第三章 连续时间信号与系统的频域分析

2025年5月5日 18:47

三角形式傅里叶级数：$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos n\omega_1 t+b_n\cdot\sin n\omega_1 t)$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cdot\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cdot\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

纯余弦形式三角傅里叶级数：$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos(n\omega_1 t+\phi_n)$

幅度：$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，相位：$\phi_n=-\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$

$A_n\sim\omega$曲线为幅度频谱图，为$n\omega_1$偶函数

$\phi_n\sim\omega$曲线为相位频谱图，为$n\omega_1$奇函数

指数形式傅里叶级数：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\cdot\mathrm{e}^{jn\omega_1 t}$

幅度：$|C_n|$，相位：$\mathrm{e}^{j\phi_n}$

$|C_n|\sim\omega$曲线为幅度频谱图，为$n\omega_1$偶函数

$\phi_n\sim\omega$曲线为相位频谱图，为$n\omega_1$奇函数

三角形式和指数形式傅里叶级数的关系：$C_n={}^1/_2\,(a_n-jb_n)$

C_n即为频谱函数

偶谐函数：$f(t)=f\left(t\pm\frac{T_1}{2}\right)$

奇谐函数：$f(t)=-f\left(t\pm\frac{T_1}{2}\right)$

周期信号频谱由间隔ω_1的谱线组成

频谱密度：$\frac{C_n}{\omega_1}$

傅里叶变换与傅里叶级数的关系：$C_n=\frac{1}{T}\cdot F_0(\omega)|_{\omega=n\omega_1}$

对非周期信号：$F(\omega)=|F(\omega)|\cdot\mathrm{e}^{j\phi(w)}$

$|F(\omega)|\sim\omega$曲线为幅度频谱图，为ω_1偶函数

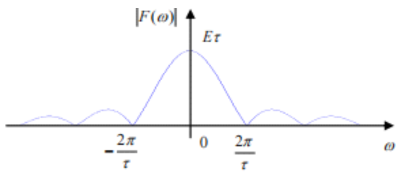
$\phi_w\sim\omega$曲线为相位频谱图，为ω_1奇函数

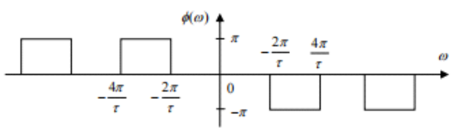
典型非周期连续时间信号的频谱：

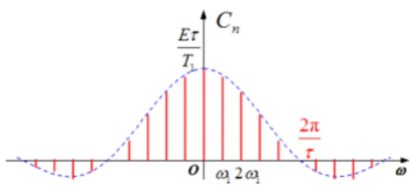
矩形脉冲信号$EG_\tau(t)$：

$$|F(\omega)|=E\tau\left|Sa\frac{\omega\tau}{2}\right|$$

$$\phi(\omega)=\begin{cases}0,\dfrac{4n\pi}{\tau}<|\omega|<\dfrac{2(2n+1)}{\tau}\pi\\ \pi,\dfrac{2(2n+1)\pi}{\tau}<|w|<\dfrac{4(n+1)}{\tau}\pi\end{cases}$$

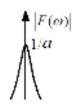






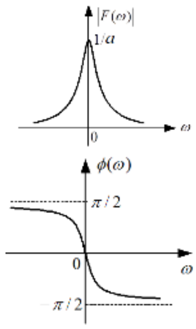
单边指数信号$\mathrm{e}^{-at}u(t)$：

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$



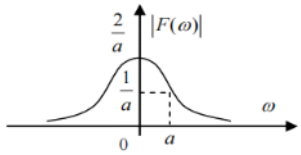
单边指数信号$e^{-at}u(t)$：

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$
$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

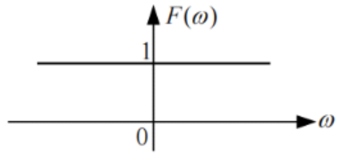


双边指数信号$e^{-a|t|}$：

$$|F(\omega)| = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$
$$\phi(\omega) = 0$$



单位冲激信号$\delta(t)$：

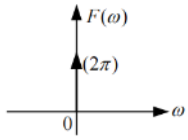


直流信号：

冲激函数与常数（直流）在时域和频域是对偶的，即：

如果时域为冲激信号，那么频谱函数为常数；

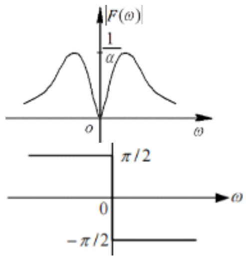
如果时域为直流（常数）信号，那么在频域的频谱函数必为冲激函数。



符号函数信号：

$$|F(\omega)| = \frac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, \omega > 0 \\ +\frac{\pi}{2}, \omega < 0 \end{cases}$$



典型非周期连续时间信号的频谱：

$$EG_\tau(t) \longleftrightarrow E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$e^{-at}u(t)\ (a>0) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

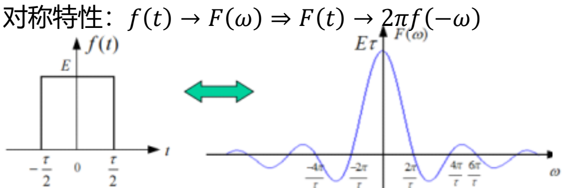
$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

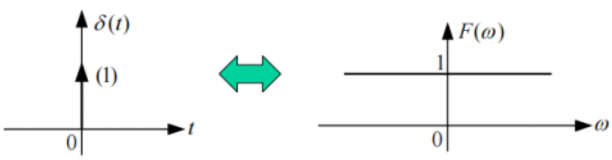
$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

傅里叶变换的基本性质：

线性特性

对称特性：$f(t) \to F(\omega) \Rightarrow F(t) \to 2\pi f(-\omega)$





尺度特性：$f(t) \to F(\omega) \Rightarrow f(at) \to \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

时移特性：$f(t) \to F(\omega) \Rightarrow f(t+t_0) \to F(\omega) \cdot \mathrm{e}^{j\omega t_0}$

频移特性：$f(t) \to F(\omega) \Rightarrow f(t) \cdot \mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t} \to F(\omega \mp \omega_0)$

时域微分特性：$f(t) \to F(\omega) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \to (j\omega)^n \cdot F(\omega)$

积分特性：$f(t) \to F(\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi \cdot F(0) \cdot \delta(\omega)$

频域微分特性：$f(t) \to F(\omega) \Rightarrow (-jt)^n \cdot f(t) \to \frac{\mathrm{d}F^n(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$

时域卷积特性：$f_1(t) \to F_1(\omega), f_2(t) \to F_2(\omega) \Rightarrow f_1(t) * f_2(t) \to F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

频域卷积特性：$f_1(t) \to F_1(\omega), f_2(t) \to F_2(\omega) \Rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) \to \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

系统函数$H(\omega)$：系统冲激响应h(t)的傅里叶变换，$H(\omega) = \frac{R_{zs}(\omega)}{E(\omega)}$，$H(w) = |H(\omega)| \cdot \mathrm{e}^{j\phi(\omega)}$，$|H(\omega)|$为幅频特性，$\mathrm{e}^{j\phi(\omega)}$为相频特性

|H(ω)| 是 H(ω) 的 模（幅值），$|H(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{H(\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{H(\omega)\}^2}$

系统频域分析：

①傅里叶变换分析：

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{e}(t) & * & h(t) & = & r_{zs}(t) \\
\downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
E(\omega) & \times & H(\omega) & = & R_{zs}(\omega)
\end{array}
$$

②指数傅里叶级数分析：

$$
\begin{array}{ccccc}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_1 t} & = \mathrm{e}(t) * h(t) = & r_{zs}(t) & = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \cdot e^{jn\omega_1 t} \\
\downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\mathrm{C_n} & \times & H(n\omega_1) & = & R_n
\end{array}
$$

③三角傅里叶级数分析：

$$\mathrm{e}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n),\quad r_{zs}(t) = \frac{A_0}{2}H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |H(n\omega_1)| \cos\left(n\omega_1 t + \theta_n + \phi(n\omega_1)\right)$$

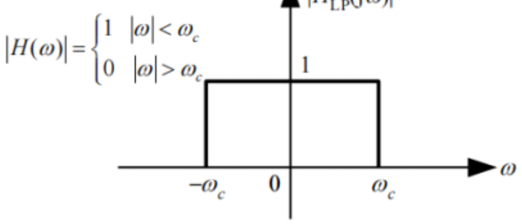
无失真传输：系统的响应与激励信号相比，只是幅度大小和出现的时间不同，而无波形上的变化

即：响应r(t)和激励e(t)的波形相同，仅在时间上滞后t_0，幅度上有系数 K 倍的变化

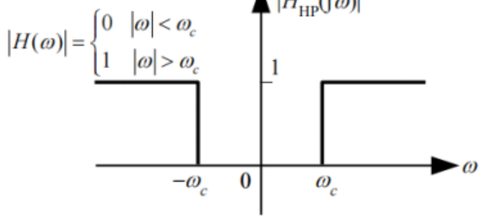
信号通过线性系统不产生失真⇔系统的幅频特性$|H(\omega)|$是一个常数，相位特性$\phi(\omega)$是一个通过原点的直线

理想滤波器：

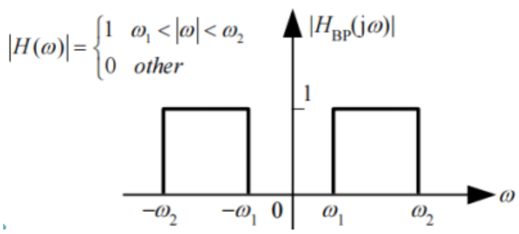
理想低通：非因果系统



理想高通：



理想带通：



理想带阻：