BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 1. Logic toán học

Bài 1. Dùng các quy tắc suy diễn, hãy kiểm tra tính đồng nhất đúng của các công thức sau:

a.$\mathcal{D} = (A \to B) \land (A \lor C) \land (\overline{C} \lor D) \to (B \lor D)$.

b. $\mathcal{D} = ((X_1 \to X_2) \land (X_3 \to X_4) \land (\overline{X_1} \to X_3)) \to (X_2 \lor X_4)$.

c. $\mathcal{D} = (((\overline{A} \lor B) \to (C \land D)) \land (C \to E) \land \overline{E}) \to A$.

d. $\mathcal{D} = ((A \to B) \land (C \to D) \land (B \lor D \to E) \land \overline{E}) \to (\overline{A} \land \overline{C})$.

e. $\mathcal{D} = ((X_2 \lor \overline{X_1}) \land (X_4 \lor \overline{X_3}) \land (\overline{X_2 \lor X_4} \lor X_5) \land \overline{X_5}) \to \overline{X_1 \lor X_3}$.

f. $\mathcal{D} = (\overline{Y} \to \overline{X}) \land (\overline{Z} \to X) \land (\overline{Z_1} \to \overline{Z}) \to (\overline{Z_1} \to Y)$.

g. $\mathcal{D} = (X_1 \land (\overline{X}_2 \to \overline{X}_1) \land (\overline{X}_4 \to X_3) \land (X_4 \to X_5) \land (X_5 \to \overline{X}_2)) \to (X_3 \lor X_5)$.

h. $\mathcal{D} = ((X_1 \to X_2) \to X_3) \land (X_3 \to (\overline{X_4} \to X_5)) \land (\overline{X_4 \lor X_6} \land (X_5 \to X_6)) \to X_1$.

i. $\mathcal{D} = (X \land (X \to Y) \land (Z \lor M) \land (M \to \overline{Y})) \to Z \lor N$.

k.$\mathcal{D} = (((\overline{X_2} \to \overline{X_1}) \land (\overline{X_4} \to \overline{X_3}) \land (\overline{X_1 \land X_5} \to \overline{X_4 \land X_2}) \land (\overline{X_5} \lor \overline{X_1})) \to (X_3 \to \overline{X_1})$.

l. $\mathcal{D} = (\overline{X_3} \to (\overline{X_1} \lor \overline{X_2})) \land (X_3 \to X_2) \land (X_2 \to X_4) \land \overline{X}_4 \to \overline{X_1 \land X_2}$.

Bài 2. Cho $p(x, y)$ là vị từ phụ thuộc vào hai biến x, y lấy giá trị trên tập $\{1, 2, 3\}$. Dùng phép hội và phép tuyển viết mệnh đề sau:

a. $\exists x : p(x, 3)$ b. $\forall y : p(1, y)$ c. $\forall x \forall y : p(x, y)$.

d. $\exists x \exists y : p(x, y)$ e. $\exists x \forall y : p(x, y)$ f. $\forall x \exists y : p(x, y)$.

Bài 3. Cho $p(x, y, z)$ là phát biểu "$x + y = z$" phụ thuộc vào ba biến x, y, z lấy giá trị trên tập các số thực $\mathbb{R}$. Hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề:

a. $\forall x \forall y \exists z : p(x, y, z)$.

b. $\exists z \forall x \forall y : p(x, y, z)$.

Bài 4. Cho các vị từ hai biến:

$P(x, y) =$ "$x^2 \geq y$"

$Q(x, y) =$ "$x + 1 < y$", trong đó x, y là các biến thực.

Cho biết giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a. $P(2, 4)$

b. $Q(2, \pi)$

c. $(P(-3, 7) \land Q(1, 2)) \to (P(-2, 1) \land \overline{Q}(-1, -1))$

d. $(Q(1, 1) \to P(1, 1)) \land (P(1, 1) \to Q(1, 1))$

e. $P(2, 5) = \overline{Q}(2, 5)$

Bài 5. Cho vị từ hai biến $P(x, y) =$ "x là ước của y" trên trường $M = \{\pm 1, \pm, 2, \dots\}$. Xác định giá trị của các mệnh đề sau:

a. $\overline{P(2, 3)}$

b. $(\forall y) P(2, y)$.

c. $\overline{(\forall x) P(x, x)}$

d. $(\forall y)(\exists x) P(x, y)$

e. $\overline{(\exists y)(\forall x) P(x, y)}$

f. $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \lor P(y, x)) \to (x = y)$

g. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((P(x,y) \vee P(y,z)) \to P(x,z))$

Bài 6. Xét các vị từ theo biến thực x

$P(x) : x^2 - 5x + 6 = 0$

$Q(x) : x^2 - 4x - 5 = 0$

$R(x) : x > 0$

Hãy xác định giá trị của các mệnh đề sau:

a. $\forall x, P(x) \to R(x)$

b. $\forall x, Q(x) \to \overline{R}(x)$

c. $\exists x, Q(x) \to R(x)$

d. $\exists x, P(x) \to \overline{R}(x)$

Bài 7. Cho biết giá trị các mệnh đề sau trong đó x, y là các biến thực.

a. $(\exists x)(\exists y) xy = 1$

b. $(\exists x)(\forall y) xy = 1$

c. $(\forall x)(\exists y) xy = 1$

d. $(\forall x)(\forall y) \sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + \cos^2 y$

e. $(\exists x)(\exists y), (2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)$

f. $(\exists x)(\exists y), (3x - y = 7) \wedge (2x + 4y = 3)$

Bài 8. Áp dụng các quy tắc suy diễn chứng minh các mô hình suy diễn sau là đúng

a. $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \to F(x)) \wedge (\forall x)((Q(x) \vee F(x)) \to H(x)) \wedge (\forall x)\overline{H}(x) \to (\forall x)(\overline{P}(x) \wedge \overline{R}(x))$

trên trường M nào đó

b. $((\forall x((\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)) \to P_3(x)) \wedge (\forall x)(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x) \vee P_5(x)) \wedge (\forall x)((\overline{P}_4(x) \wedge \overline{P}_6(x)) \wedge (\overline{P}_6(x) \to \overline{P}_5(x))) \wedge (\forall x)\overline{H}(x)) \to (\forall x)P_1(x)$

trên trường M nào đó

c. $(\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\exists x)\overline{P}(x) \wedge (\forall x)(\overline{Q}(x) \vee R(x)) \wedge (\forall x)(S(x) \to \overline{R}(x)) \to (\exists x)\overline{S}(x)$

trên trường M nào đó

d. $(\forall x(\overline{P}(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(\overline{F}(x) \to \overline{R}(x)) \wedge (\forall x)(\overline{P(x) \wedge H(x)} \to \overline{F(x) \wedge Q(x)}) \wedge (\forall x)(P(x) \to \overline{H}(x)) \to (\forall x)(\overline{R}(x) \vee \overline{P}(x))$

trên trường M nào đó

Chương 2. Kỹ thuật đếm

Bài 1. Giải các hệ thức đệ quy truy hồi tuyến tính sau:

a. $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$, $\quad a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$.

b. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, với $n \geq 2$, $\quad a_0 = 1, a_1 = 0$.

c. $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$, $\quad a_0 = 6, a_1 = 8$.

d. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$, $\quad a_0 = 0, a_1 = 1$.

e. $a_n = \frac{a_{n-2}}{4}$, với $n \geq 2$, $\quad a_0 = 1, a_1 = 0$.

f. $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$, $\quad a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$.

g. $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$, với $n \geq 4$, $\quad a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 8$.

Bài 2. Giải các hệ thức truy hồi đồng thời

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

với $a_0 = 1, b_0 = 2$.

Bài 3. Giải các hệ thức truy hồi đồng thời

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$$

với $a_0 = 1, b_0 = 2$.

Bài 4. Giải hệ thức truy hồi

a. $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ nếu $a_0 = 1$ và $a_1 = 2$.

b. $a_n = a_{n-1}^3 a_{n-2}^2$ nếu $a_0 = 2$ và $a_1 = 2$.

Bài 5. Gọi A_n là ma trận $n \times n$ với các số 2 trên đường chéo chính và các số 1 trên tất cả các vị trí ở cạnh các phần tử trên đường chéo chính và bằng không tại tất cả các vị trí còn lại. Tìm hệ thức truy hồi cho định thức d_n của A_n. Giải hệ thức truy hồi này để tìm công thức cho d_n.

Bài 6 (Tháp Hà nội). Một trò chơi xếp hình rất phổ cập vào cuối thế kỷ 19 gọi là Tháp Hà nội. Tương truyền rằng, tại một ngôi tháp hà nội có một tấm đế bằng đồng trên đó có ba cái cọc bằng kim cương. Trên một trong ba cái cọc thượng đế đã để 64 chiếc đĩa bằng vàng với đường kính giảm dần. Ngày đêm các nhà sư dịch chuyển đĩa sang một chiếc cọc khác theo quy tắc: mỗi lần chỉ được dịch chuyển một đĩa, mỗi đĩa có thể dịch chuyển từ một cọc này sang cọc khác bất kỳ, nhưng không được để một chiếc đĩa lên trên một đĩa khác có đường kính nhỏ hơn. Với thời gian bao lâu thì tất cả các đĩa được chuyển sang một chiếc cọc khác (nếu mỗi lần dịch chuyển mất một giây)?

Bài 7. Giả sử số tôm hùm bị đánh bắt trong một năm bằng trung bình cộng số bị đánh bắt trong hai năm trước đó.

a. Hãy tìm quan hệ truy hồi cho $\{a_n\}$, trong đó a_n là số tôm hùm bị đánh bắt trong năm thứ n.

b. Hãy tìm a_n nếu trong năm đầu 100 000 tôm hùm bị đánh bắt, năm thứ hai 300 000 tôm hùm bị đánh bắt.

1. Có bao nhiêu xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng 10, bit đầu là 0, bit cuối là 1?

2. Có bao nhiêu số chẵn khác nhau gồm 10 chữ số được tạo thành hai chữ 1 và 2?

3. Có bao nhiêu tập con có không quá 2 phần tử của một tập gồm có 10 phần tử?

4. Một phiếu trắc nghiệm gồm 100 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.

a. Có bao nhiêu cách điền vào phiếu trắc nghiệm nếu tất cả các câu đều được trả lời?

b Có bao nhiêu cách điền vào phiếu trắc nghiệm nếu các câu có thể bỏ trống?

5. Trong một lớp có 7 sinh viên, có bao nhiêu cách chia thành hai đội? Nếu yêu cầu mỗi đội có ít nhất là 2 sinh viên thì có bao nhiêu cách chia?

6. Xét tất cả các ánh xạ từ tập A gồm k phần tử vào tập B gồm n phần tử.
   a. Có bao nhiêu ánh xạ từ A vào B?
   b. Có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B?

7. Có bao nhiêu tập con của một tập gồm n phần tử?

8. Có bao nhiêu tập hợp của $\{1, 2, \ldots, 11\}$ chứa ít nhất một số chẵn?

9. Có bao nhiêu tập hợp của $\{1, 2, \ldots, 12\}$ chứa ít nhất một số lẻ?

10. Một người sử dụng máy tính có mật khẩu dài từ 6 đến 8 ký tự. Trong đó mỗi ký tự là một chữ cái hay một chữ số. Mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

11. Một người đi mua bút, chọn 4 bút trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách mua hàng?

12. Cho tập $A = \{1, 2, \ldots, 15\}$.
   a. Có bao nhiêu tập con của A chỉ chứa số chẵn?
   b. Có bao nhiêu tập con của A chứa đúng 3 số chẵn?
   c. Có bao nhiêu tập con có 8 phần tử của A chứa đúng 3 số chẵn?

13. Có bao nhiêu byte khác nhau:
   a. Chứa đúng hai bit 1.
   b. Chứa ít nhất sáu bit 1.

14. Cho $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Có bao nhiêu tập con A của S thỏa mãn:
   a. $|A| = 5$.
   b. $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của A là 3?
   c. $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của A bé hơn hoặc bằng 3?

15. Cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên ghi tên vào lớp Toán rời rạc để chắc chắn sẽ có ít nhất 6 sinh viên đạt cùng một điểm thi nếu thang điểm gồm 5 bậc?

16. Chứng tỏ rằng trong bất kỳ một tập hợp gồm 6 lớp học nào cũng có ít nhât hai lớp gặp nhau cùng một ngày, biết một tuần học từ thứ 2 đến thứ 6.

17. Chứng tỏ rằng trong 6 số bất kỳ chọn từ tập 9 số nguyên dương đầu tiên, bao giờ cũng chứa ít nhất một cặp số có tổng bằng 10.

18. Cần phải tung một con xúc xắc bao nhiêu lần để có một mặt xuất hiện ít nhất:
a. 2 lần.
b. 3 lần.
c. n lần ($n \leq 4$).

19. Chỉ ra trong 5 số chọn từ tập 8 số $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ bao giờ cũng có một cặp số có tổng bằng 9.

20. Biết rằng ba số $a; a + k; a + 2k$ đều là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng khi đó k chia hết cho 6.

Chương 3. Quan hệ hai ngôi

1. Giả sử $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$
   a. Tính $|A \times B|$.
   b. Có bao nhiêu số quan hệ giữa A và B?

c. Có bao nhiêu số quan hệ hai ngôi trên A?

d. Có bao nhiêu số quan hệ giữa A và B chứa $(1,4),(1,5)$?

2. Trong số các quan hệ dưới đây, hãy cho biết quan hệ nào có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu?

a. C là một tập con cố định của E, xét quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathcal{P}(E)$

$$A, B \in \mathcal{P}(E): \quad A\mathcal{R}B \leftrightarrow A \cap C = B \cap C.$$

b. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}: x\mathcal{R}y \leftrightarrow x+y$ chẵn.

c. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}: x\mathcal{R}y \leftrightarrow x-y$ lẻ.

d. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: (a,b)\mathcal{R}(c,d) \leftrightarrow a \leqslant c$.

e. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}: x\mathcal{R}y \leftrightarrow x^2+y^2$ chẵn.

f. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{R}: x\mathcal{R}y \leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$.

2'. Cho R là quan hệ trên $A=\{1,2,3,4\}$ có ma trận biểu diễn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Liệt kê các phần tử của R.

b. R có những tính chất gì:

3. Có bao nhiêu quan hệ có tính phản xạ trên một tập hợp có n phần tử.

4. Cho A là tập các sinh viên và B là tập các môn học. Giả sử R_1 là tập tất cả các cặp (a,b), trong đó a là sinh viên còn b là môn học mà a đã học. R_2 gồm tất cả các cặp (a,b), trong đó a là sinh viên cần học môn b để tốt nghiệp. Xác định các quan hệ $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1$.

5. Cho $R \subset A \times A$. ta định nghĩa $R^n \quad (n=1,2,\dots)$ bằng quy nạp như sau

$$R^1 = R, \quad R^{n+1} = R^n.R$$

a. Cho $R=\{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Tìm $R^n\,(n=1,2,\dots)$.

b. Chứng minh tính chất: Quan hệ R trên tập A là bắc cầu khi và chỉ khi $R^n \subset R$.

6. Có bao nhiêu quan hệ khác nhau từ tập có m phần tử vào tập có n phần tử?

7. Cho $R \subset A \times B$. Quan hệ ngược của R là

$$R^{-1} = \{(b,a) : b \in B, a \in A, (a,b) \in R)\}$$

Còn quan hệ bù của R là $\overline{R} = \{(a,b) : (a,b) \notin R\}$.

a. Cho $R = \{(a,b) : a < b\}$ trên tập các số nguyên. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$

b. Cho R là quan hệ trên tập tất cả các tỉnh, thành phố của Việt Nam và được xác định $R = \{(a,b) : a$ là tỉnh giáp với tỉnh $b\}$. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$

8. Chứng minh rằng, nếu $R \subset A \times A$ có tính đối xứng và bắc cầu thì R có tính phản xạ.

9. Chứng minh rằng, quan hệ R trên tập A là phản xạ khi và chỉ khi quan hệ R^{-1} là phản xạ.
10. Chứng minh rằng, quan hệ R trên tập A là phản xạ khi và chỉ khi quan hệ $\overline{R}$ là không phản xạ.
11. Giả sử R là quan hệ trên tập các xâu chữ cái tiếng anh sao cho aRb khi và chỉ khi $l(a) = l(b)$, ở đây $l(x)$ là độ dài của xâu x. R có là quan hệ tương đương không?
12. Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập $\{0, 1, 2, 3\}$ cho dưới đây là quan hệ tương đương?
a.$R = \{(0, 0); (1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$
b. $R = \{(0, 0); (0, 2); (2, 0); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3)\}$
c. $R = \{(0, 0); (1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3)\}$
d. $R = \{(0, 0); (1, 1); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)\}$
e. $R = \{(0, 0); (0, 1); (0, 2); (1, 0); (1, 1); (1, 2); (2, 0); (2, 2); (3, 3)\}$
13. Giả sử A là một tập không rỗng và f là một hàm có A là miền xác định. Trên A ta định nghĩa quan hệ R như sau: $\forall x, y \in A : xRy \leftrightarrow f(x) = f(y)$.
a. Chứng minh R là quan hệ tương đương.
b. Xác định các lớp tương đương của R.
14. Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên A, quan hệ đối ngẫu của $\mathcal{R}$ được định nghĩa bởi:

$$x\mathcal{R}^*y \leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$

a. Quan hệ đối ngẫu của $\mathcal{R}^*$ là gì?
b. Có thể nói gì về $\mathcal{R}$ nếu $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$.
c. Nếu $\mathcal{R}$ bắc cầu thì $\mathcal{R}^*$ có bắc cầu không? Câu hỏi tương tự cho tính đối xứng, phản đối xứng.
15. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

a. Kiểm tra lại $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương $[1], [2], [3]$.
c. Tìm phân hoạch A thành các lớp tương đương.
16. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, trên A xác định quan hệ $\mathcal{R}$ như sau:

$$\forall a, b \in A, \quad a\mathcal{R}b \leftrightarrow a + b = 2k, (k = 1, 2, \dots).$$

a. Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.
b. Tìm phân hoạch tương đương trên A do $\mathcal{R}$ sinh ra.
17.Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tìm quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên A sao cho phân hoạch của A thành các lớp tương đương có dạng:

$$A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}.$$

18. Cho $A = \{1,2,3,4,5\}, A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{2,3,4\}, A_3 = \{5\}$. Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên A như sau:

$$x\mathcal{R}y \leftrightarrow \exists i : 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad x, y \in A_i$$

$\mathcal{R}$ có phải là quan hệ tương đương không?

19. $A = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$ và $\mathcal{R}$ là quan hệ trên A sao cho:

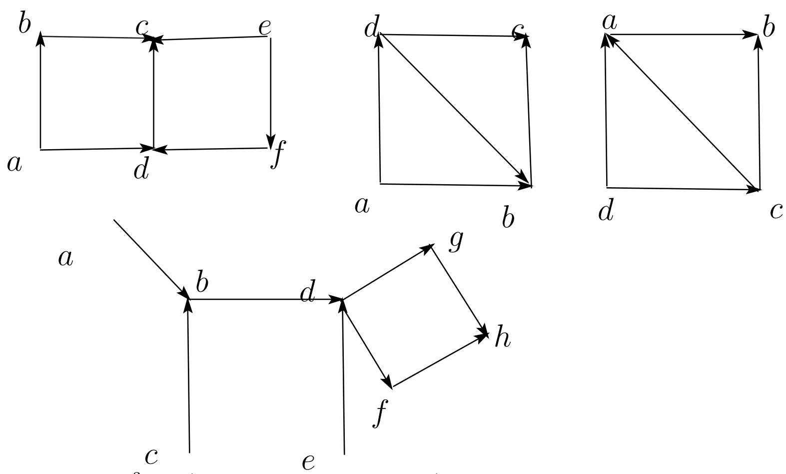
$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \leftrightarrow a + b = c + d$$

a. Kiểm tra lại $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.

b. Xác định các lớp tương đương $[(1,3)], [(2,4)], [(1,1)]$.

c. Chỉ ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương.

19'. Các biểu đồ sau, biểu đồ nào là biểu đồ Hasse?



20. Vẽ biểu đồ Hasse cho tập sắp thứ tự $(\mathcal{P}(E), \subset)$ trong đó

a. $E = \{1,2\}$.

b. $E = \{1,2,3\}$.

21. Xét hai tập hợp sắp thứ tự $(A, \mathcal{R}_A)$ và $(B, \mathcal{R}_B)$. Với $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in A \times B$ định nghĩa:

$$(a_1,b_1)\mathcal{R}(a_2,b_2) \leftrightarrow (a_1\mathcal{R}_A a_2) \wedge (b_1\mathcal{R}_B b_2).$$

a. Chứng minh rằng quan hệ trên là một quan hệ thứ tự.

b. Nếu $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B$, là thứ tự toàn phần thì $\mathcal{R}$ có là thứ tự toàn phần không?

22. Trên tập số nguyên $\mathbb{Z}^+$, ta định nghĩa quan hệ chia hết như sau:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, x\mathcal{R}y \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

a. Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự.

b. Xét tập hợp con $X = \{2,3,5,6,8,16,15,35,40\}$ của $\mathbb{Z}^+$. Vẽ biểu đồ Hasse, tìm phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có).

23. Trên tập số nguyên $\mathbb{Z}^+$, ta định nghĩa quan hệ chia hết như sau:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, x\mathcal{R}y \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

a. Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự.

b. Xét tập hợp con $X = \{1, 3, 5, 6, 15, 30, 36, 60\}$ của $\mathbb{Z}^+$. Hãy liệt kê các phần tử của $\mathcal{R}$. Vẽ biểu đồ Hasse, tìm phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có).

24. Trên tập số nguyên $\mathbb{Z}^+$, ta định nghĩa quan hệ chia hết như sau:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, x\mathcal{R}y \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

a. Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự.

b. Xét tập hợp con $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 30, 60\}$ của $\mathbb{Z}^+$. Hãy liệt kê các phần tử của $\mathcal{R}$. Vẽ biểu đồ Hasse, tìm phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có).

Chương 4. Hàm Boole và đại số Boole

Bài 1. Giả sử B là một đại số Boole và A là một tập khác rỗng. Với $f, g \in B^A$ định nghĩa

$$\forall x \in A : (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$$

$$\forall x \in A : (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$$

$$\forall x \in A : \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$$

Chứng minh rằng B^A là một đại số Boole với các phép toán trên.

Bài 2. Giả sử A, B là hai đại số Boole. Trên $A \times B$ định nghĩa

$$(x, y) \vee (z, t) = (x \vee z, y \vee t)$$

$$(x, y) \wedge (z, t) = (x \wedge z, y \wedge t)$$

$$\overline{(x, y)} = (\overline{x}, \overline{y})$$

Chứng minh rằng $A \times B$ là một đại số Boole với các phép toán trên.

Bài 3. Tìm dạng chuẩn tắc của các hàm Boole theo 3 biến

a. $xy + \bar{x}z$.

b. $x(y + \bar{x})z$

c. $xy + yz + xz$

d. $x\bar{y}(z + \bar{x}y)$

e. $(x + yz)(x + zx)(z + xy)$

f. $(\bar{x} + yz)(\bar{y} + zx)(\bar{z} + xy)$

Bài 4. Một bài thi có 3 câu A, B, C với số điểm tối đa 5, 3, 4. Nếu trả lời đúng một câu, sinh viên được điểm tối đa, trả lời sai được 0 điểm. Muốn đạt sinh viên phải được điểm trở lên. Ta liên kết với các câu 3 biến Boole a, b, c, d và một hàm Boole $f(a, b, c)$ lấy giá trị 1 nếu sinh viên đạt và bằng 0 nếu sinh viên không đạt. Hãy tìm dạng chuẩn tắc của hàm f.

Bài 5. Hãy vẽ mạch logic thực hiện hàm Boole

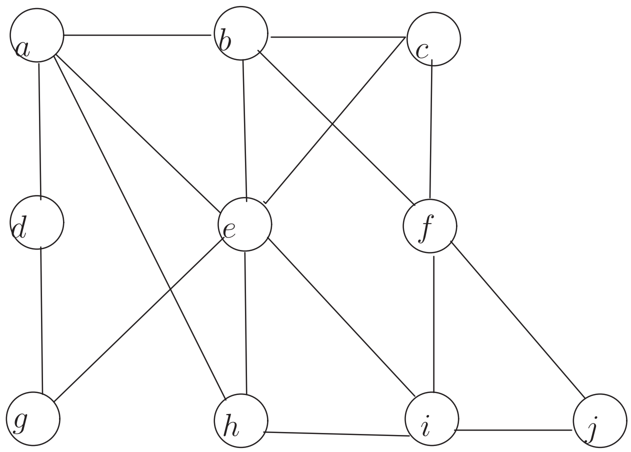
a. $(\bar{x} + \bar{y})(x + \bar{y})(x + y)$

b. $x\bar{z} + y\bar{z} + x$

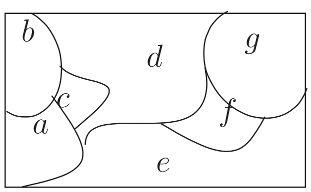
c. $(x+\bar{z})(y+\bar{z})\bar{x}$
d. $x+\bar{y}(\bar{x}+z)$.
Bài 6. Bằng phương pháp bảng Karnaugh hãy cực tiểu hóa hàm Boole sau:
1. $f(x,y,z)=xyz+x\bar{y}z+\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$.
2. $f(x,y,z)=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$.
3. $f(x,y,z)=xyz+\bar{x}yz+x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$.
4. $f(x,y,z)=xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$.
5. $f(x,y,z)=xyz+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$.
6. $f(x,y,z)=xyz+xy\bar{z}+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}z$.
7. $f(x,y,z)=xy\bar{z}+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$.
8. $f(x,y,z)=xyz+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$.
9. $f(x,y,z)=xyz+\bar{x}y\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}$.
10. $f(x,y,z)=xyz+\bar{x}y\bar{z}+xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$.

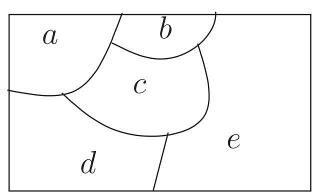
Chương 5. Lý thuyết đồ thị

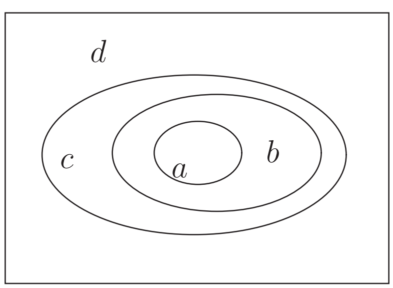
1.a. Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 8 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 4?
b. Có thể tồn tại đồ thị đơn 13 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 3 không?
2. a. Cho biết các đỉnh của đồ thị có bậc là 3, 3, 2, 2, 2. Tìm số cạnh của đồ thị và vẽ đồ thị này.
b. Tìm số đỉnh của một đồ thị chính quy bậc 4 (mỗi đỉnh có bậc là 4) có 10 cạnh. Vẽ đồ thị đó.
3. Cho một đồ thị đầy đủ, có n đỉnh. Tìm số cạnh của đồ thị này.
4. Nếu đồ thị đơn $G=<X,Y>$ có $|X|=n$ và có m cạnh thì đồ thị bù $\overline{G}=<X,\overline{U}>$ có bao nhiêu cạnh?
5. Chứng minh rằng trong một lớp học tùy ý số học sinh mà mỗi người có một số lẻ bạn thân trong lớp luôn là một số chẵn.
6. Chứng minh rằng trong một cuộc họp tùy ý gồm từ 2 đại biểu trở lên, luôn có ít nhất 2 đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đến dự họp.
7. Một quần đảo có $n(n\geq 2)$ hòn đảo và hai hòn đảo bất kỳ thuộc quần đảo đều có số mối đường ngầm tới một trong các hòn đảo này đều không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng từ một hòn đảo tùy ý thuộc quần đảo ta có thể đi đến một hòn đảo bất kỳ khác của quần đảo bằng đường ngầm.
8. Tìm sắc số của đồ thị như hình vẽ



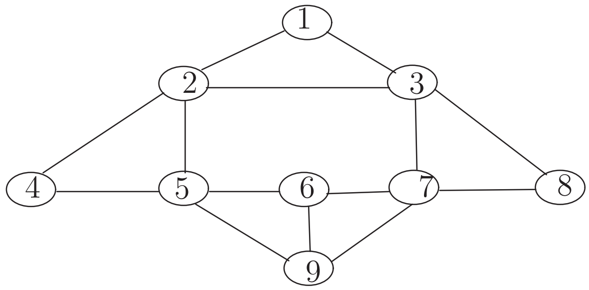
9. Hãy lập lịch thi các môn Toán 1, Toán 2, Toán 3, Toán 4, Tin 1, Tin 2, Tin 3, Tin 4 với số ít nhất các đợt thi, biết rằng các cặp môn sau có sinh viên thi chung: Toán 1 và Tin 2, Toán 2 và Tin 1, Toán 4 và Tin 1, Toán 4 và Tin 2, Toán 3 và Tin 2, Toán 1 và Toán 2, Toán 1 và Toán 3, Toán 3 và Toán 4, Toán 2 và Tin 4, Tin 2 và Tin 3. Các cặp môn trên không được xếp trong cùng một đợt.
10. Cho các bản đồ sau. Tìm sắc số của các bản đồ







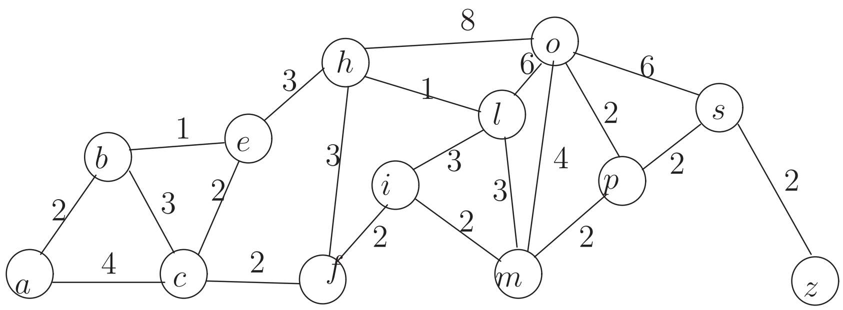
11. Có 5 đội bóng chuyền thi đấu vòng tròn tính điểm (mỗi đội đều thi đấu với 4 đội còn lại). Chứng minh rằng luôn có sắp xếp các đội đứng theo một hàng dọc, sao cho đội đứng sau thua đội đứng trước.
12. Một nước có 10 thành phố. hãy thiết lập một mạng cầu hàng không sao cho:
a. Mỗi thành phố có cầu hàng không nối trực tiếp với đúng ba thành phố khác.
b. Từ mỗi thành phố có cầu hàng không đi tới một thành phố tùy ý sao cho trên đường hành trình tới đích có thể đi qua các thành phố khác; mỗi thành phố đi qua đúng 1 lần.
13. Bản đồ thành phố mà người đưa thư cần phải đi qua là đồ thị sau



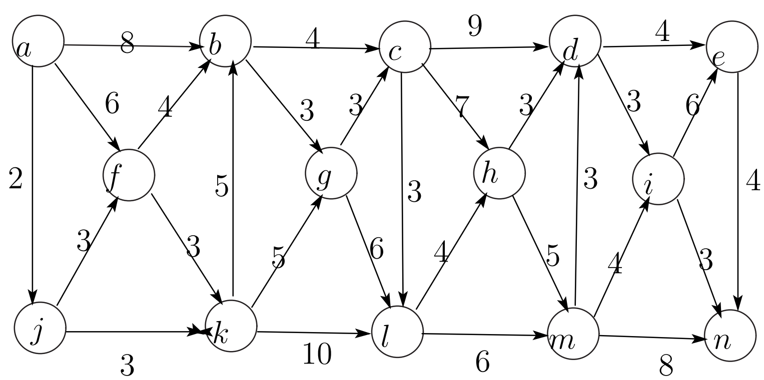
Người đưa thư xuất phát từ đỉnh 6 đi qua tất cả các thành phố (cạnh) để đưa thư rồi quay về nơi xuất phát. Hãy chỉ ra đường đi ngắn nhất của người đưa thư với giả thiết độ dài của mỗi cạnh là như nhau.

14. Trình bày thuật toán Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất.

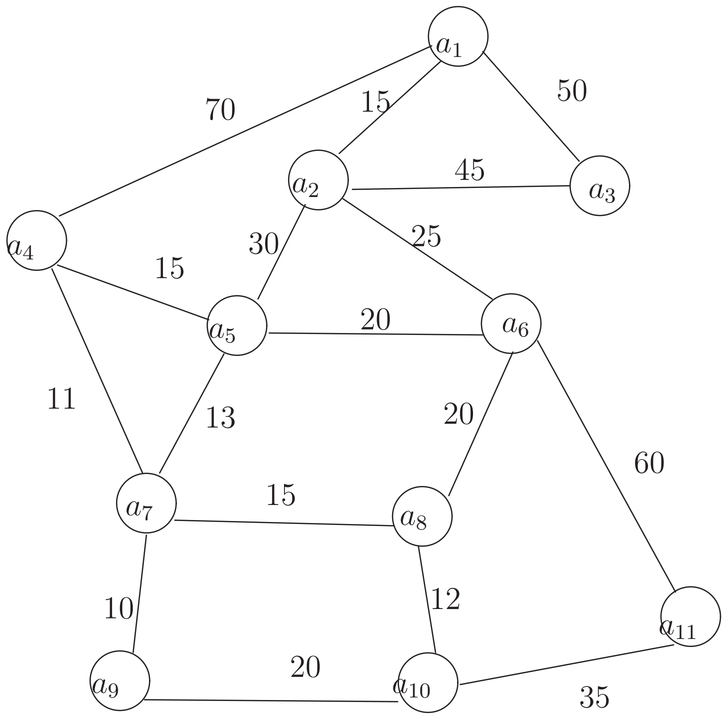
a. Từ đỉnh a đến đỉnh z trong đồ thị có trọng số sau



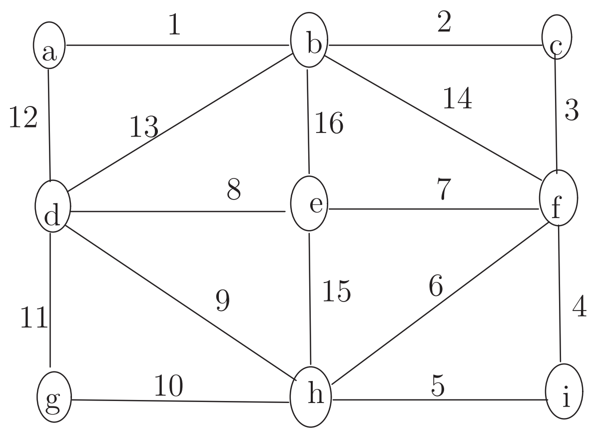
b. Từ đỉnh a đến đỉnh n trong đồ thị có trọng số sau



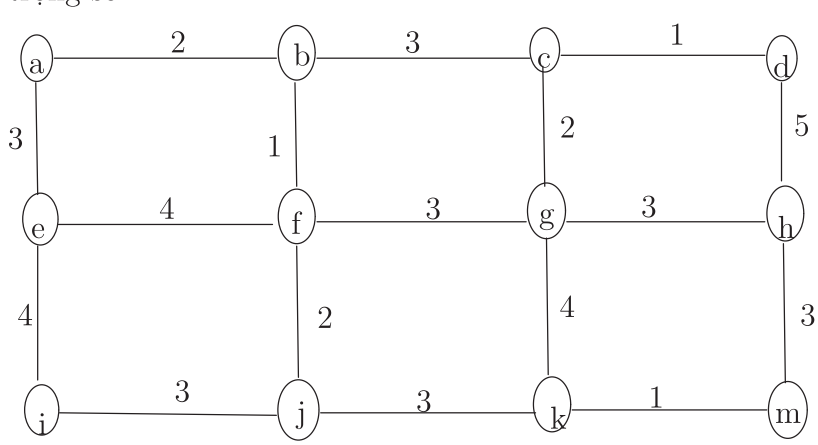
15. Các con đường được biểu diễn trên đồ thị dưới đây là hoàn toàn chưa được trải nhựa. Độ dài của con đường biểu thị bằng trọng số của cạnh (km). Cần phải trải nhựa những đoạn nào để vẫn có đường đi được trải nhựa giữa 2 thành phố bất kỳ mà độ dài đường trải nhựa là tối thiểu? (mỗi thành phố là một đỉnh).



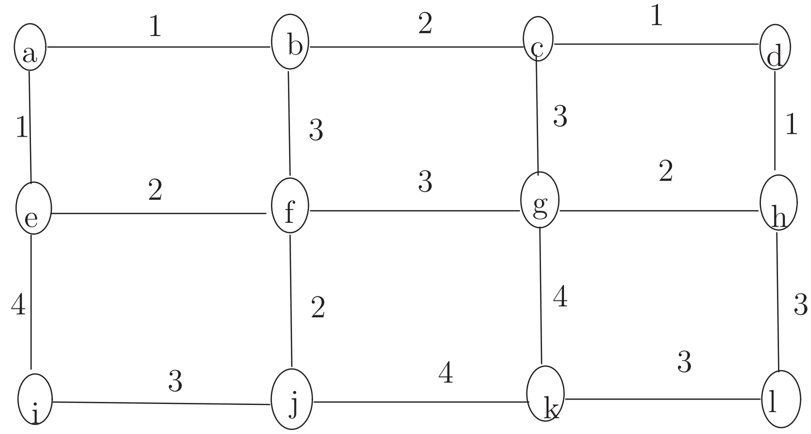
16. a. Dùng thuật toán Kruskal tìm cây khung bé nhất trong đồ thị có trọng số



b. Dùng thuật toán Prim và Kruskal tìm cây khung bé nhất đối với đồ thị có trọng số



17. Cho đồ thị



a. Dùng thuật toán Prim và thuật toán Kruskal để tìm cây khung bé nhất.

b. Tìm cây khung cực đại theo thuật toán tựa Kruskal

c. Dùng thuật toán Prim để tìm cây khung bé nhất có chứa cạnh (e, i) và cạnh (g, k).