

演習 6 解析学 II

2022351033 関川謙人

2022 年 11 月 15 日

1 Q1

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$$

1 段階微分すると、

$$f_x(x, y) = (2x + x^2 + y^2)e^{x-y}$$

$$f_y(x, y) = (2y - x^2 + y^2)e^{x-y}$$

この時、 $f_x = 0, f_y = 0$ とする。これを解くと、 $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 2)$ の解が得られ、これが極値点の候補となる。

また、1, 1 を 2 段階微分すると、

$$A = f_{xx} = (4x + x^2 + y^2 + 2)e^{x-y}$$

$$B = f_{xy} = (-x^2 - 2x + 2y + y^2)e^{x-y}$$

$$C = f_{yy} = (x^2 - 2y + 2)e^{x-y}$$

$$D = B^2 - AC$$

1 に先ほど求めた解を代入すると、

$(0, 0)$ の場合

$A = 0, B = 0, C = 0, D = 0$ であるため、 $D = 0$ より、これだけでは判定不能である。

$(1, 1)$ の場合

$A = 8, B = -2, C = 1, D = -4$ であるため、 $D < 0$ より、この値は極値ではない。

$(2, 2)$ の場合、

$A = 18, B = -8, C = 2, D = 28$ であり、 $D > 0$ 、また、 $A > 0$ であるため、1 は $(x, y) = (2, 2)$ において極大値 8 をとる。

2 Q2

関係式を $f(x) = (x^2 - xy + y^2 - 3)$ と定義する。 $f(x)$ の両辺を x で微分すると、

$$f_x(x, y) = 2x - y$$

となる。

また、陰関数が極値をとるとき、

$f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ となるため、これらの式をとくと、極値をとるときの (a, b) の値の候補は、 $(a, b) = (0, 0), (-1, -2), (1, 2)$

となる。このとき、 $f_y(x, y) = -x + 2y$

$$f_{xx}(x, y) = -1$$

また、

$$\frac{f_{xx}(x, y)}{f_y(x, y)} = \frac{2}{x-2y}$$

である。

$(-1, -2)$ の時、

$$\frac{f_{xx}(x, y)}{f_y(x, y)} = -1 < 0$$

なので、

$f(x)$ は $x = (-1, -2)$ で極小値 0 をとる。

$(1, 2)$ の時、 $\frac{f_{xx}(x, y)}{f_y(x, y)} = 1 < 0$ なので、 $f(x)$ は $x = (1, 2)$ で極大値 0 をとる。