線形システム解析
後半レポート

2022531033 関川謙人

2024年2月5日

問1

差分方程式

$$y_{k+1} = 0.5y_k + 0.5u_k$$

のインパルス応答を求めよ

$$y_k = CA^k x_0 + CA^{k-1}Bu_0 + CABu_{k-2} + CBu_{k-1} \cdots$$

h_kを、

$$h_k = \begin{cases} CA^{k-1}B & (k \geq 1) \\ 0 & (k < 1) \end{cases} \text{とおくと、}$$

y_kは、

$$\begin{aligned} y_k &= h_k u_0 + h_{k-1}u_1 + \cdots + h_2 u_{k-2} + h_1 u_{k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-1} u_i \end{aligned}$$

この時の h_k をインパルス応答と呼ぶ。

$$\text{この問いにおいて、}y_k\text{と}x_k\text{の関係式は}$$
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} = 0.5x_k + 0.5u_k \\ y_k = x_k \end{pmatrix}\text{であり、}$$
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{pmatrix}\text{である。}$$
$$\text{係数比較すると、}\begin{pmatrix} A = 0.5 \\ B = 0.5 \\ C = 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで、インパルス入力は、}$$
$$u_k = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$
$$\text{であるため、インパルス応答}h_k\text{は、}\begin{cases} 0.5^k & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

となる。

問 2

時系列 x_k を、

$$x_k = \begin{cases} 1 & (k \geqq 0\text{かつ}k\text{が偶数}) \\ 0 & (k \geqq 0\text{かつ}k\text{が奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする。この x_k の Z 変換 $X(z)$ を求めよ。
時系列 $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ に対し、

$$X_(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i z^{-i} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x_k] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i z^{-i} \\ &= 1 - z^{-1} + z^{-2} + \cdots - z^{-2k-1} + z^{-2k} \\ &= \frac{1}{1-(-z^{-1})} \ (|x^{-1}| < 1) \\ &= \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1} \end{aligned}$$

問 3

インパルス応答が

$$h_k = \begin{cases} 0.8^{k-1} & (\text{k} \geqq 1) \\ 0 & (\text{k} < 1) \end{cases}$$

のシステムにステップ入力

$$u_k = \begin{cases} 1 & (\text{k} \geqq 0) \\ 0 & (\text{k} < 0) \end{cases}$$

を加えたときの応答 y_k を求めよ。

$H(z), U(z)$ を求め、$Y(z) = H(z)U(z)$ を求めて逆 Z 変換することで応答を求めることができる。

まず、$H(z), U(z)$ を求める。

$$\begin{aligned} H(z) &= Z[h_k] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_k z^{-i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 0.8^{k-1} z^{-i} \\ &= z^{-1} + 0.8z^{-2} + 0.8^2 z^{-3} \cdots \\ &= \frac{z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \ (|z^{-1}| < 1) \\ &= \frac{1}{z-0.8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(z) &= Z[u_k] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_k z^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 1 z^{-i} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \ (|z^{-1}| < 1) \\ &= \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

$Y(z) = H(z)U(z)$ であるため、

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{z-0.8} \cdot \frac{z}{z-1} \\
&= \frac{z}{(z-0.8)(z-1)}
\end{aligned}
$$

部分分数分解を用いて、

$$
Y(z) = \frac{a}{(z-0.8)} + \frac{b}{(z-1)}
$$

このとき両辺に $(z-0.8)$ をかけると、

$$
(z-0.8)Y(z) = a + \frac{(z-0.8)}{(z-1)}b
$$

この時、$z \rightarrow 0.8$ において、

$$
(z-0.8)Y(z) = a + 0
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{z \rightarrow 0.8} (z-0.8)Y(z) \\
a &= \frac{z}{z-1} \\
&= \frac{0.8}{-0.2} = -4.0
\end{aligned}
$$

よって $a = -4.0$ である。
また、両辺に $(z-1)$ をかけると、

$$
(z-1)Y(z) = \frac{(z-1)}{(z-0.8)}a + b
$$

この時、$z \rightarrow 1$ において、

$$
(z-1)Y(z) = 0 + b
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) \\
b &= \frac{z}{z-0.8} \\
&= \frac{1}{0.2} = 5.0
\end{aligned}
$$

よって $b = 5.0$ である。この時、$Y(z)$ は、

$$
Y(z) = -4.0\frac{1}{z-0.8} + 5.0\frac{1}{z-1}
$$

インパルス応答であるため、逆 z 変換は、

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]=\begin{cases}\alpha^{k-1} & (\mathrm{k} \geqq 1)\\ 0 & (\mathrm{k} < 1)\end{cases}$$

となる。この式を $Y(z)$ に当てはめて逆 Z 変換を行うと、

$$y_k=\begin{cases}(-4.0)\cdot 0.8^{k-1}+5.0 & (\mathrm{k} \geqq 1)\\ 0 & (\mathrm{k} < 1)\end{cases}$$

となる

問 4

差分方程式

$$y_{k+1}=0.9y_k-0.2y_{k-1}+u_k$$

の伝達関数表現を求めよ。z 変換より、

$$zY(z)=0.9Y(z)-0.2z^{-1}Y(z)$$
$$U(z)=zY(z)-0.9Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)$$

伝達関数を $G(z)$ とすると、

$$\begin{aligned}Y(z)&=G(z)U(z)\\ U(z)&=(z-0.9+0.2z^{-1})Y(z)\\ Y(z)&=\frac{1}{(z-0.9+0.2z^{-1})}U(z)\\ G(z)&=\frac{1}{a-0.9+0.2z^{-1}}\\ &=\frac{z}{z^2-0.9z+0.2}\end{aligned}$$

よって、伝達関数表現は、

$$G(z)=\frac{z}{z^2-0.9z+0.2}$$

である。

問 5

差分方程式

$$y_{k+1}=1.1y_k-0.3y_{k-1}+u_k$$

にステップ入力

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{k} \geq 0 \\ 0 & \text{k} < 0 \end{cases}$$

を加えたときの応答 y_k を求めよ。

差分方程式を z 変換する。

$$zY(z) = 1.1Y(z) - 0.3z^{-1}Y(z) + U(z)$$

移項すると、

$$U(z) = zY(z) - 1.1Y(z) + 0.3z^{-1}Y(z)$$
$$U(z) = (z - 1.1 + 0.3z^{-1})Y(z)$$
$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - 1.1z + 0.3}U(z)$$

$U(z)$ を求める。

$$\begin{aligned} U(z) = Z[u_k] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i z^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-i} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} \cdots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \ (|z^{-1} < 1|) \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

ここから、$U(z)$ を代入して Y(z) を部分分数分解する。

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z^2 - 1.1z + 0.3} \cdot \frac{z}{z - 1} \\ &= \frac{z^2}{(z - 0.6)(z - 0.5)(z - 1)} \\ &= \frac{a}{(z - 0.6)} + \frac{b}{(z - 0.5)} + \frac{c}{(z - 1)} \end{aligned}$$

$Y(z)$を通分して､係数比較を行う。

$$Y(z) = \frac{1}{(z - 0.6)(z - 0.5)(z - 1)} + ((a+b+c)z^2 + (-1.5a - 1.6b - 1.1c)z + (0.5)a + 0.6b + 0.3c)$$

係数比較すると、

$$\begin{pmatrix} A = -9 \\ B = 5 \\ C = 5 \end{pmatrix}$$

よって、

$$Y(z) = -9 \cdot \frac{1}{z-0.6} + 5 \cdot \frac{1}{z-0.5} + 5 \cdot \frac{1}{z-1}$$

入力信号がステップ信号であるため、逆 z 変換の式は、

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right] = \begin{cases} \alpha^{k-1} & (\mathrm{k} \geqq 1) \\ 0 & (\mathrm{k} < 1) \end{cases}$$

逆 z 変換を Y(z) に対して適用すると、

$$\begin{aligned} y_k &= Z^{-1}[Y(z)] \\ &= \begin{cases} -9 \cdot 0.6^{k-1} + 5 \cdot 0.5^{k-1} + 5 & (\mathrm{k} \geqq 1) \\ 0 & (\mathrm{k} < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

問 6

伝達関数 $H(z)$ が $H(e^{j\omega}) = 3e^{-\frac{\pi}{4}j}$ を満たすとすると、この伝達関数に $u_k = \sin\omega k$ を入力したときの定常応答を求めろ。

$H(e^{j\omega})$ を極座標表示すると、

$$H(e^{j\omega}) = Ge^{j\phi}$$

この時、

$$H(e^{j^{\omega}}) = 3e^{-\frac{\pi}{4}j}$$

であるため、

$$\begin{pmatrix} G = |H(e^{j\omega k})| = 3 \\ \phi = \angle H(e^{j\omega k}) = -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

以上より $u_k = \sin\omega k$ を入力したときの定常応答は、

$$y_k = 3\sin(\omega k - \frac{\pi}{4})$$