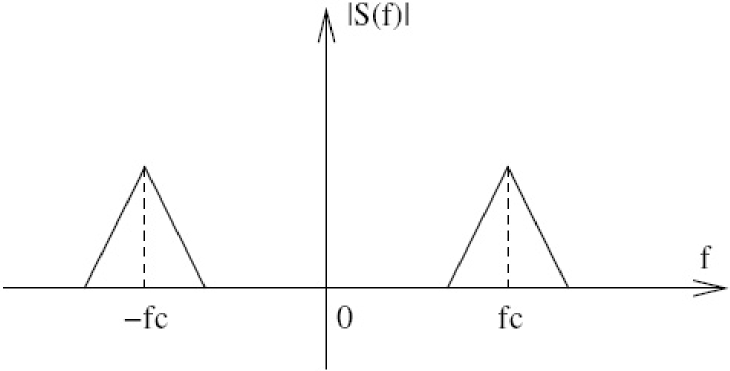
Chương 7: Lý thuyết tín hiệu

1. Biểu diễn thông thấp của tín hiệu và hệ thống truyền tin
2. Không gian tín hiệu
3. Biểu diễn các tín hiệu điều chế số

1. Biểu diễn thông thấp của tín hiệu và hệ thống truyền tin

1. Biểu diễn thông thấp của tín hiệu và hệ thống truyền tin
   - Khái niệm
   - Biểu diễn thông thấp tín hiệu băng hẹp
     - Biểu diễn tín hiệu miền tần số
     - Các bước biểu diễn tín hiệu bằng tín hiệu thông thấp
     - Loại bỏ các tần số âm trong phổ
     - Chuyển về miền thời gian
     - Dịch tần số
     - Biểu diễn tần số
     - Biểu diễn năng lượng
     - Ghi nhớ
   - Biểu diễn thông thấp hệ thống tuyến tính băng hẹp
     - Hệ thống tuyến tính
     - Định nghĩa hệ thống tuyến tính băng hẹp
     - Đáp ứng thông thấp của hệ thống băng hẹp
   - Biểu diễn quá trình ngẫu nhiên dừng băng hẹp bằng các quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương đương

Khái niệm-01



Khái niệm-02

- Thông tin được truyền đi được điều chế sử dụng sóng mang có tần số xác định f_c.
- Kết quả thu được là một tín hiệu có giải tần dao động xung quanh tần số của sóng mang. Thông thường, giải tần có dạng $f_c - \Delta f, f_c + \Delta f$ hoặc $f_c + (-)\Delta f, f_c$ trong trường hợp điều chế đơn biên.
- Tín hiệu thu được có dải tần nhỏ hơn nhiều so với tần số tuyệt đối. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu băng hẹp.
- Trước khi điều chế và sau khi giải điều chế, tín hiệu biểu diễn trực tiếp thông tin cần chuyển đi, có giải tần xấp xỉ tần số lớn nhất. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu thông thấp.
- Chất lượng truyền tin của hệ thống truyền tin được đánh giá bởi chất lượng truyền tín hiệu thông thấp.

Khái niệm-02

- Thông tin được truyền đi được điều chế sử dụng sóng mang có tần số xác định f_c.
- Kết quả thu được là một tín hiệu có giải tần dao động xung quanh tần số của sóng mang. Thông thường, giải tần có dạng $f_c - \Delta f, f_c + \Delta f$ hoặc $f_c + (-)\Delta f, f_c$ trong trường hợp điều chế đơn biên.
- Tín hiệu thu được có dải tần nhỏ hơn nhiều so với tần số tuyệt đối. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu băng hẹp.
- Trước khi điều chế và sau khi giải điều chế, tín hiệu biểu diễn trực tiếp thông tin cần chuyển đi, có giải tần xấp xỉ tần số lớn nhất. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu thông thấp.
- Chất lượng truyền tin của hệ thống truyền tin được đánh giá bởi chất lượng truyền tín hiệu thông thấp.

Khái niệm-02

- Thông tin được truyền đi được điều chế sử dụng sóng mang có tần số xác định f_c.
- Kết quả thu được là một tín hiệu có giải tần dao động xung quanh tần số của sóng mang. Thông thường, giải tần có dạng $f_c - \Delta f, f_c + \Delta f$ hoặc $f_c + (-)\Delta f, f_c$ trong trường hợp điều chế đơn biên.
- Tín hiệu thu được có dải tần nhỏ hơn nhiều so với tần số tuyệt đối. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu băng hẹp.
- Trước khi điều chế và sau khi giải điều chế, tín hiệu biểu diễn trực tiếp thông tin cần chuyển đi, có giải tần xấp xỉ tần số lớn nhất. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu thông thấp.
- Chất lượng truyền tin của hệ thống truyền tin được đánh giá bởi chất lượng truyền tín hiệu thông thấp.

Khái niệm-02

- Thông tin được truyền đi được điều chế sử dụng sóng mang có tần số xác định f_c.
- Kết quả thu được là một tín hiệu có giải tần dao động xung quanh tần số của sóng mang. Thông thường, giải tần có dạng $f_c - \Delta f, f_c + \Delta f$ hoặc $f_c + (-)\Delta f, f_c$ trong trường hợp điều chế đơn biên.
- Tín hiệu thu được có dải tần nhỏ hơn nhiều so với tần số tuyệt đối. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu băng hẹp.
- Trước khi điều chế và sau khi giải điều chế, tín hiệu biểu diễn trực tiếp thông tin cần chuyển đi, có giải tần xấp xỉ tần số lớn nhất. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu thông thấp.
- Chất lượng truyền tin của hệ thống truyền tin được đánh giá bởi chất lượng truyền tín hiệu thông thấp.

- Thông tin được truyền đi được điều chế sử dụng sóng mang có tần số xác định f_c.
- Kết quả thu được là một tín hiệu có giải tần dao động xung quanh tần số của sóng mang. Thông thường, giải tần có dạng $f_c - \Delta f, f_c + \Delta f$ hoặc $f_c + (-)\Delta f, f_c$ trong trường hợp điều chế đơn biên.
- Tín hiệu thu được có dải tần nhỏ hơn nhiều so với tần số tuyệt đối. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu băng hẹp.
- Trước khi điều chế và sau khi giải điều chế, tín hiệu biểu diễn trực tiếp thông tin cần chuyển đi, có giải tần xấp xỉ tần số lớn nhất. Tín hiệu như vậy gọi là tín hiệu thông thấp.
- Chất lượng truyền tin của hệ thống truyền tin được đánh giá bởi chất lượng truyền tín hiệu thông thấp.

Khái niệm-02

- Cần biểu diễn tín hiệu, hệ thống, quá trình ngẫu nhiên dừng dải hẹp bằng các tín hiệu thông thấp tương đương.
- Thuận tiện cho việc tính toán độ đo chất lượng của các hệ thống thông tin có nhiều thành phần.
- Cụ thể:
  - Tín hiệu băng hẹp.
  - Hệ thống tuyến tính dùng cho tín hiệu băng hẹp.
  - Đáp ứng của hệ thống tuyến tính băng hẹp.
  - Quá trình ngẫu nhiên băng hẹp bằng tín hiệu thông thấp.

Tần số của tín hiệu thông thấp và băng hẹp

- Biểu diễn tín hiệu trong miền tần số

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}dt$$

- Tín hiệu dải cơ sở (tín hiệu thông thấp): các thành phần tần số dao động xung quanh tần số 0

$$S(f) \neq 0, |f| \leq f_{max}$$

- Tín hiệu dải (băng) hẹp: các thành phần tần số dao động xung quanh một tần số cơ bản nào đó $S(f) \neq 0, |f - f_C| \leq B$ Tín hiệu băng hẹp có hai băng tần âm và dương.
- Tín hiệu thông thấp chỉ có một miền tần số liên tục

Tần số của tín hiệu thông thấp và băng hẹp

- Biểu diễn tín hiệu trong miền tần số

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}dt$$

- Tín hiệu dải cơ sở (tín hiệu thông thấp): các thành phần tần số dao động xung quanh tần số 0

$$S(f) \neq 0, |f| \leq f_{max}$$

- Tín hiệu dải (băng) hẹp: các thành phần tần số dao động xung quanh một tần số cơ bản nào đó $S(f) \neq 0, |f - f_C| \leq B$ Tín hiệu băng hẹp có hai băng tần âm và dương.
- Tín hiệu thông thấp chỉ có một miền tần số liên tục

Tần số của tín hiệu thông thấp và băng hẹp

- Biểu diễn tín hiệu trong miền tần số

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}dt$$

- Tín hiệu dải cơ sở (tín hiệu thông thấp): các thành phần tần số dao động xung quanh tần số 0

$$S(f) \neq 0, |f| \leq f_{max}$$

- Tín hiệu dải (băng) hẹp: các thành phần tần số dao động xung quanh một tần số cơ bản nào đó
$S(f) \neq 0, |f - f_C| \leq B$ Tín hiệu băng hẹp có hai băng tần âm và dương.
- Tín hiệu thông thấp chỉ có một miền tần số liên tục

Tần số của tín hiệu thông thấp và băng hẹp

- Biểu diễn tín hiệu trong miền tần số

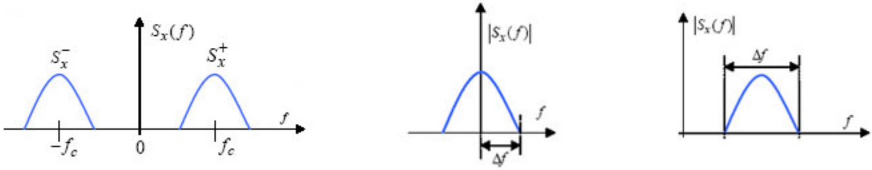
$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}dt$$

- Tín hiệu dải cơ sở (tín hiệu thông thấp): các thành phần tần số dao động xung quanh tần số 0

$$S(f) \neq 0, |f| \leq f_{max}$$

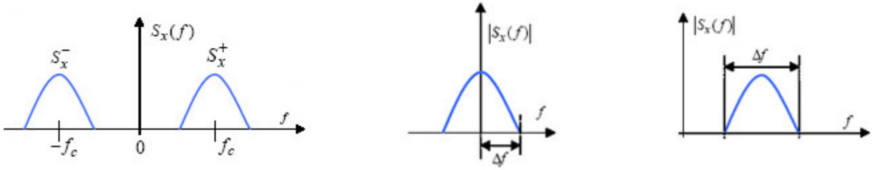
- Tín hiệu dải (băng) hẹp: các thành phần tần số dao động xung quanh một tần số cơ bản nào đó $S(f) \neq 0, |f - f_C| \leq B$ Tín hiệu băng hẹp có hai băng tần âm và dương.
- Tín hiệu thông thấp chỉ có một miền tần số liên tục

Các bước biểu diễn tín hiệu bằng tín hiệu thông thấp tương đương



- Loại bỏ thành phần có tần số âm của tín hiệu băng hẹp (tìm đường bao phức). Tín hiệu trung gian sẽ có dạng (3)
- Dịch hệ tọa độ theo trục tần số.

Các bước biểu diễn tín hiệu bằng tín hiệu thông thấp tương đương



- Loại bỏ thành phần có tần số âm của tín hiệu băng hẹp (tìm đường bao phức). Tín hiệu trung gian sẽ có dạng (3)
- Dịch hệ tọa độ theo trục tần số.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
    - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
    - Dịch phổ tần số.
    - Biến đổi về miền thời gian.
    - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Bài toán

Giả thuyết

Cho tín hiệu băng hẹp. Biểu diễn tín hiệu này bằng các tín hiệu thông thấp:

- Định nghĩa các tín hiệu thông thấp từ tín hiệu băng hẹp.
- Biểu diễn tín hiệu băng hẹp bằng các tín hiệu nói trên.
- Biểu diễn các đặc trưng của tín hiệu băng hẹp theo các đặc trưng của tín hiệu thông thấp tương đương.

- Giải pháp
  - Loại bỏ các tần số âm trong phổ tần số.
  - Dịch phổ tần số.
  - Biến đổi về miền thời gian.
  - Tính toán các đặc trưng khác của tín hiệu băng hẹp.

Loại bỏ các tần số âm

- Dùng hàm bước nhảy đơn vị $U(f)$ để loại bỏ thành phần tần số âm:

$$S_+(f) = 2U(f)S(f)$$

$$U(f) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } f \geq 0 \\ 0, & \text{nếu } f < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{1}{2}(\delta(t) + \frac{j}{\pi T})$$

- $S_+(f)$ gọi là gọi là **bao đóng trước (pre-envelope)** của tín hiệu băng hẹp $s(t)$.

Loại bỏ các tần số âm

- Dùng hàm bước nhảy đơn vị $U(f)$ để loại bỏ thành phần tần số âm:

$$S_+(f) = 2U(f)S(f)$$

$$U(f) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } f \geq 0 \\ 0, & \text{nếu } f < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{1}{2}(\delta(t) + \frac{j}{\pi T})$$

- $S_+(f)$ gọi là gọi là **bao đóng trước (pre-envelope)** của tín hiệu băng hẹp $s(t)$.

Biểu diễn trong miền thời gian

- Áp dụng biến đổi Fourier:

$$s_+(t) = F^{-1}(S_+(f)) = F^{-1}(S(f)) * F^{-1}(2u(f))$$

$*$ là phép toán chập giữa hai tín hiệu

$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)d\tau$

- Như vậy

$$s_+(t) = s(t) * (\delta(t) + \frac{j}{\pi T}) = s(t) + js(t) * \frac{1}{\pi t}$$

- Đặt:

$$\hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{t\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{t-\tau}d\tau$$

- Áp dụng biến đổi Fourier:

$$s_+(t) = F^{-1}(S_+(f)) = F^{-1}(S(f)) * F^{-1}(2u(f))$$

$*$ là phép toán chập giữa hai tín hiệu

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)d\tau$$

- Như vậy

$$s_+(t) = s(t) * (\delta(t) + \frac{j}{\pi T}) = s(t) + js(t) * \frac{1}{\pi t}$$

- Đặt:

$$\hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{t\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{t-\tau}d\tau$$

- Áp dụng biến đổi Fourier:

$$s_+(t) = F^{-1}(S_+(f)) = F^{-1}(S(f)) * F^{-1}(2u(f))$$

$*$ là phép toán chập giữa hai tín hiệu

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)d\tau$$

- Như vậy

$$s_+(t) = s(t) * (\delta(t) + \frac{j}{\pi T}) = s(t) + js(t) * \frac{1}{\pi t}$$

- Đặt:

$$\hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{t\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{t-\tau}d\tau$$

Biểu diễn trong miền thời gian-02

- Khi đó:

$$s_+(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

$\hat{s}(t)$ là đầu ra của một hệ thống có đặc tính xung $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ khi đầu vào là $s(t)$.

- Đặc tính tần số của một hệ thống này:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2j\pi t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}e^{-2j\pi t}dt = \begin{cases} -j & \text{Nếu } f > 0 \\ 0, & \text{Nếu } f = 0 \\ j, & \text{Nếu } f < 0 \end{cases}$$

- Nhận xét

$$|H(f)| = 1 \forall f, \theta(H(f)) = \pi/2 \forall f < 0, \theta(H(f)) = -\pi/2 \forall f > 0$$

. Vậy có thể coi đây là một biến đổi bảo toàn biên độ tín hiệu, lệch pha $\pi/2$ với mọi tần số, gọi là biến đổi trực giao hay **biến đổi Hilbert.**

Biểu diễn trong miền thời gian-02

- Khi đó:

$$s_+(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

$\hat{s}(t)$ là đầu ra của một hệ thống có đặc tính xung $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ khi đầu vào là $s(t)$.

- Đặc tính tần số của một hệ thống này:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2j\pi t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}e^{-2j\pi t}dt = \begin{cases} -j & \text{Nếu } f > 0 \\ 0, & \text{Nếu } f = 0 \\ j, & \text{Nếu } f < 0 \end{cases}$$

- Nhận xét

$$|H(f)| = 1 \forall f, \theta(H(f)) = \pi/2 \forall f < 0, \theta(H(f)) = -\pi/2 \forall f > 0$$

. Vậy có thể coi đây là một biến đổi bảo toàn biên độ tín hiệu, lệch pha $\pi/2$ với mọi tần số, gọi là biến đổi trực giao hay **biến đổi Hilbert.**

- Khi đó:

$$s_+(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

$\hat{s}(t)$ là đầu ra của một hệ thống có đặc tính xung $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ khi đầu vào là $s(t)$.

- Đặc tính tần số của một hệ thống này:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2j\pi t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}e^{-2j\pi t}dt = \begin{cases} -j & \text{Nếu } f > 0 \\ 0, & \text{Nếu } f = 0 \\ j, & \text{Nếu } f < 0 \end{cases}$$

- Nhận xét

$$|H(f)| = 1\forall f, \theta(H(f)) = \pi/2\forall f < 0, \theta(H(f)) = -\pi/2\forall f > 0$$

. Vậy có thể coi đây là một biến đổi bảo toàn biên độ tín hiệu, lệch pha $\pi/2$ với mọi tần số, gọi là biến đổi trực giao hay **biến đổi Hilbert**.

Dịch tần số

- $s_+(t)$ vẫn là tín hiệu băng hẹp. Dịch tần số để chuyển về tín hiệu thông thấp:

$$S_l(f) = S_+(f + f_c)$$

rồi chuyển sang miền thời gian:

$$s_l(t) = s_+(t)e^{-2j\pi f_c t} = (s(t) + j\hat{s})e^{-2j\pi f_c t}$$

Có

$$s(t) + j\hat{s} = s_l(t)e^{-2j\pi f_c t}$$

- Biểu diễn $s_l(t)$ bằng các tín hiệu thực, ví dụ $s_l(t) = x(t) + jy(t)$, ta có

$$s(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$\hat{s}(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t + y(t)\sin 2\pi f_c t$$

Dịch tần số-02

- Công thức

$$s(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

biểu diễn tín hiệu băng hẹp $s(t)$ theo tín hiệu thông thấp tương đương $s_l(t) = x(t) + jy(t)$.

- $s_l(t)$ gọi là tín hiệu thông thấp tương đương của tín hiệu $s(t)$. $x(t), y(t)$ là hai tín hiệu thông thấp thực, là hệ số phần thực và phần ảo của của tín hiệu thông thấp s(t), lệch nhau,còn gọi là 2 thành phần trực giao thông thấp.
- $s(t)$ được biểu diễn từ tín hiệu thông thấp $s_l(t)$ như tổng hợp của hai tín hiệu thu được khi điều biên các tín hiệu thành phần trực giao thực, thông thấp với sóng mang có tần số f_c

- Công thức

$$s(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

biểu diễn tín hiệu băng hẹp $s(t)$ theo tín hiệu thông thấp tương đương $s_l(t) = x(t) + jy(t)$.

- $s_l(t)$ gọi là tín hiệu thông thấp tương đương của tín hiệu $s(t)$. $x(t), y(t)$ là hai tín hiệu thông thấp thực, là hệ số phần thực và phần ảo của của tín hiệu thông thấp s(t), lệch nhau,còn gọi là 2 thành phần trực giao thông thấp.
- $s(t)$ được biểu diễn từ tín hiệu thông thấp $s_l(t)$ như tổng hợp của hai tín hiệu thu được khi điều biên các tín hiệu thành phần trực giao thực, thông thấp với sóng mang có tần số f_c

- Công thức

$$s(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

biểu diễn tín hiệu băng hẹp $s(t)$ theo tín hiệu thông thấp tương đương $s_l(t) = x(t) + jy(t)$.

- $s_l(t)$ gọi là tín hiệu thông thấp tương đương của tín hiệu $s(t)$. $x(t), y(t)$ là hai tín hiệu thông thấp thực, là hệ số phần thực và phần ảo của của tín hiệu thông thấp s(t), lệch nhau,còn gọi là 2 thành phần trực giao thông thấp.
- $s(t)$ được biểu diễn từ tín hiệu thông thấp $s_l(t)$ như tổng hợp của hai tín hiệu thu được khi điều biên các tín hiệu thành phần trực giao thực, thông thấp với sóng mang có tần số f_c

Biểu diễn khác

- $s_l(t)$ có thể biểu diễn bằng các tín hiệu thực thông thấp theo hình thức khác:

$$s(t) = Re(s_l(t)e^{2j\pi f_c t})$$

và

$$s(t) = a(t)cos(2\pi f_c t + \theta(t))$$

Trong đó

$s_l(t) = a(t)e^{\theta(t)}, a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \theta(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$

Liên hệ về tần số

- Biểu diễn tần số của tín hiệu theo tín hiệu thông thấp

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} Re(s_l(t)e^{j2\pi f_c t})e^{-2j\pi ft}dt$$

- Chú ý $\mathbb{C} + \mathbb{C}^* = 2Re(\mathbb{C})$

$$S(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[s_l(t)e^{j2\pi f_c t} + s_l(t)e^{-j2\pi f_c t}\right]e^{-2j\pi ft}dt =$$

$$\frac{1}{2}\left[S_l(f - f_c) + S_l^*(-f - f_c)\right]$$

Đây là liên hệ về tần số giữa tín hiệu băng hẹp và tín hiệu thông thấp tương đương.

Liên hệ về tần số

- Biểu diễn tần số của tín hiệu theo tín hiệu thông thấp

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} Re(s_l(t)e^{j2\pi f_c t})e^{-2j\pi ft}dt$$

- Chú ý $\mathbb{C} + \mathbb{C}^* = 2Re(\mathbb{C})$

$$S(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[s_l(t)e^{j2\pi f_c t} + s_l(t)e^{-j2\pi f_c t}\right] e^{-2j\pi ft}dt =$$

$$\frac{1}{2}\left[S_l(f - f_c) + S_l^*(-f - f_c)\right]$$

Đây là liên hệ về tần số giữa tín hiệu băng hẹp và tín hiệu thông thấp tương đương.

Liên hệ về năng lượng

- Năng lượng của tín hiệu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[Re(s_l(t)e^{j2\pi f_c t})\right]^2 dt$$

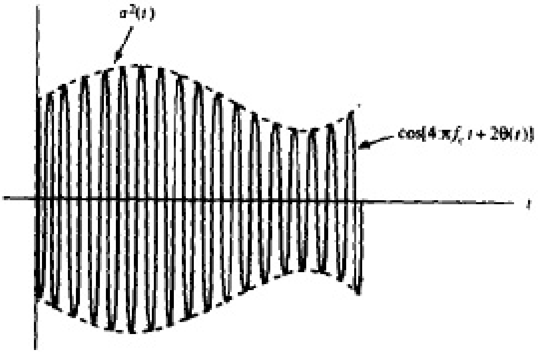
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2(\cos 4\pi f_c t + 2\theta(t))dt$$

Số hạng thứ 2 có thể bỏ qua, vì $s(t)$ là tín hiệu băng hẹp, $a(t)$ hầu như không thay đổi khi $e^{j2\pi f_c t}$ thay đổi. Vậy

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt$$

Năng lượng của tín hiệu băng hẹp bằng 1/2 năng lượng của tín hiệu thông thấp tương đương.

Năng lượng tín hiệu băng hẹp



Ghi nhớ

- Bao đóng trước

$$S_+(f) = 2U(f)S(f)$$

- Tín hiệu thông thấp tương đương

$$s_l(t) = s_+(t)e^{-2j\pi f_c t} = (s(t) + j\hat{s})e^{-2j\pi f_c t}$$

- Biến đổi Hilbert

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}, H(f) = \begin{cases} -j & \text{Nếu } f > 0 \\ 0, & \text{Nếu } f = 0 \\ j, & \text{Nếu } f < 0 \end{cases}$$

- Biểu diễn thông thấp tọa độ

$$s_l(t) = x(t) + jy(t), s(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

- Biểu diễn thông thấp phức

$$s(t) = Re(s_l(t)e^{2j\pi f_c t})$$

- Biểu diễn thông thấp tọa độ cực

$$s(t) = a(t)cos(2\pi f_c t + \theta(t))$$

- Biểu diễn phổ

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[S_l(f - f_c) + S_l^*(-f - f_c)\right]$$

- Năng lượng

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt$$

1.3.Biểu diễn thông thấp hệ thống tuyến tính băng hẹp

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

1.3.Biểu diễn thông thấp hệ thống tuyến tính băng hẹp

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

1.3.Biểu diễn thông thấp hệ thống tuyến tính băng hẹp

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

1.3.Biểu diễn thông thấp hệ thống tuyến tính băng hẹp

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

1.3.Biểu diễn thông thấp hệ thống tuyến tính băng hẹp

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

1.3.Biểu diễn thông thấp hệ thống tuyến tính băng hẹp

- Hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi
  - Đặc tính xung $h(t)$
  - Đặc tính tần số $H(f) = F(h(t))$
  - Hàm h(t) là hàm thực, nên $H^*(-f) = H(f)$
- Bài toán: biểu diễn hệ thống băng hẹp bằng hệ thống tuyến tính có các đặc tính thông thấp tương đương.
- Giải pháp
  - Định nghĩa các hàm đặc tính thông thấp tương đương.
  - Biểu diễn hàm đặc tính theo các hàm đặc tính thông thấp.
  - Biểu diễn đầu ra theo các hàm đặc tính thông thấp.

Định nghĩa hệ thống thông thấp

- Định nghĩa hàm đặc tính tần số của hệ thống thông thấp

$$H_l(f - f_c) = \begin{cases} H(f), & \text{f>0;} \\ 0, & \text{f<0} \end{cases}$$

Từ đó

$$H_l^*(-f - f_c) = \begin{cases} H^*(f), & \text{f<0;} \\ 0, & \text{f>0} \end{cases}$$

Vậy

$$H(f) = H_l(f - f_c) + H_l^*(-f - f_c)$$

- Biểu diễn $h(t)$ theo $h_l(t)$, sử dụng biến đổi Fourier ngược:

$$h(t) = h_l(t)e^{j2\pi f_c t} + h_l^*(t)e^{-j2\pi f_c t} = 2Re\left[h_l(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

Định nghĩa hệ thống thông thấp

- Định nghĩa hàm đặc tính tần số của hệ thống thông thấp

$$H_l(f-f_c) = \begin{cases} H(f), & \text{f>0;} \\ 0, & \text{f<0} \end{cases}$$

Từ đó

$$H_l^*(-f-f_c) = \begin{cases} H^*(f), & \text{f<0;} \\ 0, & \text{f>0} \end{cases}$$

Vậy

$$H(f) = H_l(f-f_c) + H_l^*(-f-f_c)$$

- Biểu diễn $h(t)$ theo $h_l(t)$, sử dụng biến đổi Fourier ngược:

$$h(t) = h_l(t)e^{j2\pi f_c t} + h_l^*(t)e^{-j2\pi f_c t} = 2Re\left[h_l(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

Đáp ứng thông thấp của hệ thống băng hẹp

- Xét tín hiệu đầu vào băng hẹp $s(t)$, biểu diễn bằng tín hiệu thông thấp tương đương là $s_l(t)$, kích hoạt đầu vào một hệ thống tuyến tính băng hẹp đáp ứng xung $h(t)$ và đáp ứng xung thông thấp tương đương $h_l(t)$. Đầu ra của hệ thống là $r(t)$, biểu diễn theo tín hiệu thông thấp

$$r(t) = Re\left[r_l(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

- $r(t)$ được tính từ tích chập

$$r(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Đáp ứng thông thấp của hệ thống băng hẹp *(Tiếp)*

- Trên miền tần số

$$R(f) = S(f)H(f) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[S_l(f - f_c) + S_l^*(-f - f_c)\right]\left[H_l(f - f_c) + H_l^*(-f - f_c)\right]$$

- Chú ý:

$$S_l(f - f_c)H_l^*(-f - f_c) = S_l^*(f - f_c)H_l(-f - f_c) = 0$$

Vậy

$$R(f) = \frac{1}{2}\left[S_l(f - f_c)H_l(f - f_c) = S_l^*(f - f_c)H_l^*(f - f_c)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[R_l(f - f_c) + R_l^*(-f - f_c)\right]$$

Với $R_l(f) = S_l(f)H_l(f)$ biểu diễn tần số thông thấp của tín hiệu đầu ra

- Với tín hiệu đầu ra thông thấp

$$r_l(t) = s_l(t) * h_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_l(\tau)h_l(t-\tau)d\tau$$

Cùng với

$$r(t) = Re\left[r_l(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

1.4.Biểu diễn quá trình ngẫu nhiên dừng băng hẹp bằng các quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương đương

- Trong các mục trên, đã xem xét các biểu diễn của tín hiệu tất định
- Với các tín hiệu ngẫu nhiên, các tham số đặc trưng sẽ là các hàm tự tương quan, hàm tự hiệp biến
- Cần định nghĩa quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương đương và biểu diễn quá trình ngẫu nhiên băng hẹp theo quá trình ngẫu nhiên thông thấp.

Bài toán

- Xem xét quá trình ngẫu nhiên dừng băng hẹp
  - Dừng
  - Băng hẹp: phổ tần số tập trung xung quanh sóng mang. Tần số sóng mang lớn hơn nhiều dải tần.
- Gọi $n(t)$ là một hàm (tín hiệu) mẫu. $n(t)$ có thể được biểu diễn băng hẹp bởi:

$$n(t) = a(t)\sin(2\pi f_c t + \theta(t)) = x(t)\cos 2\pi f_c t - jy(t)\sin 2\pi f_c t = \mathrm{Re}($$

  Trong đó $a(t), \theta(t), x(t), y(t)$ đều là các tín hiệu thông thấp, và là hàm mẫu của các quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương ứng. Có thể thấy tất cả các QTNN này đều dừng, không những thế, các hàm tương quan của chúng có mối liên hệ đặc biệt để đảm bảo tính dừng của QTNN $n(t)$.
- Có thể tạm coi QTNN $z(t) = x(t) + jy(t)$ là QTNN thông thấp tương đương.

Bài toán

- Xem xét quá trình ngẫu nhiên dừng băng hẹp
  - Dừng
  - Băng hẹp: phổ tần số tập trung xung quanh sóng mang. Tần số sóng mang lớn hơn nhiều dải tần.
- Gọi $n(t)$ là một hàm (tín hiệu) mẫu. $n(t)$ có thể được biểu diễn băng hẹp bởi:

$$n(t) = a(t)\sin(2\pi f_c t + \theta(t)) = x(t)\cos 2\pi f_c t - jy(t)\sin 2\pi f_c t = \mathrm{Re}($$

  Trong đó $a(t), \theta(t), x(t), y(t)$ đều là các tín hiệu thông thấp, và là hàm mẫu của các quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương ứng. Có thể thấy tất cả các QTNN này đều dừng, không những thế, các hàm tương quan của chúng có mối liên hệ đặc biệt để đảm bảo tính dừng của QTNN $n(t)$.
- Có thể tạm coi QTNN $z(t) = x(t) + jy(t)$ là QTNN thông thấp tương đương.

Bài toán

- Xem xét quá trình ngẫu nhiên dừng băng hẹp
  - Dừng
  - Băng hẹp: phổ tần số tập trung xung quanh sóng mang. Tần số sóng mang lớn hơn nhiều dải tần.
- Gọi $n(t)$ là một hàm (tín hiệu) mẫu. $n(t)$ có thể được biểu diễn băng hẹp bởi:

$$n(t) = a(t)\sin(2\pi f_c t + \theta(t)) = x(t)\cos 2\pi f_c t - jy(t)\sin 2\pi f_c t = \mathrm{Re}($$

  Trong đó $a(t), \theta(t), x(t), y(t)$ đều là các tín hiệu thông thấp, và là hàm mẫu của các quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương ứng. Có thể thấy tất cả các QTNN này đều dừng, không những thế, các hàm tương quan của chúng có mối liên hệ đặc biệt để đảm bảo tính dừng của QTNN $n(t)$.
- Có thể tạm coi QTNN $z(t) = x(t) + jy(t)$ là QTNN thông thấp tương đương.

Bài toán

- Xem xét quá trình ngẫu nhiên dừng băng hẹp
  - Dừng
  - Băng hẹp: phổ tần số tập trung xung quanh sóng mang. Tần số sóng mang lớn hơn nhiều dải tần.
- Gọi $n(t)$ là một hàm (tín hiệu) mẫu. $n(t)$ có thể được biểu diễn băng hẹp bởi:

$$n(t) = a(t)\sin(2\pi f_c t + \theta(t)) = x(t)\cos 2\pi f_c t - jy(t)\sin 2\pi f_c t = \mathrm{Re}($$

  Trong đó $a(t), \theta(t), x(t), y(t)$ đều là các tín hiệu thông thấp, và là hàm mẫu của các quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương ứng. Có thể thấy tất cả các QTNN này đều dừng, không những thế, các hàm tương quan của chúng có mối liên hệ đặc biệt để đảm bảo tính dừng của QTNN $n(t)$.
- Có thể tạm coi QTNN $z(t) = x(t) + jy(t)$ là QTNN thông thấp tương đương.

Bài toán

- Xem xét quá trình ngẫu nhiên dừng băng hẹp
  - Dừng
  - Băng hẹp: phổ tần số tập trung xung quanh sóng mang. Tần số sóng mang lớn hơn nhiều dải tần.
- Gọi $n(t)$ là một hàm (tín hiệu) mẫu. $n(t)$ có thể được biểu diễn băng hẹp bởi:

$$n(t) = a(t)\sin(2\pi f_c t + \theta(t)) = x(t)\cos 2\pi f_c t - jy(t)\sin 2\pi f_c t = \mathrm{Re}($$

  Trong đó $a(t), \theta(t), x(t), y(t)$ đều là các tín hiệu thông thấp, và là hàm mẫu của các quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương ứng. Có thể thấy tất cả các QTNN này đều dừng, không những thế, các hàm tương quan của chúng có mối liên hệ đặc biệt để đảm bảo tính dừng của QTNN $n(t)$.
- Có thể tạm coi QTNN $z(t) = x(t) + jy(t)$ là QTNN thông thấp tương đương.

được tính theo công thức

$$\begin{aligned}
&\phi_{nn}(\tau) = E\left[n(t)n(t+\tau)\right] = \\
&E\left\{[x(t)\cos 2\pi f_c t - jy(t)\sin 2\pi f_c t]\right. \\
&\left.[x(t+\tau)\cos 2\pi f_c(t+\tau) - jy(t+\tau)\sin 2\pi f_c(t+\tau)]\right\} \\
&= \phi_{xx}(\tau)\cos 2\pi f_c t\ \ \cos 2\pi f_c(t+\tau) + \phi_{yy}(\tau)\sin 2\pi f_c t\ sin 2\pi f_c(t+\tau) \\
&-\phi_{xy}(\tau)\sin 2\pi f_c t\ \ \cos 2\pi f_c(t+\tau) + \phi_{yx}(\tau)\cos 2\pi f_c t\ \ \sin 2\pi f_c(t+\tau)
\end{aligned}$$

Chuyển tích lượng giác thành tổng:

$$\begin{aligned}
&\phi_{nn}(\tau) = E\left[n(t)n(t+\tau)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau)\right]\cos 2\pi f_c \tau + \frac{1}{2}\left[\phi_{xx}(\tau) - \phi_{yy}(\tau)\right]\cos 2\pi f_c(2t+\tau) \\
&-\frac{1}{2}\left[\phi_{yx}(\tau) - \phi_{xy}(\tau)\right]\sin 2\pi f_c \tau - \frac{1}{2}\left[\phi_{yx}(\tau) + \phi_{xy}(\tau)\right]\sin 2\pi f_c(2t+\tau)
\end{aligned}$$

Để đảm bảo tính dừng của vế trái thì

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau);\ \ \phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(\tau)$$

Hàm tự tương quan

$$\phi_{nn}(\tau) = E\left[n(t)n(t+\tau)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau)\right]\cos 2\pi f_c\tau - \frac{1}{2}\left[\phi_{yx}(\tau) + \phi_{xy}(\tau)\right]\sin 2\pi f_c\tau =$$
$$\phi_{xx}(\tau)\cos 2\pi f_c\tau - \phi_{xy}(\tau)\sin 2\pi f_c\tau$$

$$\phi_{nn}(\tau) = \phi_{xx}(\tau)\cos 2\pi f_c\tau - \phi_{xy}(\tau)\sin 2\pi f_c\tau$$

Trong khi đó

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2}E\left[z(t)z^*(t+\tau)\right] = \frac{1}{2}E\left[\left(x(t)+jy(t)\right)\left(x(t+\tau)-jy(t+\tau)\right)\right]$$

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2}\left[\phi_{xx}(\tau)+\phi_{yy}(\tau) + \mathrm{j}\left(\phi_{yx}(\tau)-\phi_{xy}(\tau)\right)\right] = \phi_{xx}(\tau) + \mathrm{j}\phi_{xy}(\tau)$$

Vậy

$$\phi_{nn}(\tau) = \mathrm{Re}\left(\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c\tau}\right)$$

2. Không gian tín hiệu

1. Biểu diễn thông thấp của tín hiệu và hệ thống truyền tin

2. Không gian tín hiệu
   - Không gian vector
   - Không gian tín hiệu
   - Khai triển trực giao tín hiệu
   - Xây dựng hệ thống trực chuẩn (Gram-Schmit)
   - Quan hệ giữa các tín hiệu
   - Ví dụ về khai triển trực giao tín hiệu

3. Biểu diễn các tín hiệu điều chế số

- Vectơ n chiều $[v_1, v_2, .., v_n]$
- Biểu diễn qua các vectơ đơn vị

$$\mathrm{v} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} v_i e_i$$

- Tích vô hướng của hai vectơ $[\mathrm{v}_1 = [v_{11} v_{12}..v_{1n}]$ và $\mathrm{v}_2 = [v_{21} v_{22}..v_{2n}]$ là

$$\mathrm{v}_1.\mathrm{v}_2 = \sum_{i=1}^{n} v_{1i} v_{2i}$$

- Tập hợp m vectơ là trực giao nếu tích các cặp 2 vectơ đều bằng 0

2.1.Không gian vector *(Tiếp)*

- Chuẩn của vectơ v $\|\mathrm{v}\|$ chính là độ dài của v

$$\|\mathrm{v}\| = \sqrt{\mathrm{v.v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_{\mathrm{i}}^{2}}$$

- Bất đẳng thức tam giác

$$\|\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\| \leq \|\mathrm{v}_1\| + \|\mathrm{v}_2\|$$

- Bất đẳng thức Cauchy

$$|\mathrm{v}_1.\mathrm{v}_2| \leq \|\mathrm{v}_1\| \, . \, \|\mathrm{v}_2\|$$

- Công thức Pythagore cho 2 vecto trực giao

$$\|\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\|^2 = \|\mathrm{v}_1\|^2 + \|\mathrm{v}_2\|^2$$

- Biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ

$$v' = Av \text{hay } v' = \lambda v$$

- Thuật toán xác định tập hợp các vector trực chuẩn từ tập hợp các vector
  1. Chọn một vector đầu tiên, chuẩn hóa độ dài

$$u_1 = \frac{\mathrm{v}_1}{||\mathrm{v}_1||}$$

  2. Chọn một vector thứ hai và tính vector trực chuẩn thứ 2 $u_2' = v_2 - (v_2.u_1).u_1$ sau đó

$$u_2 = \frac{\mathrm{u'}_2}{||\mathrm{u'}_2||}$$

2.1.Không gian vector *(Tiếp)*

3. Tiếp tục chọn vectơ thứ 3 $u_3' = v_3 - (v_3.u_1).u_1 - (v_3.u_2).u2$ rồi chuẩn hóa
$$u_3 = \frac{\mathrm{u'}_3}{||\mathrm{u'}_3||}$$
4. Quá trình tiếp tục như vậy cho đến khi kết thúc (thu được vecto 0, không còn vecto nào để chọn), thu được n_1 vectơ trực chuẩn

2.2.Không gian tín hiệu

- Xét tập hợp tín hiệu phức trên khoảng thời gian $[a, b]$
- Tích vô hướng của hai tín hiệu được định nghĩa

$$\langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \int_a^b x_1(t)x_2^*(t)dt$$

2 tín hiệu trực giao nếu tích = 0

- Chuẩn của tín hiệu được định nghĩa là

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}$$

2.2.Không gian tín hiệu *(Tiếp)*

- M tín hiệu là độc lập tuyến tính nếu không có tín hiệu nào biểu diễn được bằng tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu còn lại. Tín hiệu gọi là trực chuẩn nếu tích các cặp 2 tín hiệu bằng 0, chiều dài bằng 1
- Bất đẳng thức tam giác

$$||x(t) + y(t)|| \leq ||x(t)|| + ||y(t)||$$

- Bất đẳng thức Cauchy

$$\left| \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |x_1(t)|^2 \, dt \right|^{1/2} \left| \int_a^b |x_2(t)|^2 \, dt \right|^{1/2}$$

2.3.Khai triển trực giao tín hiệu

- Xét $s(t)$ là tín hiệu thực, có năng lượng hữu hạn

$$\mathbb{C}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t)]^2 dt$$

- Xét tập hợp N hàm trực chuẩn $f_n(t), 1 \leq n \leq N$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_m(t) dt = \begin{cases} 0(m \neq n) \\ 1(m = n) \end{cases}$$

- Ước lượng $s(t)$ theo tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu trên

$$\widehat{s}(t) = \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t)$$

với sai số là

$$e(t) = s(t) - \hat{s}(t)$$

- Cần tính các hệ số để tác động của sai số là cực tiểu (năng lượng cực tiểu)

$$\mathbb{C}_e = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[s(t) - \widehat{s}(t)\right]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t)\right]^2 dt$$

- Cực tiểu đạt được khi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[s(t)-\sum_{k=1}^{K}s_k f_k(t)\right]f_n(t)dt=0$$

hay

$$s_n=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)f_n(t)dt$$

Đây chính là hình chiếu của $s(t)$ trên trục $f_n(t)$, còn $\hat{s}(t)$ là hình chiếu của $s(t)$ trên không gian N chiều

- Năng lượng của sai số

$$\mathbb{C}_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2\, dt -$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t)s(t)dt = \mathbb{C}_s - \sum_{k=1}^{K} s_k^2$$

Nếu giá trị này bằng 0

$$\mathbb{C}_s = \sum_{k=1}^{K} s_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2\, dt$$

Khai triển trực giao s(t)

$$s(t) = \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t)$$

- Nếu một tín hiệu có năng lượng hữu hạn đều biểu diễn được như vậy, thì họ $f_n(t)$ gọi là hệ kín
- Ví dụ: khai triển bằng chuỗi Fourier, tín hiệu định nghĩa trên 0, T

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos k\frac{2\pi}{T}t + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}t \right)$$

Trong đó

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \cos k\frac{2\pi}{T} tdt, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \sin k\frac{2\pi}{T} tdt$$

- Cho một tập M tín hiệu. Xây dựng tập các tín hiệu trực chuẩn từ tập tín hiệu trên
- Thuật toán
  1. Chọn một vector, chuẩn hóa $f_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathbb{C}_1}}$
  2. Chọn vectơ thứ 2, loại bỏ hình chiếu của vectơ thư nhất $f'_2(t) = s_2(t) - c_{12}f_1(t)$, thu được vector trực giao với $f_1(t)$, rồi chuẩn hóa $f_2(t) = \frac{f'_2(t)}{\sqrt{\mathbb{C}_2}}$
  3. Lặp lại quá trình cho đến khi kết thúc

$$f_k(t) = \frac{f'_k(t)}{\sqrt{\mathbb{C}_k}}$$

$$f'_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} f_i(t)$$

$$c_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) f_i(t) dt$$

- Biểu diễn thông thấp của tín hiệu m chiều

$$s_m(t) = \mathrm{Re}\left[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

Năng lượng của tín hiệu

$$\mathbb{C}_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_{lm}(t)|^2\, dt$$

- Tương quan chuẩn hóa giữa hai tín hiệu

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbb{C}_m\mathbb{C}_k}}\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_k(t)dt = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\mathbb{C}_m\mathbb{C}_k}}\int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}(t)s_{lk}^*(t)dt\right\}$$

2.5.Quan hệ giữa các tín hiệu *(Tiếp)*

- Hàm tương quan phức

$$\rho_{km} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbb{C}_m \mathbb{C}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}^*(t) s_{lk}(t) dt$$

$$\text{Re}(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{C}_m \mathbb{C}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt$$

Và

$$\text{Re}(\rho_{km}) = \frac{s_m . s_k}{\|s_m\| . \|s_k\|} = \frac{s_m . s_k}{\sqrt{\mathbb{C}_k \mathbb{C}_m}}$$

- Khoảng cách Euclit giữa các tín hiệu:

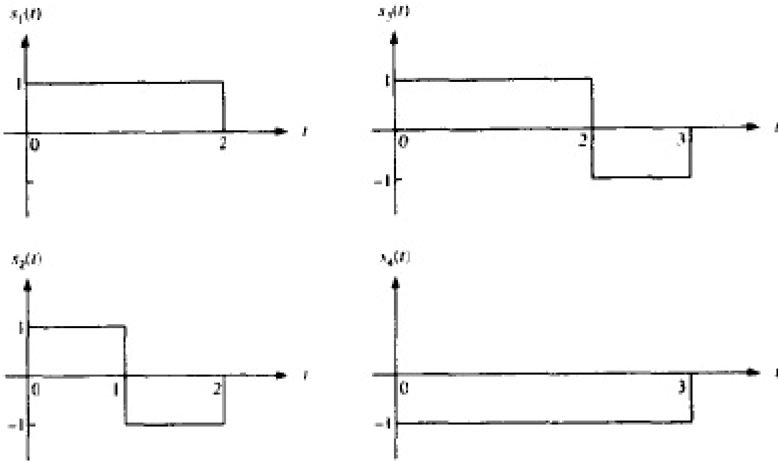
$$d^{(e)}{}_{km} = \|s_m - s_k\| = \{ \int_{-\infty}^{\infty} [s_m(t) - s_k(t)]^2 \, dt\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\mathbb{C}_m + \mathbb{C}_k - 2\sqrt{\mathbb{C}_m \mathbb{C}_k} Re(\rho_{km})}$$

Nếu các tín hiệu có cùng chuẩn thì

$$d_{km}^{(e)} = \sqrt{2\mathbb{C}\,[1 - Re(\rho_{km})]}$$

- Cho 4 tín hiệu



- Xác định tập các tín hiệu trực chuẩn của tín hiệu

2.6.Ví dụ về khai triển trực giao tín hiệu *(Tiếp)*

- Năng lượng của $s_1(t)$ là 2, vậy $f_1(t) = 1/\sqrt{2}s_1(t)$
- Tích của $f_1(t)$ và $s_2(t)$ là $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)s_2(t) = 0$, do đó $f_2'(t) = f_2(t)$. Năng lượng của $f_2(t)$ là 2, vậy $f_2(t) = 1/\sqrt{2}s_2(t)$
- Có thể thấy ngay $s_3(t)f_2(t) = 0, s_3(t)f_1(t) = \sqrt{2}$. Vậy

$$f_3'(t) = s_3(t) - \sqrt{2}s_1(t) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{nếu không} \end{cases}$$

Năng lượng của $f_3'(t) = 1$, vậy $f_3(t) = f_3'(t)$

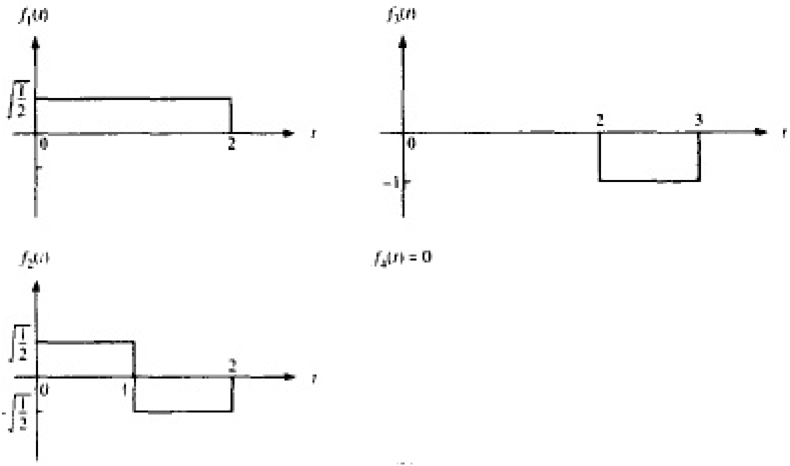
2.6.Ví dụ về khai triển trực giao tín hiệu *(Tiếp)*

- Tích $f_1(t)$ và $s_4(t)$ là $-\sqrt{2}$, 2 và 4 là 0, 3 và 4 là -1

$$f'_4(t) = s_4(t) + \sqrt{2}f_1(t) - f_3(t) = 0$$

Vậy $s(4)$ phụ thuộc tuyến tính vào các tín hiệu còn lại, nên $f_4(t) = 0$

2.6.Ví dụ về khai triển trực giao tín hiệu *(Tiếp)*



2.6.Ví dụ về khai triển trực giao tín hiệu *(Tiếp)*

- Các tín hiệu ban đầu có thể khai triển tuyến tính theo các tín hiệu trực chuẩn vừa nhận được

$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= \sqrt{2}f_1(t)\\
s_2(t) &= \sqrt{2}f_2(t)\\
s_3(t) &= \sqrt{2}f_1(t) + f_3(t)\\
s_4(t) &= -\sqrt{2}f_1(t) + f_3(t)
\end{aligned}
$$

  Biểu diễn trong hệ tọa độ 3 chiều, 3 tín hiệu sẽ có các tọa độ tương ứng là $(\sqrt{2}, 0, 0), (0, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0, 1), (-\sqrt{2}, 0, 1)$

3. Biểu diễn các tín hiệu điều chế số

1. Biểu diễn thông thấp của tín hiệu và hệ thống truyền tin
2. Không gian tín hiệu
3. Biểu diễn các tín hiệu điều chế số
   - Điều chế không nhớ
   - Điều chế có nhớ

Khái niệm

- Điều chế tín hiệu số:
  - Chuyển đổi các thông tin số thành dạng tín hiệu phù hợp với kênh truyền tin.
  - Biểu diễn m bít $a_1, a_2, ...a_m$ bằng 2^m đơn vị tín hiệu tất định, có năng lượng hữu hạn. Gọi tốc độ bít là R (bít/s)
- Điều chế có nhớ:đơn vị tín hiệu tại một thời điểm phụ thuộc vào giá trị thông tin tại các thời điểm trước đó. Ví dụ NRZI.
- Điều chế không nhớ đơn vị tín hiệu tại một thời điểm không phụ thuộc vào giá trị thông tin tại các thời điểm trước đó. Ví dụ: PAM(DSB, SSB), PSK, QAM,OMS (FSK) ...
- Điều chế phi tuyến CFM, CPM, ...

3.1.Điều chế không nhớ

- PAM
- PSK
- QAM

PAM (Pulse Amplitude Modulation)

- Mỗi đơn vị tín hiệu có dạng

$$s_m(t) = Re\left[A_m g(t) e^{j2\pi f_c t}\right] = A_m g(t) cos2\pi f_c t$$

$$m = 1, 2, \dots M = 2^k$$

- Biên độ của các đơn vị tín hiệu nhận các giá trị rời rạc:

$$A_m = (2m - 1 - M)d$$

Khoảng cách giữa các mức sẽ là $2d$.Tín hiệu $g(t)$ biểu diễn dạng của tín hiệu, có ảnh hưởng trực tiếp tới phổ tần số của tín hiệu điều chế. Tốc độ bít là R bít$/s$. Tốc độ ký hiệu là R/k ký hiệu$/s$. Tốc độ chuyển mức là R/k lần $/s$. Khoảng thời gian $T_b = 1/R$ gọi là thời gian của 1 bít, khoảng thời gian $T = k/R$ gọi là khoảng thời gian của ký hiệu.

PAM (Pulse Amplitude Modulation) *(Tiếp)*

- Năng lượng của tín hiệu điều chế

$$\mathbb{C}_m = \int_0^T s_m^2(t)dt = 1/2A_m^2 \int_0^T g^2(t)dt = 1/2A_m^2\mathbb{C}_g$$

- Các tín hiệu nằm trong không gian một chiều, với cơ sở và tọa độ tương ứng là:

$$s_m(t) = s_m f(t)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathbb{C}_g}} g(t) cos 2\pi f_c t$$

$$s_m = A_m \sqrt{\frac{1}{2}\mathbb{C}_g}$$

PAM (Pulse Amplitude Modulation) *(Tiếp)*

- Khoảng cách giữa hai tín hiệu bất kỳ s_m và s_n

$$d^e_{mn} = \sqrt{(s_m - s_n)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbb{C}_g}\,|A_m - A_n| = d\sqrt{2\mathbb{C}_g}\,|m-n|$$

- Khoảng cách ngắn nhất giữa hai tín hiệu

$$d_{min} = d\sqrt{2\mathbb{C}_g}$$

- Trên thực tế, phương pháp điều biên như vậy đòi hỏi giải thông gấp 2 lần giải thông của tín hiệu thông thấp $g(t)$ (DSB). Để có thể loại bỏ một nửa giải thông, có thể sử dụng phương pháp điều chế đơn biên (SSB)dựa trên biến đổi Hilbert của $g(t)$:

$$s_m(t) = Re\left[A_m(g(t) \pm \hat{g}(t))e^{j2\pi f_c t}\right] = A_m g(t) cos 2\pi f_c t$$

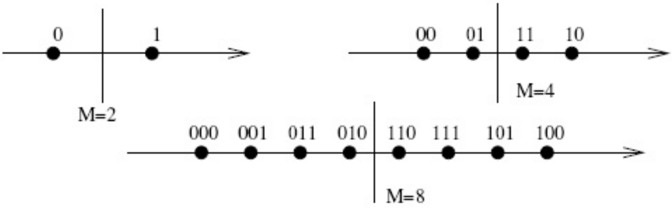
$$g\hat{(}t) = g(t) * \frac{1}{\pi t}$$

PAM (Pulse Amplitude Modulation) *(Tiếp)*

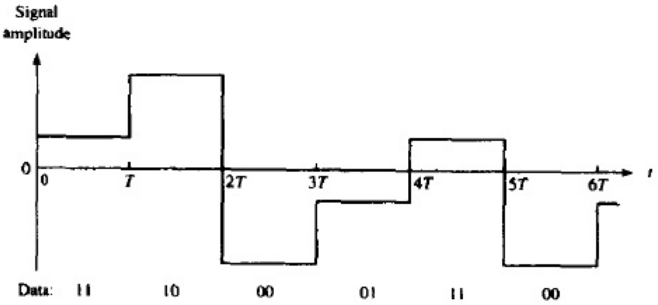
- Khi truyền không điều chế, tín hiệu được gọi là tín hiệu giải cơ sở:

$$s(t) = A_m g(t)$$

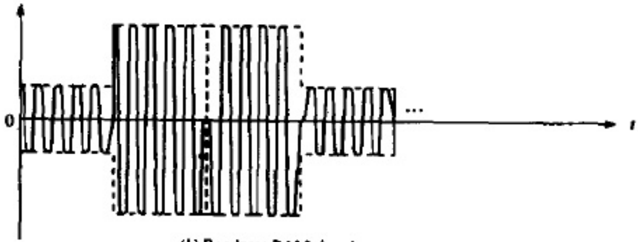
- Khi $M = 2$, hai đơn vị tín hiệu giống nhau và đảo cực, gọi là hai tín hiệu đối nhau: $s_1(t) = -s_2(t)$



Ví dụ về tín hiệu PAM dải cơ sở và băng hẹp



(a) Baseband PAM signal



(b) Bandpass PAM signal

Tín hiệu điều pha (PSK)

- Tín hiệu điều pha được biểu diễn bởi công thức:

$$s_m(t) = Re\left[g(t)e^{j2\pi(m-1)/M}e^{j2\pi f_c t}\right], m = 1, 2 \ldots, M, 0 \leq t \leq T$$

$$= g(t)cos\left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1)\right]$$

$$= g(t)cos\frac{2\pi}{M}(m-1)cos2\pi f_c t - g(t)sin\frac{2\pi}{M}(m-1)sin2\pi f_c t$$

$\theta_m = 2\pi(m-1)$ là các góc pha có thể được sử dụng để mã hóa.

- Các đơn vị tín hiệu có năng lượng bằng nhau:

$$\mathbb{C} = \int_0^T s_m^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T g^2(t)dt = \frac{1}{2}\mathbb{C}_g$$

- Các tín hiệu có thể được phân tích thành tổ hợp tuyến tính của 2 tín hiệu cơ sở:

$$s_m(t) = s_1 f_1(t) + s_2 f_2(t)$$

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathbb{C}_g}} g(t) cos 2\pi f_c t$$

$$f_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathbb{C}_g}} g(t) sin 2\pi f_c t$$

Các hệ số có giá trị là

$$s_{m1} = \sqrt{\frac{\mathbb{C}_g}{2}} cos \frac{2\pi}{M}(m-1), s_{m2} = \sqrt{\frac{\mathbb{C}_g}{2}} sin \frac{2\pi}{M}(m-1)$$

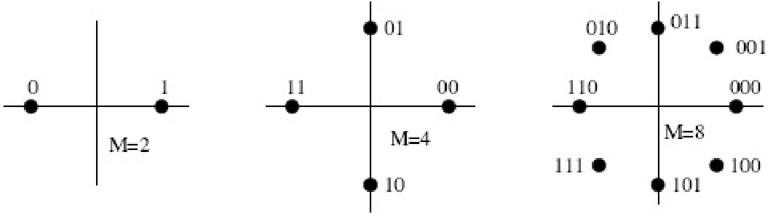
Tín hiệu điều pha (PSK) *(Tiếp)*

- Khoảng cách giữa hai đơn vị tín hiệu bất kỳ:

$$d^e_{mn} = \sqrt{(s_m - s_n)^2} = \sqrt{\mathbb{C}_g}\left[1 - cos\frac{2\pi}{M}(m-n)\right]$$

- Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai đơn vị tín hiệu:

$$d^e_{min} = \sqrt{\mathbb{C}_g}\left[1 - cos\frac{2\pi}{M}\right]$$



Điều chế QAM(Quadrature Amplitude Modulation)

- Tín hiệu QAM được biểu diễn bởi công thức:

$$s_m(t) = Re\left[(A_{mc} + jAms)\, g(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

$$m = 1, 2 \ldots, M, 0 \leq t \leq T$$

$$= A_{mc}g(t)cos[2\pi f_c t - A_{ms}g(t)sin[2\pi f_c t =$$

$$V_m e^{j\theta_m} g(t)e^{j2\pi f_c t} = V_m g(t)cos(2\pi f_c t + \theta_m)$$

  trong đó A_{mc}, A_{ms} là các biên độ mang thông tin của các đơn vị tín hiệu, $V_m = \sqrt{A_{mc}^2 + A_{ms}^2}, \theta_m = arctan\frac{A_{ms}}{A_{mc}}$

- Có thể coi tín hiệu QAM như tổ hợp của hai tín hiệu PAM ($M_1 = 2^m$ bít) và PSK ($M_2 = 2^n$ bít). Khi đó tín hiệu QAM sẽ truyền $m + n$ bít đồng thời.

Điều chế QAM(Quadrature Amplitude Modulation) *(Tiếp)*

- Các tín hiệu có thể được phân tích thành tổ hợp tuyến tính của 2 tín hiệu cơ sở:

$$s_m(t) = s_1 f_1(t) + s_2 f_2(t)$$

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathbb{C}_g}} g(t) cos(2\pi f_c t)$$

$$f_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathbb{C}_g}} g(t) sin 2\pi f_c t$$

Các hệ số có giá trị là

$$s_{m1} = A_{mc}\sqrt{\frac{\mathbb{C}_g}{2}}, s_{m2} = A_{ms}\sqrt{\frac{\mathbb{C}_g}{2}} sin\frac{2\pi}{M}(m-1)$$

Điều chế QAM(Quadrature Amplitude Modulation) *(Tiếp)*

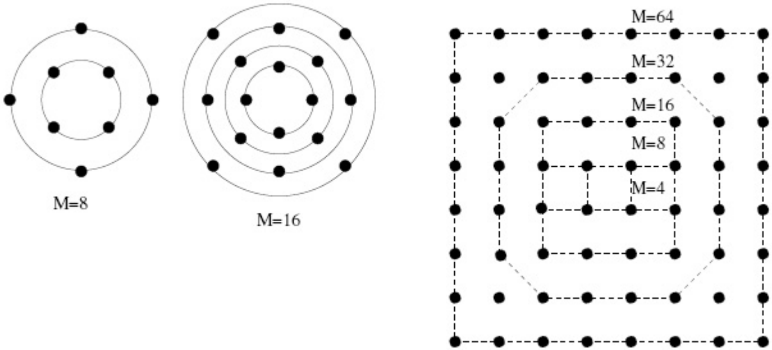
- Khoảng cách giữa hai đơn vị tín hiệu bất kỳ:

$$d_{mn}^{e} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbb{C}_g \left[(A_{mc} - A_{nc})^2 + (A_{ms} - A_{ns})^2\right]}$$

- Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai đơn vị tín hiệu giống như trong trường hợp PAM:

$$d_{min}^{e} = \sqrt{2\mathbb{C}_g}$$

Điều chế QAM(Quadrature Amplitude Modulation) *(Tiếp)*



Điều chế không nhớ khác

- Trên đây là các phương pháp điều chế trong không gian 2 chiều.
- Có thể thực hiện điều chế trong không gian nhiều chiều bằng cách chia nhỏ không gian theo thời gian và tần số.
- Trong trường hợp chia thành miền tần số, cần chú ý chia dải tần cho phép thành các dải tần con thích hợp, tận dụng tối đa băng thông, đồng thời tránh nhiễu xuyên kênh (cross talk noise) giữa các dải tần con.
- Ví dụ: điều chế đa chiều trực giao: phương pháp điều chế khóa dịch tần số (Frequency Shift Keying-FSK).

Điều chế khóa dịch tần số (Frequency Shift Keying-FSK)

- Sử dụng M tín hiệu có cùng năng lượng, có tần số khác nhau để mã hóa $\log_2 M$ bít.

$$s_m(t) = \mathbb{R}\left[s_{lm} e^{j2\pi f_c t}\right], m = 1, 2 \ldots M, 0 \leq t \leq T$$

$$= \sqrt{\frac{2\mathbb{C}}{T}} \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t\right]$$

Các tín hiệu thông thấp tương đương là:

$$s_{lm}(t) = \sqrt{\frac{2\mathbb{C}}{T}} e^{j2\pi m \Delta f t}$$

Điều chế khóa dịch tần số (Frequency Shift Keying-FSK) *(Tiếp)*

- Hàm tương quan chéo

$$\rho_{km} = \frac{\sin \pi T(m-k)\Delta f}{\pi T(m-k)\Delta f} e^{j2\pi T(m-k)\Delta f}$$

Từ đó

$$\mathbb{R}(\rho_{km}) = \frac{\sin 2\pi T(m-k)\Delta f}{2\pi T(m-k)\Delta f}$$

Có thể thấy để đảm bảo điều kiện trực giao,$\mathbb{R}(\rho_{km}) = 0 \forall m \neq k$. Do đó giá trị nhỏ nhất có thể của

Điều chế khóa dịch tần số (Frequency Shift Keying-FSK) *(Tiếp)*

Δf để $\mathbb{R}(\rho_{km}) = 0 \forall m \neq k$ là $1/2T$. Khi $\Delta f = 1/2T$, các đơn vị tín hiệu có tọa độ là:

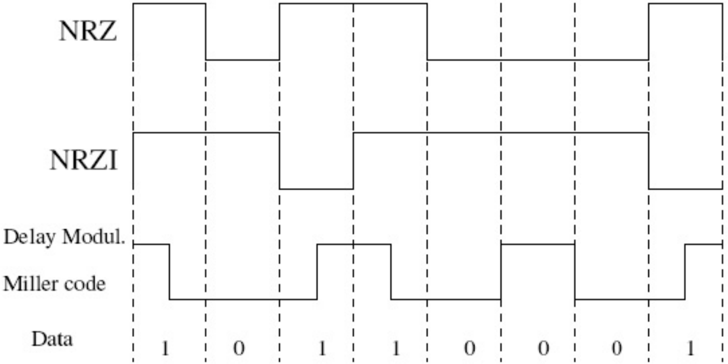
$$\begin{aligned} s_1 &= \left[\sqrt{\mathbb{C}}, 0, \ldots, 0\right] \\ s_2 &= \left[0, \sqrt{\mathbb{C}}, \ldots, 0\right] \\ \ldots \\ s_N &= \left[0, 0, \ldots, \sqrt{\mathbb{C}}\right] \end{aligned} \tag{1}$$

- Khoảng cách giữa các tín hiệu là

$$d_{km}^e = \sqrt{2\mathbb{C}}$$

- Bằng cách sử dụng thêm các tín hiệu đối xứng, có thể tạo ra một bộ 2M các đơn vị tín hiệu.

Điều chế có nhớ



- Các đơn vị tín hiệu tại các khoảng thời gian khác nhau phụ thuộc lẫn nhau.

Điều chế có nhớ *(Tiếp)*

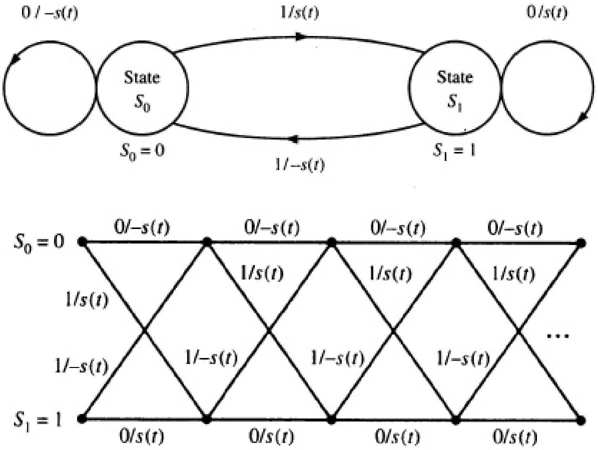
- Sự phụ thuộc này cho phép điều chỉnh dạng phổ tần số của tín hiệu truyền đi.
- Sự phụ thuộc này được thực hiện trước khi điều chế thực sự tín hiệu thành băng hẹp bằng mã điều chế.
- Ví dụ mã NRZ-I có mã điều chế là

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$$

- Quá trình mã hóa có thể được biểu diễn bằng sơ đồ trạng thái hoặc Trellis.

Ví dụ: NRZ-I

- Sơ đồ trạng thái+trellis



Ví dụ: NRZ-I *(Tiếp)*

- Sơ đồ trạng thái có thể được biểu diễn bằng hai ma trận chuyển đổi tương ứng với hai đầu vào

$$\mathrm{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Trong đó $t_{ij} = 1$ nếu a_k làm chuyển từ trạng thái i sang j.

- Một cách khác để mô tả quá trình mã hóa trước điều chế là dùng chuỗi Markov và ma trận chuyển đổi.

Tổng kết

- Các phương pháp biểu diễn tín hiệu
- Một số tín hiệu điều chế số cơ bản: không nhớ, có nhớ.