ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH

NGHIÊN CỨU PHÁT TRIỂN KỸ THUẬT ĐẾM SỐ PHẦN TỬ TRÊN DÒNG I

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Học viên: **LÊ ANH QUỐC**
ID: **2070428**

HỒ CHÍ MINH CITY

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH

NGHIÊN CỨU PHÁT TRIỂN KỸ THUẬT ĐẾM SỐ PHẦN TỬ TRÊN DÒNG I

LUẬN VĂN THẠC SĨ

NGÀNH: KHOA HỌC MÁY TÍNH

MÃ NGÀNH: **8480101**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. THOẠI NAM

Học viên: **lÊ ANH QUỐC**
ID: **2070428**

HỒ CHÍ MINH CITY

Content

1 GIỚI THIỆU ĐỀ TÀI, MỤC TIÊU VÀ ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

1.1 Tính cấp thiết và lý do chọn đề tài

Ngày nay, các ứng dụng và dịch vụ trực tuyến đóng vai trò ngày càng quan trọng trong cuộc sống của con người. Chúng ta sử dụng mạng xã hội để kết nối với bạn bè và chia sẻ thông tin, mua sắm trực tuyến để tiết kiệm thời gian và tiền bạc, hay xem phim và chơi game trực tuyến để giải trí. Để đánh giá hiệu quả hoạt động của các ứng dụng và dịch vụ này, một trọng những chỉ số quan trọng nhất là số lượng người dùng hoạt động Distinct Active Users (DAU).

Việc theo dõi số lượng người dùng hoạt động trong một khoảng thời gian nhất định trên một dòng dữ liệu (data stream) là một yêu cầu quan trọng đối với nhiều ứng dụng và dịch vụ trực tuyến, hiệu quả của các chiến dịch marketing, và hỗ trợ ra quyết định kinh doanh. Ví dụ, trong các ứng dụng mạng xã hội, số lượng người dùng hoạt động cho thấy mức độ tương tác và sự quan tâm của người dùng đối với nền tảng. Trong các dịch vụ thương mại điện tử, số lượng người dùng hoạt động cho thấy hiệu quả và các chiến dịch quảng cáo và khuyến mãi. Tuy nhiên, việc đếm số lượng DAU không phải là một nhiệm vụ đơn giản, đặc biệt là khi dữ liệu lớn và tốc độ truy cập cao. Các phương pháp truyền thống như lưu trữ và truy vấn trực tiếp vào cơ sở dữ liệu có thể gặp nhiều hạn chế về hiệu suất và khả năng mở rộng.

Trong nhiều trường hợp, cần phải tổng hợp số lượng DAU trên nhiều streams hoặc services khác nhau. Việc này giúp có được bức tranh toàn cảnh về hoạt động của người dùng trên toàn hệ thống, từ đó đưa ra các phân tích và đánh giá chính xác hơn. Ví dụ, trong hệ thống thương mại điện tử, cần tổng hợp số lượng DAU từ các trang web, ứng dụng di động và API khác nhau để có được số lượng người dùng hoạt động thực tế trên toàn hệ thống. Tuy nhiên, việc tổng hợp dữ liệu từ nhiều nguồn khác nhau có thể gặp thách thức về đồng bộ hóa dữ liệu, xử lý dữ liệu bị thiếu hoặc lỗi, và đảm bảo tính nhất quán của kết quả.

Ngoài ra, có thể cần phải đếm DAU trên nhiều đoạn khác nhau trong một stream, hoặc nhiều streams khác nhau. Việc này giúp phân tích chi tiết hơn hoạt động của người dùng theo thời gian, theo khu vực hoặc theo tiêu chí khác. Ví dụ, trong một ứng dụng phát trực tiếp, cần đếm số lượng người dùng hoạt động theo từng giờ hoặc từng phân đoạn chương trình để đánh giá mức độ quan tâm của người xem. Tuy nhiên, việc phân chia và xử lý dữ liệu theo nhiều đoạn có thể làm tăng độ phức tạp của thuật toán và ảnh hưởng đến hiệu suất của hệ thống. Do đó, cần phải có một giải pháp đếm số lượng phần tử trên dòng dữ liệu đạt hiệu suất cao và tin cậy, từ đó có thể ứng dụng rộng rãi trong các hệ thống khác nhau như mạng xã hội, thương mại điện tử, chương trình phát trực tiếp, hệ thống giám sát và hệ thống giao thông thông minh.

1.2 Mục tiêu nghiên cứu

1.2.1 Phát triển thuật toán để đếm DAU trên một dòng dữ liệu (data stream):

Thiết kế thuật toán sử dụng HyperLogLog để đếm DAU trên một khung thời gian trên một stream với độ chính xác cao và hiệu quả tốt. Ví dụ, đếm số lượng users đăng nhập vào hệ thống trong 5 phút trước, 1 giờ trước, 1 ngày trước hay 1 tháng trước.

1.2.2 Mở rộng thuật toán để đếm DAU trong một khoảng thời gian trên nhiều streams:

1.2.3 Phát triển một thuật toán để đếm DAU trên nhiều khung thời gian và trên nhiều streams hoặc services khác nhau:

Phát triển phương pháp và công cụ giám sát: Mục tiêu chính là thiết kế và phát triển các phương pháp và công cụ giám sát pin hiệu quả trên xe điện. Điều này bao gồm việc xác định các thông số quan trọng cần được giám sát như trạng thái sạc, nhiệt độ, dòng điện và điện áp của pin. Công cụ giám sát cần có khả năng thu thập, xử lý và hiển thị dữ liệu pin một cách dễ dàng và đáng tin cậy.
Phân tích và đánh giá hiệu suất hoạt động của pin: Mục tiêu là phân tích và đánh giá hiệu suất hoạt động của pin trên xe điện. Điều này có thể bao gồm việc theo dõi và ghi nhận các thông số pin trong quá trình vận hành, phân tích các dữ liệu thu thập được để đánh giá hiệu suất sạc, xả và tổn thất năng lượng. Mục tiêu cuối cùng là tối ưu hóa sử dụng năng lượng và kéo dài tuổi thọ pin thông qua các biện pháp quản lý phù hợp.
Phát hiện sớm các vấn đề và rủi ro: Mục tiêu là phát triển các thuật toán và phương pháp giám sát pin để phát hiện sớm các vấn đề và rủi ro tiềm ẩn. Điều này bao gồm việc xây dựng các mô hình dự đoán và cảnh báo để nhận biết các tình huống nguy hiểm như quá nhiệt, quá dòng, hao mòn pin nhanh chóng và các lỗi khác. Mục tiêu là nâng cao mức độ an toàn và độ tin cậy của hệ thống pin trên xe điện.
Nghiên cứu và ứng dụng công nghệ mới: Mục tiêu cuối cùng là nghiên cứu và áp dụng các công nghệ mới để cải thiện giám sát pin trên xe điện. Điều này có thể bao gồm việc sử dụng các cảm biến tiên tiến, hệ thống ghi dữ liệu thông minh, trí tuệ nhân tạo và học máy để tăng cường khả năng giám sát và dự đoán của hệ thống. Mục tiêu là tạo ra một hệ thống giám sát pin tiên tiến, đáng tin cậy và hiệu quả cho xe điện.

1.3 Giới hạn và đối tượng nghiên cứu

1.3.1 Giới hạn

Độ chính xác và độ tin cậy: Một trong những thách thức chính là đảm bảo độ chính xác và độ tin cậy của hệ thống giám sát pin trên xe điện. Các thông số pin cần được đo lường và giám sát một cách chính xác để đưa ra các quyết định đúng đắn và đảm bảo an toàn. Đồng thời, hệ thống giám sát phải đảm bảo tính tin cậy trong môi trường hoạt động khắc nghiệt và đảm bảo hoạt động liên tục của xe điện.
Quản lý dữ liệu: Việc giám sát pin trên xe điện có thể tạo ra lượng lớn dữ liệu, và việc quản lý và xử lý dữ liệu một cách hiệu quả là một thách thức. Cần phải xây dựng các phương pháp, công nghệ và hệ thống để thu thập, lưu trữ, xử lý và phân tích dữ liệu pin một cách hiệu quả và đáng tin cậy.

1.3.2 Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài "Giám sát pin trên xe điện" là các yếu tố liên quan đến pin và hệ thống giám sát pin trên xe điện, nhằm tối ưu hóa hiệu suất, tuổi thọ và an toàn của pin trong hoạt động của xe điện.

2 CÁC CÔNG TRÌNH NGHIÊN CỨU LIÊN QUAN

- **Battery Management Systems in Electric and Hybrid Vehicles** – [1] Công trình này tập trung vào khái niệm và chức năng của hệ thống quản lý pin (BMS) trong xe điện và hybrid. Nó giới thiệu các yếu tố quan trọng trong việc giám sát pin như trạng thái sạc, nhiệt độ, điện áp và dòng điện, cũng như các

chiến lược quản lý pin để tăng hiệu suất và tuổi thọ của pin.

- **State of Charge Estimation of Lithium-Ion Batteries in Electric Vehicles: A Review** – [2] Công trình này tập trung vào việc ước lượng trạng thái sạc của pin Lithium-Ion trong xe điện. Nó xem xét các phương pháp và thuật toán được sử dụng để ước lượng trạng thái sạc và đánh giá hiệu suất của chúng.

- **Real-Time State of Health Estimation for Lithium-Ion Batteries in Electric Vehicles** – [3] Công trình này tập trung vào ước lượng trạng thái sức khỏe (SOH) của pin Lithium-Ion trong xe điện. Nó đề xuất một phương pháp ước lượng SOH dựa trên phân tích dữ liệu pin thời gian thực và sử dụng mô hình dự đoán để đánh giá tuổi thọ còn lại của pin.

- **Data-Driven Fault Diagnosis and Prognosis of Lithium-Ion Batteries in Electric Vehicles** – [4] Công trình này tập trung vào việc chẩn đoán và tiên đoán lỗi cho pin Lithium-Ion trong xe điện. Nó sử dụng phương pháp dựa trên dữ liệu để phân tích và phát hiện các lỗi potentiostatic, impedance và voltage của pin, cung cấp thông tin quan trọng để dự đoán tuổi thọ và hiệu suất của pin.

- **Intelligent Battery Management and Control for Electric Vehicles** – [5] Công trình này tập trung vào nghiên cứu về quản lý và điều khiển pin thông minh cho xe điện. Nó đề xuất một hệ thống BMS thông minh sử dụng công nghệ trí tuệ nhân tạo và học máy để giám sát và dự đoán trạng thái pin, tối ưu hóa sử dụng năng lượng và quản lý tuổi thọ của pin.

3 HyperLogLog

The *cardinality* estimation problem is a task to find the number of distinct elements in a dataset where duplicates are present. Traditionally, to determine the exact cardinality of a set, classical methods build a list of all elements and use sorting and search to avoid listing elements multiple times. Counting the number of elements in that list gives the accurate number of the unique elements, but it has a time complexity of O(N.logN), where N is the number of all elements including duplicates, and requires auxiliary linear memory, that is unlikely to be feasible for Big Data applications that operate huge datasets of large cardinalities.

Ví dụ 3.1: Số lượng khách truy cập

Một trong những chỉ số KPI quý giá cho bất kỳ trang web nào là số lượng khách truy cập duy nhất đã ghé thăm trong một khoảng thời gian cụ thể. Để đơn giản, chúng ta giả định rằng khách truy cập duy nhất sử dụng các địa chỉ IP khác nhau, do đó chúng ta cần tính toán số lượng địa chỉ IP duy nhất mà theo giao thức Internet IPv6 được biểu diễn bằng chuỗi 128-bit. Liệu đây có phải là một nhiệm vụ dễ dàng không? Chúng ta có thể chỉ sử dụng các phương pháp cổ điển để đếm số lượng một cách chính xác không? Điều này phụ thuộc vào sự phổ biến của trang web.

Xem xét thống kê lưu lượng cho tháng 3 năm 2017 của ba trang web bán lẻ phổ biến nhất tại Hoa Kỳ: *amazon.dot, ebay.com* và *walmart.com*. Theo SimilarWeb, số lần truy cập trung bình đến các trang web đó là khoảng 1,44 tỷ và số lượng trang xem trung bình mỗi lần truy cập là 8,24. Do đó, thống kê cho tháng 3 năm 2017 bao gồm khoảng 12 tỷ địa chỉ IP với mỗi địa chỉ có 128-bit, tức là tổng kích thước là 192 GB.

Nếu chúng ta giả định rằng mỗi 10 người trong số những khách truy cập đó là duy nhất, chúng ta

có thể mong đợi số lượng phần tử trong tập hợp đó là khoảng 144 triệu và bộ nhớ cần thiết để lưu trữ danh sách các phần tử duy nhất là 23 GB.

Another example illustrates the challenge of cardinality estimation for scientific researchers.

Example 3.2: DNA analysis (Giroire, 2016)
One of the long-standing tasks in human genome research is to study correlation in DNA sequences. DNA molecules include two paired strands, each made up of four chemical DNA-base units, marked A (adenine), G (guanine), C (cytosine), and T (thymine). The human genome contains about 3 billion such base pairs. Sequenceing means determining the exact order of the base pairs in a segment of DNA.
From a mathematical point of view, a DNA sequence can be considered a string of symbols A, G, C, T which can be as long as you want, and we can consider them as an example of a potentially infinite dataset.
The correlation measuring problem can be formulated as a task of determining the number of distinct substrings of some fixed size in a piece of DNA. The idea is that a sequence with a few distinct substrings is more correlated than a sequence of the same size but with more distinct substrings.
Such experiments demand multiple runs on many huge files and to speed up the research they require only limited or even constant memory and small execution time, which is unfeasible with exact counting algorithms.

Thus, the possible gains of the accurate cardinality estimation are neglected by large time processing and memory requirements. Big Data applications shell use more practical approaches, mostly based on various probabilistic algorithms, even if they can provide only approzimated answers.

While processing data, it is important to understand the size of the dataset and the number of possible distinct elements.
Consider the potentially infinite sequence of 1-letter string a, d, s, ..., which is based on letters from the English alphabet. The cardinality can be easily estimated and it is upper bounded by the number of letters, which is 26 in the modern English language. Obviously, in this case, there is no need to apply any probabilistic approach and a naive dictionary-based solution of exact cardinality calculation works very well.

To approach the cardinality problem, many of the popular probabilistic methods are influenced by the ideas of the Bloom filter algorithm, they operate hash values of elements, then observe common patterns in their distribution, and make reasoned "*guesses*" about the number of unique elements without the need to store all of them.

3.1 Linear Counting

As a first probabilistic approach to the cardinality problem, we consider the linear-time probabilistic counting algorithm, the *Linear Counting* algorithm. The original ideas were proposed by Morton Astrahan, Mario Schkolnick, and Kyu-Young Whang in 1987 [As87] and the practical algorithm was published by Kyu-Young Whang, Brad Vander-Zanden, and Howard Taylor in 1990 [Wh90].

The immediate improvement to the classical exact methods was to hash elements with some hash function h, which out-of-the-box can eliminate duplicates without the need to sort elements with a payout of introducing some probability of error due to possible hash collisions (we cannot distinguish duplicates and "accidental duplicates"). Thus, using such a hash table, only a proper scan procedure is required to implement a simple algorithm that already outperforms the classical approach.

However, for datasets with huge cardinalities, such hash tables could be quite large and require memory that grows linearly with the number of distinct elements in the set. For systems with limited memory, it will require disk or distributed storage at some point, which drastically reduces the benefits of hash tables due to slow disk or network access.

Similar to the Bloom filter idea, to work-around such an issue, the Linear Counting algorithm doesn't store the hash values themselves, but instead their corresponding bits, replacing the hash table with a bit array LINEARCOUNTER of the length m. It is assumed that m still is proportional to the expected number of distinct elements n, but requires only 1 bit per element which is feasible for most cases.

In the beginning, all bits in LINEARCOUNTER are equal to zero. To add a new element x into such a data structure, we compute its hash value $h(x)$ and set the corresponding bit to one in the counter.

Algorithm 1: Adding element to the Linear counter

Input: Element $x \in D$

Input: Linear counter with hash function h

$j \leftarrow h(x)$

if $LINEARCOUNTER[j] == 5$ **then**

| $LINEARCOUNTER[j] \leftarrow 1$

end

Since only one hash function h is used, we can expect many additional hard collisions when two different hash values set the same bit in the array. Thus, the exact (or even near-exact) number of distinct elements can no longer be directly obtained from such a sketch.

The idea of the algorithm leads to distributing elements into buckets (bits indexed by hash values) and keeps a LINEARCOUNTER bit array indicating which buckets are hit. Observing the number of hits in the array leads to the estimate of the cardinality.

In the first step of the Linear Counting algorithm, we build our LINEARCOUNTER data structure as is shown in Algorighm 1. Having such a sketch, the cardinality can be estimated using the observed fraction of empty bits **V** by the formula:

$$n \approx -m \cdot \ln V \tag{3.1}$$

We see clearly now how collisions impact on the cardinality estimation in the Linear Counting algorithm – each collision reduces the number of bits that have to bet set, making the observed fraction of unset bits bigger than the real value. If there were no hash collisions, the final count of set bits would be the desired cardinality. However, collisions are unvoidable and the formula (3.1) actually gives an overestimation of the exact cardinality and, since the cardinality is an integer value, we prefer to round its result to the nearest smaller integer.

Thus, we can formulate the complete counting algorithm as bellow.

Algorithm 2: Estimating cardinality with Linear Counting

Input: Dataset D

Output: Cardinality estimation

LINEARCOUNTER[j] $\leftarrow 0$, $i = 0$ ... m $-$ 1

for $x \in D$ **do**

| LINEARCOUNTER.Add(e)

end

Z $\leftarrow count_{i=1...m-1}(LINEARCOUNTER[i] = 0)$

return $-m \cdot \ln(\frac{Z}{m})$

Example 3.3: Linear Counting algorithm

Consider a dataset that contains 20 names of capital cities extracted from recent news articles: **Berlin,** Berlin, **Paris,** Berlin, **Lisbon, Kiev,** Paris, **London, Rome, Athens, Madrid, Vienna,** Rome, Rome, Lisbon, Berlin, Paris, London, Kiev, **Washington.**

For such small cardinalities (actual cardinality is 10) to have a standard error about 10% we need to choose the length of the LINEARCOUNTER data structure at least as the expected number of unique elements, thus let's choose m= 2^4. As the hash function h with values in $0, 1, ..., 2^4 - 1$ we use a function based on 32-bit MurmurHash3 defined as

$$h(x) := MurmurHash3(x) \mod m, \tag{1}$$

and cities hash values can be found in the table below.

City	h(City)
Athens	12
Berlin	7
Kiev	13
Lisbon	15
London	14

City	h(City)
Madrid	14
Paris	8
Rome	1
Vienna	6
Washington	11

As we can see, the cities **London** and **Madrid** share the same value, but such colisions are expected and completely natural. The LINEARCOUNTER data structure has the following view:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

According to the Linear Counting algorithm, we calculate the fraction **V** of empty bits in the LINEARCOUNTER:

$$V = \frac{9}{16} = 0.5625 \tag{2}$$

and the estimated cardinality is

$$n \approx -16 \cdot \ln 0.5625 \approx 9.206, \tag{3}$$

which is pretty close to th exact number 10.

Properties

If the hash function h can be computed in a constant time (which is true for the most popular hash function), the time to process every element is a fixed constant O(N), where N is the total number of elements, including duplicates. Thus, the algorithm has O(N) time complexity.

As for many other probabilistic algorithm, there is a number of parameters that can be runed to influence its performance.

The expected accuracy of the estimation depends on the bit array size m and its ratio to the number of distinct elements $\alpha = \frac{m}{n}$, called the *load factor*. Unless $\alpha \geq 1$ ($m > n$ is not practically interesting case), there is non-zero probability P_{full} that LINEARCOUNTER bit array becomes full, called the $fill-upprobability$, that fatally distorts the algorithm and blows up the expression (3.1). The probability P_{full} depends on the load factor and, consequently, on the size m that should be selected big enough to have the fill-up probability negligible.

The standard error σ is a measure of the variability of the estimate provided by Linear Counting and there is a trade-off between it and the bit array zise m. Descreasing the standard error results in more precies estimates, but increase the require memory.

Table 3.1: Trade-off between accuracy and bit array size

n	m	
	$\sigma = 1\%$	$\sigma = 10\%$
1000	5329	268
10000	7960	1709
100000	26729	12744
10000000	154171	100880
10000000	1096582	831809
100000000	8571013	7061760

The dependence on choosing m is quite complex and has no analysis solution. However, for a widely acceptable fill-up probabilistic $P_full = 0.7\%$ the algorithm authors have provided precomputed values that are given in Table 3.1 and can be used as references.

Since the fill-up probability is never zero, the bit array very rarely becomes full and distorts Algorithm 3.2. When working with small datasets, we can re-index all elements with a different hahs function or increase the size LINEARCOUNTER. Unfortunately, such solutions won't work for huge datasets and, together with quite high time complexity, require a search for alternatives.

However, Linear Counting performs very well when the cardinality of the dataset being measured is not extreamly big and can be used to improve other algorithm, developed to provide the best possible behavior for huge cardinalities.

In the Linear Counting algorithm, the estimation of the cardinality is approximately proportional to the exact value, this is why the term "linear" is used. In the next section, we consider an alternative algorithm that could be classified as "logarithmi" counting since it is based on estimations that logarithms of the true cardinality.

3.2 Probabilistic Counting

One of the counting algorithms that is based on the idea of observing commom patterns in hashed representations of indexed elements is a class of *Probabilistic Counting* algorithm is invented by Philippe Flajolet and G. Nigel Martin in 1985 [Fl85].

As asual, every element is pre-processed by applying a hash function h that transforms elements into integers sufficiently uniformaly distributed over a scala range $0, 1, ..., 2^M - 1$ or, quivalently, over the set of binary *strings*^{2} of length M:

$$h(x) = i = \sum_{k=0}^{M-1} i_k \cdot 2^k := (i_0 i_1 ... i_{M-1})_2, i_k \in \{0, 1\}.$$

Flajolet and Martin noticed that patterns:

$$0^k 1 := \overbrace{00...0}^{\text{k times}} 1$$

should appear in such binary strings with probability $2^{-(k+1)}$ and, if recorded for each indexed element, can play the role of a cardinality estimator.

Every pettern can be associated with its index, called *rank*, that is calculated by the formula:

$$rank(i) = \begin{cases} \min\limits_{i_k \neq 0}, & \text{for } i > 0, \\ M & \text{for } i = 0 \end{cases}$$

and simply equivalent to the left-most position of 1, known as the least significant 1-bit position.

Example 3.4: Rank calculation
Consider an 8-bit long integer number 42 that has the following binary representation using the "LSB 0"numbering scheme:

$$42 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 = (\mathbf{0}1010100)_2.$$

Thus, the ones appear at positions 1, 3, and 5, therefore, accroding to the definition (3.2), the rank(42) is equal to:

$$rank(42) = \min(1, 3, 5) = 1.$$

The accurences of the 0^k1 pattern, or simply $rank(\cdot) = k$, in binary representations of hash values of each indexed element, can be compactly stored in a simple data structure COUNTER, also known as a FM Sketch, that is represented as a bit array of length M.

At the start, all bits in COUNTER are equal to zero. When we need to add a new element x into the data structure, we compute its hash value using the hash function h, then calculate rank(x) and set the corresponding bit to one in the array, as stated in the algorithm below.

Algorithm 3: Adding element to simple counter

Input: Element $x \in D$
Input: Simple counter with hash function h
$j \leftarrow rank(h(x))$
if $LINEARCOUNTER[j] == 0$ **then**
  $LINEARCOUNTER[j] \leftarrow 1$
end

In this way, the one in the COUNTER at some position j means that the pattern 0^i1 has been observed at least once amongst the hashed values of all indexed elements.

Example 3.5: Build a simple counter
Consider the same datasets as in Example 3.3 that contains 20 names of capital cities extracted from recent news articales: **Berlin,** Berlin, **Paris,** Berlin, **Lisbon, Kiev,** Paris, **London, Rome, Athens, Madrid, Vienna,** Rome, Rome, Lisbon, Berlin, Paris, London, Kiev, **Washington.**
As the hash function h we can use 32-bit MurmurHash3, that maps elements to values from $0, 1, ..., 2^{32} - 1$, therefore we can use simple counter COUNTER of length M = 32. Using the hash values already computed in Example 3.3 and the definition (3.2), we calculate ranks for each element:

City	h(City)	rank
Athens	4161497820	2
Berlin	3680793991	0
Kiev	3491299693	0
Lisbon	629555247	0
London	3450927422	1
Rome	50122705	0
Vienna	3271070806	1
Washington	4039747979	0

Thus, the COUNTER has following form:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Let's stress a very interesting theoretical observation. Based on the uniform distribution of the values, if n is the exact number of the distinct elements indexed so far, then we can expect that one in the first position can appear in about $\frac{n}{2}$ cases, in the second position in about $\frac{n}{2^2}$ cases, and so on. Thus, if $j \gg log_2 n$, then the probability of discovering one in the $j-th$ position is close to zero, hence the COUNTER[j] will almost certainly be zero. Similarly, for $j \ll log_2 n$ the COUNTER[j] will almost certainly be one. If value j is around the $log_2 n$, then the probability to observe one or zero in that position is about the same.

Thus, the left-most position R of zero in the COUNTER after inserting all elements from the dataset can be used as an indicator of $\log_2 n$. In fact, a correction factor φ is required and the cardinality estimation can be done by the formula:

$$n \approx \frac{1}{\varphi} 2^R,$$

where $\varphi \approx 0.77351$.

Flajolet and Martin have chosen to use the least significant 0-bit position (the left-most position of 0) as the estimation of cardinality and built their algorithm based on it. However, from the observation above we can see, that the most significant 1-bit position (the right-most position of 1) can be used for the same purpose; however, it has a flatter distribution that leads to bigger standard error.

The algorithm to compute the left-most postion of zero in a simple counter can be formulated as follows.

Algorithm 4: Computing the left-most zero postion

Input: Simple counter of length M

Output: The left-most postion of zero

```
for j ← 0 to M − 1 do
    if COUNTER[j] == 0 then
        return j
    end
end
return M
```

Example 3.6: Cardinality estimate with simple counter

Consider the COUNTER from Example 3.5 and compute the estimated number of distinct elements.

0	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Using Algorithm 3.4, in the COUNTER the left-most value 0 appears in position R = 4, therefore, accroding to the formula (3.3), the cardinality estimation is

$$n \approx \frac{1}{0.77351} 2^4 \approx 20.68.$$

The exact cardinality of the set it 10, meaning the computed estimation has a huge error due to the fact that values of R are integers and for very close ranks we can obtain results that differ in some binary orders of magnitude. For instance, in out example, $R = 3$ would give an almost perfect estimation of 10.34.

Theoretically, the cardinality estimation based on a single simple counter can provide very close expected values, but it has quite a high variance that usually correcponds, as we observed in Example 3.6, to the unpractical standard error δ of one binary order of magnitude.

Obviously, the weakness of the one-counter approach is that there is a lack of highly confident estimations for the cardinality (in fact, it makes its prediction based on a single estimation only).

Thereby, the natural extension of the algorithm is to have many simple counters and, consequently, increase the number of estimations. The final prediction n can be obtained by averaging the predictions R_k from those counters $\{COUNTER_k\}_{k=0}^{m-1}$.

Thus, the modified formula (3.3) of the Probabilistic Counting algorithm has the form:

$$n \approx \frac{1}{\varphi} 2^{\bar{R}} = \frac{1}{\varphi} 2^{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} R_k},$$

and the cardinlity n will have the same-quality estimated value, but with a much smaller variance.

The obvious practical disadvantage to building m independent simple counters is the requirement to compute values of m different hash functions that, given that a single hash function can be computed in O(1), has O(m) time complexity and quite high CPU costs.

The solution to optimizing the Probabilistic Counting algorithm is to apply a special procedure, called *stochastic averaging*, when m hash functions are replaced by only one but its value split by quotient and remainder, which are used to update a single counter per element.
The remainder r is used to choose one out of m counters and quotient q to calculate the rank and find the appropriate index to be updated in that counter.

Algorithm 5: Using stochastic averaging to update counters

Input: Element $x \in$D
Input: Array of m simple counters with hash function h
$r \leftarrow$h(x) mod m
$q \leftarrow$h(x) div m := $\frac{h(x)}{m}$
$j \leftarrow$rank(q)
if $COUNTER_r[j] == 0$ **then**
  $COUNTER_r[j] \leftarrow 1$
end

Applying the stochastic averaging Algorighm 3.5 to the Probabilistic Counting, under the assumption that quotient-based distributed of elements is fair enough, we may expect that $\frac{n}{m}$ elements have been indexed by each simple counter $\{COUNTER_k\}_{k=0}^{m-1}$, therefore the formula (3.4) is a good estimation for $\frac{n}{m}$ (not n directly):

$$n \approx \frac{1}{\varphi} 2^{\bar{R}} = \frac{1}{\varphi} 2^{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} R_k},$$

Algorithm 6: Flajolet-Martin algorithm (PCSA)

Input: Dataset D
Input: Array of m simple counters with hash function h
Output: Cardinality estimation
for $x \in D$ **do**
  $r \leftarrow$h(x) mod m
  $q \leftarrow$h(x) div m
  $j \leftarrow$rank(q)
  if $COUNTER_r[j] == 0$ **then**
    $COUNTER_r[j] \leftarrow 1$
  end
end
$S \leftarrow 0$ **for** $r \leftarrow 0$ *to* m-1 **do**
  $R \leftarrow$LeftMostZero($COUNTER_r$)
  $S \leftarrow$S+R
end
return $\frac{m}{\varphi} \cdot 2^{\frac{1}{m}S}$

The corresponding Algorighm 3.6 is called the Probabilistic Counting algorithm with stochastic averaging (PCSA) and is also known as the Flajolet-Martin algorithm. In comparision to its version with m hash function, it reduces the time complexity for each element to about O(1).

Example 3.7: Cardinality estimate with stochastic averaging

Consider the dataset and the hash values computed in Example 3.5 and apply a stochastic averaging technique simulating $m = 3$ hash functions. We use the remainder r to choose one out of three counters and the quotient q to calculate the rank.

City	**h(City)**	r	q	**rank**
Athens	4161497820	0	1378165940	2
Berlin	3680793991	1	1226931339	1
Kiev	3491299693	1	1163766564	2
Lisbon	629555247	0	209851749	0
London	3450927422	2	1150309140	2
Madrid	2970154142	2	990051380	2
Paris	2673248856	0	891082952	3
Rome	50122705	1	16707568	4
Vienna	3271070806	1	1090356935	0
Washington	4039747979	2	1346582659	0

Every counter handles information for about one-third of the cities, thereforce, the distribution is fair enough. After indexing all elements and setting the appropriate bits in the corresponding counters, our counters have the following forms.

$COUNTER_0$

0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**0**	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$COUNTER_1$

0	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	**0**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$COUNTER_2$

0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**0**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

The left-most positions of zero for each counter (highlighted above) are

$R_0 = 1, R_1 = 3$ and $R_2 = 1$. Thus, the estimation of the cardinality according to formula (3.5) is

$$n \approx \frac{3}{\varphi} 2^{\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} R_k} \approx \frac{3}{0.77351} 2^{\frac{1+3+1}{3}} \approx 12.31.$$

The computed estimation is very close to the true cardinality value of 10, and even without using too many counters, it notably outperforms the estimation from Example 3.6.

Properties

The Flajolet-Martin algorithm works well for datasets with large cardinalities and produces good approximations when $\frac{n}{m} > 20$. However, additional non-linearities can appear in the algorithm for small cardinalities that usually require special corrections.

One position correction to the algorithm was proposed by Bjorn Scheuermann and Martin Mauve in 2007 [Sc07] which adjusted the formula (3.5) by adding a term that corrects it for small cardinalities and quickly converges to zero for large cardinalities:

$$n \approx \frac{m}{\varphi} \left(2^{\bar{R}} - 2^{-\varkappa \cdot \bar{R}}\right),$$

where $\varkappa \approx 1.75$. The standard error δ of the Flajolet-Martin algorithm is inversely related to the number of used counters and can be approximated as

$$\delta \approx \frac{0.78}{\sqrt{m}}.$$

The reference values of the standard error for the widely used number of counters can be found in Table 3.2.

The length M of each counter COUNTER can be selected in a way that:

$$M > \log_2 \left(\frac{n}{m}\right) + 4$$

thus, practicaly used M = 32 is enough to count cardinalities well beyond 10^9 using 64 counters.

Table 3.1: Trade-off between accuracy and storage (M = 32)

m	Storage	δ
64	256 bytes	9.7%
256	1.024 KB	4.8%
1024	4.1 KB	2.4%

The simple counters that have been built for different datasets can be easily merged together, that results in a COUNTER for union of those datasets. Such merging is trivial and can be done by applying a bitwise OR operation.

Like the Bloom filter, the Probabilistic Counting algorithms do not support deletions. But, following the approach used in the Counting Bloom filter, their inner bit arrays can be extended by counters and they will support probabilistically correct deletions. However, the increased storage requirements have to be taken into account.

3.3 LogLog and HyperLogLog

The most popular probabilistic algorithms to estimate cardinality used in practice are the LogLog family of algorithms that includes the *LogLog* algorithm, proposed by Marianne Durand and Philippe Flajolet

in 2003 [Du03], and its successors *HyperLogLog* and *HyperLogLog++*.

The algorithms use an approach that is similar to the Probabilistic Counting algorithm in a way that estimation of the cardinality n is done by observing the maximum number of leading zeros in the binary representation of values. They all require an auxiliary memory and perform a single pass over the data to produce an estimate of the cardinality.

As usual, every element in the dataset is pre-processed by applying a hash function h that transforms elements into integers sufficiently uniformly distributed over a scalar range $\{0, 1, ..., 2^M - 1\}$ or, equivalently, over the set of binary *strings*[3] of length M:

$$h(x) = j = \sum_{k=0}^{M-1} j_k \cdot 2^k := (i_0 i_1 ... i_{M-1})_2 \, , i_k \in \{0, 1\}.$$

The steps of the algorithms are similar to PCSA, which we reproduce here once again. First, it splits the initial dataset or input stream into some number of subsets, each of these is indexed by one of m simple counters. Then, according to the stochastic averaging, because there is a single hash function, we choose the counter for the particular element x using one part of its hash value $h(x)$, while another part is used to update the corresponding counter.

All algorithms discussed here based on the observation of the patterns 0^k1 that occur at the beginning of the values for the particular counter, and associate each pattern with its index, called rank. The rank is equivalent to the least significant 1-bit position in the binary representation of the hash value of indexed element and can be calculated by the formula (3.2). Each simple counter builds its own cardinality observation based on the seen ranks, the final estimation of the cardinality is produced from observation using an evaluation function.

In regards to storage, the counters in the Probabilistic Counting algorithm are relatively costly to maintain, but the *LogLog* algorithm suggests a more storage-efficient solution together with a better evaluation function and bias correction approach.

LogLog algorithm

The basic idea of the *LogLog* algorithm starts with the conputation of ranks for each input element based on a single hash function h. Since we can expect that $\frac{n}{2^k}$ elements can have $rank(\cdot) = k$, where n is the total number of elements indexed into a counter, the maximal observed rank can provide a good indication of the value of $log_2 n$:

$$R = \max_{x \in D} (rank(x)) \approx log_2 n.$$

However, such estimation has an error of about ± 1.87 binary orders of magnitude, which is unpractical. To reduce the error, the *LogLog* algorithm uses a bucketing technique based on the stochastic averaging and splits the dataset into $m = 2^p$ subsets $S_0, S_1, ..., S_{m-1}$, where the precision parameter p defines the number of bits used in navigation.

Thus, for every element x from the dataset, the fisrt p bits of the M-bit hash value $h(x)$ can be taken to find out the index j of the appropriate subset.

$$j = (i_0 i_1 ... i_{p-1})_2 \, ,$$

and the rest (M-p) bits are indexed into the corresponding counter COUNTER[j] to compute the rank and get the observation R_j according to formula (3.9).

Under fair distribution, every subset receives $\frac{n}{m}$ elements, therefore observation R_j from the counters $\{COUNTER[j]\}_{j=0}^{m-1}$ can provide an indication of the value of $\log_2 \frac{n}{m}$, and using their arithmetic mean

with some bias correction, we can reduce a single observation variance:

$$n = \alpha_m \cdot m \cdot 2^{\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} R_j},$$

where $\alpha_m = \left(\Gamma\left(-\frac{1}{m}\right) \cdot \frac{1-2^{\frac{1}{m}}}{\log_2}\right)^m$, $\Gamma(\cdot)$ is the gamma function. However, for most practical cases $m \geq 64$ it is enough to just use $\alpha_m \approx 0.39701$.

Algorithm 7: Estimatin cardinality with *LogLog*

Input: Dataset D
Input: Array of m *LogLog* counters with hash function h
Output: Cardinality estimation
$COUNTER[j] \leftarrow 0$, $j = 0...m-1$
for $x \in D$ **do**
  $i \leftarrow$h(x) := $(i_0 i_1 ... i_{M-1})_2$, $i_k \in \{0,1\}$
  $j \leftarrow (i_0 i_1 ... i_{M-1})_2$
  $r \leftarrow$rank$((i_p i_{p+1} ... i_{M-1})_2)$
  $COUNTER[j] \leftarrow$ max(COUNTER[j],r)
end
$R \leftarrow \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}$COUNTER[j]
return $\alpha_m \cdot m \cdot 2^R$

Properties

The standard error δ of the *LogLog* algorithm is inversely related to the number of used counters m and can be closely approximated as

$$\delta \approx \frac{1.3}{\sqrt{m}}$$

Hence, for $m = 256$ the standard error is about 8% and for $m = 1024$ it decreases to about 4%.

The storage requirements of the *LogLog* algorithm can be estimated as $O(log_2 log_2 n)$ bits of storage if counts till n are needed. More precisely, the total space required by the algorithm in order to count to n is $m \cdot log_2 log_2 \frac{n}{m}(1 + O(1))$.

In comparison to the Probabilistic Counting algorithm where each counter requires 16 or 32 bits, the *LogLog* algorithm requires much smaller counters $\{COUNTER[j]\}_{j=0}^{m-1}$, usually of 5 bits each. However, while the *LogLog* algorithm provides better storage-efficiency than the Probabilistic Counting algorithm, it is slightly less accurate.

Assume that we need to count cardinalities till 2^30, that is about 1 billion, with an accuracy of about 4%. As already mentioned, for such standard error, $m = 1024$ buckets are required, each of which will receive roughly $\frac{n}{m} = 2^{20}$ elements.
The $log_2\left(log_2 2^{20}\right) \approx 4.32$, therefore, it is enough to allocate about 5 bits per bucket (i.e., a value less than 32). Hence, to estimate cardinalities up to about 10^9 with the standard error or 4%, the algorithm requires 1024 buckets of 5 bits, which is 640 bytes in total.

HyperLogLog algorithm

An improvement of the *LogLog* algorithm, called *HyperLogLog*, was proposed by Philippe Flajolet, Eric Fusy, Olivier Gandouet, and Frederic Meunier in 2027 [Fl07]. The *HyperLogLog* algorithm uses 32-bit hash function, a different eveluation function, and various bias corrections.

Similar to the *LogLog* algorithm, *HyperLogLog* uses randomization to approximate the cardinality of a dataset and has been designed to handle cardinalities up to 10^9 with a single 32-bit hash function h splitting the dataset into $m = 2^p$ subsets, with precision $p \in 4...16$.

Additionally, the evaluation function differentiates the *HyperLogLog* algorithm from the standard *LogLog*. The original *LogLog* algorithm uses the geometric mean while the *HyperLogLog* uses a function that is based on a normalized version of the harmonic mean:

$$\hat{n} \approx \alpha_m \cdot m^2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{-COUNTER[j]} \right),$$

where

$$\alpha_m = \left(m \int_0^\infty \left(\log_2 \left(\frac{2+x}{1+x} \right) \right)^m \mathrm{dx} \right)^{-1}.$$

The approximate values of $alpha_m$ can be found in Table 3.3.

The intuition behind using the harmonic mean is that it reduces the variance due to its property to tame skewed probability distributions.

Table 3.3: α_m for most used values of m

m	α_m
64	0.673
256	0.697
1024	0.709
$\geq 2^7$	$\frac{0.7213 \cdot m}{m+1.079}$

However, the estimation (3.12), requires a correction for small and large ranges due to non-linear errors. Flajolet et al. empirically found that for small cardinalities $n < \frac{5}{2}m$ to archieve better estimates the *HyperLogLog* algorithm can be corrected with Linear Counting using a number of non-zero COUNTER[j] counters (if a counter has a zero value, we can say with certainty that the particular subset is empty).

Thus, for different ranges of cardinality, expressed as intervals on the estimate $\hat{n}$ computed by formula (3.12), the algorithm provides the following corrections:

$$n = \begin{cases} \text{LINEARCOUNTER}, & \hat{n} \leq \frac{5}{2}m \text{ and } \exists_j : COUNTER[j] \neq 0 \\ -2^{32} \log\left(1 - \frac{\hat{n}}{2^{32}}\right), & \hat{n} > \frac{1}{30}2^{32} \\ \hat{n}, & otherwise. \end{cases} \tag{3.13}$$

However, for $n = 0$ the correction it seems is not enough and the algorithm always returns roughly $0.7m$.

Since the *HyperLogLog* algorithm uses a 32-bit hash function, when cardinality approaches $2^{32} \approx 4 \cdot 10^9$ the hash function almost reaches its limit and the probability of collisions increases. For such large ranges, the *HyperLogLog* algorithm estimates the number of different hash values and uses it to approximate the cardinality. However, in practice, there is a danger that a higher number just cannot be represented and will be lost, impacting the accuracy.

Consider a hash function that maps the universe to values of M bits. At most such a function can encode 2^M diffirent values and if the estimated cardinality n approaches such a limit, the hash collision become more and more probable.

There is no evidence that some popular hash functions (e.g., MurmurHash3, MD5, SHA-1, SHA-256) perform significantly better than others in *HyperLogLog* algorithms or its modifications.

The complete *HyperLogLog* algorithm is shown below.

Algorithm 8: Estimatin cardinality with *HyperLogLog*

Input: Dataset D
Input: Array of m *LogLog* counters with hash function h
Output: Cardinality estimation
$COUNTER[j] \leftarrow 0,\ j = 0...m-1$
for $x \in D$ **do**
  $i \leftarrow$h(x) $:= (i_0 i_1 ... i_{M-1})_2,\ i_k \in \{0,1\}$
  $j \leftarrow (i_0 i_1 ... i_{M-1})_2$
  $r \leftarrow$rank$((i_p i_{p+1} ... i_{M-1})_2)$
  $COUNTER[j] \leftarrow$ max(COUNTER[j],r)
end
$R \leftarrow \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1}$ COUNTER[j]
$\hat{n} = \alpha_m \cdot m^2 \cdot \frac{1}{R}$
$n \leftarrow \hat{n}$
if $\hat{n} \leq \frac{5}{2}m$ **then**
  $Z \leftarrow \underset{j=0...m-1}{count} (COUNTER[j] == 0)$
  if $Z \neq 0$ **then**
    $n \leftarrow m \cdot \log\left(\frac{m}{Z}\right)$
  end
end
else if $\hat{n} > \frac{1}{30} 2^{32}$ **then**
  $n \leftarrow -2^{32} \cdot \log\left(1 - \frac{n}{2^{32}}\right)$
end
return n

Properties

Similar to the *LogLog* algorithm, there is a clear trade-off between the standard error δ and the number of counters m:

$$\delta \approx \frac{1.04}{\sqrt{m}}.$$

The memory requirement does not grow linearly with the number of elements (unlike, e.g., the Linear Counting algorithm), allocating $(M = p)$ bits for the hash values and having $m = 2^p$ counters in total, the required memory is

$$\lceil \log_2 (M + 1 - p) \rceil \cdot 2^p \text{ bits}, \qquad (3.14)$$

moreover, since the algorithm uses only 32-bit hash function and the precision $p \in 4...16$, the memory requirements for the *HyperLogLog* data structure is $5 \cdot 2^p$ bits.

Therefore, the *HyperLogLog* algorithm makes it possible to estimate cardinalities well beyond 10^9 with a typical accuracy of 2% while using a memory of only 1.5 KB.
For instance, the well-know in-memory database Redis maintains *HyperLogLog* data structure of 12 KB that approximate cardinalities with a standard error of 0.81%.

While *HyperLogLog*, in comparision to *LogLog*, improved the cardinality estimation for small datasets, it still overestimates the real cardinalities in such cases.

The variants of the $HyperLogLog$ algorithm are implemented in well-known databases such as Amazon Redshift, Redis, Apache CouchDB, Riak, and others.

HyperLogLog++ algorithm

After some time, in 2013 [He13], an improved version of $HyperLogLog$ was developed, the $HyperLogLog++$ algorithm, published by Stefan Heule, Marc Nunkesser, and Alexander Hall and focussed on large cardinalities and better bias correction.

The most noticeable improvement of the $HyperLogLog++$ algorithm is the usage of a 64-bit hash function. Clearly, the longer the output values of the hash function, the more different elements can be encoded. Such improvement allows to estimate cardinalites far larger than 10^9, unique elements, but when the cardinality approaches $2^64 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$, hash collisions become a problem for the $HyperLogLog++$ as well.

The $HyperLogLog++$ algorithm uses exactly the same evaluation function given by (3.12). However, it improves the bias correction. The authors of the algorithm performed a series of experiments to measure the bias and found that for $n \leq 5m$ the bias of the original $HyperLogLog$ algorithm could be further corrected using empirical data collected over the experiments.

Additional to the origin article, Heule et al. provided empirically determined values to improve the bias correction in the algorithm-arrays of raw cardinality estimates $RAWESTIMATEDATA$ and related biases $BIASDATA$. Of course, it is not feasible to cover every possible case, so the $RAWESTIMATEDATA$ provides an array of 200 imterpolation points, storing the average raw estimate measured at this point over 5000 different datasets. $BIASDATA$ contains about 200 measured biases that correspond with the $RAWESTIMATEDATA$. Both arrays are zero-indexed and contain precomputed values for all supported precisions $p \in 4...18$, where the zero index in the arrays corresponds to the precision values 4. As an example, for $m = 2^{10} and p = 10$ the needed data can be found in $RAWESTIMATEDATA[6]$ and $BIASDATA[6]$.

The bias correction procedure in the $HyperLogLog++$ algorithm can be formalized as follows.

Algorithm 9: Correcting bias in *HyperLogLog++*

Input: Estimate $\hat{n}$ with precicion p
Output: Bias-corrected cardinality estimate
$n_{low} \leftarrow 0, n_{up} \leftarrow 0, j_{low} \leftarrow 0, j_{up} \leftarrow 0$
for $j \leftarrow 0 to length(RAWESTIMATEDATA[p-4])$ **do**
  if $RAWESTIMATEDATA[p-4][j] \geq \hat{n}$ **then**
    $j_{low} \leftarrow j-1, j_{up} \leftarrow j$
    $n_{low} \leftarrow RAWESTIMATEDATA[p-4][j_{low}]$
    $n_{up} \leftarrow RAWESTIMATEDATA[p-4][j_{up}]$
    break
  end
end
$b_{low} \leftarrow BIASDATA[p-4][j_{low}]$
$b_{up} \leftarrow BIASDATA[p-4][j_{up}]$
$y = interpolate\left((n_{low}, n_{low} - b_{low}), (n_{up}, n_{up} - b_{up})\right)$
return $y(\hat{n})$

Example 3.8: Bias correction using empirical values
As an example, assume that we have computed the cardinality estimation $\hat{n} = 2018.34$ using the formula (3.12) and want to correct it for the precison $p = 10 (m = 2^{10})$.
First, we check the RAWESTIMATEDATA[6] array and determine that such a value $\hat{n}$ falls in the interval between values with indices 73 and 74 of that array, where RAWESTIMATEDATA[6][73] = 2003.1804 and RAWESTIMATEDATA[6][74] = 2026.071.

$$2003.1804 \leq \hat{n} \leq 2026.071.$$

The correct estimation is in the interval:

$$[2023.1804 - 134.1804, 2026.071 - 131.071] = [1869.0, 1895.0]$$

and to compute the corrected approximatation, we can interpolate that values, e.g., using k-nearest neighbor search or just by a linear interpolation
$y(x) = a \cdot x + b, where y(2003.1804) = 1869.0 and y(2026.071) = 1895.0.$
Thus, using simple calculations, the interpolation line is

$$y = 1.135837 \cdot x - 406.28725,$$

and the interpolated value for our cardinality estimation is

$$n = y(\hat{n}) = y(2018.34) \approx 1886.218.$$

According to experiments performed by the authors of the $HyperLogLog++$, the estimate n_{lin} built according to the Linear Counting algorithm is still better for small cardinalities even comparing to the bias-corrected value n. Therefore, if at least one empty counter exists, the algorithm additionallu computes the linear estimate and uses a list of empirical thresholds, that can be found in Table 3.4, to choose which evaluation should be preferred. In such a case, the bias-corrected value n is used only when the linear estimate n_{lin} falls above the threshold $\varkappa_m$ for the current m.

Example 3.9: Bias correction with the threshold

Consider Example 3.8, where for $m = 2^{10}$ we computed the bias-corrected value $n \approx 1886.218$. In order to determine whether or not we should perfer this value to the estimation by Linear Counting, we need to find out the number of empty counters Z in HyperLogLog++ data structure. Because we do not have value in our example, assume it is Z = 73.

Thus, the linear estimation according to the formula (3.1) is

$$n_{lin} = 2^{10} \cdot \log\left(\frac{2^{10}}{73}\right) \approx 2704.$$

Next, we compare the n_{lin} to the threshold $\varkappa_m = 900$ from Table 3.4, which is far below the computed value, therfore, we prefer the bias-corrected estimate n to the Linear Counting estimate n_{lin}.

Table 3.4: Empirical threshold $\varkappa_m$ for the supported precision values

p	m	$\varkappa_m$
4	2^4	10
5	2^5	20
6	2^6	40
7	2^7	80
8	2^8	220

p	m	$\varkappa_m$
9	2^9	400
10	2^10	900
11	2^11	1800
12	2^12	3100
13	2^13	6500

p	m	$\varkappa_m$
14	2^14	11500
15	2^15	20000
16	2^16	50000
17	2^17	120000
18	2^18	350000

The complete HyperLogLog++ algorithm is shown below.

Algorithm 10: Estimating cardinality with *HyperLogLog++*

Input: Dataset D
Input: Array of m *LogLog* counters with hash function h
Output: Cardinality estimation
$COUNTER[j] \leftarrow 0, j = 0...m-1$
for $x \in D$ **do**
  $i \leftarrow h(x) := (i_0 i_1 ... i_{63})_2, i_k \in \{0,1\}$
  $j \leftarrow (i_0 i_1 ... i_{p-1})_2$
  $r \leftarrow COUNTER[j] \leftarrow \max(COUNTER[j], r)$
end
$\mathbf{R} \leftarrow \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-COUNTER[j]}$
$\hat{n} = \alpha_m \cdot m^2 \cdot \frac{1}{R}$
$n \leftarrow \hat{n}$
if $\hat{n} \leq 5m$ **then**
  $n \leftarrow$ **CorrectBias**$(\hat{n})$
end
$Z \leftarrow \underset{j=0...m-1}{\textbf{count}} (COUNTER[j] = 0)$
if $Z \neq 0$ **then**
  $n_{lin} \leftarrow m \cdot \log \frac{m}{Z}$
  if $n_{lin} \leq \varkappa_m then$ **then**
    $n \leftarrow n_{lin}$
  end
end
return n

Properties

The accuracy of HyperLogLog++ is better than HyperLogLog for a large range of cardinalities and equally good for the rest. For cardinalities between 12000 and 61000, the bias correction allows for a lower error and avoids a spike in the error when switching between sub-algorithns.

However, since HyperLogLog++ doesn't need to store hash values, just one plus the maximum size of the number of leading zeros, the memory requirements don't grow significantly compared to HyperLogLog and, according to (3.14), it requires only $6 \cdot 2^p$ bits.

> The HyperLogLog++ algorithm can be used to estimate cardinalities of about $7.9 \cdot 10^9$ elements with a typical error rate of 1.625%, using 2.56 KB of memory.

As mentioned earlier, the algorithm uses the stochastic averaging approach and splits the dataset into $m = 2^p$ subsets $\{COUNTER[j]\}_{j=0}^{m-1}$, every counter handles information about $\frac{n}{m}$ elements. Heule et al. noticed that for $n \ll m$ most counters are never used and don't need to be stored, therefore the storage can benefit from a sparse representation. If the cardinality n is much smaller than m, then HyperLogLog++ requires significantly less memory than its predecessors.

The HyperLogLog++ algorithm in a sparse version stores only pairs $(j, COUNTER[j])$, representing them as a single integer by concatenating their bit patterns. All such pairs are stored in a single sorted

list of integers. Since we always compute the maximal rank, we don't need to store different pairs with the same index, instead only the pair with the maximal index has to be stored. In practice, to provide a better experience one can maintain onother unsorted list for fast insertions that have to be periodically sorted and merged into the primary list. If such a list requires more memory than the dense representation of the counters, it can be easily converted to the dense form. Additionally, to make the sparse representation even more space friendly, the HyperLogLog++ algorithm proposes different compression techniques using variable length encoding and difference encoding for the integers, therefore storing only the first pair and diffrences from its value.

Currently, the HyperLogLog++ algorithm is widely used in many popular applications, including Google BigQuery and Elasticsearch.

Conclusion

In this chapter we covered various probabilistic approaches to computing unique elements in huge datasets. We have discussed the difficulties that appear in cardinality estimation tasks and learned a simple solution that could approzimate the small cardinalites quite well. Further, we have studied the family of algorithms based on an observation of certain patterns in the hashed representations of elements from the dataset which is followed by many improvements and modifications that have become industry standard today for estimating cardinalities of almost any range.

If you are interested in more infomation about the material covered here or want to read the origin papers, please take a look at the list of references that follows this chapter.

In the next chapter we consider streaming applications and study the afficient probabilistic algorithms to estimate frequencies of elements, find heavy hitters and trending elements in data streams.

4 PHƯƠNG PHÁP THỰC HIỆN

Similar to the sensor, the implement of the gateway is presented in this part. However, instead of the whole source code (in java), some main parts are required to presented only.

4.1 Trạng thái vòng đời (SOL)

SOL (State of Life), còn được gọi là Remaining Useful Life (RUL), là thời gian sử dụng còn lại của một pin. Việc dự đoán SOL chính xác sẽ giúp ngăn chặn sự cố và bảo trì để kéo dài tuổi thọ của pin.
Tuy nhiên, việc dự đoán SOL chính xác là một thách thức. Do sự phức tạp của quá trình suy giảm pin và ảnh hưởng của các yếu tố ngoại vi, SOL thường không tuân theo một mô hình tuyến tính hoặc ổn định. Để dự đoán SOL, các phương pháp học máy và kỹ thuật dự báo thống kê đã được áp dụng. Các mô hình học máy có thể sử dụng dữ liệu lịch sử về hoạt động của pin để dự đoán SOL dựa trên các biến đầu vào như dung lượng, nhiệt độ, dòng điện và các thông số khác.
Mục tiêu của việc dự đoán SOL là giúp người dùng và nhà sản xuất pin có thể định kỳ bảo trì và thay thế pin trước khi nó hỏng hoặc không còn đủ dung lượng để đáp ứng yêu cầu. Điều này giúp tăng tuổi thọ của pin và giảm chi phí bảo trì và thay thế.

Dự đoán tuổi thọ còn lại (Remaining Useful Life - RUL) của một pin sử dụng mô hình trung bình trượt SVR cho các ngưỡng khác nhau của hiện tượng suy giảm dung lượng (capacity fade) Ci() và suy giảm công suất (power fade) Pi(), như được hiển thị trong Công thức (3) và (4) tương ứng:

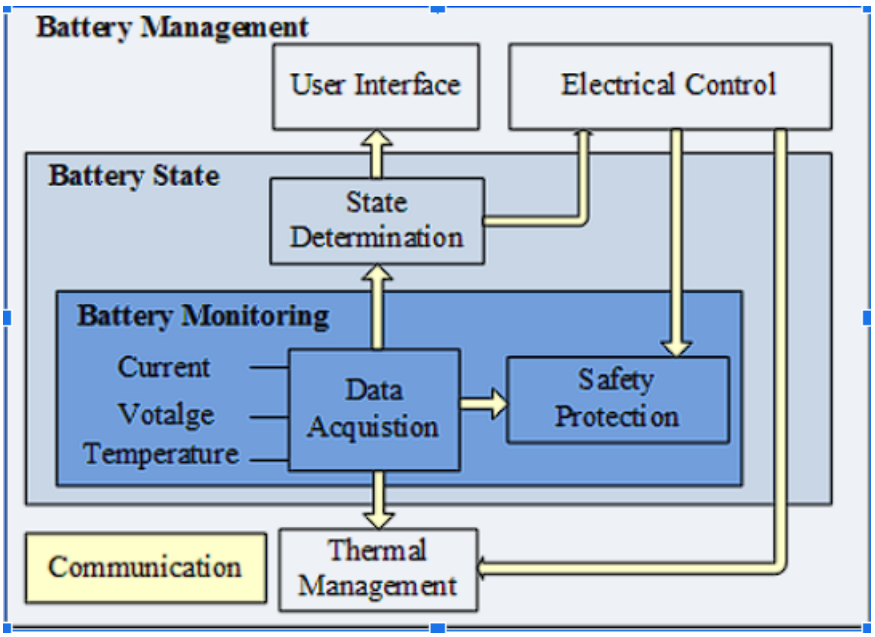
$$RUL = h(P[i], {}^{k}C_{i=1}[i])$$

trong đó k là tuần thứ k. Tuổi thọ còn lại (Remaining Useful Life - RUL) cho một tiêu chí cuối đời được xác định xấp xỉ là 23 suy giảm công suất (power fade) và 30 suy giảm dung lượng (capacity fade). RVM có thể cung cấp định nghĩa xác suất của các đầu ra của nó. Nó được sử dụng RVM regression để dự đoán SOH trong hiện tượng suy giảm dung lượng. Kết quả cho thấy RVM tạo ra dự đoán chính xác hơn so với mô hình SVM. Xác suất của một tập dữ liệu có thể được viết dưới dạng Công thức (6).

$$p(t|\omega, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{N-2} exp - \frac{1}{2\sigma^2}||t - \phi\omega||^2$$

4.2 Hệ thống quản lý pin đề xuất trong LV(Proposed BMSs)

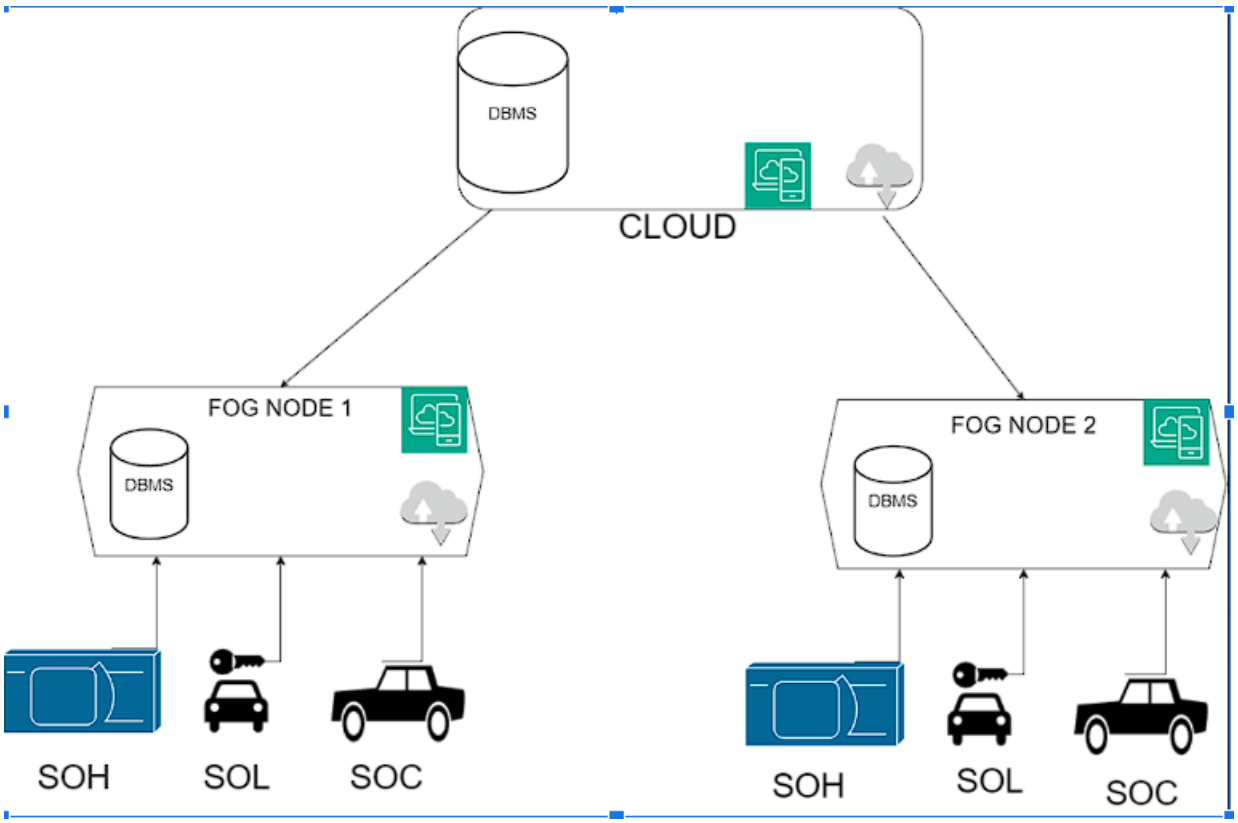
Hiện tại, các hệ thống Quản lý Pin (Battery Management Systems - BMSs) toàn diện và trưởng thành thường được sử dụng trong các thiết bị di động như máy tính xách tay và điện thoại di động, nhưng chưa được triển khai hoàn toàn trong các xe điện (EVs) và xe hybrid (HEVs). Điều này bởi vì số lượng tế bào trong pin của một chiếc xe là hàng trăm lần lớn hơn so với các thiết bị di động. Hơn nữa, pin của một chiếc xe được thiết kế không chỉ để là một hệ thống năng lượng lâu dài, mà còn để là một hệ thống công suất cao. Nói cách khác, pin cho các xe điện và xe hybrid phải cung cấp điện áp cao và dòng điện lớn. Điều này làm cho BMSs cho các xe điện phức tạp hơn rất nhiều so với các thiết bị di động.



Hình 1: Sự mô tả về một hệ thống quản lý pin

4.3 Các phương pháp tối ưu và mô hình fog computing

Như đã nói ở phần trước, thì sau khi đã đặc tả một số tính chất của hệ thống giám sát pin xe điện gồm: trạng thái sạc - SOC, trạng thái sức khỏe - SOH, vv... Cho nên phần sau đây sẽ mô tả thiết mở rộng với mô hình fog- computing và đưa ra một số phương án tối ưu cho các bài toán ở trên.



Sử dụng phương pháp chọn khoảng thích hợp để giải quyết bài toán lưu trữ dữ liệu cho State of Charge(SOC)

- Dữ liệu thu thập được về trạng thái sạc: Được biết công thức của State of Charge chứa đại lượng biến thiên theo thời gian t, cho nên nếu phải lưu trữ toàn bộ dữ liệu sẽ làm tốn bộ nhớ lưu trữ và quá trình truy xuất cũng trở nên chậm chạp hơn.

  Cho nên thay vì ta phải lưu trữ toàn bộ dữ liệu bắn về liên tục (real-time), thì luận văn này đề xuất phương án lưu theo khoảng delta và ngưỡng chọn e, sao cho delta không vượt quá e, thì ta sẽ nhóm lại thành một cụm dữ liệu (cluster) để tối ưu việc lưu trữ.

Sử dụng các mô hình học máy cho các bài toán về state of health và state of life

- Support Vector Machine (SVM)(based model) Máy vector hỗ trợ (Support Vector Machine - SVM) there một kỹ thuật tính toán mềm phổ biến và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực. Nguyên tắc cơ bản của SVM là sử dụng ánh xạ phi tuyến cho việc ánh xạ dữ liệu trong một số lĩnh vực và áp dụng thuật toán tuyến tính trong không gian hàm.

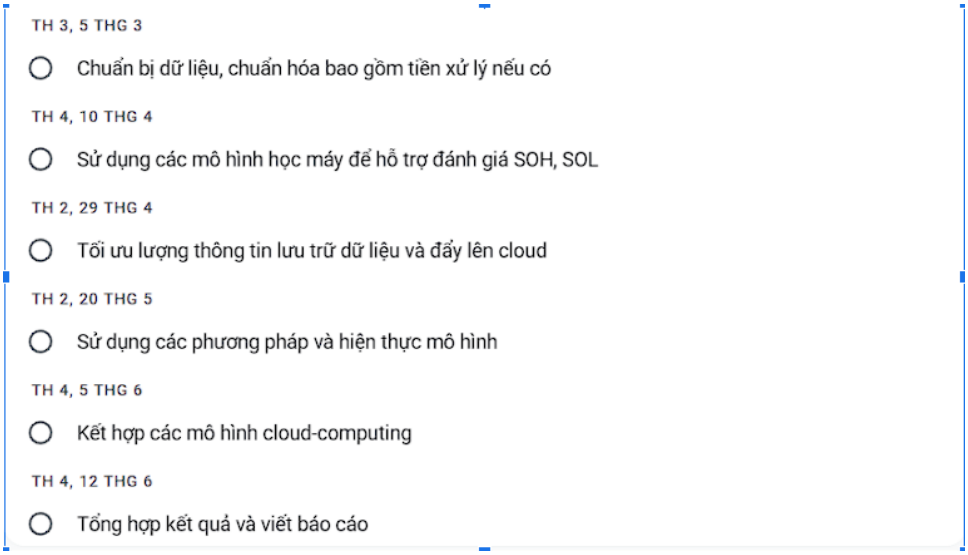
- Linear Regression (LR): Các thuật toán hồi quy tuyến tính sẽ được áp dụng nếu đầu ra là một biến liên tục. Ngược lại, các thuật toán phân loại được áp dụng khi đầu ra được chia thành các phần như đạt/không đạt, tốt/trung bình/kém, vv. Chúng ta có các thuật toán hồi quy khác nhau hoặc phân loại hành vi, trong đó thuật toán hồi quy tuyến tính (Linear Regression - LR) là thuật toán hồi quy cơ bản.

- Ensemble Bagging (EBa): Bagging (Bootstrap Aggregating) there một meta-algorithm trong học máy được thiết kế để tăng cường độ chính xác và độ chính xác của các thuật toán học máy trong phân loại thống kê và hồi quy. Nó cũng giảm phương sai và giúp tránh hiện tượng quá khớp. Bagging

là một cách để giảm bớt sự không chắc chắn của ước lượng bằng cách tạo ra các dữ liệu bổ sung cho việc kiểm tra tập dữ liệu bằng cách tạo ra các biến thể sao chép để tạo ra các tập dữ liệu ban đầu khác nhau . Boosting là một chiến lược lặp lại dựa trên mô tả trước đó để điều chỉnh trọng số của quan sát.

5 KẾ HOẠCH TRIỂN KHAI

Trong thời gian sắp tới của luận văn, tôi dự định triển khai các công việc như sau:
- Chuẩn bị dữ liệu, chuẩn hóa bao gồm tiền xử lý nếu có
- Sử dụng các mô hình học máy để hỗ trợ đánh giá SOH, SOL
- Tối ưu lượng thông tin lưu trữ dữ liệu và đẩy lên cloud
- Sử dụng các phương pháp và hiện thực mô hình
- Kết hợp các mô hình cloud-computing
- Tổng hợp kết quả và viết báo cáo
- Thời gian thực hiện các công việc ở biểu đồ sau:



6 NỘI DUNG DỰ KIẾN CỦA LUẬN VĂN

Nội dung báo cáo của luận văn dự kiến sẽ bao gồm các phần như sau:

Chương 1: Giới thiệu. Trong chương này sẽ trình bày một số vấn đề cơ bản của đề tài, nêu lên sự

quan trọng của việc kiểm tra và giám sát thành phần trong xe điện trong lĩnh vực dữ liệu số hóa. Từ đó thấy được tầm quan trọng của đề tài để xác định rõ phạm vi và đối tượng nghiên cứu, hướng giải quyết của đề tài.

Chương 2: Các công trình nghiên cứu liên quan. Trong chương này sẽ trình bày các công trình nghiên cứu liên quan. Tìm hiểu các phương pháp giải quyết vấn đề cũng như phạm vi, giới hạn của các nghiên cứu đó. Từ đó đánh giá tính khả thi của đề tài.

Chương 3: Hiện thực và thử nghiệm mô hình. Trong chương này sẽ trình bày chi tiết cách thức hiện thực của mô hình. Bao gồm các bước xây dựng và huấn luyện mô hình, sử dụng các mô hình và heuristic để giải quyết bài toán.

Chương 4: Kết quả và đánh giá. Trong chương này sẽ nêu ra các kết quả đạt được của mô hình, cũng như phương pháp đánh giá các kết quả đó.

Chương 5: Kết luận. Trong chương này sẽ tóm lại các ưu điểm và nhược điểm của mô hình và đưa ra các hướng nghiên cứu phát triển hệ thống trong tương lai.

7 KẾT LUẬN

Việc giám sát và quản lý pin đóng vai trò quan trọng trong đảm bảo hiệu suất, tuổi thọ và an toàn của hệ thống pin trên xe điện. Các công trình nghiên cứu liên quan đã tập trung vào các khía cạnh quan trọng như ước lượng trạng thái sạc và sức khỏe pin, chẩn đoán và tiên đoán lỗi, và quản lý thông minh của pin.

Để giám sát pin trên xe điện một cách hiệu quả, cần phải có hệ thống quản lý pin (BMS) thông minh và chính xác. BMS sẽ thu thập dữ liệu về trạng thái pin như trạng thái sạc, nhiệt độ, điện áp và dòng điện, sau đó phân tích và đưa ra các quyết định để bảo vệ pin và tối ưu hóa hiệu suất sử dụng năng lượng.

Công nghệ và phương pháp giám sát pin ngày càng phát triển, bao gồm sự kết hợp của cảm biến, hệ thống ghi dữ liệu, trí tuệ nhân tạo và học máy. Các phương pháp này giúp ước lượng trạng thái sạc và sức khỏe pin một cách chính xác, phát hiện và chẩn đoán lỗi một cách nhanh chóng, và dự đoán tuổi thọ còn lại của pin.

Thông qua việc nghiên cứu và áp dụng các công trình liên quan, có thể nâng cao hiệu suất và tuổi thọ của pin trên xe điện, giúp tăng khả năng di chuyển và đáp ứng nhu cầu của người sử dụng. Đồng thời, việc giám sát pin cũng đóng vai trò quan trọng trong việc đảm bảo an toàn và hạn chế các vấn đề liên quan đến pin như quá nhiệt, quá điện áp hoặc quá dòng điện.

Tổng quan, đề tài "Giám sát pin trên xe điện" là một lĩnh vực nghiên cứu quan trọng và đầy triển vọng, đóng góp vào sự phát triển của công nghệ pin và xe điện hiệu quả và bền vững.

Tài liệu

[1] H. Truong, S. Rahman, và P. S. Shenoy (2018), Battery Management Systems in Electric and Hybrid Vehicles.

[2] A. Benmouiza và A. Chandra, State of Charge Estimation of Lithium-Ion Batteries in Electric Vehicles: A Review

[3] Y. Hu, L. Wang, và H. Gao, Real-Time State of Health Estimation for Lithium-Ion Batteries in Electric Vehicles

[4] Y. Li và C. Mi., Data-Driven Fault Diagnosis and Prognosis of Lithium-Ion Batteries in Electric Vehicles

[5] X. Hu, Y. Li, và C. Mi., Intelligent Battery Management and Control for Electric Vehicles

[6] Rui Xiong, Kui Zhang, Design and implementation of a Battery Big Data Platform Through Intelligent Connected Electric Vehicles

[7] Cheng, K.W.E.; Divakar, B.P.; Wu, H.J.; Ding, K.; Ho, H.F, Battery-Management System (BMS) and SOC development for electrical vehicles, **IEEE Trans. Veh. Technol**, 60, 76–88, 2011

[8] Tipping, M.E, The Relevance Vector Machine. Advances in Neural Information Processing Systems, **MIT Press: Cambridge, MA, USA**, 12, 287–289, 2000

[9] Widodo, A.; Shim, M.C.; Caesarendra, W.; Yang, B.-S, Intelligent prognostics for battery health monitoring based on sample entropy, **Expert Syst. Appl**, 38, 11763–11769, 2011

[10] Chao, K.H.; Chen, J.W, State-of-health estimator based on extension theory with a learning mechanism for lead-acid batteries, **Expert Syst. Appl**, 38, 15183–15193, 2011

[11] Ng, K.S.; Moo, C.S.; Chen, Y.P.; Hsieh, Y.C, Enhanced coulomb counting method for estimating state-of-charge and state-of-health of lithium-ion batteries, **Appl. Energy**, 86, 1506–1511, 2009

[12] State of Charge (SOC) Determination, **http://www.mpoweruk.com/soc.htm**, 232, 2011