January 18, 2016

LỜI GIẢI TÓM TẮT HOẶC ĐÁP SỐ

1) a) A $\Leftrightarrow \overline{(p \to q) \vee r} \vee (q \vee r) \Leftrightarrow [\,(p \wedge \bar{q}\,) \wedge \bar{r}\,] \vee (q \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \bar{u}\,) \vee u$ [với u = $(q \vee r)$ và $\bar{u} \Leftrightarrow (\bar{q} \wedge \bar{r}\,)$] $\Leftrightarrow (p \vee u) \wedge (\bar{u} \vee u)$

$\Leftrightarrow (p \vee u) \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow (p \vee u)$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee p \vee r) \Leftrightarrow \bar{q} \to (p \vee r)$ = B.

b) $\overline{C}$ = ‘‘ Có học sinh nào đó của lớp X không đi xem kịch hay tất cả học sinh lớp Y đi xem xiếc ’’

2) Sử dụng $\neg((p \wedge q) \to r) = p \wedge q \wedge \neg r$, ta có

$\overline{P}$: Trời mưa và bạn không đến đón mà tôi vẫn đi học.

3)

a) $\bar{A}$ = “ $\exists x \in \mathbf{Q}$, $\forall y \in \mathbf{R}$, (0,25 đ), $4x^2 + 8x \geq 2^y$ ’’ .

$\bar{A}$ sai (x cố định nên $4x^2 + 8x$ cố định và cho $y \to +\infty$ thì $2^y \to +\infty$, nghĩa là không thể xảy ra $4x^2 + 8x \geq 2^y$) và suy ra A đúng .

b) B $\Leftrightarrow [\,\bar{p} \vee (p \wedge r)\,] \vee [\,(q \vee r) \wedge \bar{q}\,]$

$\Leftrightarrow [\,(\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee r)\,] \vee [\,(q \wedge \bar{q}\,) \vee (r \wedge \bar{q}\,)\,]$

$[\,\mathbf{1} \wedge (\bar{p} \vee r)\,] \vee [\,\mathbf{O} \vee (r \wedge \bar{q}\,)\,] \Leftrightarrow (\bar{p} \vee r) \vee (r \wedge \bar{q}\,)$

$\Leftrightarrow \bar{p} \vee [\,r \vee (r \wedge \bar{q}\,)\,] \Leftrightarrow (\bar{p} \vee r)$ = C .

4)

$t \to u$	(1)
$r \to (s \vee t)$	(2)
$(\neg p \vee q) \to r$	(3)
$\neg(s \vee u)$	(4)
$\therefore p$	

$\neg s \wedge \neg u$	(Do tiền đề (4) và luật đối ngẫu)	(5)
$\neg u$	(Do (5) và luật đơn giản nối liền)	(6)
$\neg t$	(Do (1),(6) và luật phủ định)	(7)
$\neg s$	(Do (5) và luật đơn giản nối liền)	(8)
$\neg t \wedge \neg s$	(Do (7), (8) và phép tóan nối liền)	(9)
$\neg (t \vee \quad)$	(Do (9) và luật đối ngẫu)	(10)
$\neg r$	(Do (2), (10) và luật phủ định)	(11)
$(\neg p \vee q$	(Do (3), (11) và luật phủ định)	(12)
$p \wedge \neg q$	(Do (12) và luật đối ngẫu)	(13)
p	(Do (13) và luật đơn giản nối liền).	

5) a) $\exists\, C > 0, \exists\, m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq m \Rightarrow |x_n| < C\, n\,)$.

b) $\forall\, C > 0, \forall\, m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (\, n \geq m \wedge |x_n| \geq C\, n\,)$.

6) a) $\exists C > 0, \exists d \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (\, n \geq m \Rightarrow |T(n)| < C\, n^d)$.

b) $\forall\, C > 0, \forall\, d \in \mathbb{N}, \forall\, m \in \mathbb{N}, \exists\, n \in \mathbb{N}\ (\, n \geq m\ \wedge |\, T(n)\,| \geq C\, n^d)$.

7)

1) $\neg(q \vee s)$ (tiền đề)

2) $\neg q \wedge \neg s$ (luật De Morgan)
3) $\neg q$ và $\neg s$ (luật đơn giản)
4) $p \rightarrow q$ (tiền đề)
5) $\neg$p (PP phủ định)

6) $\neg p \wedge \neg s$ (Từ 3, 5 và định nghĩa phép nối liền)
7) $\neg(p \vee s)$ (luật De Morgan)
8) r $\rightarrow$ (p $\vee$s) tiền đề)
9) $\neg$r (PP phủ định)

10) (t $\rightarrow$ p) $\rightarrow$ r (tiền đề)
11) $\neg$(t $\rightarrow$ p) (PP phủ định)

12) t $\wedge\neg$p (luật De Morgan)
13) t (luật đơn giản)

Vậy suy luận đã cho là đúng.

8)

1) $\forall x \in R(\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$ (Tiền đề)

2) $\neg P(a) \wedge Q(a) \rightarrow R(a)$ (Qui tắc đặc biệt phổ dụng với a bất kỳ)

3) $P(a) \vee \neg Q(a) \vee R(a)$ (Luật kéo theo)

4) $Q(a) \rightarrow P(a) \vee R(a)$ (Luật kéo theo)

5) $\forall x \in R(P(x) \vee Q(x)$ (Tiền đề)

6) $P(a) \vee Q(a)$ (Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng với a bất kỳ)

7) $\neg P(a) \rightarrow Q(a)$ (Luật kéo theo)

8) $\neg P(a) \rightarrow P(a) \vee R(a)$ (Từ 4 và 7, Tam đọan luận)

9) $P(a) \vee P(a) \vee R(a)$ (Luật kéo theo)

10) $P(a) \vee R(a)$ (Luật lũy đẳng)

11) $\neg R(a) \rightarrow P(a)$ (Luật kéo theo)

12) $\forall x \in R(\neg R(x) \rightarrow P(x))$ (Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng).

9) .

a) Từ q ta có $[\, \bar{t} \vee q \,]$ (1). Từ $(t \rightarrow p)$ ta có $[\, \bar{t} \vee p \,]$ (2).

Từ (2) và (1) ta có $[\, \bar{t} \vee p \,] \wedge [\, \bar{t} \vee q \,]$, nghĩa là $[\, \bar{t} \vee (p \wedge q) \,]$ (3)

Từ (3) ta có $[\, t \rightarrow (p \wedge q) \,]$ (4). Từ (4) và $[\, (p \wedge q) \rightarrow s \,]$, ta suy ra $(t \rightarrow s)$

b) Gán chân trị p = 1, q = 0, s = 0 và t = 0, ta thấy 3 dạng mệnh đề phía trên đúng và dạng mệnh đề dưới sai nên suy luận là sai.

.

10)

a) Ta có $p \vee q$ mà $\bar{p}$ nên q.
Mà $\bar{q} \vee r$ nên r.
Mặt khác $s \rightarrow \bar{r}$, do đó $\bar{s}$.

b) Ta có $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$ kéo theo x > 0. Do đó P đúng.
Phủ định của P là $\bar{P} =$ "$\exists x \in R, x^2 - 5x + 6 \leq 0 \wedge x \leq 0$".

11)

a) A đúng vì $\exists(-9) \in \mathbf{Z}, \forall q \in \mathbf{Q}, q^2 - 6q = (q-3)^2 - 9 \geq -9$.
$\overline{A}$ = ‘’ $\forall k \in \mathbf{Z}, \exists q \in \mathbf{Q}, \quad q^2 - 6q < k$ ’’

b) B $\Leftrightarrow \overline{y \rightarrow \bar{z}} \vee \overline{y \rightarrow x} \vee \bar{z}$

$\Leftrightarrow (y \wedge z) \vee (y \wedge \bar{x}) \vee \bar{z}$

$\Leftrightarrow$ $[\,(y \wedge z) \vee \bar{z}\,] \vee (y \wedge \bar{x})$ $\Leftrightarrow$ $[\,(y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee \bar{z})\,] \vee (y \wedge \bar{x})$

$\Leftrightarrow$ $[\,(\bar{z} \vee y) \wedge \mathbf{1}\,] \vee (y \wedge \bar{x})$ $\Leftrightarrow$ $\bar{z} \vee [\,y \vee (y \wedge \bar{x})\,]$

$\Leftrightarrow$ $\bar{z} \vee y$

12) a) Số đơn thức có được là số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $m + n + p + q = 16$, nghĩa là bằng $K_4^{16} = C_{19}^3 = 969$

b) Số đơn thức có được là số nghiệm nguyên của phương trình $m + n + p + q = 16$ ($m \geq 2$, $n \geq 0$, $p = 3$ và $1 \leq q \leq 4$). Ta có phương trình tương đương

$m' + n + q' = 10$ ($m' = (m - 2) \geq 0$, $n \geq 0$, $0 \leq q' = (q - 1) \leq 3$).

Phương trình $m' + n + q' = 10$ ($m' \geq 0$, $n \geq 0$, $q' \geq 0$) có số nghiệm nguyên là $K_3^{10} = C_{12}^2 = 66$.

Phương trình $m' + n + q' = 10$ ($m' \geq 0$, $n \geq 0$, $q' \geq 4$) $\Leftrightarrow$ $m' + n + q'' = 6$ ($m' \geq 0$, $n \geq 0$, $q'' = (q' - 4) \geq 0$) có số nghiệm nguyên là $K_3^6 = C_8^2 = 28$.

Đáp số cần tìm là $66 - 28 = 38$.

c) $(x - y + 4z - 3t)^{16} = P_{16}^*(8,5,1,2)\, x^8(-y)^5(4z)^1(-3t)^2 + \ldots$ (phép hoán vị lặp trên 16 phần tử)

$$= -\frac{16!}{8!5!1!2!}\,4^1 3^2 (x^8 y^5 z^1 t^2) + \ldots = -77.837.760\; x^8 y^5 z\, t^2 + \ldots$$

13) a) $\mathfrak{R}$ phản xạ vì $\forall (x,y) \in F$, $x \leq x$ và $y \geq y$ nên $(x,y)\,\mathfrak{R}\,(x,y)$.

$\mathfrak{R}$ phản xứng vì $\forall (x,y), (z,t) \in F$, $[\,(x,y)\,\mathfrak{R}\,(z,t)$ và $(z,t)\,\mathfrak{R}\,(x,y)\,]$ $\Rightarrow$ $(\,x \leq z \leq x$ và $y \geq t \geq y\,)$

$\Rightarrow$ $(x,y) = (z,t)$.

$\mathfrak{R}$ truyền vì $\forall (x,y),(z,t),(u,v) \in F$, $[\,(x,y)\,\mathfrak{R}\,(z,t)$ và $(z,t)\,\mathfrak{R}\,(u,v)\,] \Rightarrow (\,x \leq z \leq u$ và $y \geq t \geq v\,)$

$\Rightarrow$ $(\,x \leq u$ và $y \geq v\,)$ $\Rightarrow$ $(x,y)\,\mathfrak{R}\,(u,v)\,)$.

Vậy $\mathfrak{R}$ là một quan hệ thứ tự trên F.

b) Do $|\,D\,| = 50$ và $|\,E\,| = 60$ nên $|\,F\,| = |\,D \times E\,| = |\,D\,|.|\,E\,| = 50 \times 60 = 3000$.

$\min(F, \mathfrak{R}) = (11, 39)$ và $\max(F, \mathfrak{R}) = (60, -20)$.

14) a) Xét $y \in Y$ và phương trình $f(x) = y$ (ẩn $x \in X$) $\Leftrightarrow$ $x = y\sqrt[3]{x^3 + 8}$ $\Leftrightarrow$ $x^3 = y^3(x^3 + 8)$

$\Leftrightarrow$ $(1 - y^3)x^3 = 8y^3$ $\Leftrightarrow$ $x^3 = \dfrac{8y^3}{1 - y^3} \in \mathbf{R}$ và ta có nghiệm duy nhất $x_o = \dfrac{2y}{\sqrt[3]{1 - y^3}} \in X$

(nếu $x_o = -2$ thì dẫn đến $-8 = 0$: vô lý) .

Vậy f là một song ánh và ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$ với $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$ $\forall x \in Y$

b) $\mathfrak{R}$ phản xạ vì $\forall x \in X$, $f(x) \geq f(x)$ nên $x\mathfrak{R}x$.

$\mathfrak{R}$ phản xứng vì $\forall x,y \in X$, $(x\mathfrak{R}y$ và $y\mathfrak{R}x) \Rightarrow [\, f(x) \geq f(y)$ và $f(y) \geq f(x)\,] \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, do f là song ánh

$\mathfrak{R}$ truyền vì $\forall x,y,z \in X$, $(x\mathfrak{R}y$ và $y\mathfrak{R}z) \Rightarrow [\, f(x) \geq f(y)$ và $f(y) \geq f(z)\,] \Rightarrow [\, f(x) \geq f(z)\,] \Rightarrow x$.

Vậy $\mathfrak{R}$ là một quan hệ thứ tự trên X.

15)

Chứng minh đơn ánh: $f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow 3x + 4y = 3x' + 4y'$ (1) $\wedge$ $2x + 3y = 2x' + 3y'$ (2). Nhân (1) với 2, nhân (2) với 3 rồi trừ vế theo vế suy ra y = y', suy ra x = x'. Tức là (x, y) = (x', y'). Vậy f đơn ánh.

Chứng minh toàn ánh: Xét $(a, b) \in R^2$. Xét hệ phương trình $3x + 4y = a$, $2x + 3y = b$. Giải hệ này ta được $x = 3a – 4b$, $y = 3b – 2a$. Suy ra f là toàn ánh

Vậy f là song ánh. $f^{-1}(x, y) = (3x – 4y, 3y – 2x)$.

Ghi chú: Ta có thể làm gộp bằng cách chứng minh với mọi a, b, phương trình f(x, y) = (a, b) có nghiệm duy nhất.

16) Vì 4 chỗ là khác nhau nên ta có 4! cách xếp 4 người vào 4 chỗ .

Ta có 4 cách để xếp An vào 4 chỗ. Sau đó, để An và Châu đối diện nhau, ta có 1 cách xếp Châu. Cuối cùng hai bạn Bình và Danh có 2 cách xếp vào 2 chỗ. Vậy có 4 x 2 = 8 cách xếp sao cho An và Châu ngồi đối diện nhau.

17)

Ta có $S_n = S_{n-1} + n.2^n$. Ta tìm S_n dưới dạng $a + (bn + c)2^n$. Thay vào thì được

$$a + (bn + c)2^n = a + (b(n-1) + c)2^{n-1} + n2^n$$

So sánh hệ số của $n2^n$ và 2^n ở hai vế, ta được

$$b = b/2 + 1,\ c = (c-b)/2$$

Từ đó tìm được b = 2, c = - 2. Cuối cùng, thay n = 1 ta tìm được a = 2.

Vậy $S_n = (2n-2)2^n + 2$.

18) R có tính phản xạ vì có đủ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)

R không có tính đối xứng vì có (1, 2) mà không có (2, 1)

R có tính phản xứng vì có (1, 2), (2, 3), (1, 3) mà không có (2, 1), (3, 2), (3, 1), tức là có chứa (i, j) với $i \neq j$ thì R không chứa (j, i).

R có tính bắc cầu

19) a) Số dãy số có thể có : $\dfrac{10!}{1!2!3!4!}$ (0,5 đ) = 12.600

b) Chữ số cuối là 2 hoặc 4 : $\frac{9!}{2!3!4!} + \frac{9!}{1!2!3!3!}$ (0,5 đ) = 1260 + 5040 = 6300

c) Xem hai chữ số 7 liền nhau như là một chữ số : $\frac{9!}{1!1!3!4!}$ (0,25 đ) = 2520

20)

Ta có $a_o = 5$, $a_1 = 17$ (*) và $a_{n+2} = 4a_n + (20n + 67)3^n \ \forall n \geq 0$ (**).

Xét hệ thức $a_{n+2} = 4a_n \ \forall n \geq 0$ (*) với đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

(*) có nghiệm tổng quát $b_n = p.2^n + q(-2)^n \ \forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) .

Do $f(3) = 5 \neq 0$ nên (**) có một nghiệm có dạng $c_n = (rn + s)3^n \ \forall n \geq 0$ ($r, s \in \mathbb{R}$) .

Thay $c_n = (rn + s)3^n \ \forall n \geq 0$ vào (**), $[\, r(n + 2) + s \,]3^{n+2} = 4(rn + s)3^n + (20n + 67)3^n \ \forall n \geq 0$.
Suy ra $9(rn + 2r + s) = (4rn + 4s + 20n + 67) \ \forall n \geq 0$, nghĩa là $5r = 20$ và $5s + 18r = 67$ và do đó $r = 4$, $s = -1$, $c_n = (4n - 1)3^n \ \forall n \geq 0$. Ta có (**) có nghiệm tổng quát

$a_n = b_n + c_n = p.2^n + q(-2)^n + (4n - 1)3^n \ \forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) . Từ (*), ta có

($p + q = 6$ và $p - q = 4$), nghĩa là ($p = 5$, $q = 1$) và $a_n = 5.2^n + (-2)^n + (4n - 1)3^n \ \forall n \geq 0$.

21)

a) Đặt $f(x) = x^3 + 2x^2 \ \forall x \in S$. $\mathfrak{R}$ phản xạ [$\forall x \in S$, $f(x) = f(x)$ nên $x\mathfrak{R}x$] .
$\mathfrak{R}$ đối xứng [$\forall x,y \in S$, $x\mathfrak{R}y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\mathfrak{R}x$] .
$\mathfrak{R}$ truyền [$\forall x,y \in S$, ($x\mathfrak{R}y$ & $y\mathfrak{R}z \Rightarrow f(x) = f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\mathfrak{R}\mathbf{z}$] .

b) $a\mathfrak{R}0 \Leftrightarrow f(a) = f(0) \Leftrightarrow a^3 + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2(a + 2) = 0 \Leftrightarrow$ ($a = 0$ hoặc $a = -2$) .
$b\mathfrak{R}1 \Leftrightarrow f(b) = f(1) \Leftrightarrow b^3 + 2b^2 = 3 \Leftrightarrow (b - 1)(b^2 + 3b + 3) = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

$c\mathfrak{R}(-1) \Leftrightarrow f(c) = f(-1) \Leftrightarrow c^3 + 2c^2 = 1 \Leftrightarrow (c + 1)(c^2 + c - 1) = 0 \Leftrightarrow c = -1$ hay $c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

22) $\frac{C_{12}^4.C_8^4.1}{3!} = 5775.$

23) a) $K_5^{25} = C_{29}^4 = 23.751$

b) Đặt $x' = (x - 4) \geq 0$, $t' = (t - 6) \geq 0$, $u' = (u + 2) \geq 0$, ta đưa về bài toán tương đương
$x' + y + t' + u' = 14$ có số nghiệm là $K_4^{14} = C_{17}^3 = 680$

c) Xét bài toán (1) là bài toán ở câu a). Xét bài toán (2) là $x + y + z + t + u = 25$ với $x, y, z, t \geq 0$

và $u \ge 10$. Đặt $u' = (u - 10) \ge 0$, bài toán (2) đưa về bài toán tương đương $x + y + z + t + u' = 15$ với $x, y, z, t, u' \ge 0$. Số nghiệm bài toán (2) là $K_5^{15} = C_{19}^4 = 3.876$.

Số nghiệm của bài toán ban đầu là $23.751 - 3876 = 19.875$

24) Đặt $t = -2 - (x + y + z)$ thì $t \in \mathbb{N}$ và ta có phương trình $x + y + z + t = -2$

Đặt $x' = (x + 20) \in \mathbb{N}$, $y' = (y + 7) \in \mathbb{N}$ và $z' = (z - 3) \in \mathbb{N}$, ta có phương trình mới tương

đương với bất phương trình đã cho :

$x' + y' + z' + t = 22$ với $x', y', z', t \in \mathbb{N}$ và $z' < 7$

Ta có 2 bài toán :

BT (1) : Tìm số nghiệm của phương trình $x' + y' + z' + t = 22$ với $x', y', z', t \in \mathbb{N}$

BT (2) : Tìm số nghiệm của phương trình $x' + y' + z' + t = 22$ với $x', y', z', t \in \mathbb{N}$ và $z' \ge 7$

BT (1) có kết quả là $C_{25}^3 = 2300$

Đặt $z'' = (z' - 7) \in \mathbb{N}$ thì BT (2) có cùng kết quả với bài toán (3)

BT (3) : Tìm số nghiệm của phương trình $x' + y' + z'' + t = 15$ với $x', y', z'', t \in \mathbb{N}$

BT (3) có kết quả là $C_{18}^3 = 816$

Số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $2300 - 816 = 1484$

25) Ta có $a_o = 4$, $a_1 = 24$ (*) và $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + (4n - 17)2^n$ $\forall n \ge 0$ (**).

Xét hệ thức $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ $\forall n \ge 0$ (□) với đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

(□) có nghiệm tổng quát $b_n = (p + nq).3^n$ $\forall n \ge 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$) **.**

Do $f(2) = 1 \ne 0$ nên (**) có một nghiệm có dạng $c_n = (rn + s)2^n$ $\forall n \ge 0$ ($r, s \in \mathbf{R}$) **.**

Thay $c_n = (rn + s)2^n$ $\forall n \ge 0$ vào (**),

$[\, r(n + 2) + s \,]2^{n+2} = 6\,[\, r(n + 1) + s \,].2^{n+1} - 9(rn + s)2^n + (4n - 17)2^n$ $\forall n \ge 0$ (***).

Thế $n = 0$ và $n = 1$ vào (***) rồi rút gọn, ta được $4r - s = 17$ và $3r - s = 13$ nên

$r = 4$, $s = -1$, $c_n = (4n - 1)2^n$ $\forall n \ge 0$. Vậy (**) có nghiệm tổng quát

$a_n = b_n + c_n = (p + nq).3^n + (4n - 1)2^n$ $\forall n \ge 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$) . Từ (*), ta có (p – 1 = 4 và 3p + 3q + 6 = 24), nghĩa là (p = 5, q = 1) và $a_n = (n + 5).3^n + (4n - 1)2^n \ \forall n \geq 0$.

26) Đề thi 2013.

a) Gọi x, y, z là số kẹo cần chia cho mỗi người.

Theo giả thiết ta có x, y, z $\in \{3,4,\ldots,10\}$ và x + y + z = 20. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ (x – 3) + (y – 3)+(z – 3) = 11.

Do đó số nghiệm nguyên của (1) thỏa x, y, z ≥ 3 là C_{11+3-1}^{3-1}=78.

Ta lại có (1) $\Leftrightarrow$ (x – 11) + (y – 3)+(z – 3) = 3.

Do đó số nghiệm nguyên của (1) thỏa x ≥11, y,z ≥3 là C_{3+3-1}^{3-1}=10.

Tương tự cho trường hợp y ≥11, x,z ≥3 và z ≥11, y,x ≥3. Do đó số nghiệm của (1) thỏa mãn yêu cầu của bài tóan là 78 – 3.10 = 48 nghiệm , nghĩa là có 48 cách chia.

b) Số quan hệ trên A là số tập con của A × A, nên bằng 2^{16} = 65536.

Số quan hệ tương đương trên A bằng số cách phân họach A thành các tập con rời nhau(lớp tương đương).

- Phân hoạch thành 4 lớp tương đương; 1 cách.
- Phân họach thành 3 lớp tương đương : C_4^2= 6 cách.
- Phân họach thành 2 lớp tương đương : $C_4^3 + \frac{1}{2}C_4^2$= 7 cách.
- Phân họach thành 1 lớp tương đương : 1 cách.

  Vậy, số các quan hệ tương đương là 1+6+7+1 = 15 quan hệ.

27) a) 3281 b) 29615.

28) a)5461512; b) 486000; c) 1959552; d) 1958040

29) a)2118760; b) 1050000

30) $(36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8) = 2684483063360$.

31) X = {x ∈ ℕ: 1 ≤ x ≤ 20} với quan hệ ≤ thông thường.

a) min(A) = 8 và |A| ≥ 10 $\Leftrightarrow$ A = B ∪{8} với B ⊂ Y = {9, 10,…, 20}, |B| ≥ 9.

Số tập con A thỏa min(A) = 8 và |A| ≥ 10

= Số tập con B ⊂ Y = {9, 10,…, 20}, |B| ≥ 9

$$= C_{12}^{9} + C_{12}^{10} + C_{12}^{11} + C_{12}^{12} = 299$$

b) min(A) = 6 và max(A) = 18 $\Leftrightarrow$ A = {6, 18}∪ C với C ⊂ Z = {7, 8,…, 17}.

Số tập con A thỏa min(A) = 6 và max(A) = 18= Số tập con C ⊂ Z = {7, 8,…, 17}.

= 2^{11} = 2048.

32) Đặt a_j là số trận mà đội bóng chơi cho đến hết ngày thứ *j* trong tháng. Ta có $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là một dãy tăng gồm các số nguyên dương khác nhau từng đôi và $a_j \le 45$. Hơn nữa, a_1+14 , $a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ cũng là một dãy số tăng gồm các số nguyên dương khác nhau với $15 \le a_j +14 \le 59$.

Ta thấy rằng 60 số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 +14, a_2 +14, \ldots, a_{30} + 14$ đều nhỏ hơn hoặc bằng 59. Áp dụng nguyên lý Dirichlet ta thấy có ít nhất hai trong 60 số nguyên dương nói trên phải bằng nhau. Như thế phải có ít nhất hai chỉ số i và j sao cho $a_i = a_j +14$. Do đó đúng 14 trận được đội bóng chơi từ ngày thứ j + 1 đến ngày thứ i.

33) a) Vì H là đơn đồ thị vô hướng nên mỗi đỉnh của H không có vòng và chỉ có thể nối với các đỉnh khác không quá một cạnh, nghĩa là mỗi đỉnh của H có bậc tối đa là $(n - 1)$.

Suy ra H có tối đa là $n(n - 1) / 2$ cạnh.

b) Nếu H có đỉnh cô lập thì bậc của các đỉnh của H thuộc tập hợp $\{0,1,\ldots, n - 2\}$. Nên theo nguyên lý Dirichlet, H phải có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

Nếu H không có đỉnh cô lập thì bậc của các đỉnh của H thuộc tập hợp $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Nên theo nguyên lý Dirichlet, H phải có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

34)

a) $s_2 < s_3 < s_1$

$s_3 = aba < ab * * * * < s_1 = ac$

b) Mỗi vị trí * có 3 cách chọn. Do đó có 3* 3 *3 *3 = 81 chuỗi.

35) ĐS: 42580.

36) Ta có hệ thức đệ qui cấp 1 là $s_1 = 1.2.2^1 = 4$ và $s_n = s_{n-1} + n(n + 1)2^n \quad \forall n \ge 2 \quad (1)$

Hệ thức đệ qui thuần nhất $s_n = s_{n-1} \quad \forall n \ge 2 \quad (2)$ có nghiệm tổng quát $u_n = t \in \mathbb{R} \quad \forall n \ge 1$.

Hệ thức đệ qui (1) có một nghiệm riêng dạng $v_n = (an^2 + bn + c)2^n \quad \forall n \ge 1$

Thế v_n vào (1) và đơn giản cho 2^{n-1}, ta có

$2(an^2 + bn + c) = [a(n - 1)^2 + b(n - 1)+ c] + 2n(n + 1) \quad \forall n \ge 2$.

Thế n = 0, 1 và 2, ta có 3 phương trình ($a - b - c = 0$, $2a + 2b + c = 4$, $7a + 3b + c = 12$)

Giải hệ, ta có ($a = 2$, $b = -2$ và $c = 4$), nghĩa là $u_n = (n^2 - n + 2)2^{n+1} \quad \forall n \ge 1$

(1) có nghiệm tổng quát $s_n = u_n + v_n = t + (n^2 - n + 2)2^{n+1} \quad \forall n \ge 1$

Do $s_1 = 4$ nên $t = -4$ .Vậy $s_n = (n^2 - n + 2)2^{n+1} - 4 \quad \forall n \ge 1$.

37) PT đặc trưng của hệ thức đệ qui thuần nhất là : $k^2 - 3k + 2 = 0$ có nghiệm là $k =1$, $k= 2$.

Do đó nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là $x_n = A + 2^nB$.

Vế phải của PT có dạng $P(n)r^n$ với $P(n)$ là đa thức bậc nhất, $r = 1$ và r là nghiệm đơn của PT đặc trưng ,

nên nghiệm riêng của hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất có dạng
$x_n = n(Cn + D)$. Thay vào hệ thức đệ qui đã cho, ta được
$(n+1)[C(n+1) + D] - 3n(Cn + D) + 2(n-1)[C(n-1) + D] = n$.
Lần lượt cho n = 1 và n= 2 ta được C – D = 1 và – C – D = 2, suy ra C = -1/2 và D = - 3/2.
Nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui đã cho là $x_n = A + 2^nB - \frac{n(n+3)}{2}$.
Từ $x_0 = 1$ và $x_1 = 2$ ta được A+ B = 1 và A + 2B = 4, suy ra A = - 2 và B = 3. Do đó nghiệm riêng thỏa đều kiện đầu đã cho là $x_n = -2 + 3.\ 2^n - \frac{n(n+3)}{2}$

38)

a) $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$.

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Có hai ngiệm thực là $\lambda_1 = -1$, $\lambda_1 = 2$. Nghiệm tổng quát là

$$x_n = C_1(-1)^n + C_2 2^n$$

b) $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = (6n - 5)2^{n-1}$ (1) thỏa điều kiện đầu $x_0 = 7$, $x_1 = 4$.

Vì 2 là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên (1) có một nghiệm riêng dạng

$$x_n = n(an + b)2^n$$

Thế vào (1) ta được

$$n(an + b)2^n - (n-1)[a(n-1) + b]2^{n-1} - 2(n-2)[a(n-2) + b]2^{n-2} = (6n-5)2^{n-1}$$

$\Leftrightarrow$ 12an – 10a + 6b = 12n – 10

$\Leftrightarrow$ 12a = 12, – 10a + 6b = –10

$\Leftrightarrow$ a = 1, b = 0.

Vậy một nghiệm riêng của (1) là

$$x_n = n^2 2^n.$$

Nghiệm tổng quát của (1) là

$$x_n = C_1(-1)^n + C_2 2^n + n^2 2^n$$

Thế điều kiện $x_0 = 7$, $x_1 = 4$ ta được

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ -C_1 + 2C_2 + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

Vậy $x_n = 4(-1)^n + 3.2^n + n^2 2^n$

39)

a) ĐS: $a_n = c\,3^n + dn\,3^n$.

b)ĐS: $a_n = (2 + n)3^n + \frac{n^2}{2}(n + 3)\,3^n$

40)

a) $a_n = (A + nB)\,3^n + (n - 2)\,n^2\,3^n$

b) Tìm số các chuỗi nhị phân chiều dài n chứa chuỗi con 00.

Gọi a_n là số chuỗi nhị phân chiều dài n chứa chuỗi con 00.

Ta có $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.
Ta tính a_n:
-TH1 : Nếu bit đầu tiên là bit 1 thì có a_{n-1} cách chọn $n - 1$ bit còn lại.
- TH2 : Nếu bit đầu tiên là bit 0 thì có hai TH xảy ra:
- Bit thứ 2 là bit 1 : có a_{n-2} cách chọn $n - 2$ bit còn lại
- Bit thứ 2 là bit 0 : có 2^{n-2} cách chọn $n - 2$ bit còn lại (các bit này chọn 0 hay 1 đều được)

Vậy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ ($n \geq 2$) (1).

Hệ thức đệ qui TTTN : $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (2)

PTĐT : $x^2 - x - 1 = 0$ có 2 nghiệm đơn là $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Nghiệm tổng quát của (2) là $a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Ta tìm một nghiệm riêng của (1) dưới dạng $a_n = C2^n$. Thay vào (1) :
$C2^n = C2^{n-1} + C2^{n-2} + 2^{n-2} \Leftrightarrow 4C = 2C + C + 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Nghiệm TQ của (1) là $a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$.

Sử dụng ĐK đầu : $A + B + 1 = 0$

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2 = 0.$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5+3\sqrt{5}}{10},\ B = -\frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

$a_n = -\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$

41)

a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ được viết lại $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ (1)

Phương trình đặc trưng của (1) là $x^2 - x - 6 = 0$ có 2 nghiệm là $x = -2$ và $x = 3$.

Nên nghiệm tổng quát của (1) là $a_n = \mathbf{C_1(-2)^n + C_2 3^n}$.

b) Đặt $f_n = 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1} = (-2)^n(10n + 3/2)$.Vì -2 là 1 nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng $n(-2)^n(An + B)$. (3)

Thế (3) vào hệ thức ban đầu ta có:

$n(-2)^n(An + B) = (n-1)(-2)^{n-1}(A(n-1) + B) + 6(n-2)(-2)^{n-2}(A(n-2) + B) + (-2)^n(10n + 3/2)$ (4).

Thế n = 2 vào (4), ta có:

$2(-2)^2(2A + B) = (-2)(A + B) + (-2)^2(10.2 + 3/2)$

$\Leftrightarrow 16A + 8B = -2A - 2B + 86 \Leftrightarrow 18A + 10B = 86 \Leftrightarrow 9A + 5B = 43$ (5)

Thế n = 1 vào (4), ta có:

$(-2)(A + B) = 6(-1)(-2)^{-1}(B - A) + (-2)(10 + 3/2)$

$\Leftrightarrow -2A - 2B = 3B - 3A - 23 \Leftrightarrow A - 5B = -23$ (6)

Từ (5) và (6) ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} 9A + 5B &= 43 \\ A - 5B &= -23 \end{aligned}$$

Giải hệ này ta có: A = 2 và B = 5

Như vậy nghiệm tổng quát của hệ thức là:

$a_n = C_1(-2)^n + C_2 3^n + n(-2)^n(2n + 5)$ (7)

Thế điều kiện đầu vào (7), ta có:

$a_0 = 8 = C_1(-2)^0 + C_2 3^0 + 0(-2)^0(2.0 + 5)$

$\Leftrightarrow C_1 + C_2 = 8$ (8)

$a_1 = 5 = C_1(-2)^1 + C_2 3^1 + 1(-2)^1(2.1 + 5)$

$\Leftrightarrow -2C_1 + 3C_2 = 19$ (9)

Từ (8) và (9) ta có hệ phương trình:

$C_1 + C_2 = 8$

$-2C_1 + 3C_2 = 19$

Giải hệ phương trình trên ta có $C_1 = 1$ và $C_2 = 7$.

Vậy nghiệm của hệ thức đệ qui (1) là:

$a_n = (-2)^n + 7.3^n + n(-2)^n(2n + 5)$.

42)

a)Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ *n*.
Như vậy:
-Số tiền có trong tài khoản vào ngày đầu của năm thứ nhất sẽ là:
$P_0 = 100$ triệu
-Số tiền có trong tài khoản vào ngày cuối năm của năm thứ nhất là:
$P_1 = P_0 +$ Lãi 1 + Lãi 2
Trong đó:
Lãi 1 = 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm
$= 0.2 * P_0$
Lãi 2 = 45% tổng số tiền có trong tài khoản của năm trước đó
$= 0.45 * 0$
Vậy :

$$P_1 = P_0 + 0.2\, P_0$$

-Số tiền có trong tài khoản vào ngày cuối năm thứ hai sẽ là:

$$P_2 = P_1 + 0.2 * P_1 + 0.45 * P_0$$

Tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ *n* sẽ là:

$$P_n = P_{n-1} + 0.2 * P_{n-1} + 0.45 * P_{n-2}$$
$$= 0.45 * P_{n-2} + 1.02 * P_{n-1}$$

b)Giải hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất với $P_0 = 100$, $P_1 = 120$ ta được

$$P_n = \frac{250}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{50}{3}\left(-\frac{3}{10}\right)^n.$$

43)

a)Gọi L_n là số cách xếp số xe máy, xe đạp cho đầy *n* lô
-số cách xếp cho đầy *n* lô với vị trí đầu tiên là xe đạp là L_{n-1}
-số cách xếp cho đầy *n* lô với vị trí đầu tiên là xe máy là L_{n-2}
Vậy:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

b)Giải hệ thức đệ qui với điều kiện đầu:
$L_0 = 1$, $L_1 = 1$ ta được

$$L_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

44)

Giả sử n-1 đường thẳng chia mặt phẳng thành x_{n-1} miền.

Đường thẳng thứ n cắt n-1 đường thẳng cho trước tại n-1 giao điểm .

Trong đó:

-có n-2 đọan thẳng hữu hạn
-có 2 đọan có một đầu vô hạn
Mỗi đọan thẳng này phân miền mặt phẳng nó đi qua thành 2 miền .

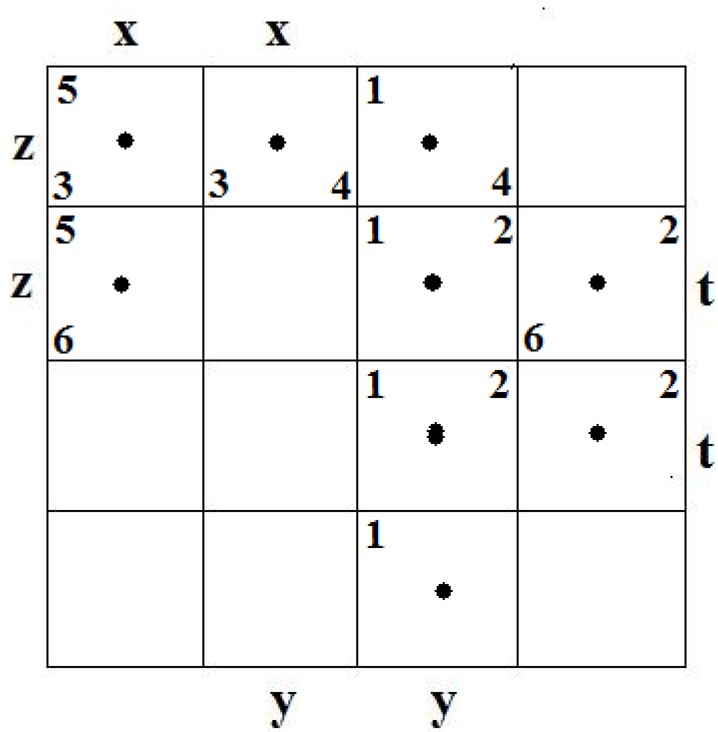
Do vậy sẽ tăng thêm n miền.

Vậy: $x_n = x_{n-1} + n$

Giải hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất với điều kiện đầu $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ ta được

$$x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

45) a) $S = \mathrm{Kar}(f) = K(x\bar{y}z\bar{t}) \cup K(\bar{x}zt) \cup K(x\bar{y}zt) \cup K(\bar{x}\bar{z}t) \cup K(\bar{x}y\bar{t}) \cup K(xyz\bar{t})$.



S có 6 tế bào lớn $T_1 = \bar{x}\,y$, $T_2 = \bar{x}\,t$, $T_3 = x\,z\,\bar{t}$, $T_4 = y\,z\,\bar{t}$, $T_5 = x\,\bar{y}\,z$ và $T_6 = \bar{y}\,z\,t$

b) S có 3 phép phủ như sau :

$T_1 \to T_2 \to T_3 \to T_6$ (phép phủ tối tiểu)

$\downarrow$

$T_5 \to T_3$ (phép phủ tối tiểu)

$\downarrow$

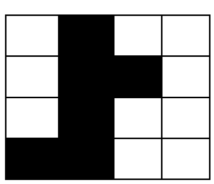
T_4 (phép phủ tối tiểu)

Suy ra $f(x,y,z,t) = \bar{x}\,y \vee \bar{x}\,t \vee x\,z\,\bar{t} \vee \bar{y}\,z\,t$ (công thức đa thức tối tiểu của f)

$= \bar{x}\,y \vee \bar{x}\,t \vee x\,\bar{y}\,z \vee x\,z\,\bar{t}$ (công thức đa thức tối tiểu của f)

$= \bar{x}\,y \vee \bar{x}\,t \vee x\,\bar{y}\,z \vee y\,z\,\bar{t}$ (công thức đa thức tối tiểu của f)

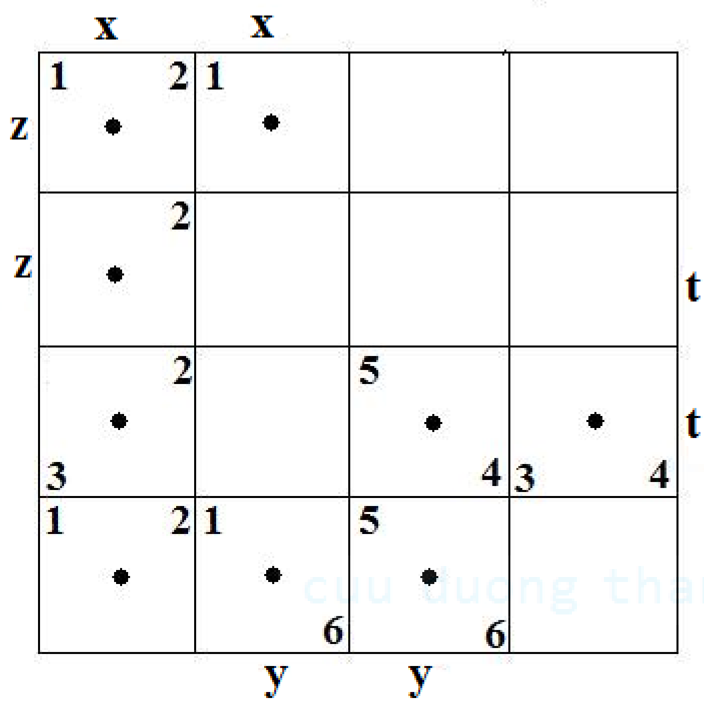
46) a) Biểu đồ Karnaugh:



b) Các tế bào lớn: xy, yzt, $x\bar{z}\bar{t}$

Công thức đa thức tối tiểu: $f = xy \vee yzt \vee x\bar{z}\bar{t}$.

47) a) Kar(f) = Kar($\bar{x}\, y\, \bar{z}\, t$) $\cup$ Kar□$x\, z\, \bar{t}$) $\cup$ Kar($\bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}\, t$) $\cup$ Kar($x\, \bar{z}\, \bar{t}$) $\cup$ Kar($\bar{x}\, y\, \bar{z}\, \bar{t}$) $\cup$ Kar($x\, \bar{y}\, t$)



S = Kar(f)

S có 6 tế bào lớn $T_1 = x\bar{t}$, $T_2 = x\bar{y}$, $T_3 = \bar{y}\,\bar{z}\, t$, $T_4 = \bar{x}\,\bar{z}\, t$, $T_5 = \bar{x}\, y\, \bar{z}$ và $T_6 = y\,\bar{z}\,\bar{t}$

b) Các tế bào lớn phải chọn là T_1 và T_2 .

S có 3 phép phủ như sau (tất cả đều là các phép phủ tối tiểu) :

T_5

$\uparrow$

$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_4 \rightarrow T_6$

$\downarrow$

$T_5 \rightarrow T_3$

$\downarrow$

T_4

$S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5 = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6 = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$

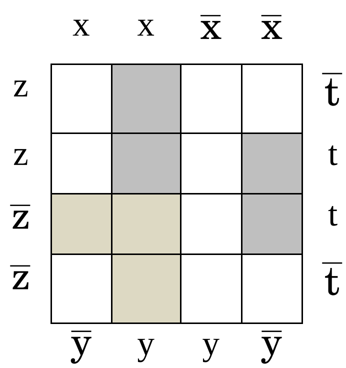
f có các công thức đa thức tối tiểu (đều đơn giản ngang nhau) như sau :

$f(x,y,z,t) = x\bar{t} \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} = x\bar{t} \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}\,t \vee y\,\bar{z}\,\bar{t} = x\bar{t} \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}\,t$

48)

Đề 2013(đợt 2)

a)



S có 4 tế bào lớn $\bar{y}\,zt$, $\bar{x}\,\bar{y}\,t$, $x\,y$, $x\,z\,t$

b) S có 2 phép phủ tối tiểu, suy ra *f* có hai công thức đa thức tối tiểu là :

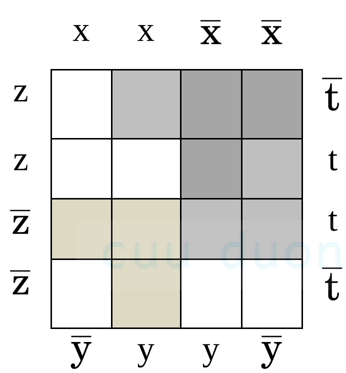
$f(x,y,z,t) = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t \vee xzt.$

$f(x,y,z,t) = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t \vee \bar{y}zt$

c)Từ Kar(*f*) suy ra dạng nối rời chính tắc của *f* là

$f(x,y,z,t) = x\,\bar{y}\,z\,t \vee x\,y\,\bar{z}\,t \vee x\,y\,z\,t \vee x\,y\,z\,\bar{t} \vee x\,y\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t.$

49)



S có 6 tế bào lớn $T_1 = \bar{x}\,z$, $T_2 = \bar{x}\,t$, $T_3 = \bar{z}\,t$, $T_4 = x\,y\,\bar{t}$, $T_5 = y\,z\,\bar{t}$ và $T_6 = x\,y\,\bar{z}$

b) S có 3 phép phủ như sau :

$T_1 \rightarrow T_3 \rightarrow T_4$ (phép phủ tối tiểu)

$\downarrow$

$T_5 \rightarrow T_4$ (phép phủ chưa tối tiểu) : loại

$\downarrow$

T_6 (phép phủ tối tiểu)

Suy ra f(x,y,z,t) = $\bar{x}\, z \vee \bar{z}\, t \vee x\, y\, \bar{t}$ (đây là công thức đa thức tối tiểu của f)

$= \bar{x}\, z \vee \bar{z}\, t \vee y\, z\, \bar{t} \vee x\, y\, \bar{z}$ (bị loại vì phức tạp hơn công thức trên)

50) Tìm tất cả các công thức đa thức tối tiểu của hàm Bool 4 biến sau:

$$f(x,y,z,t) = xy\bar{z} \vee \bar{y}(\bar{x}z \vee \bar{z}\bar{t}) \vee x\bar{y}(z\,t \vee \bar{z}).$$

$$f(x,y,z,t) = xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{y}\,\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z\,t \vee x\bar{y}\,\bar{z}.$$

Vẽ kar(f):

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z				1	$\bar{t}$
z	2			3	t
$\bar{z}$	4	5			t
$\bar{z}$	6	7		8	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Các tế bào lớn: $\bar{x}\,\bar{y}z$, $\bar{x}\,\bar{y}\bar{t}$, $\bar{y}zt$, $x\bar{y}t$, $x\bar{z}$, $\bar{y}\,\bar{z}\bar{t}$.

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z				**1**	$\bar{t}$
z	2			**3**	t
$\bar{z}$	4	5			t
$\bar{z}$	6	7		8	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$\bar{x}\bar{y}z$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z				**1**	$\bar{t}$
z	2			3	t
$\bar{z}$	4	5			t
$\bar{z}$	6	7		**8**	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$\bar{x}\bar{y}\bar{t}$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z				1	$\bar{t}$
z	**2**			**3**	t
$\bar{z}$	4	5			t
$\bar{z}$	6	7		8	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$\bar{y}zt$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z				1	$\bar{t}$
z	**2**			3	t
$\bar{z}$	**4**	5			t
$\bar{z}$	6	7		8	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$x\bar{y}t$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z				1	$\bar{t}$
z	2			3	t
$\bar{z}$	**4**	**5**			t
$\bar{z}$	**6**	**7**		8	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$x\bar{z}$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z				1	$\bar{t}$
z	2			3	t
$\bar{z}$	4	5			t
$\bar{z}$	**6**	7		**8**	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$

Tế bào lớn nhất thiết phải chọn: $x\bar{z}$.

Các công thức đa thức tương ứng với các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn:

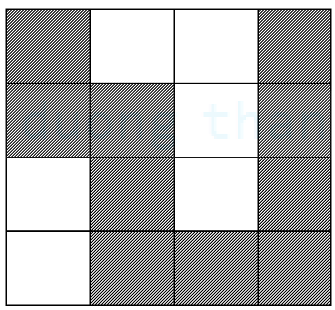
$$f = x\bar{z} \vee \bar{y}zt \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{t} \qquad (F_1)$$
$$f = x\bar{z} \vee \bar{y}zt \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \qquad (F_2)$$
$$f = x\bar{z} \vee x\bar{y}t \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{t} \qquad (F_3)$$
$$f = x\bar{z} \vee x\bar{y}t \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{y}\,\bar{z}\bar{t} \qquad (F_4)$$

So sánh ta thấy công thức (F_1) thực sự đơn giản hơn các công thức khác. Suy ra f có một công thức đa thức đối tiểu là

$$f = x\bar{z} \vee \bar{y}zt \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{t} \qquad (F_1)$$

51)

a)Biểu đồ Karnaugh của *f* gồm các ô gạch chéo



Suy ra biểu đồ Karnaugh của $\bar{f}$ gồm các ô trắng.

b)Dạng nối rời chính tắc (dạng tuyển chuẩn tắc) của $\bar{f}$.

$\bar{f} = x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\bar{t} \vee x\,y\,z\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t$

52)

a) Các tế bào lớn:

$\bar{y}\,\bar{t}, z\,\bar{y}, \bar{x}\,zt,, \bar{x}\,yt, \bar{x}\,y\,\bar{z}, \bar{x}\;\bar{z}\,\bar{t}$

b) ĐS : Có ba công thức đa thức tối tiểu là

$\bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{y}\,z \vee \bar{x}\,zt \vee \bar{x}\,y\,\bar{z},$

$\bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{y}\,z \vee \bar{x}\,yt \vee \bar{x}\,y\,\bar{z},$

$\bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{y}\,z \vee \bar{x}\,yt \vee \bar{x}\;\bar{z}\,\bar{t}$

53)

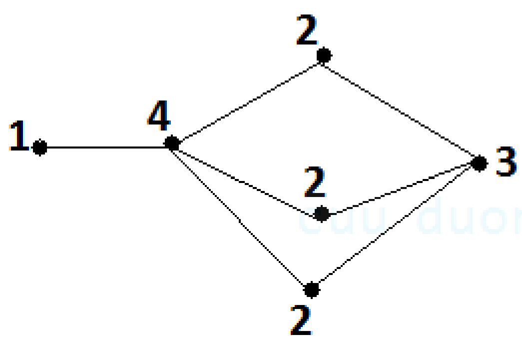
G đẳng cấu với G'.

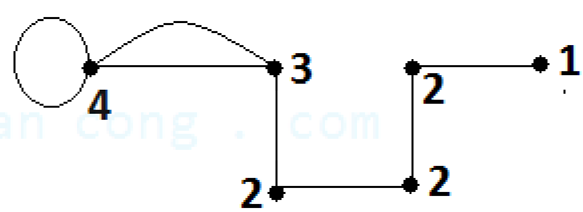
$f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$

$$M_G = \begin{array}{c|cccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ u_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ u_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad M_{G'} = \begin{array}{c|cccccc} & v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \\ \hline v_6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$M_G = M_{G'}$

54) a) G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ nên G có đường Euler và không có chu trình Euler.
Số cạnh của G là $2^{-1}(1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4) = 7$.



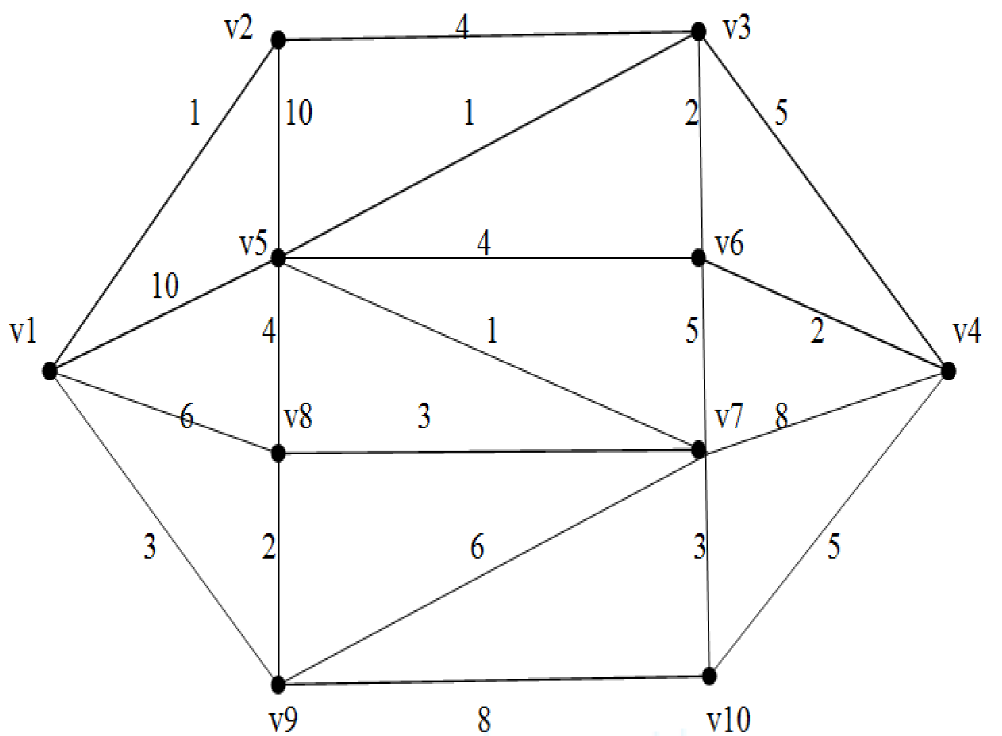


Đơn đồ thị G

Đồthị G (có vòng và có các cạnh song song)

b) Gọi p và q lần lượt là số đỉnh bậc 5 và bậc 8 của H.
Ta có đẳng thức $(3 \times 6) + 5p + 8q = 2 \times 34$, nghĩa là $5p + 8q = 50$ với p, q nguyên ≥ 1.
Suy ra $q \vdots 5$ và $q \leq [(50 - 5) / 8\,] < 6$ nên $q = 5, p = 2$ và H có $3 + 2 + 5 = 10$ đỉnh.

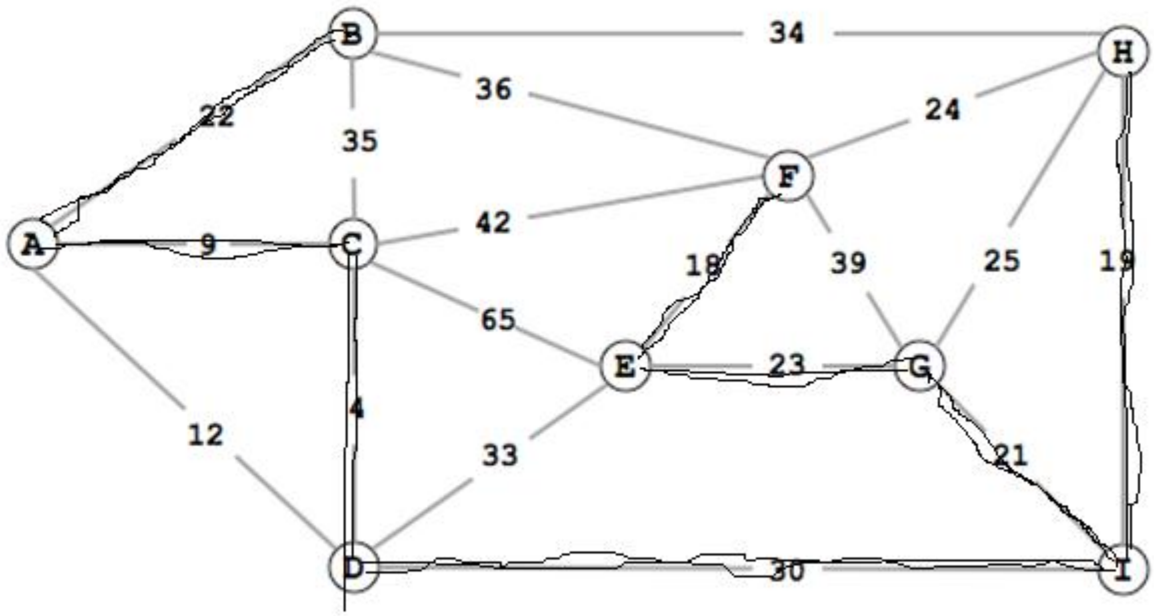
55)



v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
0	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(1,v_1)$*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(10, v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(6,v_1)$	$(3,v_1)$	$(\infty,-)$
-	-	$(5, v_2)$	$(\infty,-)$	$(10, v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(6,v_1)$	$(3,v_1)$*	$(\infty,-)$
-	-	$(5, v_2)$*	$(\infty,-)$	$(10, v_1)$	$(\infty,-)$	$(9,v_9)$	$(5,v_9)$	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	$(6,v_3)$	$(7,v_3)$	$(9,v_9)$	$(5,v_9)$*	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	$(6,v_3)$*	$(7,v_3)$	$(9,v_9)$	-	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	-	$(7,v_3)$*	$(7,v_5)$	-	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(9,v_6)$	-	-	$(7,v_5)$*	-	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(9,v_6)$*	-	-	-	-	-	$(10, v_7)$
-	-	-	-	-	-	-	-	-	$(10, v_7)$*

56) Thuật toán Prim xuất phát từ đỉnh A sẽ lần lượt chọn các cạnh

AC, CD, AB, DI, IH, IG, GE, EF. Kết thúc.



Trọng số bằng 9 + 4 + 22 + 30 + 19 + 21 + 23 + 18 = 146

57)

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*z*
0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0*	(4,*a*)	(3,*a*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	(4,*a*)	(3,*a*)*	(∞,-)	(10, *c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	(4,*a*)*	-	(9,*b*)	(10, *c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	-	-	(9,*b*)*	(10, *c*)	(14,*d*)	(11,*d*)	(∞,-)
-	-	-	-	(10, *c*)	(14,*d*)	(11,*d*)	(∞,-)
-	-	-	-	-	(12,*g*)	(11,*d*)*	(15,*g*)
-	-	-	-	-	(12,*g*)*	-	(15,*g*)
-	-	-	-	-	-	-	(15,*g*)*

Đường đi ngắn nhất từ *a* đến *z* là *abdgz* với chiều dài 15.

58)

s	*x*	*y*	*z*	*t*
0*	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)
-	(10, *s*)	(5, *s*)*	(∞, -)	(∞, -)
-	(8, *y*)	-	(14, *y*)	(7, *y*)*
-	(8, *y*)*	-	(13, *t*)	-
-	-	-	(9, *x*)*	-

d(*s*, *x*) = 8. Đường đi : *syx* ; d(*s*,*y*) = 5. Đường đi: *sy*; d(*s*,*z*) = 9. Đường đi: *syxz*

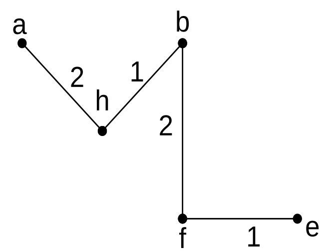
d(*s*, *t*) = 7. Đường đi: *syt*.Tương tự ta được bảng sau với đồ thị mới

s	*x*	*y*	*z*	*t*
0*	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)
-	(10, *s*)	(5, *s*)*	(∞, -)	(∞, -)
-	(2, *y*)*	-	(14, *y*)	(7, *y*)
-	-	-	(3, *x*)*	(7, *y*)
-	-	-	-	(7, *y*)*

Tuy nhiên kết quả bây giờ không phải là đường đi ngắn nhất. Chẳng hạn trong cột *y* ta được đường đi *sy* với chiều dài 5. Tuy nhiên đường đi *syxy* có chiều dài là
5 – 3+2 = 4 < 5.

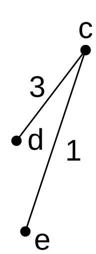
59) a) Dùng thuật toán Dijkstra ta tìm được đường đi ngắn nhất từ **a** đến các đỉnh **e** (độ dài 6):

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
0*	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**
	(4,a)	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(6,a)**	**(2,a)***
	(3,h)*	**(∞, –)**	**(∞,–)**	**(∞, –)**	**(10, h)**	**(4,h)**	
		(8,b)	**(9,b)**	**(∞, –)**	**(5,b)**	**(4,h)***	
		(8,b)	**(9,b)**	**(∞, –)**	**(5,b)***		
		(8,b)	**(9,b)**	**(6,f)***			

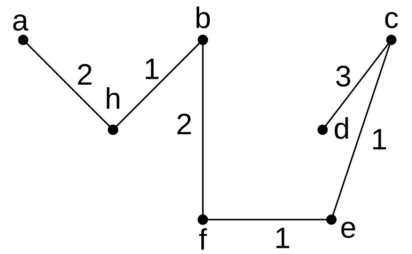


b) Đường đi ngắn nhất từ đỉnh **a** đến đỉnh **d** nhưng phải đi qua đỉnh **e** gồm các đường đi ngắn nhất từ **a** đến **e** và đường đi ngắn nhất từ **e** đến **d**. Dùng thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất từ **e** đến **d** (độ dài 4) như sau:

e	a	b	c	d	f	g	h
0*	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**
	(∞, –)	**(∞, –)**	**(1,e)***	**(5,e)**	**(1, e)**	**(∞, –)**	**(∞, –)**
	(∞, –)	**(6,c)**		**(4,c)**	**(1,e)***	**(∞, –)**	**(∞,–)**
	(∞, –)	**(3,f)***		**(4,c)**		**(10,f)**	**(9,f)**
	(7,b)			**(4,c)***		**(17,f)**	**(4,h)**

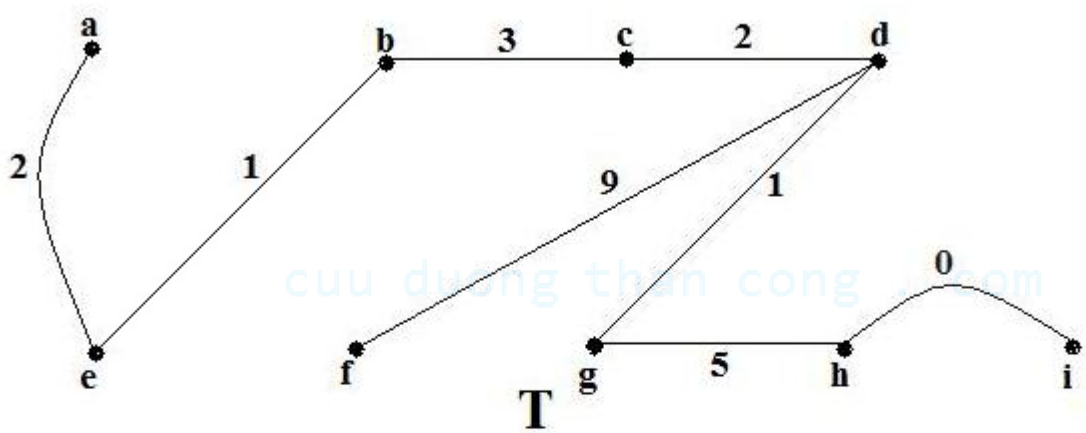


Suy ra đường đi cần tìm như sau (có độ dài là 6 + 4 = 10):



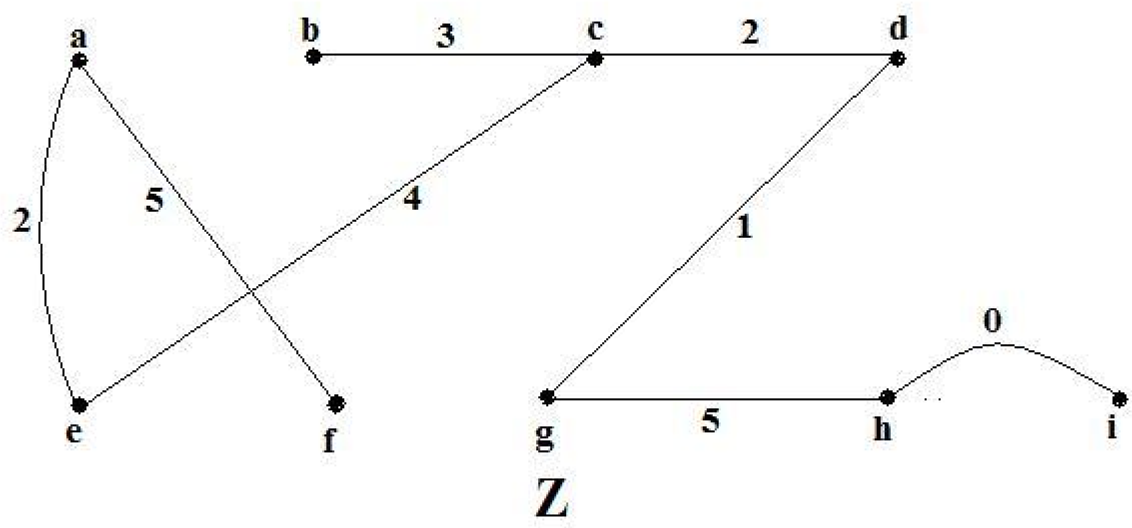
60) a) G không có đường Euler và không có chu trình Euler vì G có 4 đỉnh bậc lẻ là c (bậc 5), e(bậc 5), f (bậc 5) và g(bậc 7) .

b) d, f, $\overline{df}$, g, $\overline{dg}$, c, $\overline{dc}$, b, $\overline{cb}$, e, $\overline{be}$, a, $\overline{ea}$ (trọng số 2), h, $\overline{gh}$ (trọng số 5), i, $\overline{hi}$ (trọng số 0).



Trọng số của T là 9 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 5 + 0 = 23

c) a, b, c, d, e, f, g, h, i, $\overline{hi}$ (trọng số 0), $\overline{dg}$, $\overline{cd}$, $\overline{ae}$ (trọng số 2), $\overline{bc}$, $\overline{ce}$, $\overline{af}$, $\overline{gh}$ (trọng số 5).



Trọng số của Z là 0 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 = 22

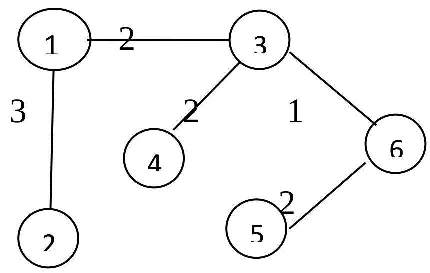
61) a) Ma trận khỏang cách

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 1 & 4 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)Bảng sau đây lưu các bước chạy của thuật tóan

1	2	3	4	5	6
0	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	(3, 1)	(2,1)*	(5,1)	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	(3,1)*	-	(4,3)	$(\infty,-)$	(3,3)
-	-	-	(4,3)	(7,2)	(3,3)*
-	-	-	(4,3)*	(5,6)	-
-	-	-	-	(5,6)*	-
-	(3,1)	(2,1)	(4,3)	(5,6)	(3,3)

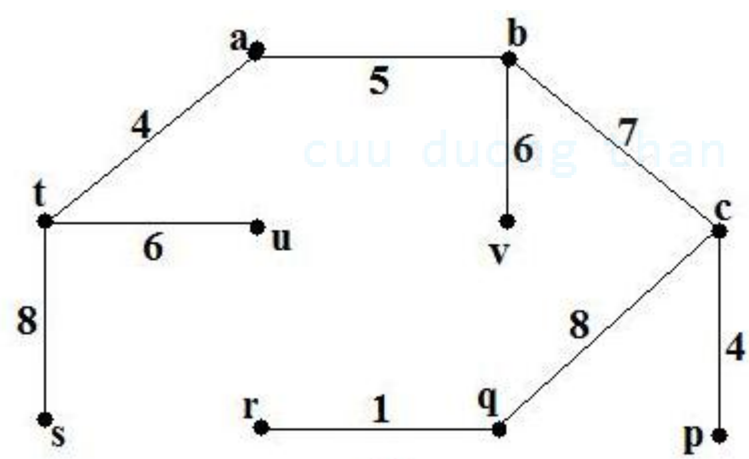
Đồ thị biểu diễn của cây bao trùm là



Trọng lượng của cây T là 3+2+1+2+2 = 8.

62) a) G có ít nhất một chu trình Hamilton là $\overline{abcpqvursta}$.

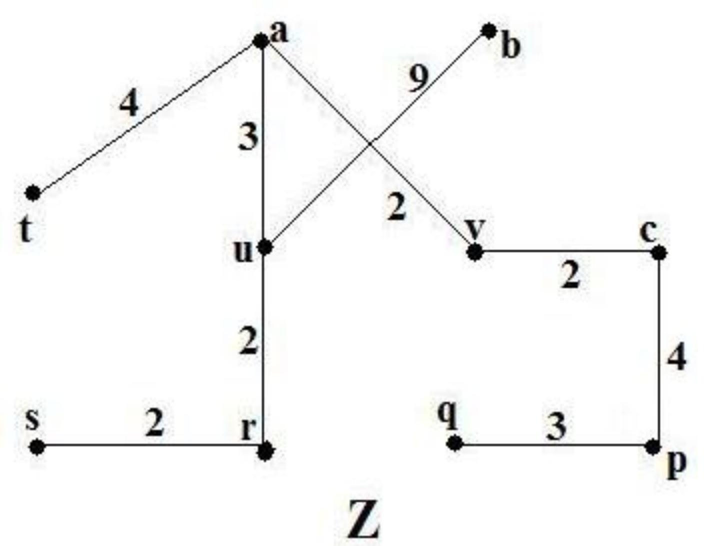
b) $\overline{qr}$ (1), $\overline{cq}$ (8), $\overline{st}$ (8), $\overline{bc}$ (7), $\overline{bv}$ (6), $\overline{tu}$ (6), $\overline{ab}$ (5), $\overline{at}$ (4) và $\overline{cp}$ (4).



T

Trọng số của T là 1 + 8 + 8 + 7 + 6 + 6 + 5 + 4 + 4 = 49

c) b, u, $\overline{bu}$ (9), r, $\overline{ru}$ (2), s, $\overline{rs}$ (2), a, $\overline{au}$ (3), v, $\overline{av}$ (2), c, $\overline{cv}$ (2), p, $\overline{cp}$ (4), q, $\overline{pq}$ (3), t và $\overline{at}$ (4).

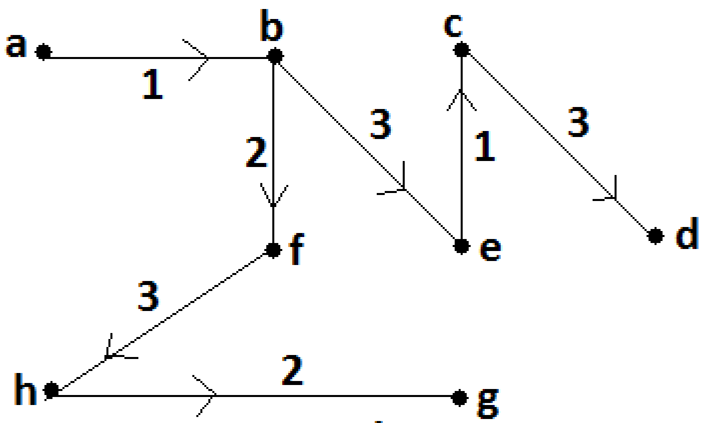


Trọng số của Z là 9 + 2 + 2 + 3 + 2 + 2 + 4 + 3 + 4 = 31 .

63) a) G có 4 đỉnh bậc lẻ là a, d, h (đều bậc 3) và e (bậc 5) nên G không có chu trình Euler và không có đường Euler .

b)

V	b	c	d	e	f	g	h	T
a	**(1,a)**	**(∞,–)**	**(∞,–)**	**(∞,–)**	**(4,a)**	**(∞,–)**	**(8,a)**	
b	**–**	**(7,b)**	**(∞,–)**	**(4,b)**	**(3,b)***	**(∞,–)**	**(8,a)**	$\overline{ab}$
f	**–**	**(7,b)**	**(∞,–)**	**(4,b)***	**–**	**(10,f)**	**(6,f)**	$\overline{bf}$
e	**–**	**(5,e)***	**(9,e)**	**–**	**–**	**(10,f)**	**(6,f)**	$\overline{be}$
c	**–**	**–**	**(8,c)**	**–**	**–**	**(10,f)**	**(6,f)***	$\overline{ec}$
h	**–**	**–**	**(8,c)***	**–**	**–**	**(8,h)**	**–**	$\overline{hf}$
d	**–**	**–**	**–**	**–**	**–**	**(8,h)***	**–**	$\overline{cd}$
g	**(1,a)**	**(5,e)**	**(8,c)**	**(4,b)**	**(3,b)**	**(8,h)**	**(6,f)**	$\overline{gh}$



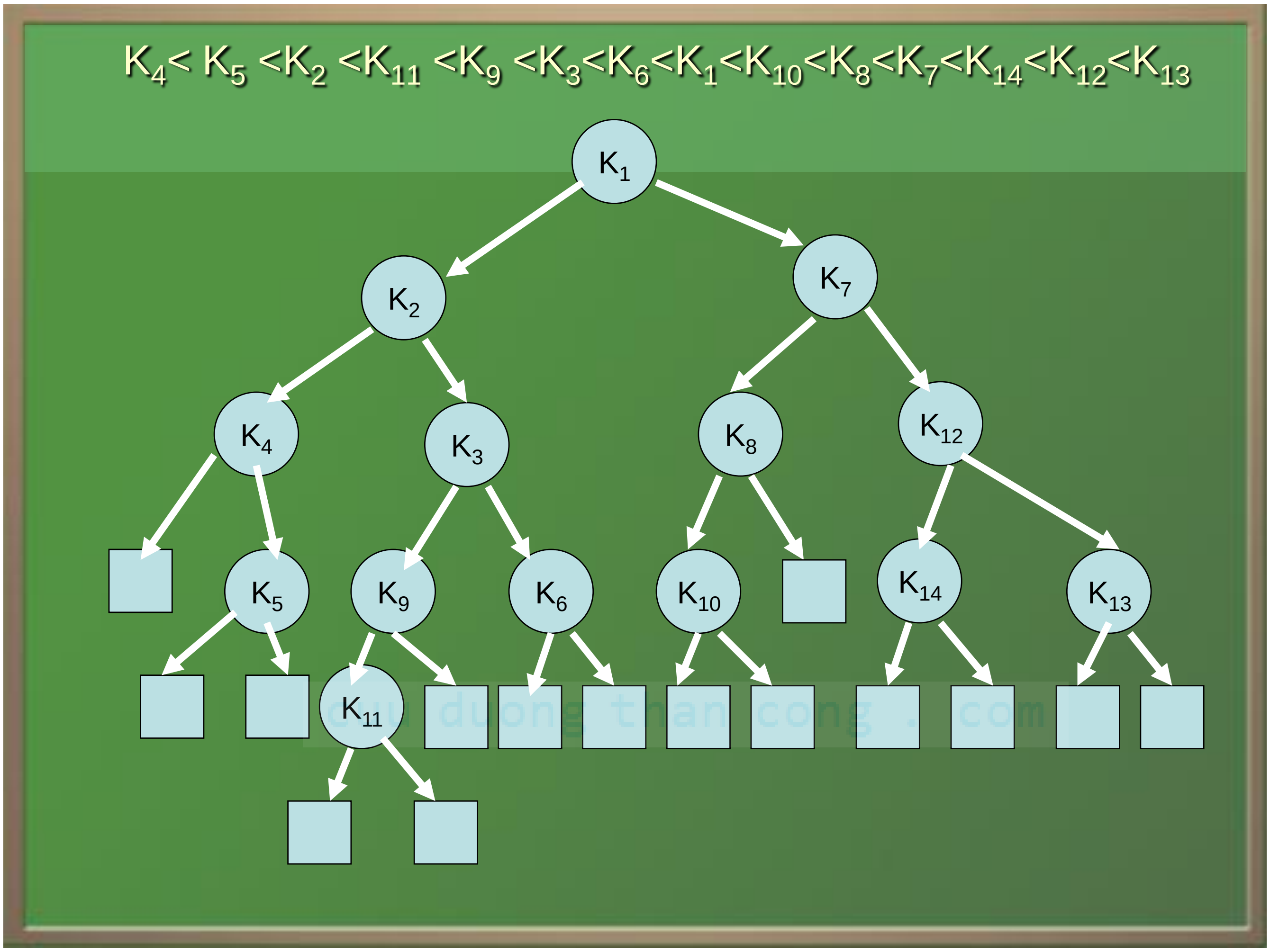
T (gốc a)

Trọng số của T là 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 1 + 3 = 15 .

64) Trong tập hợp các hàm Boole của 5 biến có $2^5 = 32$ từ tối tiểu.
Số cách chọn 6 từ tối tiểu trong 32 từ tối tiểu là c_{32}^{6}= 906102

65) Đồ thị đủ K_n có n(n – 1)/ 2 cạnh.
Do đó G có n(n – 1)/ 4 cạnh. Suy ra n chia hết cho 4 hoặc n – 1 chia hết cho 4.

66)



Để chèn thêm khóa K với $K_6 < K < K_1$ ta cần so sánh nó với K_1, K_2, K_3, K_6.
Do đó cần 4 phép so sánh.

67)

Tính chất: *Nếu T là cây nhị phân đủ gồm N nút trong thì T có N + 1 nút lá.*

CM. Mỗi nút trong của cây nhị phân đủ đều có bậc ra là 2, còn mỗi nút lá của nó đều có bậc ra bằng 0. Do đó tổng bậc ra của tất cả các nút là $2N$.

Theo định lý về bậc thì số cạnh $m = 2N$. (1)

Vì T là cây nên số cạnh của nó là $m = N + l - 1$.(Ở đây l là số nút lá).(2)

Từ (1) , (2) ta có : $2N = N + l - 1$. Suy ra $l = N + 1$.

<u>**Giải câu 67**</u>.

a) Gọi T là một cây nhị phân đủ (mỗi nút trong có đúng hai nút con) với N nút trong và có chiều cao h. Chứng minh rằng :

$$h \geq [log_2(N + 1)]$$

Ta CM qui nạp theo chiều cao h BĐT $l \le 2^h$

-Rõ ràng bất đẳng thức đúng khi $h = 1$(lúc này $l = 2$).
-Giả sử BĐT đúng với mọi cây có chiều cao $\le h - 1$. Xét T là cây có chiều cao h.
Gọi l_1, l_2 là số nút lá của cây con T_1, T_2 là cây con bên trái và bên phải của nút gốc. Để ý rằng T_1 và T_2 là các cây có chiều cao $\le h - 1$ nên theo giả thiết qui nạp ta có

$l = l_1 + l_2 \le 2.\ 2^{h-1} = 2^h$.

Vậy $h \ge \log_2 l \Leftrightarrow h \ge log_2(N + 1) \Rightarrow h \ge \lceil log_2(N+1) \rceil$.

b) Do cây là cây cân bằng nên các nút ở mức $\le h - 2$ đều là nút trong. Vì vậy tổng số nút mức $h - 1$ là 2^{h-1}. Tổng số nút lá ở mức h bằng 2 lần số nút trong ở mức $h - 1$ nên
$2^{h-1} < N + 1 \le 2^h \Leftrightarrow h - 1 < log_2(N + 1) \le h \Rightarrow h = \lceil log_2(N+1) \rceil$
Giải thích :
$N + 1 = l = l_h + l_{h-1} = 2N_{h-1} + l_{h-1} = N_{h-1} + N_{h-1} + l_{h-1} = N_{h-1} + 2^{h-1} > 2^{h-1}$.

68) .
R không phải là thứ tự toàn phần vì (1, 2) và (2, 1) không so sánh được với nhau.
Định nghĩa quan hệ R’ trên $\mathbb{N}^2$ bởi (a, b) R’ (c, d) khi và chỉ khi $a < c$ hoặc $a = c$ và $b \le d$. Rõ ràng R’ là thứ tự toàn phần trên $\mathbb{N}^2$.

Giả sử A là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}^2$. Khi ấy tập các thành phần thứ nhất của những phần tử trong A là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ nên có phần tử bé nhất là m. Khi đó tập con các thành phần thứ hai của những cặp trong A với thành phần thứ nhất là m sẽ có phần tử bé nhất là n . Rõ ràng (m ,n) là phần tử bé nhất của A.

69) Vì 2310 = 2*3*5*7*11 nên mỗi ước ≠1 của 2310 là tích của các số nguyên tố thuộc một tập con của S ={2, 3, 5, 7, 11}. Ta có thể đồng nhất ước này với dãy số nguyên $a_1a_2 \ldots a_m$ trong đó $2 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_m \le 11$, và $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset S$. Thứ tự R được định nghĩa sao cho 1 là phần tử bé nhất. Nếu hai ước $a \ne 1 \ne b$ được biểu diễn bởi hai dãy $a_1\, a_2 \ldots a_m$ và $b_1b_2 \ldots b_p$ ta định nghĩa
a R b khi và chỉ khi $m < p$ hoặc $m = p$ và $a_1\, a_2 \ldots a_m$ trội $b_1b_2 \ldots b_p$ theo thứ tự tự điển. Chứng minh dễ dàng R là thứ tự toàn phần trên U.

70) .

71) .

72)

$$D = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 11 & \infty \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 1 & \infty \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad D_4 = \begin{bmatrix} 17 & 7 & 5 & 13 \\ 10 & 7 & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad Q_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

73)

a) Ta CM bằng phản chứng. Giả sử G không liên thông. Khi đó G có ít nhất hai thành phần liên thông, trong đó phải tồn tại thành phần liên thông H với < *n/2* đỉnh. Trong H bậc của mỗi đỉnh $< \frac{n}{2} - 1$, trái giả thiết.

b) Theo câu a) thì G liên thông. Gọi G' là đồ thị thu được từ G bằng cách bỏ đi một đỉnh. Nếu G' không liên thông thì tồn tại một thành phần liên thông H có $\leq \frac{n-1}{2}$ đỉnh. Trong H mỗi đỉnh P có bậc $\leq \frac{n-1}{2} - 1$. Khi đó trong G đỉnh P có bậc $\leq \frac{n-1}{2}$. Trái giả thiết.

74)

Rõ ràng ta chỉ cần CM cho G liên thông là đủ. Ta CM bằng phản chứng.

Giả sử G liên thông và G - *e* có ít nhất 3 thành phần liên thông. Trả lại cạnh *e* cho G. Ta thấy *e* chỉ có thể nối nhiều lắm là 2 trong 3 thành phần liên thông của G – *e* với nhau, và do đó G có ít nhất hai thành phần liên thông. Trái giả thiết G liên thông.

75) Ta CM qui nạp theo số cạnh *m* của G.

Với $m = 0$ thì khẳng định hiển nhiên đúng (Mỗi đỉnh là một thành phần liên thông).

Giả sử kết luận bài tóan đúng cho $m = k$ cạnh. Xét G tùy ý có $k+1$ cạnh. Bỏ một cạnh ra khỏi G ta thu được G' có *k* cạnh. Trong G' có ít nhất $n - k$ thành phần liên thông. Theo Câu 51 số thành phần liên thông trong G' không vượt quá 1 so với G. Do đó số thành phần liên thông trong G không ít hơn $n - k - 1 = n - (k + 1)$. Vậy kết luận đúng cho $m = k+1$.

76)

a) $(a + b)^2 + c$: $+ \uparrow + a\ b\ 2\ c$

$a\ b + 2 \uparrow c +$

$a + b^2 + c$: $+ + a \uparrow b\ 2\ c$

$a\ b\ 2 \uparrow + c +$

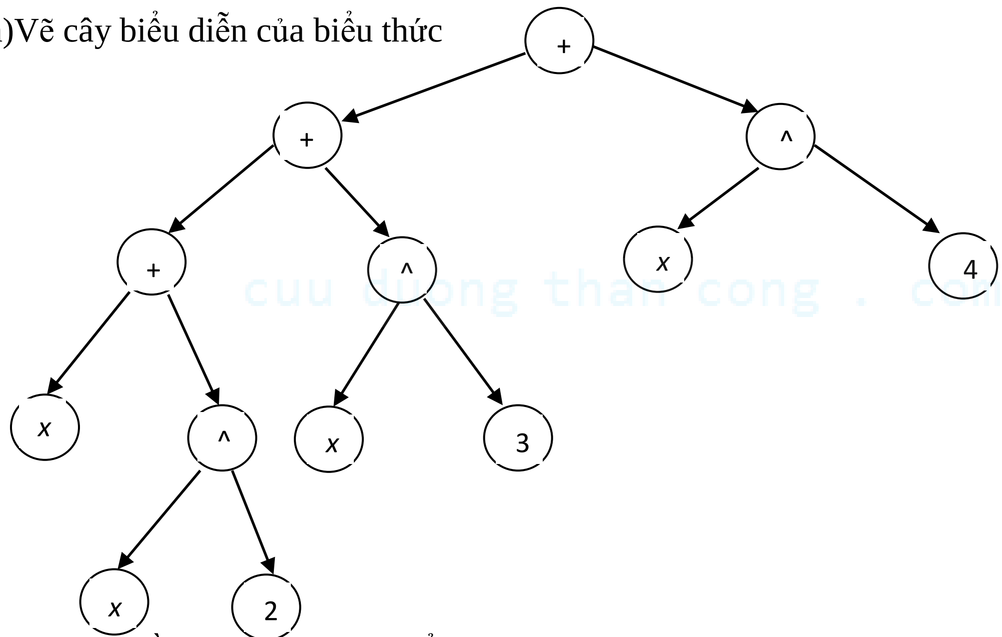
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$: $\uparrow + a\ b\ 2 = + + \uparrow a\ 2 \uparrow b\ 2 * 2 * ab$

$a\ b + 2 \uparrow = a\ 2 \uparrow b\ 2 \uparrow + 2\ a\ b * * +$

b) $(a + b)^2 / (c – d)$

$[(x + y)^2 – (x – y)^2]/(x*y)$

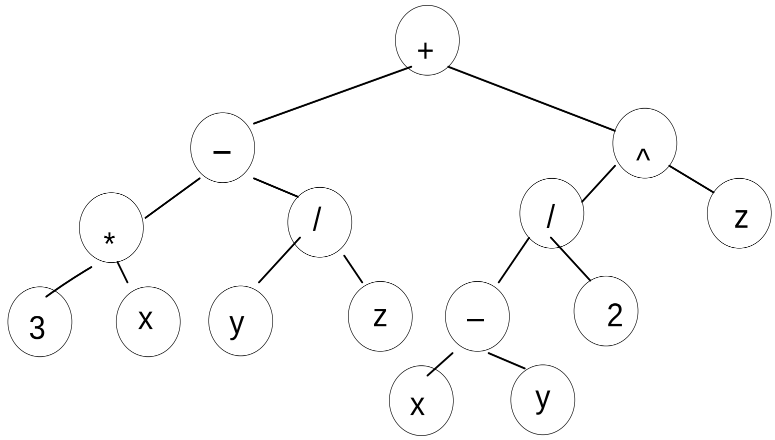
77) a)Vẽ cây biểu diễn của biểu thức



b)duyệt cây theo tiền thứ tự ta được biểu thức theo ký pháp Ba Lan:

$+ + + x \wedge x\ 2 \wedge x\ 3 \wedge x\ 4$.

78) a) $3\ x * y\ z / – x\ y – 2 / z \wedge +$



b) Biểu thức trên được viết theo ký pháp thông thường như sau:

$$3x-\frac{y}{z}+\left(\frac{x-y}{2}\right)^{z}.$$