第四章 连续时间信号和系统的复频域分析

2025年5月5日   18:47

拉普拉斯正变换：$F_{(s)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$，$(s=\sigma+j\omega)$，s:复频率，F(s)：复频谱

拉普拉斯反变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\cdot\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$

计算拉普拉斯反变换方法：①部分分式展开法 ②留数定理

部分分式展开法：$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_z)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$

零点：$z_1,z_2,\cdots,z_m$； 极点：$p_1,p_2,\cdots,p_n$

极点为单阶极点：$F(s)=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$

$k_i=F(s)\cdot(s-p_i)\big|_{s=p_i}$；

$f(t)=\left(k_1\cdot\mathrm{e}^{p_1t}+k_2\cdot\mathrm{e}^{p_2t}+\cdots+k_n\mathrm{e}^{p_nt}\right)\cdot u(t)$

极点为r阶极点：$F(s)=\frac{B(s)}{(s-p_1)^r\cdot\ldots\cdot(s-p_n)}=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_1r}{s-p_1}+\cdots$

单边拉普拉斯变换：从0^-开始

存在条件：求收敛域，即找出满足$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)\cdot\mathrm{e}^{-\sigma t}=0$ 的σ取值范围

双边拉普拉斯变换：看成两个单边拉普拉斯变换的叠加

存在条件：两部分收敛域有公共部分

常用信号的单边拉氏变换：

$\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot u(t)\to\frac{1}{s+\lambda}$

$\mathrm{e}^{-j\omega_0t}\cdot u(t)\to\frac{1}{s+j\omega_0}$

$\cos\omega_0t\cdot u(t)\to\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$\sin\omega_0t\cdot u(t)\to\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$\delta^{(n)}(t)\to s^n$

$u(t)\to\frac{1}{s}$

$t^n\cdot u(t)\to\frac{n!}{s^{n+1}}$

$t\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot u(t)\to\frac{1}{(s+\lambda)^2}$

拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系：

收敛域包含虚轴时（或收敛边界在虚轴上），拉普拉斯变换和傅里叶变换均存在

收敛域不包含虚轴时，拉普拉斯变换存在，傅里叶变换不存在

拉普拉斯变换的性质：

线性特性

时移特性：$f(t)\to F(s)\Rightarrow f(t-t_0)\cdot u(t-t_0)\to\mathrm{e}^{-st_0}\cdot F(s)$

复频移特性：$f(t)\to F(s)\Rightarrow\mathrm{e}^{-s_0t}\cdot f(t)\to F(s+s_0)$即：时间函数乘$\mathrm{e}^{-s_0t}$，相当于变换式在s域内左移$s_0$

尺度特性：$f(t)\to F(s)\Rightarrow f(at)\to\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

卷积特性：$f_1(t)\to F_1(s),f_2(t)\to F_2(s)\Rightarrow f_1(t)*f_2(t)\to F_1(s)\cdot F_2(s)$

$f_1(t)\to F_1(s),f_2(t)\to F_2(s)\Rightarrow f_1(t)\cdot f_2(t)\to\frac{1}{2\pi j}[F_1(s)*F_2(s)]$

时域微分特性：$f(t)\to F(s)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\to s\cdot F(s)-f(0^-)$

$f(t)\to F(s)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\to s^2F(s)-s\cdot f(0^-)-f'(0^-)$

时域积分特性：$f(t)\to F(s)\Rightarrow\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\to\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$

复频域微分特性：$f(t)\to F(s)\Rightarrow -t\cdot f(t)\to\frac{dF(s)}{\mathrm{d}s}$

初值定理：$f(t)\to F(s)\Rightarrow f(0^+)=\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=\lim\limits_{s\to+\infty}s\cdot F(s)$

适用条件：F(s)必须为真分式

终值定理：$f(t)\to F(s)\Rightarrow f(\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to0}s\cdot F(s)$

适用条件：$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$必须存在，即复频域中，F(s)的极点都位于s平面的左半平面，若极点在原点则仅能为单阶极点

傅里叶变换的基本性质	拉普拉斯变换的性质
线性特性	线性特性
对称特性：$f(t)\rightarrow F(\omega)\Rightarrow F(t)\rightarrow 2\pi f(-\omega)$	x
尺度特性：$f(t)\rightarrow F(\omega)\Rightarrow f(at)\rightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$f(t)\rightarrow F(s)\Rightarrow f(at)\rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
时移特性：$f(t)\rightarrow F(\omega)\Rightarrow f(t+t_0)\rightarrow F(\omega)\cdot \mathrm{e}^{j\omega t_0}$	$f(t)\rightarrow F(s)\Rightarrow f(t-t_0)\cdot u(t-t_0)\rightarrow \mathrm{e}^{-st_0}\cdot F(s)$
频移特性：$f(t)\rightarrow F(\omega)\Rightarrow f(t)\cdot \mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t}\rightarrow F(\omega\mp\omega_0)$	$f(t)\rightarrow F(s)\Rightarrow \mathrm{e}^{-s_0 t}\cdot f(t)\rightarrow F(s+s_0)$
时域微分特性：$f(t)\rightarrow F(\omega)\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\rightarrow (j\omega)^n\cdot F(\omega)$	$f(t)\rightarrow F(s)\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\rightarrow s^2F(s)-s\cdot f(0^-)-f'(0^-)$
积分特性：$f(t)\rightarrow F(\omega)\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\rightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi\cdot F(0)\cdot\delta(\omega)$	$f(t)\rightarrow F(s)\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\rightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$
频域微分特性：$f(t)\rightarrow F(\omega)\Rightarrow (-jt)^n\cdot f(t)\rightarrow \frac{\mathrm{d}F^n(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$	$f(t)\rightarrow F(s)\Rightarrow -t\cdot f(t)\rightarrow \frac{dF(s)}{\mathrm{d}s}$
时域卷积特性：$f_1(t)\rightarrow F_1(\omega), f_2(t)\rightarrow F_2(\omega)\Rightarrow f_1(t)*f_2(t)\rightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$	$f_1(t)\rightarrow F_1(s), f_2(t)\rightarrow F_2(s)\Rightarrow f_1(t)*f_2(t)\rightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$
频域卷积特性：$f_1(t)\rightarrow F_1(\omega), f_2(t)\rightarrow F_2(\omega)\Rightarrow f_1(t)\cdot f_2(t)\rightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]$	$f_1(t)\rightarrow F_1(s), f_2(t)\rightarrow F_2(s)\Rightarrow f_1(t)\cdot f_2(t)\rightarrow \frac{1}{2\pi j}[F_1(s)*F_2(s)]$

连续系统时域和频域、复频域分析原理：

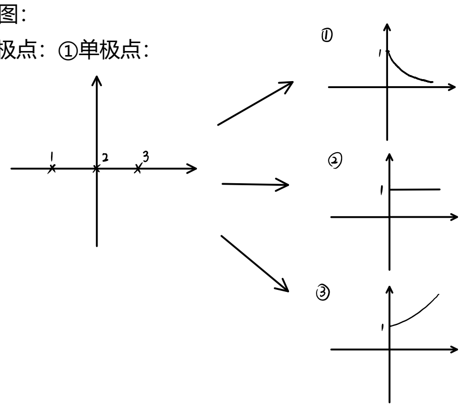
$$\begin{array}{ccccc} e(t) & \rightarrow & h(t) & \rightarrow & r_{zs}(t) \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ E(s) & \times & H(s) & = & R(s) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{时域微分方程} & \longrightarrow & \text{解微分方程} & \longrightarrow & \text{时域响应}r(t) \\ \downarrow{\scriptstyle\text{拉氏变换}} & & & & \uparrow{\scriptstyle\text{拉氏反变换}} \\ s\text{域代数方程} & \longrightarrow & \text{解代数方程} & \longrightarrow & s\text{域响应}R(s) \end{array}$$

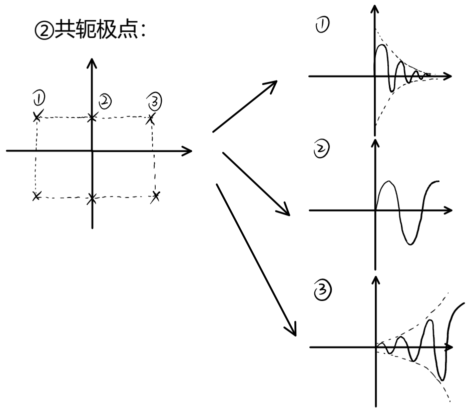
$R_{zs}(s)=H(s)\cdot E(s)$，$H(s)=\frac{\mathcal{L}[r_{zs}(t)]}{\mathcal{L}[\mathrm{e}(t)]}$

零极点分布图：

极点：①单极点：



②共轭极点：



零点：只影响时域函数的幅度和相移，不影响振荡频率