Cơ sở Lý thuyết Truyền tin-2004

Hà Quốc Trung[1]

[1]Khoa Công nghệ thông tin
Đại học Bách khoa Hà nội

Chương 8: Cấu trúc thu tối ưu

1. Thu tối ưu cho kênh có nhiễu cộng Gaussian

1. Thu tối ưu cho kênh có nhiễu cộng Gaussian
   - Bài toán
   - Bộ tương quan tuyến tính
   - Ví dụ
2. Bộ lọc phối hợp tuyến tính
3. Bộ xác định tối ưu
4. Bộ xác định cực đại khả năng

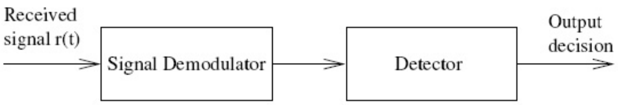
1.1.Bài toán

- Xét thiết bị truyền tin số M mức (M đơn vị tín hiệu dải hẹp $s_m(t), m = 1, 2 \dots M$), mỗi đơn vị tín hiệu truyền trong thời gian T $0 \leq t \leq T$
- Tín hiệu khi truyền qua kênh bị nhiễu. Tín hiệu nhận được sẽ là:

$$r(t) = s_m(t) + n(t), 0 \leq t \leq T$$

  $n(t)$ là nhiễu sinh ra trên kênh. Giả thiết trên cây chỉ có nhiễu cộng Gaussian, mật độ công suất/tần số là $\frac{1}{2}N_0(W/Hz)$
- Mục tiêu : Thiết kế bộ thu tối ưu, xác định được tín hiệu nào trong M tín hiệu ban đầu đã được gửi đi, với xác suất sai nhầm nhỏ nhất.
- Nguyên tắc: chia thiết bị thu làm 2 thành phần:
  - Giải điều chế: khai triển tín hiệu trong một không gian giống như không gian của các tín hiệu ban đầu $r_1 r_2 \dots r_N$
  - Xác định tín hiệu.

1.1.Bài toán



- Bộ giải điều chế: chuyển đổi các tín hiệu nhận được thành một tập các số thực là tọa độ của tín hiệu nhận được trong không gian của các đơn vị tín hiệu. Bộ tương quan tuyến tính (Correlation Demudulator), bộ lọc phối hợp tuyến tính (Matched Filter Demodulator).
- Bộ quyết định: các tọa độ thu được không luôn luôn trùng với một đơn vị tín hiệu đã được định nghĩa. Bộ quyết định khi đó cần phải xác định tín hiệu đã gửi đi một cách gần đúng, sao cho sai số trung bình nhỏ nhất: Bộ quyết định tối ưu, bộ xác định cực đại khả năng.

1.2.Bộ tương quan tuyến tính

- Khai triển tín hiệu thành các tín hiệu trực giao cơ sở của các tín hiệu truyền đi (xem lại thuật toán khai triển). Đảm bảo sai số nhỏ nhất theo năng lượng tín hiệu.
- Tín hiệu đầu ra bộ tương quan tuyến tính

$$\int_0^T r(t)f_k(t)dt = \int_0^T [s_m(t) + n(t)]\, f_k(t)dt, 1 \leq k \leq N$$

Có thể viết thành

$$r_k = s_{mk} + n_k$$

với

$$S_{mk} = \int_0^T r(t)f_k(t)dt, k = 1, 2, ...N$$

$$n_k = \int_0^T n(t)f_k(t)dt, k = 1, 2, ...N$$

1.2.Bộ tương quan tuyến tính *(Tiếp)*

- Tín hiệu truyền đi được biểu diễn chính xác bằng các tín hiệu trực giao s_{mk}. Tín hiệu thu được biểu diễn bằng các thành phần r_k (là các giá trị vô hướng) với sai số là $n'(t)$ thỏa mãn

$$r(t) = \sum_{k=1}^{N} s_{mk}(t) f_k(t) + \sum_{k=1}^{N} n_k f_k(t) + n'(t) = \sum_{k=1}^{N} r_k(t) f_k(t) + n'(t)$$

từ đó

$$n'(t) = n(t) - \sum_{k=1}^{N} n_k f_k(t)$$

- $n'(t)$ là thành phần nhiễu không khai triển được trong không gian tín hiệu. Vậy có thể bỏ qua $n'(t)$ trong quá trình xác định tín hiệu.

1.2.Bộ tương quan tuyến tính *(Tiếp)*

- Các thành phần còn lại của nhiễu có phân bố chuẩn Gaussian. Giá trị trung bình

$$\int_0^T E\left[n(t)\right] f_k(t)dt = E(n_k) = 0$$

Hàm tương quan chéo

$$E(n_k n_m) = \tfrac{1}{2}N_0 \int_0^T \int_0^T E[m(t)n(\tau)f_k(t)f_m(\tau)dtd\tau =$$
$$= \tfrac{1}{2}N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)f_k(t)f_m(\tau)dtd\tau = \tfrac{1}{2}N_0 \int_0^T f_k(t)f_m(t)dt = \tfrac{1}{2}N_0\delta_{mk}$$

trong đó $\delta_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{Nếu } m = k \\ 0, & \text{Nếu } m \neq k \end{cases}$

1.2.Bộ tương quan tuyến tính *(Tiếp)*

- Vậy các thành phần của nhiễu không tương quan, sai phương chung $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}N_0$, là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê
- Các tín hiệu đầu ra thu được cũng là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê, với giá trị trung bình s_{mk}, sai phương $\frac{1}{2}N_0$
- Mật độ phân bố xác suất của tín hiệu đầu ra

$$p(r|s_m) = \prod_{k=1}^{N} p(r|s_{mk}), m = 1, ..., M$$

$$p(r|s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{(\mathrm{r_k} - s_{mk})^2}{N_0}\right]$$

Hay

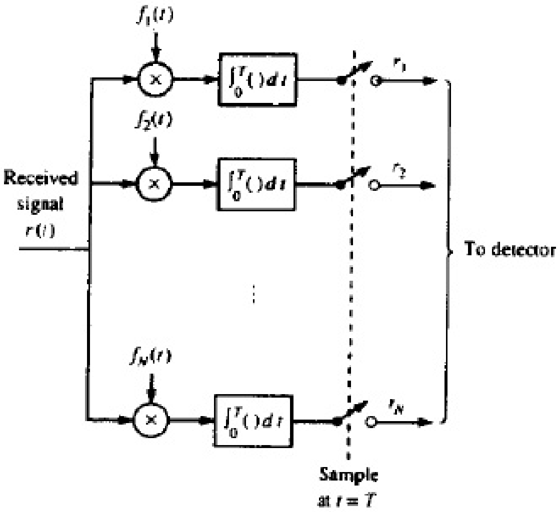
$$p(r|s_m) = \frac{1}{\left(\sqrt{N_0}\right)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{(\mathrm{r_k} - s_{mk})^2}{N_0}\right], \; m = 1, ..., M$$

- Có thể kiểm chứng lại khẳng định $n'(t)$ không liên quan đến các r_k

$$E(n'(t), r_k) = E(n'(t), s_{mk}) + E(n'(t)n_k) = E(n'(t)n_k)$$

$$\begin{aligned}
&E\left\{\left[n(t) - \sum_{j=1}^{N} n_j f_j(t)\right] n_k\right\} = \\
&\int_0^T E\left[n(t)n(\tau)\right] f_k(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{N} E\left(n_j n_k\right) f_f(t) \\
&= \tfrac{1}{2}N_o f_k(t) - \tfrac{1}{2}N_o f_k(t) = 0
\end{aligned}$$

1.2.Bộ tương quan tuyến tính *(Tiếp)*



1.3.Ví dụ

- Xét trường hợp đơn giản, khi có M tín hiệu tương ứng với M xung tín hiệu với M mức khác nhau (PAM băng tần cơ sở m mức). Mỗi tín hiệu có độ dài T, biên độ a

$$g(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}$$

- Khai triển trực giao các tín hiệu đầu vào
  - Năng lượng của tín hiệu

$$\zeta = \int_0^T g^2(t)dt = a^2 T$$

  - Chỉ có một hàm cơ sở

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 T}} g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{nếu không.} \end{cases}$$

- Đầu ra của bộ giải điều chế là

$$r = \int_0^T r(t)f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T r(t)dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \left[\int_0^T s_m(t)dt + \int_0^T n(t)dt \right] = s_m + n$$

- Giá trị trung bình của nhiễu bằng 0, vậy giá trị trung bình của tín hiệu đầu ra cũng bằng 0. Phương sai của tín hiệu đầu ra bằng phương sai của nhiễu và bằng $\frac{N_0}{2}$
- Hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện

$$p(r|s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} exp\left[-\frac{(r - s_m)^2}{N_0} \right]$$

2. Bộ lọc phối hợp tuyến tính

1. Thu tối ưu cho kênh có nhiễu công Gaussian
2. Bộ lọc phối hợp tuyến tính
   - Nguyên tắc
   - Tính chất của bộ lọc phối hợp
   - Biểu diễn bộ lọc phối hợp trong miền tần số
3. Bộ xác định tối ưu
4. Bộ xác định cực đại khả năng

- Thay các bộ tương quan bằng các bộ lọc tuyến tính với đáp ứng xung

$$h_k(t) = f_k(T - t), 0 \leq t \leq T$$

- Tín hiệu đầu ra của các bộ lọc sẽ là $y_k(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t r(\tau)f_k(T-t+\tau)d\tau,\ k = 1, ..., N$
- Lấy mẫu tại thời điểm $t = T$ $y_k(T) = \int_0^T r(\tau)f_k(\tau)d\tau = r_k$
- Đầu ra thu được giống đầu ra của bộ tương quan.

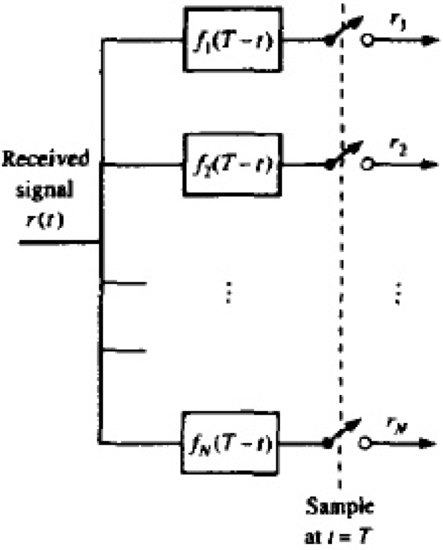
2.1.Nguyên tắc *(Tiếp)*

- Một bộ lọc có đặc tính xung $h(t) = s(T - \tau)$ với $s(t)$ xác định trong khoảng $0 \leq t \leq T$ gọi là bộ lọc phối hợp tuyến tính. Tín hiệu đầu ra của bộ lọc này sẽ là

$$y(t) = \int_0^t s(t)s(T - t + \tau)d\tau$$

  chính là hàm tự tương quan của $s(t)$
- Trong bộ giải điều chế trên, có N bộ lọc phối hợp với hàm cơ sở $f_k(t)$

2.1.Nguyên tắc *(Tiếp)*



2.2.Tính chất của bộ lọc phối hợp

- Trong tất cả các bộ lọc, đây là bộ lọc cực đại hóa tỷ lệ tín hiệu/nhiễu
- Tính chất trên không phụ thuộc vào dạng của tín hiệu $s(t)$

- Xét tín hiệu $r(t)$ gồm tín hiệu $s(t)$ và nhiễu $n(t)$ với hệ số nhiễu $\phi_n n(f) = 1/2N_0$, cho qua một hệ thống có đáp ứng xung $h(t)$. Cần tìm $h(t)$ để tỷ lệ công suất nhiễu/tín hiệu ở đầu ra nhỏ nhất.
- Tín hiệu đầu ra của bộ lọc

$$y(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t s(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^t n(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

2.2.Tính chất của bộ lọc phối hợp *(Tiếp)*

- Vào thời điểm lấy mẫu

$$y(T) = \int_0^T s(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)h(t-\tau)d\tau = y_s(T) + y_n(T)$$

- Tỷ lệ tín hiệu/ nhiễu:

$$\frac{y_s^2(t)}{E[y_n^2(t)]}$$

- Mẫu số

$$E[y_n^2(t)] = \int_0^T \int_0^T E[n(\tau)n(t)]h(T-t)h(T-\tau)dtd\tau =$$

$$= \frac{1}{2}N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)h(T-t)h(T-\tau)dtd\tau = \frac{1}{2}N_0 \int_0^T h^2(T-t)dt$$

2.2.Tính chất của bộ lọc phối hợp *(Tiếp)*

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho tử số

$$y_s^2(T) = \left[\int_0^T s(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]^2$$

$$\leq$$

$$\left[\int_0^T s^2(\tau)d\tau\right]\left[\int_0^T h^2(T-\tau)d\tau\right]$$

- Vậy tỷ lệ tín hiệu/nhiễu bị chặn trên bởi

$$\frac{\left[\int\limits_0^T s^2(\tau)d\tau\right]\left[\int\limits_0^T h^2(T-\tau)d\tau\right]}{\frac{1}{2}N_0\int_0^T h^2(T-t)dt} = \frac{2}{N_0}\int\limits_0^T s^2(t)dt = \frac{2\mathbb{C}}{N_0}$$

2.2.Tính chất của bộ lọc phối hợp *(Tiếp)*

- Dấu bằng xảy ra khi

$$h(t) = Cs(T - t)$$

  , có nghĩa là $h(t)$ phối hợp với $s(t)$
- Tính chất này của bộ lọc phối hợp không phụ thuộc tính chất của $s(t)$

2.3.Biểu diễn bộ lọc phối hợp trong miền tần số

- Từ $h(t) = s(T - t)$ có thể tính được hàm chuyển đổi theo tần số

$$H(f) = \int_0^T s(T - t)e^{-2j\pi ft}dt = e^{-2j\pi fT} \int_0^T s(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau =$$

$$S^*(f)e^{-2j\pi ft}$$

Phổ biên độ tần số của bộ lọc giống của tín hiệu, ngược về pha

- Tín hiệu ra trong miền tần số

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft}$$

2.3.Biểu diễn bộ lọc phối hợp trong miền tần số *(Tiếp)*

- Lấy mẫu tại thời điểm T có

$$y_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \mathbb{C}$$

- Phổ mật độ công suất nhiễu ở đầu ra của bộ lọc

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{2}|H(f)|^2 N_0$$

- Công suất nhiễu của đầu ra

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(f) df = \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \frac{\mathbb{C} N_0}{2}$$

2.3.Biểu diễn bộ lọc phối hợp trong miền tần số *(Tiếp)*

- Tỷ lệ tín hiệu/nhiễu khi đó sẽ là

$$\frac{y_s^2(T)}{\frac{\mathbb{C}N_0}{2}} = \frac{2\mathbb{C}}{N_0}$$

3. Bộ xác định tối ưu

3.1.Nguyên tắc

- Căn cứ vào các vecto nhận được $r_1, r_2, \ldots r_N$ xác định đầu vào thích hợp nhất. Nguyên tắc cơ bản là xác định theo xác suất hậu nghiệm $P(s_m|r)$ cực đại. Tiêu chuẩn này sẽ cực đại xác suất xác định đúng, cực tiểu xác suất xác định sai
- Theo công thức Bayes

$$P(s_m|r) = \frac{P(r|s_m)P(s_m)}{P(r)}$$

có thể viết lại thành

$$P(s_m|r) = \frac{P(r|s_m)P(s_m)}{\sum\limits_{m=1}^{M} p(r|s_m)P(s_m)}$$

- Mẫu số độc lập với tín hiệu truyền đi, do đó với một tín hiệu cụ thể, bài toán chuyển về tìm tín hiệu đầu vào sao cho $p(r|s_m)$ cực đại. Hàm số này còn được gọi là hàm số khả năng
- Xác định cực đại của hàm khả năng đơn giản hơn so với xác định cực đại của xác suất hậu nghiệm. Hai kết quả giống nhau nếu các tín hiệu đầu vào đẳng xác suất
- Với kênh có nhiễu Gaussian, xác suất tín hiệu đầu ra có thể tính được:

$$p(r|s_m) = \frac{1}{\left(\sqrt{N_0}\right)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{(\mathrm{r_k} - s_{mk})^2}{N_0}\right], \; m = 1, ..., M$$

Lấy loga hai vế

$$\ln p(r|s_m) = -\frac{1}{2} N \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} (r_k - s_{mk})^2$$

3.1.Nguyên tắc *(Tiếp)*

- Việc tìm cực đại của xác suất tương đương với việc tìm cực tiểu của

$$D(r, s_m) = \sum_{k=1}^{N} (r_k - s_{mk})^2$$

Đây là khoảng cách tối thiểu giữa các giá trị thu được và tín hiệu ban đầu

- Tính toán khoảng cách đòi hỏi khối lượng tính toán lớn (không có hàm khoảng cách, không có mạch tính khoảng cách)

3.1.Nguyên tắc *(Tiếp)*

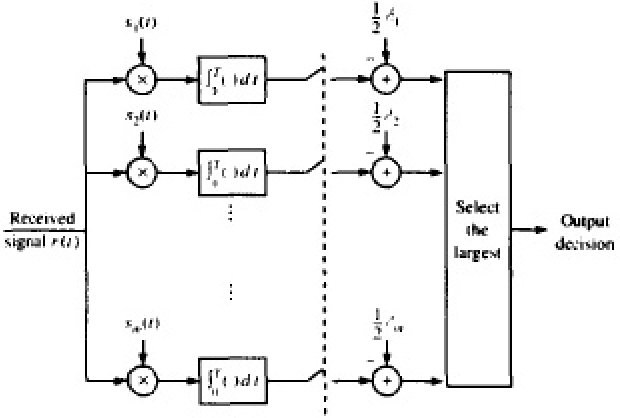
- Cần tìm một khoảng cách khác dễ tính hơn

$$D(r, s_m) = |r|^2 - 2rs_m + |s_m|^2$$

. Nếu các tín hiệu đầu vào cùng công suất, thì việc tìm min D chuyển về tìm max của

$$rs_m = \int_0^T r(t)s_m(t)dt$$

Vậy có thể xây dựng được bộ xác định tín hiệu



- Xét tín hiệu PAM $s_1 = -s_2 = \sqrt{\zeta_b}$ có xác suất tiên nghiệm là $p, 1-p$
- Tín hiệu nhân được ở đầu ra sau giải điều chế sẽ là vector một chiều, với giá trị

$$r = \pm\sqrt{\zeta_b} + y_n(T)$$

, với hai hàm mật độ xác suất có thể là

$$p(r|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left[-\frac{(r-\sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$p(r|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left[-\frac{(r+\sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

3.2.Ví dụ *(Tiếp)*

- Xác suất có thể của r nếu tín hiệu truyền đi là s_1 hoặc s_2

$$PM(r, s_1) = p.p(r|s_1) = \frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left[-\frac{(r-\sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$PM(r, s_2) = (1-p).p(r|s_1) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left[-\frac{(r+\sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

- Nếu $PM(r, s_1) > PM(r, s_2)$ chọn s_1 nếu không chọn s_2. Điều kiện trên tương đương với

$$\frac{PM(r, s_1)}{PM(r, s_2)} > 1$$

hay

$$\frac{p}{1-p} \exp\left[\frac{(r-\sqrt{\zeta_b})^2 - (r-\sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] > 1$$

3.2.Ví dụ *(Tiếp)*

Log hóa hai vế và chuyển vế

$$\sqrt{\zeta_b} r > \frac{1}{2}\sigma_n^2 \ln \frac{1-p}{p}$$

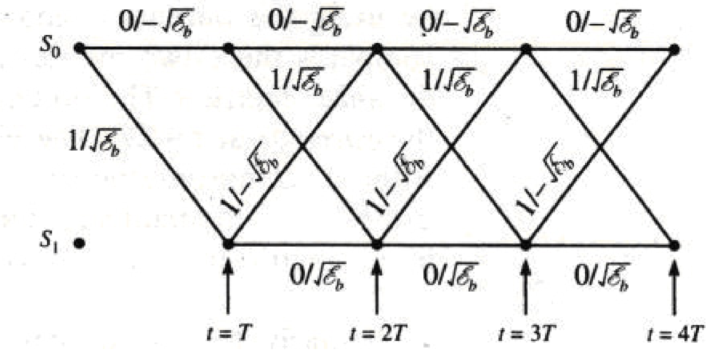
$$r > \frac{\sigma_n^2}{2\sqrt{\zeta_b}} \ln \frac{1-p}{p}$$

- Bài toán chuyển về so sánh tín hiệu nhận được với một giá trị trung gian, nếu lớn hơn, chọn tín hiệu dương, nếu không chọn tín hiệu âm
- Đặc biệt khi $p = 1 - p = 1/2$, mốc để so sánh chính là điểm 0

4. Bộ xác định cực đại khả năng

1. Thu tối ưu cho kênh có nhiễu cộng Gaussian
2. Bộ lọc phối hợp tuyến tính
3. Bộ xác định tối ưu
4. Bộ xác định cực đại khả năng
   - Tín hiệu điều chế có nhớ
   - Nguyên tắc xác định tín hiệu
   - Thuật toán Viterby

- Điều chế tín hiệu tại thời điểm hiện tại phụ thuộc vào việc điều chế tín hiệu tại thời điểm trước đó
- Ví dụ: điều chế vi sai, điều chế NRZI
- Biểu diễn tín hiệu điều chế có nhớ: sơ đồ lưới giống Trellis



4.2.Nguyên tắc xác định tín hiệu

- Xét ví dụ tín hiệu điều chế NRZI. Tín hiệu đầu vào chỉ có một chiều, vậy tín hiệu đầu ra chỉ có một chiều
- Để có thể xác định được chuỗi tín hiệu vào khi đã biết chuỗi tín hiệu ra, cần xác định chuỗi tín hiệu vào có khả năng lớn nhất
- Đầu ra cho mỗi ký hiệu đầu vào

$$r_k = \pm\sqrt{\zeta_b} + n_k$$

trong đó n_k là biến ngẫu nhiên chuẩn Gaussian, trị trung bình 0, phương sai

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2}N_0$$

với phân bố xác suất của tín hiệu đầu ra

$$p(r_k|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left[-\frac{(\mathrm{r_k}-\sqrt{\sigma_b})^2}{2\sigma_n^2}\right]$$
$$p(r_k|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left[-\frac{(\mathrm{r_k}+\sqrt{\sigma_b})^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

4.2.Nguyên tắc xác định tín hiệu *(Tiếp)*

- Xác suất xuất hiện của một chuỗi $r_1, r_2, ...r_K$ sẽ là

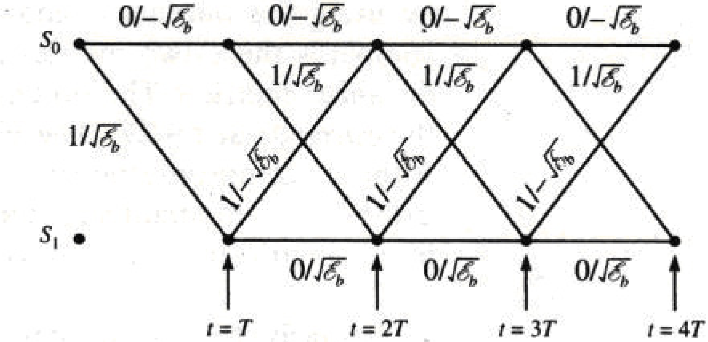
$$p(r_1 r_2 ... r_k | s^{(m)}) = \prod_{k=1}^{M} p(r_k | s_k^{(m)}) = \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{\left(\mathrm{r_k} - s_k^{(m)}\right)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \right)^K \exp\left[\sum_{k=1}^{K} -\frac{\left(\mathrm{r_k} - s_k^{(m)}\right)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

- Cần xác định chuỗi đầu vào sao cho giá trị của xác suất trên là lớn nhất
- Vậy cần xác định cực tiểu của

$$D(r, s^{(m)}) = \sum_{k=1}^{K} (r_k - s_k^{(m)})^2$$

- Đây chính là đường đi ngắn nhất trong lưới từ thời điểm 1 đến thời điểm K
- Để xác định đường đi ngắn nhất: dùng thuật toán Viterby



- Để có thể xác định đường đi ngắn nhất ta xác định đường đi từng đoạn một. Vì nguồn có bộ nhớ 1, nên ta xét các đoạn đường có chiều dài 2
- Hệ thống xuất phát từ trạng thái S_0 ở thời điểm 0

4.3.Thuật toán Viterby *(Tiếp)*

- Tại thời điểm 2T, để có trạng thái S_1 có hai đường đi có thể. Lấy đường đi có giá trị nhỏ nhất trong hai đường đi
  $D_0(0,0) = (r_1 + \sqrt{\varsigma b})^2 + (r_2 + \sqrt{\varsigma b})^2$
  $D_0(1,1) = (r_1 - \sqrt{\varsigma b})^2 + (r_2 + \sqrt{\varsigma b})^2$
- Tại thời điểm 2T, để có trạng thái S_0 có hai đường đi có thể. Lấy đường đi có giá trị nhỏ nhất trong hai đường đi
  $D_1(0,1) = (r_1 + \sqrt{\varsigma b})^2 + (r_2 - \sqrt{\varsigma b})^2$
  $D_1(1,0) = (r_1 - \sqrt{\varsigma b})^2 + (r_2 - \sqrt{\varsigma b})^2$
- Vậy chỉ còn hai đường đi có thể từ trạng thái S_0 đi
- Tiếp tục làm như vậy ở thời điểm 3T, 4T... cho đến KT
- Bài toán tìm đường đi ngắn nhất có thể giải trong thời gian đa thức