(1) $y_{k+1} = 5y_k - 6y_{k-1}$

$x_{k+1} = Ax_k$

$y_k = Cx_k$.

$x_{k+1} = Ax_k$

$y_k = Cx_k$

$x_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$

$y_k = [1\ 1\ 0]\, x_k$

$x_{k+1} = Ax_k$

$x_{k+1} = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix}$ より、

$x_{k+1} = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5y_k - 6y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$

$C = [1\ 1\ 0]$, $A = \begin{bmatrix} 5y_k - 6y_{-1} \\ y_k \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$。

Pを求めるため、

Aの固有値を求める

$\det(A - \lambda E) = 0$ より、

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6$

$= 2 + \lambda^2 - 3\lambda - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

$\lambda^2-3\lambda-4=0$

$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$

$\underline{\lambda=-1,4}$

$(A-\lambda E)u=0$

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$$

$\lambda=-1$のとき

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=0$$

$3u_1+3u_2=0$

$2u_1+2u_2=0$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda=4$のとき

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=0$$

$-2u_1+3u_2=0$

$2u_1-3u_2=0$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & \underline{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Zと　　逆N

$$P^{-1}=\frac{1}{1\cdot\frac{2}{3}-(-1)}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\frac{3}{5}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\qquad \Lambda^k=\begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{bmatrix}$$

よって、

$$A^k=P\Lambda^kP^{-1}$$

$$=\frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

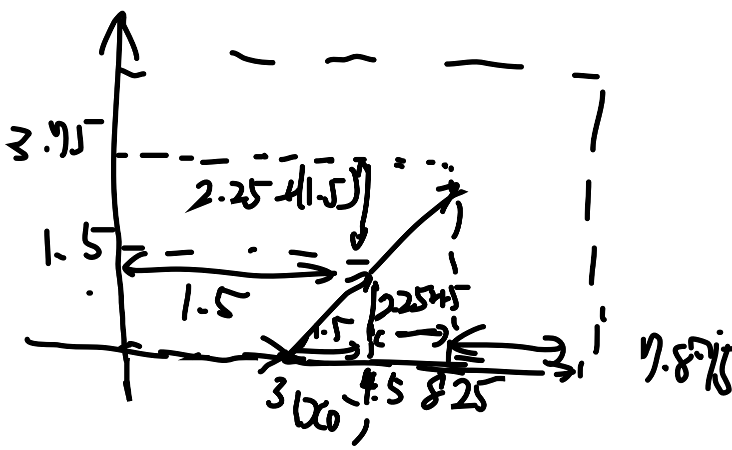
$$=\frac{3}{5}\begin{bmatrix} (-1)^k & 4^k \\ (-1)^{k+1} & \frac{2}{3}\cdot4^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\boxed{\underline{\frac{3}{5}\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\cdot(-1)^k+4^k & (-1)^{k+1}+4^k \\ \frac{2}{3}\cdot(-1)^{k+1}+\frac{2}{3}\cdot4^k & (-1)^{k+2}+\frac{2}{3}\cdot4^k \end{bmatrix}}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)^k+3\cdot4^k & 3\cdot(-1)^{k+1}+3\cdot4^k \\ 2(-1)^{k+1}+2\cdot4^k & 3\cdot(-1)^{k+2}+2\cdot4^k \end{pmatrix}$$

(3)

$x_{k+1} = A x_k \quad A = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$

$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$



x_0が固有値λ_iに対する固有ベクトルなら、

$x_k = \lambda_i^k x_0$ より、

det$(A-\lambda E)=0$より、

$$\det \begin{bmatrix} 1.5-\lambda & 1 \\ 0.5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1.5-\lambda)(1-\lambda) - 0.5$$
$$= 1.5 + \lambda^2 - 2.5\lambda - 0.5$$
$$= \lambda^2 - 2.5\lambda + 1.0 = 0$$

$(\lambda - 2.0)(\lambda - 0.5) = 0$

$\lambda = 2.0, 0.5$

$\lambda = 2.0$のとき、

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -0.5u_1 + u_2 \\ 0.5u_1 - u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0.5$のとき、

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1.0u_1 + 1.0u_2 \\ 0.5u_1 + 0.5u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ より、x_0は固有値λ_iに対する固有ベクトル和 ①

$$x_k = A^k x_0$$
$$= A^k \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$
$$= A^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + A^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

このとき、①より、

$$x_k = \lambda_i x_0$$
$$= 2^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (0.5)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(4) $y_{k+1} = 1.4y_k - 0.45y_{k-1} + u_k.$

$u_k = 0$ とするとき、

$y_{k+1} = 1.4y_k - 0.45y_{k-1}$

$x_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$ とすると、 $x_{k+1} = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4y_k - 0.45y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix}$

$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.45 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.45 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda E)$

$= \begin{vmatrix} 1.4-\lambda & -0.45 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1.4-\lambda)(-\lambda) + 0.45$

$= -1.4\lambda + \lambda^2 + 0.45$

A. $\lambda = 0.9, 0.5$

$= \lambda^2 - 1.4\lambda + 0.45 = (\lambda - 0.9)(\lambda - 0.5)$

$\lambda = 0.9, 0.5$

このとき、Aの固有値 ことシステムの極は、

$|0.9| \leqq 1, |0.5| \leqq 1$ よりすべての λ_i において、$|\lambda_i| \leqq 1$。

よってこのシステムは安定している

(5) $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき,

$u_k = Kx_k$, システムの極を0.8, 0.5としたい。

$K = [k_1, k_2]$ とすると,

$Bu_k = [k_1, k_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_k$

$= \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_k$

$x_{k+1} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x_k$

$= \begin{bmatrix} 2+k_1 & 1+k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 0.8)(\lambda - 0.5)$

$\det \begin{pmatrix} 2+k_1-\lambda & 1+k_2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$= (2+k_1-\lambda)(-\lambda) - (1+k_2)$

$= -2\lambda - \lambda k_1 + \lambda^2 - 1 - k_2$

$= \lambda^2 - (2+k_1)\lambda + (-k_2 - 1)$

$= (\lambda - 0.8)(\lambda - 0.5)$

$(2+k_1) = 1.3$

$\begin{cases} k_1 = -0.7 \\ k_2 = -1.4 \end{cases}$ $-k_2 - 1 = 0.4$

$K = [-0.7, -1.4]$

(6) $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \theta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このとき,

$R = [B \ AB \cdots A^{n-1} B]$が正則でない,

即ち

Rank $R \neq n$ のとき,システムは可到達にならない。

または, $|W| = 0$ のときも,システムは可到達にならない。

x_kが2次元ベクトルであるため,状態変数の数は2。

よってn=2.

よって,

$$R = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1+\theta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \theta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+\theta \end{bmatrix}$$

このとき,

rank $R \neq 2$であるためには,

$AB = aB$である必要がある(aは整数)

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1+\theta \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ このとき, $-1+\theta = a$, $a = 2$.

よって$\theta = 3$

システムが$\theta = 1$のとき,システムは可到達にならない。