第四章 正则语言的性质

2025年6月17日 21:33

正则语言

定义：一个语言L是正则的，当且仅当（递归的）

①$L=\emptyset$ ②L中仅有一个字符串 ③L是两个正则语言的并

④L是两个正则语言的连接 ⑤L是一个正则语言的克林闭包

证明语言的非正则性

泵引理：只能用来证伪

如果语言L正则，那么存在正整数N(泵长度),使得任意长度大于N的字符串w，都可以被分为三部分w=xyz,满足：

①$y\neq\varepsilon\ (|y|>0)$ ②$|xy|\leq N$ ③$\forall k\geq 0\,, xy^kz\in L$

正则语言的封闭性

对交、并、补、差、连接、闭包、反转$L\to L^R$、同态、逆同态有封闭性

证明：

① 交：摩根定理：$L\cap M=\overline{\overline{L}\cup\overline{M}}$

② 并：定义

③ 补：构造$\overline{L_A}=L(B)$

④ 差：$L-M=L\cap\overline{M}$

⑤ 连接：定义

⑥ 闭包：定义

⑦ 反转：反转转移边，交换初始和接受态，添加新初始态q_s令$\delta_{new}(q_s,\varepsilon)=F$

⑧ 同态、 逆同态：构造：R=a(单字符)/ε/∅则h(R)=h(a/ε/∅)

$$R=R_1\big|R_2/R_1R_2/R_1^*$$

$$\text{则}h(R)=h(R_1)|h(R_2)/h(R_1)h(R_2)/h(R_1)^*$$

正则语言的判定性质

空性、无穷性：

具有n个状态的确定的有穷自动机M接受的集合S：

①是非空的，当且仅当M接受某个长度小于n的串

②是无穷的，当且仅当M接受某个长度为m的串，$n\leq m<2n$

判断正则语言是否非空或有穷只需检查全部长度小于n或∈(n,2n)的串

证明：①必要性：显然成立

充分性：设w是A接受串长度最小者，由泵引理得|w|<n，否则xz最短

②必要性：泵引理显然易证

充分性：若S无穷，设没有长度∈(n,2n)的串，取w是A接受串中长度最小者

由泵引理，A会接受更短的串xz，于是，或者w不是长度最小的，或者长度n到2n-1之间有被接受的串，因此假设不成立

等价性：存在算法，可判定两个有穷自动机是否等价（接受语言相同）

证明：设M1和M2分别接受L1和L2，则$\left(L_1\cap\overline{L_2}\right)\cup\left(\overline{L_1}\cap L_2\right)$是正则的(即L1与L2的差)，其可被某个有穷自动机M3接受，当且仅当L1≠L2，又由于存在算法判断L(M3)是否为空，因此可证

自动机的最小化

DFA状态的等价性：DFA $A=\left(Q,\Sigma,\delta,q_0,F\right)$中两个状态p和q，若对$\forall w\in\Sigma^*$，有$\hat{\delta}\left(p,w\right)\in F\Leftrightarrow\hat{\delta}\left(q,\omega\right)\in F$，则称这两个状态是等价的，反之称为可区分的。

等价性只要求p和q对任意的w,同时在或不在F中，不要求相同

填表算法与DFA最小化：比较所有状态对，找出并合并等价状态，得到状态数最少的等价 DFA。