Chương 2: Xác suất và quá trình ngẫu nhiên

1. Sự kiện, xác suất, tính độc lập thống kê
2. Biến ngẫu nhiên
3. Quá trình ngẫu nhiên
4. Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian

1. Sự kiện, xác suất, tính độc lập thống kê
   - Khái niệm
     - Sự kiện
   - Xác suất
   - Sự kiện đồng thời, xác suất đồng thời
     - Xác suất có điều kiện
     - Tính độc lập thống kê
2. Biến ngẫu nhiên
3. Quá trình ngẫu nhiên
4. Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian

1.1.Khái niệm

- Xác suất là một lý thuyết nhánh của toán học nghiên cứu về các hiện tượng ngẫu nhiên, cung cấp một công cụ hình thức để suy luận trong các trường hợp thông tin không đầy đủ.
- Xác suất, giống như toán học, dựa trên một số các tiên đề, dùng các phương pháp suy luận và các công cụ toán học để suy ra các định lý
- Thống kê là khoa học xuất phát từ thực tế, cho phép xây dựng các mô hình của các hiện tượng tự nhiên, sử dụng cách suy luận qui nạp: dựa trên một số lượng các dữ liệu quan sát được, tìm các qui luật, các mô hình của các hiện tượng

1.1.Khái niệm

- Thực nghiệm (phép thử) ngẫu nhiên:
  - không thể dự đoán trước kết quả
  - cho các kết quả khac nhau khi tất cả các tham số, các điều kiện như nhau
- Các kết quả có thể của phép thử tạo ra một tập hợp (ký hiệu bằng S).
  - Gieo con xúc xắc, kết quả thu được nằm trong tập hợp$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Tung một đồng xu, tập kết quả là {Sấp, Ngửa}
  - Tuổi của người gặp đầu tiên trong ngày$\{1 \dots 100\}$
  - Quan sát các gói tin chạy qua một thiết bị mạng trong khoảng thời gian 15’: tập kết quả là:???
- Một tập con A của tập S định nghĩa sự kiện "*kết quả thu được của phép thử nằm trong A*" gọi tắt là sự kiện A.
  - Ví dụ: gieo con xúc xắc được số chẵn
  - Tung đồng xu được mặt sấp
  - Người đầu tiên gặp trong ngày còn trẻ (tuổi <30)

1.1.Khái niệm *(Tiếp)*

- Với tập S cố định, có thể định nghĩa phép bù, phép hợp, phép giao trên các tập con.
- Có thể định nghĩa phép bù, phép hợp, phép giao trên các sự kiện:
  - Sự kiện bù của sự kiện A là sự kiện: "*kết quả thu được của phép thử nằm trong tập* $S \setminus A$ ký hiệu $\bar{A}$
    - Ví dụ Sự kiện bù của sự kiện gieo con xúc xắc được $\{3, 4\}$ là sự kiện gieo con xúc xắc được $\{1, 2, 5, 6\}$
  - Hợp của hai sự kiện $A \cup B$ là sự kiện "*kết quả thu được của phép thử nằm trong tập* $A \cup B$
    Hợp của sự kiện "gặp người dưới 18 tuổi" và sự kiên "gặp người dưới trên 16 dưới 60" là sự kiện "gặp người dưới 60 tuổi"
  - Giao của hai sự kiện $A \cup B$ là sự kiện "*kết quả thu được của phép thử nằm trong tập* $A \cap B$
    Giao của hai sự kiện trên là sự kiện (gặp người từ 16 đến 18 tuổi)
  - Hai sự kiện loại trừ lẫn nhau $A \cap \bar{A} = \emptyset$

1.2.Xác suất

- Khái niệm
  - Là một độ đo của sự kiện, đo độ xác định của một sự kiện trước khi sự kiện đó xảy ra
  - Xác định lượng hiểu biết về sự kiện trước khi sự kiện đó xảy ra
  - Sự kiện nào chắc chắn sẽ xảy ra thì có xác suất bằng 1
  - Các sự kiện khác không chắc chắn xảy ra có xác suất dương, nhỏ hơn 1
- Cách đo
  - Cần định lượng khả năng xuất hiện của một sự kiện.
  - Thực hiện các thực nghiệm lặp lại (giả thiết là các tính chất ảnh hưởng đến kết quả không phụ thuộc thời gian)
  - Sau N lần thử, sự kiện A xuất hiện k lần.
  - Tỷ số $\frac{k}{N}$ có thể dùng để đặc trưng cho khả năng xuất hiện của A với N lần thử đó.
  - Sau rất nhiều lần thử, khả năng xuất hiện của A thể hiện bằng giá trị trung bình của $\frac{k}{N}$.

- Giá trị đó chính là xác suất xuất hiện của A, ký hiệu $P(A)$.
- Sử dụng các tính toán xác suất

- Tính chất
  - $0 \leq P(A) \leq 1$: Xác suất là số dương nhỏ hơn 1.
  - $P(S) = 1$: xác suất của sự kiện luôn luôn xảy ra bằng 1.
  - $P(\emptyset) = 0$.
  - Xác suất của hợp hai sự kiện rời nhau bằng tổng hai xác suất:
    $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ nếu $A \cap B = \emptyset$
  - Tổng quát $P(\cup(A_i)) = \sum A_i$ nếu $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \; i, j$

1.3.Sự kiện đồng thời, xác suất đồng thời

- Sự kiện đồng thời của hai sự kiện A, B là sự kiện "*Cả A và B đều xuất hiện*".
  Các sự kiện riêng rẽ: gieo xúc xắc được 6, tung đồng xu sấp. Sự kiện đồng thời: Vừa tung đồng xu sấp, vừa gieo xúc xắc được 6
- Xác suất đồng thời của hai sự kiện là xác suất xuất hiện đồng thời của hai sự kiện đó.
- Xét hai phép thử A,B
  - A cho các sự kiện $A_i \in A, 0 \leq i \leq m$.
  - B cho các sự kiện $B_j \in B, 0 \leq j \leq n$.
  - Sự kiện đồng thời của A_i và B_j là sự kiện tạo từ tập các giá trị $(A_i, B_j), 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ sao cho $A_i \in A$ và $B_j \in B$,
- Xác suất đồng thời của A_i và B_j là xác suất của sự kiện đồng thời (A_i, B_j), $P(A_i, B_j)$
- Tính chất

1.3.Sự kiện đồng thời, xác suất đồng thời *(Tiếp)*

- $0 \leq P(A_i, B_j) \leq 1$.
- Nếu B_j loại trừ lẫn nhau thì $P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} P(A_i, B_j)$.
- Nếu A_i loại trừ lẫn nhau thì $P(B_j) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i, B_j)$.
- Nếu A_i,B_j loại trừ lẫn nhau thì $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(A_i, B_j) = 1$.

1.3.Sự kiện đồng thời, xác suất đồng thời

- Xét hai sự kiện A, B có xác suất đồng thời là $P(A, B)$.
- Khi B đã xuất hiện, xác suất xuất hiện của A gọi là xác suất có điều kiện, với điều kiện B đã xuất hiện.
- Ví dụ Sự kiện B: M đã học thi Sự kiện A: M thi qua Xác suất có điều kiện: xác suất M thi qua với điều kiện M đã học thi
- Định nghĩa:

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

- Như vậy:

$$P(A, B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$$

1.3.Sự kiện đồng thời, xác suất đồng thời *(Tiếp)*

- Công thức *Bayes*: Nếu $A_i, 1 \leq i \leq n$ là các sự kiện loại trừ lẫn nhau, $\cup_{i=1}^{n} A_i = S,\ B$ là sự kiện có xác suất lớn hơn 0 thì

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i, B)}{P(B)} = \frac{P(B, A_i)}{P(B|A)P(A)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \left(P(B|A_j)P(A_j)\right)}$$

- $P(A_i|B)$ gọi là xác suất hậu nghiệm, còn $P(B|A_i)$ gọi là xác suất tiên nghiệm
- ý nghĩa trong truyền tin

1.3.Sự kiện đồng thời, xác suất đồng thời

- Nếu A và B là hai sự kiện xảy ra hoàn toàn độc lập với nhau thì
$$P(A|B) = P(A)$$
và
$$P(B|A) = P(B)$$
- Xác suất đồng thời của A và B sẽ là
$$P(A, B) = P(A).P(B)$$
- Hai sự kiện A và B gọi là độc lập thống kê với nhau.
- Tổng quát hơn, nếu $A_i, 1 \leq i \leq n$ độc lập thống kê thì
$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

2. Biến ngẫu nhiên

1. Sự kiện, xác suất, tính độc lập thống kê

2. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất
     - Biến ngẫu nhiên
     - Hàm phân bố xác suất
     - Hàm mật độ xác suất
   - Biến ngẫu nhiên, các hàm xác suất 2 (nhiều) chiều
     - Hàm phân bố xác suất có điều kiện
     - Biến ngẫu nhiên độc lập thống kê
   - Hàm của biến ngẫu nhiên
   - Các trị trung bình thống kê
     - Mô men, mô men trung tâm
     - Mô men hợp, mô men trung tâm hợp, hàm tương quan, hàm hiệp biến
     - Biến ngẫu nhiên nhiều chiều
     - Hàm đặc tính
     - Tổng các biến ngẫu nhiên

2.1.Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất

- Cần định lượng hóa các kết quả thu được từ một phép thử $s \in S$.
- Thực hiện một ánh xạ từ tập hợp kết quả thu được lên tập hợp số thực
$$X : S \rightarrow \Re,\ s \rightarrow X(s)$$
.
- Biến số $X(s)$ nhận các giá trị thực, phản ánh kết quả của phép thử s; gọi là một *biến ngẫu nhiên*, có thể dùng để đặc trưng cho giá trị s của phép thử.
- Có thể gọi tắt X thay cho $X(s)$
- Ví dụ
    - Khi gieo một con xúc xắc, có thể dùng một biến ngẫu nhiên X nhận 6 giá trị thực (chẳng hạn $1, 2, 3, 4, 5, 6$) tương ứng với 6 mặt.

2.1.Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất *(Tiếp)*

- Khi tung một đồng xu, có thể dùng một biến ngẫu nhiên X nhận 2 giá trị thực $0, 1$ tương ứng với kết quả sấp ngửa.

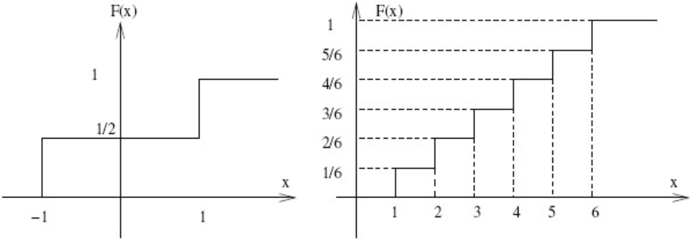
2.1.Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất

- Định nghĩa
  - Xét một phép thử, kết quả thu được s biểu thị bằng biến ngẫu nhiên $X(s)$.
  - Mỗi sự kiện có một xác suất xuất hiện nào đó.
  - Cần một đặc trưng toán học cho xác suất của tất cả các sự kiện: *hàm phân bố xác suất*:

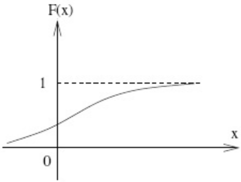
$$F(x) = P(\{s : X(s) \leq x\}), \ -\infty < x < \infty$$

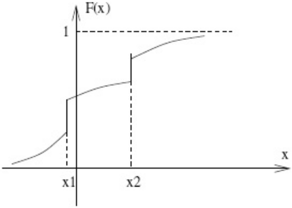
- Ví dụ
  - Xúc xắc, biến ngẫu nhiên X nhận 6 giá trị thực $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tương ứng với 6 mặt, xác suất đều nhau:
  - Tung xu, biến ngẫu nhiên X nhận 2 giá trị thực $-1, 1$ tương ứng với kết quả sấp ngửa, xác suất đều nhau:

2.1.Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất *(Tiếp)*



2.1.Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất *(Tiếp)*





2.1.Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất

- Phân biệt biến ngẫu nhiên *liên tục* và biến ngẫu nhiên *rời rạc*
- Hàm mật độ xác suất là đạo hàm của hàm phân bố xác suất theo X

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- Do đó

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$$

$$P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(u)du$$

2.1.Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất, hàm mật độ xác suất *(Tiếp)*

- Nếu hàm phân bố không liên tục thì

$$p(x) = \sum_{1}^{n} P(X = x_i)\delta(x - x_i)$$

Trong đó $\delta(x)$ là hàm xung đơn vị, $\delta(x) = 1$ với $x = 0$, $\delta(x) = 0$ với $x \neq 0$

2.2.Biến ngẫu nhiên, các hàm xác suất 2 (nhiều) chiều

- Xét hai sự kiện biểu thị bởi hai biến ngẫu nhiên X_1, X_2. Hai biến này có thể coi là một biến ngẫu nhiên 2 chiều (X_1, X_2) biểu thị sự kiện đồng thời.
- Hàm phân bố xác suất 2 chiều

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2$$

- Hàm mật độ xác suất 2 chiều $p(x_1, x_2) = \frac{d^2}{dx_1 dx_2} F(x_1, x_2)$
- Khi lấy tích phân theo biến này, thu được hàm mật độ xác suất của biến kia

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 = p(x_2); \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 = p(x_1)$$

2.2.Biến ngẫu nhiên, các hàm xác suất 2 (nhiều) chiều *(Tiếp)*

- Hai hàm này thường gọi là *hàm mật độ phân bố xác suất biên*
- Lấy tích phân theo cả hai biến

$$\int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

2.2.Biến ngẫu nhiên, các hàm xác suất 2 (nhiều) chiều

- Xét hai biến ngẫu nhiên X_1, X_2 có hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời là $p(x_1, x_2)$. Giả sử đã biết $x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2$ và muốn xác định xác suất $X_1 \leq x_1$, trong đó $\Delta x_2 > 0$:

$$P(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$$

- Theo công thức của xác suất có điều kiện

$$P(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2) =$$

$$\frac{P(X_1 \leq x_1, x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)}{P(x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)}$$

2.2.Biến ngẫu nhiên, các hàm xác suất 2 (nhiều) chiều *(Tiếp)*

- Thay các xác suất bằng các tích phân (giả sử tất cả các hàm đang xét đều liên tục)

$$\frac{\int_{-\infty}^{x_1}\int_{x_2-\Delta x_2}^{x_2} p(u_1,u_2)du_1du_2}{\int_{x_2-\Delta x_2}^{x_2} p(u_2)du_2} = \frac{F(x_1,x_2)-F(x_1,x_2-\Delta x_2)}{F(x_2)-F(x_2-\Delta x_2)}$$

- Chia cho Δx_2 và lấy giới hạn $\Delta x_2 \to 0$

$$P(X_1 \le x_1 | X_2 = x_2) = \frac{dF(x_1,x_2)/dx_2}{dF(x_2)/dx_2} =$$

$$\frac{d[]\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p(u_1,u_2)du_1du_2]/dx_2}{dF(x_2)/dx_2}$$

- Lấy đạo hàm theo x_1

$$p(x_1|x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_2)}$$

- $p(x_1|x_2)$ là hàm phân bố xác suất có điều kiện của x_1 với điều kiện đã biết x_2
- Như vậy

$$p(x_1, x_2) = p(x_1|x_2)p(x_2) = p(x_2|x_1)p(x_1)$$

- Nếu các biến ngẫu nhiên trong phép thử chung độc lập thống kê lẫn nhau, xác suất xuất hiện của một giá trị của một biến không phụ thuộc vào biến khác, thì

$$F(x_1, x_2 \ldots, x_n) = F(x_1)F(x_2)\ldots F(x_n)$$

với hàm phân bố xác suất và

$$p(x_1, x_2 \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_n)$$

với hàm mật độ xác suất.

2.3.Hàm của biến ngẫu nhiên

- Bài toán
  Cho một biến ngẫu nhiên X với hàm mật độ phân bố xác suất $p(x)$. Xác định hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = G(X)$.
- Ví dụ $Y = aX + b$ với a, b là hai hằng số, $a > 0$. Cần xác định $p_Y(Y)$ khi biết $p_X(x)$
  Gọi hàm phân bố xác suất của X, Y là $F_X(x)$ và $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) =$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} p_X(x)dx = F_X(\frac{y-b}{a})$$

Lấy đạo hàm theo y:

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X(\frac{y-b}{a})$$

- Ví dụ 2 $Y = aX^3 + b$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX^3 + b \le y) = P(X \le \sqrt[3]{\frac{y-b}{a}}) =$$

$$\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{\frac{y-b}{a}})} p_X(x)dx = F_X(\sqrt[3]{\frac{y-b}{a}}))$$

Lấy đạo hàm theo y:

$$p_Y(y) = \frac{1}{3a[(y-b)/a]^{2/3}} p_X((\frac{y-b}{a})^{1/3})$$

2.3.Hàm của biến ngẫu nhiên *(Tiếp)*

- Ví dụ 2 $Y = aX^2 + b, a > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX^2 + b \leq y) = P(|X| \leq \sqrt[2]{\frac{y-b}{a}}) =$$

$$F_X(\sqrt[2]{\frac{y-b}{a}})) - F_X(-\sqrt[2]{y-b/a}))$$

Lấy đạo hàm theo y:

$$p_Y(y) = \frac{p_X[\sqrt[2]{\frac{y-b}{a}}]}{2a\sqrt[2]{\frac{y-b}{a}}} + \frac{p_X[-\sqrt[2]{\frac{y-b}{a}}]}{2a\sqrt[2]{\frac{y-b}{a}}}$$

- Chú ý, $-\sqrt[2]{y-b/a}$ và $\sqrt[2]{y-b/a}$ chính là hai nghiệm thực của phương trình $y = g(x)$.

2.3.Hàm của biến ngẫu nhiên *(Tiếp)*

- Có thể tổng quát hóa

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Trong đó x_i là nghiệm của phương trình $g(x) = y$ và là hàm của y

Nhu cầu

- Sử dụng trong việc đánh giá, biểu thị các kết quả thực nghiệm
- Đặc biệt: mô men cấp 1, cấp 2, tương quan, hàm hợp biến

2.4.Các trị trung bình thống kê

- Xét một biến ngẫu nhiên X với hàm mật độ xác suất $p(x)$.
- *Trị trung bình* hay *Kỳ vọng toán học* của X được tính theo công thức

$$E(X) \equiv m_X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

- Đây cũng là *mô men cấp 1* của X. *Mô men cấp n* được định nghĩa bằng

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx$$

- Xét biến ngẫu nhiên $Y = g(X)$. Kỳ vọng toán học của Y là

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$$

2.4.Các trị trung bình thống kê *(Tiếp)*

- Nếu $Y = (X - m_X)^n$ thì
$$E(Y) = E((X - m_X)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_X)^n p(x) dx$$
và gọi là *mô men trung tâm cấp n* của biến ngẫu nhiên X
- Khi $n = 2$ giá trị này được gọi là *độ lệch trung bình bình phương (phương sai)*:
$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_X)^2 p(x) dx = E(X^2) - m_x^2$$

2.4.Các trị trung bình thống kê

- Xét 2 biến ngẫu nhiên X_1, X_2 với hàm mật độ xác suất đồng thời $p(x_1, x_2)$
- *Mô men hợp, mô men trung tâm hợp* của hai biến đó là

$$E(X_1^k X_2^n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$E((X_1 - m_1)^k (X_2 - m_2)^n) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - m_1)^k (X_2 - m_2)^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

- Khi $n = k = 1$, 2 hàm này gọi là *hàm tương quan và hàm hiệp biến*:

2.4.Các trị trung bình thống kê

- Tương tự với biến ngẫu nhiên nhiều chiều, ta có thể định nghĩa mô men các cấp. Thường dùng *hàm tương quan và hàm hiệp biến* giữa các cặp biến ngẫu nhiên:

$$E(X_iX_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_ix_jp(x_i, x_j)dx_idx_j$$

$$\mu_{ij} = E((X_i - m_i)(X_j - m_j)) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j)p(x_i, x_j)dx_idx_j$$

$$= E(X_iX_j) - m_im_j$$

  trong đó $X_i, 1 \leq i \leq n$ là các biến ngẫu nhiên
- Ma trận gồm $n \times n$ phần tử μ_{ij} gọi là *ma trận hiệp biến* của các biến ngẫu nhiên $X_i, 1 \leq i \leq n$

2.4.Các trị trung bình thống kê *(Tiếp)*

- Nếu $E(X_iX_j) = E(X_jX_i) = m_im_j$, hai biến X_i, X_j gọi là *không tương quan* lẫn nhau. Khi đó $\mu_{ij} = 0$
- Nếu $E(X_iX_j) = 0$ thì hai biến X_i, X_j gọi là *trực giao* (hai biến không tương quan và 1 trị trung bình bằng 0)

2.4.Các trị trung bình thống kê

$$E(e^{jvX}) \equiv \psi(jv) = \int_{\infty}^{\infty} e^{jvx} p(x) dx$$

Trong đó v là biến số thực, $j^2 = -1$

- Có thể coi là biến đổi Fourier của hàm phân bố xác suất. Vậy $p(x) = \int_{\infty}^{\infty} \psi(jv) e^{-jvX} dv$
- Hàm đặc tính có thể sử dụng để tính các mô men. Lấy đạo hàm $\frac{d\psi(jv)}{dv} = j \int_{-\infty}^{\infty} x e^{jvx} p(x) dx$
- Mô men cấp 1 $E(X) = m_x = -j \frac{d\psi(jv)}{dv}|_{v=0}$
- Mô men cấp n $E(X^n) = (-j)^n \frac{d^n\psi(jv)}{dv^n}|_{v=0}$

2.4.Các trị trung bình thống kê *(Tiếp)*

- Có thể tính hàm đặc tính từ các mô men theo khai triển Taylor

$$\psi(jv) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^n \psi(jv)}{dv^n} \right\}_{v=0} \frac{v^n}{n!}$$

Do đó

$$\psi(jv) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X^n) \frac{(jv)^n}{n!}$$

2.4.Các trị trung bình thống kê

- Xét $X_i, 1 \leq i \leq n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê. Y là một biến ngẫu nhiên độc lập thống kê khác và $Y = \sum_1^n X_i$. Cần xác định hàm mật độ xác suất của Y
- Xác định hàm đặc tính của Y

$$\psi_Y(jv) = E(e^{jvX}) = E[exp(jv\sum_1^n X_i)] = E[\prod_1^n (e^{jvx_i})]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\prod_1^n e^{jvx_i}) p(x_1, x_2 \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Do $p(x_1, x_2 \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2) \dots, p(x_n)$ nên

$$\psi_Y(jv) = \prod_1^n \psi_{X_i}(jv)$$

Sau đó hàm mật độ phân bố xác suất của Y xác định bằng phép biến đổi Fourier ngược. Hàm này còn được gọi là tích chập cấp n của các hàm phân bố xác suất của X_i

2.4.Các trị trung bình thống kê

- Với các biến ngẫu nhiên nhiều chiều hàm đặc tính cũng được định nghĩa

$$\psi(jv_1, jv_2, \ldots, jv_n) = E[exp(j\sum_1^n v_i X_i)] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} exp(j\sum_1^n v_i x_i) p(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

- Quan trọng nhất là hàm đặc tính hai chiều

$$\psi(jv_1, jv_2) = E[e^{j(v_1 X_1 + v_2 X_2)}] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(v_1 x_1 + v_2 x_2)} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

2.4.Các trị trung bình thống kê *(Tiếp)*

- Sau khi lấy đạo hàm, ta có thể tính được mô men đồng thời (mô men hợp)

$$E(X_1X_2) = -\frac{d^2\psi(jv)}{dv_1dv_2}|_{v_1=v_2=0}$$

Các tham số cần quan tâm của một phân bố xác suất

- Chú ý: một phân bố thường được định nghĩa
  - Bằng cách cho hàm phân bố xác suất
  - Bằng cách cho hàm mật độ xác suất
  - Bằng cách cho hàm đặc tính
  - Bằng hàm từ các phân bố khác
- Với một phân bố chúng ta quan tâm đến
  - Các hàm xác suất
  - Một số giá trị trung bình quan trọng: Hai mô men đầu tiên, phương sai

2.5.Một số phân bố xác suất thường gặp

- Cho $X_i, 0 \leq i \leq n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập thống kê, chỉ nhận 2 giá trị 0 và 1, xác suất lần lượt là $1 - p$ và p
- Biến ngẫu nhiên Y là tổng của các biến ngẫu nhiên X_i: $Y = \sum_1^n X_i$
- Cần xác định các hàm và các giá trị trung bình của Y.
- Xác suất để $Y = k$ là xác suất có k biến X_i có giá trị 1, $n - k$ biến có giá trị 0.

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vậy hàm phân bố xác suất của Y là

$$F(Y) = P(Y \leq y) = \sum_{k=0}^{[y]} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

2.5.Một số phân bố xác suất thường gặp *(Tiếp)*

Hàm này không liên tục, do đó hàm mật độ xác suất có dạng

$$p(y) = \sum_{k=0}^{[y]} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{[y]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta(y-k)$$

Trong đó $\delta(t)$ là hàm xung đơn vị, $\delta(t) = 0$ với $y \leq 0$, $\delta(t) = 1$ với $y = 0$

- Hai mô men đầu tiên là

$$E(Y) = np$$

$$E(Y^2) = np(1-p) + n^2p^2$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

- Hàm đặc tính

$$\psi(jv) = (1 - p + pe^{jv})^n$$

- Hàm mật độ phân bố xác suất

$$p(x) = \begin{cases} 1/b - a, & \text{a<x<b;} \\ 0, & \text{nếu không.} \end{cases}$$

- Hàm phân bố xác suất

$$p(x) = \begin{cases} (1/b - a)(x - a), & \text{a<x<b;} \\ 0, & \text{nếu x<a} \\ 1, & \text{nếu x>b} \end{cases}$$

- Các mô men

$$E(X) = \frac{1}{2}(a + b)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

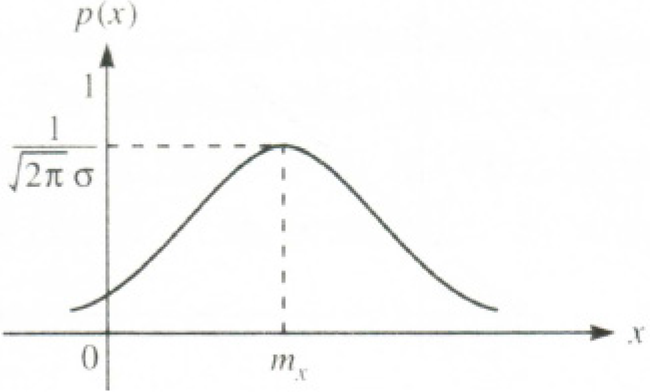
$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(a - b)^2$$

- Hàm đặc tính

$$\psi(jv) = \frac{e^{jvb} - e^{jva}}{jv(b-a)}$$

2.5.Một số phân bố xác suất thường gặp

- Phân bố chuẩn, các giá trị của biến dao động xung quanh một giá trị nào đó, càng xa giá trị gốc, xác suất xuất hiện càng nhỏ



- Hàm mật độ xác suất $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-m_x)^2}/2\sigma^2$
- Hàm phân bố xác suất

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(u-m_X)^2/2}{sigma^2}} du$$

- Mô men trung tâm

$$E\left[(X - m_x)^k\right] \equiv \mu_k = \begin{cases} 1.3\ldots(k-1)\,\sigma^k & \left(\text{k chẵn}\right) \\ 0, \left(\text{k lẻ}\right) \end{cases}$$

- Mô men

$$E(X^k) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i m_x^i \mu_{k-i}$$

- Hàm đặc tính

$$\psi_Y(jv) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(jv) = \prod_{i=1}^{n} e^{jvm_i - v^2\delta_i^2/2} = e^{jvm_Y - v^2\delta^2 y/2}$$

Tổng của biến ngẫu nhiên Gaussian

- Tổng của n biến ngẫu nhiên gaussian, độc lập thống kê là một biến gaussian

$$Y = \sum_{1}^{n} X_i$$

X_i là các biến ngẫu nhiên phân bố Gaussian, trị trung bình m_x, sai phương σ^2

- Hàm đặc tính của Y

$$\psi_Y(jv) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(jv) = \prod_{i=1}^{n} e^{jvm_i - v^2\delta_i^2/2} = e^{jvm_Y - v^2\delta^2 y/2}$$

- Như vậy Y cũng là biến ngẫu nhiên phân bố gaussian với

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} m_i, \delta^2 y = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$$

3. Quá trình ngẫu nhiên

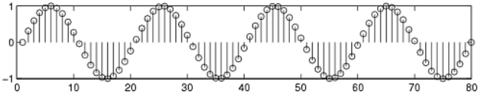
1. Sự kiện, xác suất, tính độc lập thống kê

2. Biến ngẫu nhiên

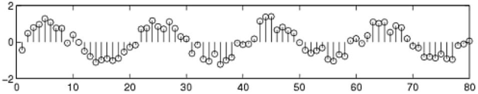
3. Quá trình ngẫu nhiên
   - Khái niệm
     - Biểu diễn QTNN
     - Các trị trung bình thống kê
   - Phổ mật độ công suất
   - Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên
     - Bài toán
     - Kết quả
   - Định lý lấy mẫu cho quá trình ngẫu nhiên có băng tần hạn chế

4. Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian

- Tín hiệu, thông tin tất định:
  - Luôn luôn có giá trị xác định, tính được bằng các công thức toán học
  - Có thể dự báo giá trị trong tương lai
  - Đặc trưng bằng các hàm giá trị chính xác



- Tín hiệu thông tin, dữ liệu ngẫu nhiên
  - Không biểu diễn được bằng các hàm toán học chặt chẽ
  - Biểu diễn sử dụng các công cụ xác suất



- Quá trình ngẫu nhiên trong thực tế là các hàm của thời gian
    - Nhiệt độ, áp suất, các tham số khí tượng
    - Sự thay đổi của một điện trở theo nhiệt độ
    - Tín hiệu đầu ra của nguồn tin, tín hiệu audio truyền trên kênh thoại
- Trong truyền tin số, khái niệm quá trình ngẫu nhiên sử dụng để
    - Mô hình hóa các tín hiệu, thông tin ngẫu nhiên
    - Mô hình hóa tín hiệu sinh ra bởi nguồn tin
    - Mô hình hóa kênh tin
    - Mô hình hóa các nguồn nhiễu
    - Thiết kế các bộ thu tối ưu xử lí các tín hiệu nhận được
- Ví dụ
    - Tín hiệu điện

$$f(n) = Asin(\omega n + \phi)$$

    với ω, ϕ là các biến ngẫu nhiên là một quá trình ngẫu nhiên

Quá trình ngẫu nhiên *(Tiếp)*

- Cố định (ω, ϕ) cho một hàm số theo thời gian, *một thể hiện* của quá trình ngẫu nhiên, còn gọi là một *hàm mẫu*
- Quá trình ngẫu nhiên=tập hợp các hàm mẫu có thể

- Một họ biến ngẫu nhiên X, đánh chỉ số bằng thời gian $X(t)$
- Tập hợp các giá trị cụ thể của từng biến ngẫu nhiên tạo thành một hàm theo thời gian $X_m(t)$ gọi là một mẫu
- Tập hợp tất cả các mẫu gọi là không gian mẫu
- Một quá trình ngẫu nhiên là một ánh xạ từ không gian mẫu vào một hàm theo thời gian
  - Với một mẫu bất kỳ, có một hàm theo thời gian $X_t(m)$ gọi là một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên
  - Với một giá trị bất kỳ của thời gian, có một biến ngẫu nhiên
  - Xác định mẫu và thời gian, $X_t(m)$ là một giá trị xác định (số)

3.1.Khái niệm

- Xét các giá trị của một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ tại các thời điểm $t_1 > t_2, \ldots > t_n$
- Các giá trị này có thể biểu diễn bằng n biến ngẫu nhiên $X_{t_i}, 1 \leq i \leq n$ Với hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$p(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$$

- Xét các giá trị của $X(t)$ tại các thời điểm$t_i + t, 1 \leq i \leq n$. Có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$p(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \ldots, X_{t_n+t})$$

- Nếu

$$p(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = p(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \ldots, X_{t_n+t}) \forall t, n$$

thì quá trình $X(t)$ gọi là quá trình ngẫu nhiên *dừng chặt*
Nếu không, quá trình gọi là không dừng

3.1.Khái niệm

- Xét các giá trị của một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ tại các thời điểm $t_1 > t_2, \ldots > t_n$ là n biến ngẫu nhiên $X_{t_i}, 1 \leq i \leq n$ với hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$p(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$$

- Mô men cấp n của mỗi biến X_{t_i} là

$$E\left(x_{t_i}^n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_i}^n p\left(x_{t_i}\right) dx_{t_i}$$

Khi X(t) là dừng chặt, các mô men sẽ không phụ thuộc vào thời gian, do đó các mô men cũng không phụ thuộc thời gian

Hàm tự tương quan

- Mô men chung của hai biến X_{t_i} tại hai thời điểm khác nhau

$$E\left(X_{t1}X_{t2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_{t1}x_{t2}p\left(x_{t1}, x_{t2}\right) dx_{t1}x_{t2}$$

  gọi là *hàm tự tương quan* $\phi(t_1, t_2)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$
- Nếu $X(t)$ dừng, khi đó $\phi(t_1, t_2)$ không phụ thuộc vào t_1, t_2, mà chỉ phụ thuộc vào $\tau = t_1 - t_2$: $\phi(\tau)$
- Chú ý

$$\phi(\tau) = \phi(-\tau)$$

$$\phi(0) = E(X_t^2)$$

  là công suất trung bình của $X(t)$

Hàm tự tương quan *(Tiếp)*

- Một số quá trình ngẫu nhiên không dừng vẫn có

$$\phi(t_1, t_2) = \phi(t_1 - t_2)$$

gọi là *dừng theo nghĩa rộng*

Hàm hiệp biến

$$\mu\,(t_1, t_2) = E\,\{[X_{t1} - m(t_1)]\,.\,[X_{t2} - m(t_2)]\} = \phi\,(t_1, t_2) - m\,(t_1)\,m\,(t_2)$$

- Khi quá trình dừng

$$\mu\,(t_1, t_2) = \mu\,(t_1 - t_2) = \mu\,(\tau) = \phi\,(\tau) - m^2$$

Trị trung bình cho quá trình ngẫu nhiên Gaussian

- Quá trình ngẫu nhiên Gaussian có các giá trị là biến ngẫu nhiên phân bố gaussian tại mọi thời điểm
- Các biến X_{t_i} với hàm hiệp biến

$$\mu\left(t_i, t_j\right) =$$

$$E\left\{\left[X_{ti} - m\left(t_i\right)\right].\left[X_{t_k} - m\left(t_j\right)\right]\right\}$$

- Nếu $X(t)$ dừng thì

$$\mu\left(t_i, t_j\right) = \mu\left(t_i - t_j\right)$$

Trị trung bình của các quá trình ngẫu nhiên đồng thời

- Quá trình ngẫu nhiên đồng thời X(t),Y(t)
- Đặt $X_{t_i} \equiv X(t_i), 1 \leq i \leq n, Y_{t'_j} \equiv Y(t'_j), 1 \leq j \leq m$
- Hai quá trình sẽ được đặc trưng bởi hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời

$$p(x_{t_1}, x_{t_2} \ldots x_{t_n}, y(t'_1), y(t'_2) \ldots, y(t'_m))$$

- Hàm tương quan chéo

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E(X_{t1} Y_{t2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t1} y_{t2} p(x_{t1}, y_{t2}) dx_{t1} dy_{t2}$$

- Hàm hiệp biến chéo

$$\mu_{xy}(t_1, t_2) = \phi_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1) m_y(t_2)$$

Trị trung bình của các quá trình ngẫu nhiên đồng thời *(Tiếp)*

- Hai quá trình gọi là độc lập thống kê nếu

$$p(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n}) = p(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n} | y(t'_1), y(t'_2) \dots, y(t'_m))$$

- Hai quá trình gọi là không tương quan nếu

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E(X_{t_1}) E(Y_{t_1})$$

Quá trình ngẫu nhiên phức

- Định nghĩa $Z(t) = X(t) + jY(t)$
- Thống kê bậc $n : Z(t_i), 1 \leq i \leq n$
- Hàm mật độ xác suất: $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots x_{t_n}, x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots x_{t_n})$
- Hàm tự tương quan

$$\phi_{zz}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}E(Z_{t_1} Z*_{t_2}) = \frac{1}{2}E((X_{t_1} + jY_{t_1})(X_{t_2} - jY_{t_2}))$$

$$= \frac{1}{2}(\phi_{xx}(t_1, t_2) + \phi_{yy}(t_1, t_2) + j(\phi_{yx}(t_1, t_2) - \phi_{xy}(t_1, t_2)))$$

- Nếu X,Y dừng độc lập và đồng thời

$$\phi_{zz}(t_1, t_2) = \phi_{zz}(t_1 - t_2) = \phi_{zz}(\tau)$$

- Hàm liên hợp phức

$$\phi *_{zz} (\tau) = \phi_{zz}(-\tau)$$

3.2.Phổ mật độ công suất

- Tín hiệu có thể có công suất trung bình hữu hạn hoặc vô hạn
  - Nếu tín hiệu có công suất hữu hạn, biểu diễn tần số có thể thu được bằng biến đổi Fourier.
  - Nếu tín hiệu có công suất vô hạn và tuần hoàn, dùng chuỗi Fourier để biểu diễn.
  - Hệ số của các thành phần trong chuỗi Fourier phản ánh phân bố công suất
- Quá trình ngẫu nhiên dừng có công suất vô hạn
- Có thể tính được phân bố công suất theo tần số

$\Phi(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ Và ngược lại

$\phi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f\tau} df$

3.2.Phổ mật độ công suất *(Tiếp)*

- Từ $\phi(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(f)df = E(|X_1(t)|)^2 \geq 0$

  $\Phi(f)$ gọi là *hàm mật độ công suất* của quá trình ngẫu nhiên

Phổ mật độ công suất chéo

- Phổ mật độ công suất chéo

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- Liên hợp phức hai vế

$$\Phi_{xy}^{*}(f) = \int_{\infty}^{\infty} \phi_{xy}^{*}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{\infty}^{\infty} \phi_{xy}^{*}(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$\int_{\infty}^{\infty} \phi_{xy}^{*}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Phi_{yx}(f)$$

- Khi X, Y là các quá trình ngẫu nhiên thực

$$\Phi_{xy}^{*}(f) = \int_{\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Phi_{xy}(-f)$$

- Vậy

$$\Phi_{yx}(f) = \Phi_{xy}(-f)$$

3.3.Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên

- Xét một hệ tuyến tính bất biến theo thời gian,
  - Hệ thống được đặc trưng bởi đặc tính xung, là đầu ra của hệ thống khi đầu vào là một tín hiệu xung ($\delta(t)$)
  - Tín hiệu đầu ra này là một hàm số theo thời gian $h(t)$
  - Tín hiệu này cũng có thể được biểu diễn bằng hàm số theo tần số $H(f)$
- Tín hiệu đầu ra $y(t)$có thể tính theo tín hiệu đầu vào $x(t)$

$$y(t) = y\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

- Đầu vào và đầu ra đều là các quá trình ngẫu nhiên $X(t), Y(t), x(t), y(t)$ là hai hàm mẫu của $X(t), Y(t)$

3.3.Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên *(Tiếp)*

- Giá trị trung bình của $Y(t)$

$$m_y = E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t-\tau)]\, d\tau =$$

$$m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau = m_x H(0)$$

$H(0)$ là đáp ứng của hệ khi $f = 0$

- Giá trị trung bình của tín hiệu đầu ra bằng hằng số nhân với giá trị trung bình của đầu vào

3.3.Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên

- Hàm tự tương quan của đầu ra

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} E\left(Y_{t1} Y_{t2}^*\right) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) h^*(\alpha) E\left[X(t_1 - \beta) X^*(t_2 - \alpha)\right] d\alpha d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) h^*(\alpha) \phi_{xx}(t_1 - t_2 + \alpha - \beta) d\alpha d\beta$$

3.3.Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên *(Tiếp)*

- Nếu đầu vào dừng, đầu ra cũng dừng

$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)\, h^*(\alpha)\, \phi_{xx}(\tau+\alpha-\beta)\, d\alpha d\beta$$

- Áp dụng biến đổi Fourier cho cả hai vế có phổ mật độ công suất

$$\Phi_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)h(\beta)\phi_{xx}(\tau+\alpha-\beta)e^{-j2\pi\tau} d\tau d\alpha\beta$$

$$= \Phi_{xx}(f)\,|H(f)|^2$$

3.3.Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên *(Tiếp)*

- Biến đổi ngược

$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{yy}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) |H(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Công suất trung bình tín hiệu đầu ra

$$\phi_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) |H(f)|^2 df$$

Tín hiệu có băng tần hạn chế

- Nhắc lại tín hiệu băng tần hạn chế: $S(f) = 0 \forall |f| > W$ có thể được rời rạc hóa vớitốc độ lấy mẫu tối thiểu $2W$(tốc độ Nyquist)
- Khôi phục tín hiệu từ kết quả lấy mẫu
  $$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2\mathrm{W}}\right) \frac{\sin\left[2\pi \mathrm{W}\left(t - \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{W}}\right)\right]}{2\pi \mathrm{W}\left(t - \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{W}}\right)}$$
- Mở rộng công thức trên cho quá trình ngẫu nhiên
  - Quá trình ngẫu nhiên băng tần hạn chế $\Phi(f) = 0 \forall |f| > W$
  - Quá trình ngẫu nhiên có thể được biểu diễn bằng
    $$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2\mathrm{W}}\right) \frac{\sin\left[2\pi \mathrm{W}\left(t - \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{W}}\right)\right]}{2\pi \mathrm{W}\left(t - \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{W}}\right)}$$
- Có thể tính phương sai của chênh lệch
  $$E\{|X(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2\mathrm{W}}\right) \frac{\sin\left[2\pi \mathrm{W}\left(t - \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{W}}\right)\right]}{2\pi \mathrm{W}\left(t - \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{W}}\right)}|^2\} = 0$$
- Quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn tương đương bằng các mẫu, với phương sai 0, khi số mẫu lớn hơn $2W$

4. Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian

1. Sự kiện, xác suất, tính độc lập thống kê
2. Biến ngẫu nhiên
3. Quá trình ngẫu nhiên
4. Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian
    - Đặc trưng của tín hiệu rời rạc
    - Đáp ứng của hệ thống tuyến tính rời rạc
    - Các quá trình dừng vòng

- Quá trình ngẫu nhiên rời rạc $X(n)$ gồm tập hợp các dãy biến ngẫu nhiên $\{x(n)\}$
- Mô men bậc n của $X(n)$ $E[\mathrm{X_n^m}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X_n^m} p(X_n)dX_n$
- Dãy tự tương quan

$$\phi(n,k) = \frac{1}{2}E(X_n X_k^*) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X_n X_k^* p(X_n X_k) dX_n dX_k$$

- Dãy tự hợp biến

$$\mu(n,k) = \phi(n,k) - E(X_n)E(X_k^*)$$

- Với quá trình ngẫu nhiên dừng, ta có

$$\phi(n,k) \equiv \phi(n-k), \mu(n,k) \equiv \mu(n-k), \mu(n-k) = \phi(n-k) - m_x^2$$

Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc *(Tiếp)*

- Phổ mật độ công suất

$$\Phi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) e^{-j2\pi fn} \text{ và } \phi(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi(f) e^{j2\pi fn} df$$

Đáp ứng của hệ thống tuyến tính rời rạc

- Hàm đáp ứng tần số

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j2\pi fn}$$

- Tín hiệu đáp ứng

$$y(n) = y\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)x(n-k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Trị trung bình của tín hiệu ra

$$m_y = m_x H(0)$$

Đáp ứng của hệ thống tuyến tính rời rạc *(Tiếp)*

- Dãy tự tương quan của tín hiệu ra

$$\phi_{yy}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h^*(i)h(j)\phi_{xx}(k-j+i)$$

- Phổ mật độ công suất tín hiệu ra

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f)|H(f)|^2$$

Quá trình dừng vòng

- Các quá trình ngẫu nhiên dừng, có các giá trị thống kê tuần hoàn.
- Ví dụ

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$$

a_n là dãy các biến ngẫu nhiên rời rạc, có trị trung bình
$m_a = E[a_n] \forall n$
dãy tự tương quan $\phi_{aa}(k) = \frac{1}{2}(a_n^* a_{n+k})$
$g(t)$ là tín hiệu xác định

- Giá trị trung bình

$$E[\mathrm{X(t)}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{E(a_n)} g(t - nT) = m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT)$$

- Hàm tự tương quan

$$\phi_{xx}(t+\tau,t)=\frac{1}{2}E[\mathrm{X(t+\tau)X^*(t)}]=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_{\mathrm{aa}}(m-n)g^*(t-nT)g(t+\tau-mT)$$

phụ thuộc vào t,τ.

- Hàm tự tương quan trung bình trong một chu kỳ chỉ phụ thuộc τ

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\phi_{xx}(t+\tau,t)dt$$

- Phổ mật độ công suất trung bình

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$