側検定を行なうときには，二つの標本平均値の差から (2) 式によって u を求め，帰無仮説 H_0 を検討する必要がある。

一般には σ の真の値はわからないことが多いので，データから σ を推定しなければならない。ここで，V_A を A 法の不偏分散，V_B を B 法の不偏分散，Φ_A を V_A の自由度 $(n_A - 1)$，Φ_B を V_B の自由度 $(n_B - 1)$ とすると，2 つの方法による測定値の母分散が等しい場合には，

A 法によるデータから次のようにして σ^2 の不偏推定値を求めることができ，

$$\frac{S_A}{\Phi_A} = \frac{\sum(x_{i(A)} - \bar{x}_A)^2}{n_A - 1} = V_A$$

B 法によるデータからも同様にして，

$$\frac{S_B}{\Phi_B} = \frac{\sum(x_{i(B)} - \bar{x}_B)^2}{n_B - 1} = V_B$$

が求まる。これらの V_A と V_B より V が次式より計算され，$V = \sigma^2$ の不偏推定値を求めることができる。

$$\boxed{\frac{V_A\Phi_A + V_B\Phi_B}{\Phi_A + \Phi_B} = \frac{S_A + S_B}{\Phi_A + \Phi_B} = V}$$

V_A，V_B はともに σ^2 の不偏推定値だから，これらに自由度の重みをつけて平均したものもまた σ^2 の不偏推定値となる。このようにして求めた不偏分散 V の平方根を σ の代わりに用いると（2）式は，

$$\boxed{t_0 = \frac{\bar{x}A - \bar{x}B}{\sqrt{V\left(\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}\right)}}} \qquad (3)$$

となる。 t_0 は帰無仮説 $\mathrm{H}_0: \mu_A = \mu_B$ の成立するもとで自由度 $\Phi = \Phi_A + \Phi_B$ の t 分布に従う。すなわち，有意水準 α の両側検定ならば，(3) 式により t_0 を計算し，これを t 表から得られる値 $t(\Phi_A + \Phi_B, \alpha)$ と比較し，

$$|t_0| \geq t(\Phi_A + \Phi_B; \alpha)$$

ならば H_0 を棄却する。また有意水準 α の片側検定の場合には，

$\mathrm{H}_1: \mu_A > \mu_B$ のときには，

$$t_0 \geq t(\Phi_A + \Phi_B; 2\alpha)$$

ならば H_0 を棄却する。

$\mathrm{H}_1: \mu_A < \mu_B$ のときには，

$$t_0 \leq -t(\Phi_A + \Phi_B; 2\alpha)$$

ならば H_0 を棄却する。

一方，A法とB法の母分散が等しくない場合には，Welchの方法により検定を行なう。すなわち

$$\boxed{t_0 = \frac{\bar{x}A - \bar{x}B}{\sqrt{\dfrac{V_A}{n_A} + \dfrac{V_B}{n_B}}}} \tag{4}$$

は近似的に自由度 Φ の t 分布に従うことを利用する。ただし，Φ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi_A}\left\{\frac{V_A/n_A}{(V_A/n_A)+(V_B/n_B)}\right\}^2 + \frac{1}{\Phi_B}\left\{\frac{V_B/n_B}{(V_A/n_A)+(V_B/n_B)}\right\}^2 \tag{5}$$