报童问题newsboy、newsvendor problem

CASE：报摊每天都卖人民日报，需要决策向供应商拿多少份报纸？报纸拿多了（采购过多），造成积压（积压损失，第二天报纸不值钱），拿少了（采购过少），有顾客却没报纸，浪费了盈利机会（缺货损失）

分析：

设**决策变量**为Q，报纸实际需求为D（不确定的，属于**随机变量**），报纸售价a元，采购成本b元，退货成本c元，设利润为R（**目标函数**），则每份报纸赚$a-b$元，积压一份亏$b-c$元，有两种情况——

1）当$Q>D$，即采购过多，则利润$R=(a-b)*D+(b-c)*(Q-D)$

2）当$Q \leq D$，即缺货，则利润$R=(a-b)*Q$

求解：总利润Z受决策变量Q与需求D的影响，有$R=R(Q,D)$，因需求D为随机变量，**则求Z最大值等价于求Z的数学期望$E(Z)$最大——**

设$G(Q)=R(Z)$，$p(D)$是需求D的离散概率，有

$$G(Q)=\sum_{D=1}^{Q}[(a-b)D+(c-b)(Q-D)]p(D)+\sum_{D=Q+1}^{\infty}(a-b)Qp(D)$$

问题：$G(Q)$如何求最大值，如何求导？函数$G(Q)$连续么？

概率知识回顾：

- 分布函数$F(x)$，概率密度函数$f(x)$，有$F'(x)=f(x)$，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$
- 变上限积分求导：$[\int_{-\infty}^{x}H(t)dt]'=H(x)$
- $0 \leq F(x) \leq 1$，$F(\infty)=1$，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$，$f(x) \geq 0$
- 数学期望$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$
- 若$y=g(x)$，则$E(y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$

问题转换:

设Q、D为连续变量，a、b、c转化为**缺货成本C_u与积压成本C_o**，**决策变量**为Q，需求为D（**随机变量**），**成本**为$Z=Z(Q,D)$，现求最优解Q^*，使得$G(Q^*)=E(Z)$取**最小值**，则1）当$Q>D$，$Z=C_o(Q-D)$；2）当$Q\leq D$，$Z=C_u(D-Q)$，有

$$\begin{aligned}G(Q)=E(Z)=E(Z(D))=\int_{-\infty}^{\infty}Zf(D)dD\\ =C_o\int_{-\infty}^{Q}(Q-D)f(D)dD+C_u\int_{Q}^{\infty}(D-Q)f(D)dD\\ =C_o\int_{-\infty}^{Q}(Q-x)f(x)dx+C_u\int_{Q}^{\infty}(x-Q)f(x)dx\\ =C_o\int_{0}^{Q}(Q-x)f(x)dx+C_u\int_{Q}^{\infty}(x-Q)f(x)dx\end{aligned}$$

$$G(Q)=C_oQ\int_0^Q f(x)dx-C_o\int_0^Q xf(x)dx+C_u\int_Q^\infty xf(x)dx-C_uQ\int_Q^\infty f(x)dx$$

对 $G(Q)$进行求导，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial Q}=C_oQf(Q)+C_o\int_0^Q f(x)dx-C_oQf(Q)-C_uQf(Q)+C_uQf(Q)-C_u\int_Q^\infty f(x)dx\\ =C_o\int_0^Q f(x)dx-C_u\int_Q^\infty f(x)dx\\ =C_o\int_{-\infty}^Q f(x)dx-C_u\int_Q^\infty f(x)dx\\ =C_oF(Q)+C_u(1-F(Q))\end{aligned}$$

令$\frac{\partial G}{\partial Q}=0$，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial Q}=C_oF(Q)+C_u(1-F(Q))\\ =(C_o+C_u)F(Q)-C_u=0\end{aligned}$$

$$F(Q^*)=\frac{C_u}{C_o+C_u}$$

需要根据需求D的分布函数$F(x)$，如正态分布、均匀分布、泊松分布等，反查分布函数求解Q^*值

另外，

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Q^2} = C_o f(Q) + C_u f(Q) \geq 0$$

故有最优解Q^*，使$G(Q^*)$即$E(Z(Q^*, D))$取最小值

思考：

1. 上述求解方法，属于什么思路？如何通过软件工具求解？
2. 能否通过excel求解？
3. 能否进行仿真实验？如何实现？