Sebastian Kopf

Wintersemester 2016/17

# Analysis 2

Bergische Universität Wuppertal
2016/17

# Inhaltsverzeichnis

# 1

# Topologische Grundlagen

## 1.1 Normierte Vektorräume

### 1.1.1 Offene Mengen

**Definition** 1.1.1.1
Sei $V$ ein $\mathbb{R}$−Vektorraum. Unter einer Norm auf $V$ verstehen wir eine Funktion $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ mit:

(N1)
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \forall x \in V$$

(N2)
$$\|tx\| = |t| \, \|x\| \; \forall x \in V \, \forall t \in \mathbb{R}$$

(N3)
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Beispiel**

i) $V = \mathbb{R}$, $\|x\| := |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) $V = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty := \max_{1\leq l\leq n} |x|_l$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

iii) $V = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 := \sum_{l=1}^n |x_l|$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

iv)
$$V = C^0([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Für $f \in V$ sei

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

eine Norm auf $V$.

//

**Definition** 1.1.1.2
$V$ sei ein $\mathbb{R}-$Vektorraum. Unter einem Skalarprodukt auf $V$ verstehen wir eine Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

i)
$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle, x,y \in V$$

ii)
$$\langle x+\lambda y,u\rangle = \langle x,u\rangle + \lambda\langle y,u\rangle, \lambda \in \mathbb{R}, x,y,u \in V$$

iii)
$$\langle x,y+\lambda z\rangle = \langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle, \lambda \in \mathbb{R}, x,y,z \in V$$

iv)
$$\langle x,x\rangle \geq 0, x \in V \qquad \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

In diesem Fall setze $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

**Lemma** 1.1.1.3 **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**
Sei $V$ wie bisher und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt. Dann

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \;\forall x,y \in V.$$

Dabei gilt Gleichheit, genau dann, wenn $x = ty$ für ein $t \in \mathbb{R}$.

**Beweis:** $a,b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$\|a+b\|^2 = \langle a+b,a+b\rangle = \langle a,a+b\rangle + \langle b,a+b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a,b\rangle$.

Ist $y = 0$, so ist nichts zu tun. Sei also $y \neq 0$ ($\|y\| > 0$).

$$0 \leq \left\| x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2 = \|x\|^2 + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2} - 2\left\langle x, \frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}\right\rangle = \|x\|^2 + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2} - 2\langle x,y\rangle\frac{1}{\|y\|^2}\langle x,y\rangle = \|x\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

Umstellen liefert
$$\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|\,\|y\|^2.$$

Gilt Gleichheit, so ist $\left\| x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} \right\| = 0$, also $x = \frac{\langle xx,y\rangle}{\|y\|^2} y =: t$. Ist $x = ty$, so $\langle x, y\rangle = t\,\|y\|^2$. □

**Lemma** 1.1.1.4
$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sei ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann definiert $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x \in V$, eine Norm auf $V$.

**Beweis:**

(N1), (N2) klar. (N1) folgt aus d), (N2):

$$\sqrt{\langle tx, tx\rangle} = \sqrt{t^2\langle x,x\rangle} = |t|\,\|x\|\ \forall t \in \mathbb{R} \forall x \in V$$

(N3)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

□

**Beispiel**
Auf $\mathbb{R}^n$ definiere $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} x_l^2}$$

ist die euklidische Norm. //

**Definition** 1.1.1.5
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, dann definiere für $a \in V$, $r > 0$ die Kugel um $a$ mit Radius $r$ als

$$B(a,r) := \langle x \in V \mid \|x-a\| < r\rangle.$$

**Beispiel**

i) $V = \mathbb{R}$, $\|\cdot\| = |\cdot|$, $B(a,r) = ]a-r, a-r[$.

ii) $V = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ =euklidische Norm, $B_2(a,r)$ =Kreisscheibe um $a$ mit Radius $r$.

iii) $V = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$,

$$B_n(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\|_\infty < r\} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid |x_l - a_l| < r \forall 1 \leq l \leq n\}$$

//

**Definition** 1.1.1.6
$(V, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Raum. Sei $M \subset V$ nicht leer. $x \in M$ heißt innerer Punkt von $M$, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $B(x,\delta) \subset M$.

$$\mathring{M} := \{x \in M \mid x \text{ innerer Punkt von } M\}$$

Wir nennen eine Menge $U \subset V$ offen, wenn $\mathring{U} = U$.

**Lemma** 1.1.1.7
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist für $a \in V$ und $r > 0$ die Kugel $B(a,r)$ offen. Genauer ist $y \in B(a,r)$, so $B(y,\rho) \subset B(a,r)$, wenn nur $0 < \rho < r - \|a-y\|$.

**Beweis:** Sei $y \in B(a,r)$, $z \in B(y,\rho)$.

$$\|z-a\| = \|y-a+z-y\| \leq \|y-a\| + \|z-y\| < \|y-a\| + \rho < r$$

sobald $\rho < r - \|y-a\|$. □

**Lemma** 1.1.1.8
$(V, \|\cdot\|)$ wie zuvor, $M, M_1, M_2 \subset V$. Dann gilt:

i) Ist $U \subset M$ offen, so $U \subset \mathring{M}$.

ii) $(M_1 \cap M_2)^\circ = \mathring{M}_1 \cap \mathring{M}_2$, $(M_1 \cup M_2)^\circ \supset \mathring{M}_1 \cup \mathring{M}_2$.

### 1.1.2 Konvergente Folgen

$(V, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Vektorraum.

**Definition** 1.1.2.1

i) Wir nennen eine Folge $(x_k)_{k \in V}$ konvergent gegen $x_0 \in V$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : x_k \in B(x_0, \varepsilon) \text{ für } k \geq n_\varepsilon.$$

In diesem Falle:

$$x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k.$$

ii) Sei $(x_n)_n \subset V$. Dann heißt $a \in V$ Häufungswert für $(x_n)_n$, wenn für unendlich viele $n$ gilt $x_n \in B(a, \varepsilon)$, wie auch immer $\varepsilon > 0$ gewählt war.
Konvergiert $(x_n)_n$ gegen $a$, so ist $a$ der einzige Häufungswert für $(x_n)_n$.

**Lemma** 1.1.2.2
$(x_n)_n \subset V$ sei eine Folge. Dann konvergiert $(x_n)_n$ gegen $x_0 \in V$ genau dann, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Konvergiert $(x_n)_n$ gegen $y_0 \in V$, so $y_0 = x_0$.

**Lemma** 1.1.2.3
Genau dann ist $a \in V$ ein Häufungswert der Folge $(x_n)_n$, wenn $(x_n)_n$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit Grenzwert $a$ hat.

**Beweis:**

i) Eine Teilfolge $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ konvergiere gegen $a$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_k} \in B(a, \varepsilon)$ für $k \geq k_\varepsilon$. Somit ist $a$ ein Häufungswert.

ii) Sei $a \in V$ ein Häufungswert für $(x_n)_n$. Zu $\varepsilon := \frac{1}{k}$ gibt es $x_{n_k} \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$. Dann ist aber $a = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$.

$\square$

**Bemerkung** *Notation*
Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$|x| := \sqrt{\sum_{l=1}^{n} x_l^2}.$$

**Lemma** 1.1.2.4
$(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} x_{k,l} = a_l, 1 \le l \le n.$$

**Beweis:**

$$|x_{k,l} - a_l| \le |x_k - a| \le \sum_{l=1}^{n} |x_{k,l} - a_l|$$

□

**Lemma** 1.1.2.5
i) Sind die Folgen $(x_k)_k, (y_k)_\subset V$ konvergent, so

$$\lim_{k\to\infty} (x_k + \alpha y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k + \alpha \lim_{k\to\infty} y_k.$$

ii) Wird $\|\cdot\|$ durch ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert, so

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$$

wenn $x_k \to x_0$, $y_k \to y_0$.

**Beweis:**

i)

$$\|x_k + \alpha y_k - (x_0 + \alpha y_0)\| \le \|x_k - x_0\| + |\alpha| \, \|y_k - y_0\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

ii)

$$\begin{aligned} |\langle x_k, y_k\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_k - x_0, y_k\rangle + \langle x_0, y_k - y_0\rangle| \\ &\le \|x_k - x_0\| \, \|y_k\| + \|x_0\| \, \|y_k - y_0\| \end{aligned}$$

$$\leq \|x_k - x_0\| (\|x_0\| + \|y_k - y_0\|) + \|x_0\| \|y_k - y_0\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

□

**Definition** 1.1.2.6

i) $(x_n)_n \subset V$ heißt Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$, wenn $k, l \geq n_\varepsilon$.

ii) Wir nennen eine Folge $(x_n)_n$ beschränkt, wenn ein $R$ existiert mit $\|x_n\| \leq R$ für alle $n$.

**Lemma** 1.1.2.7

i) Jede in $V$ konvergente Folge $(x_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge.

ii) Jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ ist beschränkt.

iii) Ist $a$ ein Häufungswert der Cauchy-Folge $(x_n)_n$, so ist $a = \lim x_n$.

**Beweis:**

i) Sei $x_0 = \lim x_k$.Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Für $k, l \geq n_\varepsilon$ wird dann

$$\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x_0\| + \|x_l - x_0\| < \varepsilon.$$

ii) Cauchy-Kriterium für $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \left\|x_n - x_{n_1}\right\| \leq 1 \forall n \geq n_1.$$

$$\left\|x_n - x_{n_1}\right\| \leq R := 1 + \sum_{p=1}^{n_1} \left\|x_p - x_{n_1}\right\| \forall n \geq 1.$$

iii) Wähle Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)_n$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $p_\varepsilon \geq 1$:

$$\|x_r - x_s\| < \frac{\varepsilon}{2}, r, s \geq p_\varepsilon$$

$$\|x_r - a\| \leq \left\|x_r - x_{n_{k_0}}\right\| + \left\|x_{n_{k_0}} - a\right\|$$

Wähle $k_0 \gg 1$ und $n_{k_0} \geq p_\varepsilon$ mit $\left\|x_{n_{k_0}} - a\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $\|x_r - a\| < \varepsilon$, wenn $r \geq n_{k_0}$. □

**Definition** 1.1.2.8
$(V, \|\cdot\|)$ heißt vollständig (Banachraum), wenn jede Cauchy-Folge $(x_k)_k \subset V$ in $V$ einen Grenzwert hat.

**Satz** 1.1.2.9
Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist mit $|\cdot|$ vollständig.

**Beweis:**

$n = 1$: Ana 1; angenommen $(\mathbb{R}^{n-1}, |\cdot|)$ sei vollständig. Ist $(x_k)_k$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$, so schreibe $x_k = (x'_k, x_{k,n})$. Da

$$\frac{|x'_k - x'_l| + |x_{k,n} - x_{l,n}|}{2} \leq |x_k - x_l| \leq |x'_k - x'_l| + |x_{k,n} - x_{l,n}|$$

sind $(x'_k)_k$ und $(x_{k,n})_k$ Cauchy-Folgen, haben also einen Grenzwert $x'$ bzw. $x_n$.

$$|x_k - x| \leq |x'_k - x'| + |x_{k,n} - x_n| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

□

### 1.1.3 Abgeschlossene und kompakte Mengen

$(V, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Vektorraum.

**Definition** 1.1.3.1

i) $A \subset V$ heißt abgeschlossen, wenn $V \setminus A$ offen ist.
ii) $A$ heißt beschränkt, wenn $A \subset B(0,R)$ für geeignetes $R > 0$.
iii) $A$ heißt kompakt, wenn zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen mit $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliche Menge $J \subset I$ mit $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$ gefunden werden kann.
iv) $A$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $(x_n)_n \subset A$ einen Häufungswert $a_0 \in A$ hat.

**Definition** 1.1.3.2

i) $A \subset V$ sei eine Menge. Dann heißt $a_0 \in V$ Häufungspunkt von $A$, wenn $\forall r > 0$ die Menge $A \cap (B(a_0, r) \setminus \{a_0\}) \neq \emptyset$ ist.

ii) $A \subset V$, dann $\bar{A}$ :=Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen $F$ mit $A \subset F$ (abgeschlossene Hülle von $A$).

**Lemma** 1.1.3.3
$A \subset V$. Dann sind äquivalent:

i) $A$ ist abgeschlossen.

ii) Jeder Häufungspunkt von $A$ liegt in $A$.

**Beweis:**

*i)⇒ii)* Sei $a_0 \in V$ Häufungspunkt von $A$, aber $a_0 \notin A$. Dann ist $a_0 \in V \setminus A$ mit $V \setminus A$ offen. Also $\exists r > 0 : B(a_0, r) \subset V \setminus A$ und $A \cap B(a_0, r) = \emptyset$.$\lightning$

*ii)⇒i)* Sei $a_0 \in V \setminus A$, gäbe es kein $r > 0$ mit $B(a_0, r) \subset V \setminus A$, so wähle zu $r := \frac{1}{k}$ ein $x_k \in A \cap B\left(a_0, \frac{1}{k}\right)$, sogar $x_k \neq a_0$. Is $\delta > 0$ beliebig, so wähle $k > \frac{1}{\delta}$. Dann ist $x_k \in (B(a_0, \delta) \setminus \{a_0\}) \cap A$. Also ist $a_0$ Häufungspunkt für $A$, also $a_0 \in A$.$\lightning$

□

**Bemerkung**
Äquivalent:

i) $A \subset V$ abgeschlossen.

ii) Ist $a_0 \in V$, $(a_k)_k \subset A$, $a_0 = \lim_{k \to \infty} a_k$, so $a_0 \in A$.

**Lemma** 1.1.3.4
Sei $A \subset V$, dann ist

$$\bar{A} = B := A \cup \{a_0 \in V \mid a_0 \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

**Beweis:** $B$ ist abgeschlossen: Sei $b_0$ ein Häufungspunkt für $B$. Zeige: $b_0 \in B$.
Sei $r > 0$ beliebig. Sei $b_0 \notin A$. Wähle $y \in B \cap \left(B\left(b_0, \frac{r}{2}\right) \setminus \{b_0\}\right)$, ist $y \in A$, so $A \cap \left(B\left(b_0, \frac{r}{2}\right) \setminus \{b_0\}\right) \ni y$. Dann ist $b_0$ Häufungspunkt von $A$.
Sei $y \notin A$, da $y \in B$, ist $y$ Häufungspunkt von $A$. Da $y \neq b_0$ existiert

$$\delta := \frac{1}{2}\|y - b_0\| > 0.$$

Sei $\rho = \min\left\{\delta, \frac{r}{2}\right\}$. Wähle $x \in (B(y,\rho) \setminus \{y\}) \cap A$. Dann

$$\|x - b_0\| \leq \|x - y\| + \|y - b_0\| < \rho + \frac{\delta}{2} \leq r.$$

Wäre $x = b_0$, so

$$2\delta = \|y - b_0\| = \|y - x\| < \rho \leq \delta \lightning$$

Also ist $x \in (B(b_0,r) \setminus \{b_0\}) \cap A$. In beiden Fällen ist $(B(b_0,r) \setminus \{b_0\}) \cap A \neq \emptyset$. Also ist $b_0$ Häufungspunkt von $A$, also $b_0 \in B$. Somit ist $\bar{B} = B$, $A \subset B$ und $\bar{A} \subset B$.
Zeige noch: $B \subset \bar{A}$. Sei $F$ abgeschlossen, $A \subset F$. Sei $b \in B$, $b \in A$. Dann ist $b \in F$. Ist $b \notin A$, so $\exists$Folge $(b_k)_k \subset A$, $b = \lim_{k\to\infty} b_k$. Da $b_k \in F$ für alle $k$, folgt aus der Bemerkung $b \in F$. Also $B \subset F$. Wähle $F = \bar{A}$, so ist $B \subset \bar{A}$. □

**Definition** 1.1.3.5
$A \subset V$, dann heißt $\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$ der Rand von $A$.

**Bemerkung**
Für $A \subset V$ ist stets

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \bar{A} \cap (\overline{V \setminus A}).$$

**Beispiel**

i) $A = B_2(0,r) \Rightarrow \partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = r\}$.

ii) $V = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q} \Rightarrow \partial A = \mathbb{R}$.

//

**Bemerkung** *Erinnerung*
$K \subset V$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $(x_\nu)_\nu \subset K$ eine in $K$ konvergente Teilfolge hat.
$K \subset V$ heißt überdeckungskompakt, wenn es für jede Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $K$ durch offene Mengen $U_i \subset V$ $i_1, \ldots, i_m$ gibt, so dass $K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_m}$.

**Lemma** 1.1.3.6
$K \subset V$ sei kompakt. Dann ist

i) $K$ beschränkt.

ii) $K$ abgeschlossen.

iii) $K$ folgenkompakt.

**Beweis:**

i) $(B(0,n))_{n\geq 1}$ ist offene Überdeckung für $K$. Dann $B(0,n_0) \supset K$ für genügend großes $n_0$.

ii) Sei $(x_n)_n \subset K$ eine Folge, so dass $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert. Dann ist $x_0 \in K$, anderenfalls wäre $x_0 \notin K$, so wäre $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine offene Überdeckung für $K$, wenn $U_\varepsilon := \{x \in V \mid \|x - x_0\| > \varepsilon\}$. Aber dann ist $K \subset U_{\varepsilon_0}$ für ein genügend klein gewähltes $\varepsilon_0 > 0$, $\|x_n - x_0\| \geq \varepsilon_0$. $\lightning$

iii) Sei $(x_n)_n \subset K$ eine Folge ohne Häufungspunkt in $K$. Dann sind unendlich viele der $x_n$ paarweise verschieden. Ist $x \in K$, so gibt es $\varepsilon_x > 0$ so dass $B(x,\varepsilon_x)$ nur endlich viele der $x_n$ enthält. Dann ist $(B(x,\varepsilon_x))_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von $K$, also finden wir $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r \in K$ mit $K \subset \bigcup_{l=1}^r B(\tilde{x}_k, \varepsilon_{\tilde{x}_l})$. Aber die linke Seite enthält unendlich viele der $x_n$, die rechte nur endlich viele. $\lightning$

$\square$

**Lemma** 1.1.3.7
Sei $K \subset V$ folgenkompakt und $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $K$ durch offene Mengen $U_i \subset V$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$\forall x \in K \exists i = i_x \in I \text{ mit } B(x,\delta) \subset U_{i_x}.$$

**Beweis:** Sonst gäbe es zu $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in K$ mit $B\left(x_k, \frac{1}{k}\right) \not\subset U_i$ für alle $i \in I$. Wähle $(x_{k_l})_l \subset (x_n)_n$ mit $x_0 = \lim_{l\to\infty} x_{k_l} \in K$, sei $i_0 \in I$, $x_0 \in U_{i_0}$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, 2\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Ist dann $y \in B\left(x_{k_l}, \frac{1}{k_l}\right)$, so

$$\|y - x_0\| \le \left\|x_0 - x_{k_l}\right\| + \left\|y - x_{k_l}\right\| \le \left\|x_0 - x_{k_l}\right\| + \frac{1}{k_l} < \varepsilon + \frac{1}{k_l} < 2\varepsilon.$$

Dann gilt $B\left(x_{k_l}, \frac{1}{k_l}\right) \subset B(x_0, 2\varepsilon) \subset U_{i_0}$. ↯ □

**Satz** 1.1.3.8
Jede folgenkompakte Menge $K \subset V$ ist kompakt.

**Beweis:** Sei $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, $U_i$ offen. Es gibt ein $\delta > 0$ mit:

$$\forall x \in K \exists i_x \in I : B(x, \delta \subset U_{i_x}).$$

Behauptung: Für geeignete $x_1, \ldots, x_N \in K$ ist schon $K \subset \bigcup_{l=1}^N B(x_l, \delta)$.
Angenommen, es sei nicht so. Dann $K \not\subset B(z_1, \delta)$ ($z_1 \in K$ beliebig). Also $\exists z_2 \in K$ mit $\|z_1 - z_2\| \ge \delta$.
Auch $K \not\subset B(z_1,\delta) \cup B(z_2,\delta)$, wähle $z_3 \in K$ mit $\|z_3 - z_l\| \ge \delta$, $l = 1,2$, induktiv definiere $z_1, \ldots, z_r \in K$ mit $\left\|z_i - z_j\right\| \ge \delta$ für $i \ne j$.
Die Folge $(z_n)_n \subset K$ hat dann keinen Häufungswert. ↯ □

**Satz** 1.1.3.9 **Bolzano-Weierstraß**
In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ hat jede beschränkte Folge $(x_k)_k$ einen Häufungswert.

**Beweis:** $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, wähle aus $(x_{k,1})_k$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{l,1},1})_l$ aus. Dann ist $(x_{k_{l,1},2})_l$ beschränkt, hat also eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{l,2},2})_l$. Aus $(x_{k_{l,2},3})_l$ wähle konvergente Teilfolge $(x_{k_{l,3},3})_l$ aus. So fahre fort und erhalte Teilfolge $(x_{k_{l,n}})_l$, so dass $(x_{k_{l,n},j})_j$ konvergiert für alle $1 \le j \le n$. □

**Alternativer Beweis:** Induktion nach $n$.
$n = 1$: $\surd$
Angenommen der Satz gelte in $\mathbb{R}^{n-1}$. Schreibe $x_k = (x'_k, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, dann sind $(x'_k)_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $x_{k,n} \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Wähle Teilfolge $(x'_{k_l})_l \subset (x'_k)_k$, die konvergiert, etwa gegen $x'_0$, $(x_{k_l,n})_l$ hat ebenfalls eine gegen ein $x_{0,n} \in \mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(x_{k_{l_p},n})_p$. Dann konvergiert $(x_{k_{l_p}})_p$ gegen $(x'_0, x_{0,n})$. □

**Satz** 1.1.3.10 **Heine-Borel**
Im $\mathbb{R}^n$ ist jede Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

**Beweis:** Zu zeigen: Ist $K$ abgeschlossen und beschränkt, so hat jede Folge $(x_k)_k \subset K$ einen Häufungswert $x^* \in K$.
Nach 1.1.3.9 Hat $(x_k)_k$ einen Häufungswert $x^* \in \mathbb{R}^n$ (da $K$ beschränkt). $K$ abgeschlossen, $x^* \in K$. □

**Beispiel**
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen.

$$BC^0(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

ist ein $\mathbb{R}$−Vektorraum,

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in U$$

definiert auf $BC^0(U)$ eine Norm. $(BC^0(U), \|\cdot\|)$ ist sogar vollständig.
Speziell: $U = \mathbb{R}$, $K := \{f \in BC^0(U) \mid \|f\| \leq 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt.
Sei jetzt

$$f_0(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x \notin [0,3] \end{cases}, \quad f_n(x) := f_0(x + 3n).$$

Dann $(f_n)_n \subset K$, aber $\|f_k - f_n\| = 1$ für $k \neq n$. $(f_n)_n$ hat keine konvergente Teilfolge. Also ist $K$ nicht kompakt. //

**Definition** 1.1.3.11
Eine offene Menge $\Omega \subset V$ heißt zusammenhängend oder Gebiet, wenn gilt: Sind $U_1, U_2 \subset V$ offen, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so folgt aus $\Omega = U_1 \cup U_2$ schon $U_1 = \Omega$ oder $U_2 = \Omega$.

**Lemma** 1.1.3.12
Sei $\Omega \subset V$ ein Gebiet, die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft: Ist $a \in \Omega$, so gibt es $r > 0$ mit $B(a,r) \subset \Omega$ und $f(x) = f(a)$ für $x \in B(a,r)$. Dann ist $f$ konstant auf $\Omega$.

**Beweis:** Sei $a_0 \in \Omega$, $U_1 := \{x \in \Omega \mid f(x) = f(a_0)\}$, $U_2 := \Omega \setminus U_1$ sind offen (Ist das gezeigt, haben wir $U_1 \cup U_2 = \Omega$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, also $U_1 = \Omega$, da $U_1 \ni a_0$, $U_1 \neq \emptyset$).
Ist $x_1 \in U_1$, $r > 0$ mit $B(x_1,r) \subset \Omega$ und $f(x) = f(x_1)$ auf $B(x_1,r)$, also $B(x_1,r) \subset U_1$. Also ist $U_1$ offen.
Ist $x_2 \in U_2$, $r_2 > 0$ mit $B(x_2,r_2) \subset \Omega$ und $f = f(x_2)$ auf $B(x_2,r_2)$. Somit $B(x_2,r_2) \subset U_2$. Also ist auch $U_2$ offen. □

## 1.2 Stetige Abbildungen

Sei $(V, \|\cdot\|)$ stets ein normierter Vektorraum.

**Definition** 1.2.1
Sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Vektorraum. Ist $M \subset V$, $f : M \to Y$ eine Abbildung, so heißt $f$ stetig in $x_0 \in M$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass für alle $x \in M \cap B(x_0,\delta)$ gilt $f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon)$. Alternativ:

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \forall x \in M.$$

**Satz** 1.2.2
Sei $M \subset V$, $x_0 \in M$, $f: M \to Y$. Dann ist $f$ in $x_0$ stetig, wenn für alle $(x_k)_k \subset M$, $\lim x_k = x_0$, gilt $\lim f(x_k) = f(x_0)$.

**Beweis:**

'$\Rightarrow$': Sei $(x_k)_k \subset M$, $\lim x_k = x_0$.
Zeige: $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_0)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt $\delta > 0$ mit $f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon)$, wenn $x \in M \cap B(x_0,\delta) \exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - x_0\| < \delta$ für alle $k \geq k_0$. Also $f(x_k) \in B(f(x_0),\varepsilon) \forall k \geq k_0$, also $\|f(x_k) - f(x_0)\| < \varepsilon \forall k \geq k_0$.

'$\Leftarrow$': Sei $f$ in $x_0$ unstetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(M \cap B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$ für kein $\delta > 0$. Also gilt $\forall k \geq 1 \exists x_k \in M \cap B\left(x_0 \frac{1}{k}\right)$ mit $\|f(x_k) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$. Aber $\lim x_k = x_0$, ohne dass $(f(x_k))_k$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

□

**Lemma** 1.2.3
Seien $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Vektorräume und $f: M \to S$, $g: S \to Z$ Abbildungen, $M \subset V$, $S \subset Y$. Wenn dann $f$ in $x_0 \in M$ und $g$ in $y_0 := f(x_0)$ stetig ist, so ist $g \circ f$ in $x_0$ stetig.

**Lemma** 1.2.4
Folgenkriterium anwenden.

**Lemma** 1.2.5
$U \subset V$ sei offen und $f: U \to Y$ ($(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierter Vektorraum.). Dann ist $f$ auf $U$ stetig genau dann, w(enn $f^{-1}(W)$ offen ist für jede offene Menge $W \subset Y$.

**Beweis:**

'$\Rightarrow$': $S \subset Y$ sei offen, $x_0 \in f^{-1}(W)$, $y_0 := f(x_0)$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B(y_0,\varepsilon) \subset W$, $\exists \delta > 0$ mit $f(B(x_0,\delta)) \subset B(y_0,\varepsilon)$. Dann ist $B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(y_0,\varepsilon)) \subset f^{-1(W)}$. Also ist $f^{-1(W)}$ offen.

'$\Leftarrow$': Sei $x_1 \in U$, $y_1 := f(x_1)$. Da $B(y_1,\varepsilon) \subset Y$ offen, ist $f^{-1}(B(y_1,\varepsilon))$ es auch. Da $x_1 \in f^{-1}(B(y_0,\varepsilon))$ $\exists \delta > 0$ mit $B(x_1,\delta) \subset f^{-1}(B(y_0,\varepsilon))$.

□

**Lemma** 1.2.6
$(Y, \|\cdot\|_Y)$ sei normierter Vektorraum.

i) Genau dann ist eine lineare Abbildung $f: V \to Y$ stetig, wenn eine Zahl $c > 0$ mit

$$\|f(x)\|_Y \leq c\,\|x\| \;\forall x \in V$$

existiert.

ii) Jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ ist stetig.

**Beweis:**

i) Es gebe eine Konstante $c > 0$ mit $\|f(x)\|_Y \leq c\,\|x\|$ für alle $x \in V$. Dann ist $f$ in 0 stetig nach dem Folgenkriterium.
Sei $x_0 \in V$.

$$\|f(x) - f(x_0)\|_Y = \|f(x - x_0)\|_Y \leq c\,\|x - x_0\|$$

Also ist $f$ stetig in $x_0$.
Angenommen, $f$ sei stetig, aber $\|f(x)\|_Y \leq c\,\|x\|$ gelte für kein $c > 0$, dann wähle $x_k \in V$ mit $\|f(x_k)\|_Y \geq k\,\|x_k\|$.

$$v_k := \frac{x_k}{k} \Rightarrow \|v_k\| \leq \frac{1}{k} \text{ und } \|f(v_k)\| = \frac{\|f(x_k)\|}{k} \geq 1$$

Dann wäre $f$ in 0 unstetig. $\lightning$

ii) Sei $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,d \\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} \langle A_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle A_d, x\rangle \end{pmatrix}, A_i := (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

$$|f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{d} \langle A_i, x\rangle^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |A_i|^2\right) |x|^2$$

$c := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |A_i|^2}$ erfüllt das Kriterium aus i).

□

**Lemma** 1.2.7
Jede Norm $\mathcal{N}: V \to \mathbb{R}^+$ auf einem Vektorraum $V$ über $\mathbb{R}$ ist stetig, wenn $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$.

**Beweis:** Sind $x, y \in V$, so

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y + x - y) \leq \mathcal{N}(y) + \mathcal{N}(x - y) \\
\Rightarrow &\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y) \leq \mathcal{N}(x - y) \\
\Rightarrow &\mathcal{N}(y) - \mathcal{N}(x) \leq \mathcal{N}(x - y) \\
\Rightarrow &|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x - y).
\end{aligned}$$

□

**Lemma** 1.2.8
$(V, \|\cdot\|)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ seien normierte Räume. Sei $U \subset V$ offen, $K \subset U$ kompakt, ist dann $f: U \to Y$ stetig, so ist auch $f(K)$ kompakt.

**Beweis:** Sei $(W_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $f(K)$ durch offene Mengen. Dann folgt

$$K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(W_i).$$

Wähle $i_1, ..., i_n \in I$ aus mit $K \subset \bigcup_{k=1}^n f^{-1} W_{i_k}$. Hieraus folgt dann die Behauptung:

$$f(K) \subset \bigcup_{k=1}^n W_{i_k}.$$

□

**Satz** 1.2.9
$(V, \|\cdot\|)$ wie zuvor, ist $K \subset V$ kompakt, und $f: U \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $x_+, x_- \in K$ mit $f(x_-) \leq f \leq f(x_+)$.

**Beweis:** $f(K)$ ist kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. $\inf_{x \in K} f(x)$ und $\sup_{t \in K} f(t)$ sind definiert und es gibt Folgen $(x_n')_n$, $(x_n'')_n \subset K$ mit $f(x_n') \to \inf_{x \in K} f(x)$, $f(x_n'') \to \sup_{t \in K} f(t)$, wenn $n \to \infty$. OEdA seien $(x'_n)_n$ und $(x''_n)_n$ konvergent gegen $x_-, x_+ \in K$. Dann ist $f(x_-) = \inf_{x\in K} f(x)$ und $f(x_+) = \sup_{t\in K} f(t)$. □

**Satz** 1.2.10
Ist $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$−Vektorraum, so gibt es zu 2 Normen $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2 : V \to [0,\infty[$ eine Zahl $c > 0$, so dass

$$\frac{1}{c}\mathcal{N}_1 \le \mathcal{N}_2 \le c\mathcal{N}_1.$$

**Beweis:** Sei $n = \dim V$ und $\{b_1,\dots,b_n\}$ eine $\mathbb{R}$−Basis für $V$. Dann gibt es Linearformen $b_1^*,\dots.,b_n^* : V \to \mathbb{R}$ mit $x = \sum_{l=1}^n b_l^*(x) b_l \forall x \in V$.
$F(x) = (b_1^*(x),\dots,b_n^*(x))$, $F : V \to \mathbb{R}^n$ isomorph. $\tilde{\mathcal{N}_j}(y) := \mathcal{N}_j(F^{-1}(y))$ sind Normen auf $\mathbb{R}^n$.
Zeige: $\exists c > 0$ :

$$\frac{1}{c}\tilde{\mathcal{N}_1} \le \tilde{\mathcal{N}_2} \le x\tilde{\mathcal{N}_1}.$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\tilde{\mathcal{N}_1}(y) = \tilde{\mathcal{N}_1}\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \le \sum_{j=1}^n |y_j|\tilde{\mathcal{N}_1}(e_j) \le |y|\sqrt{\sum_{j=1}^n \tilde{\mathcal{N}_1}(e_j)^2} = c'_1|y|.$$

$\tilde{\mathcal{N}_1} : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ ist stetig, $K := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Dann existiert ein $y_* \in K$ mit $\tilde{\mathcal{N}_1}(y) \ge \tilde{\mathcal{N}_1}(y_*)$ ffür alle $y \in K$. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\tilde{\mathcal{N}_1}(y) = \tilde{\mathcal{N}_1}\left(|y|\frac{y}{|y|}\right) = |y|\tilde{\mathcal{N}_1}\left(\frac{y}{|y|}\right) \ge \tilde{\mathcal{N}_1}(y_*)|y|.$$

Hiermit folgt:

$$\tilde{\mathcal{N}_1}(y) \le c'_1|y| \le \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}_1}(y_*)}\tilde{\mathcal{N}_1}(y).$$

Genauso ($y_{**} \in K$):

$$\tilde{\mathcal{N}_2}(y) \le c'_2|y| \le \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}_2}(y_{**})}\tilde{\mathcal{N}_2}(y).$$

Es folgt:

$$\tilde{\mathcal{N}_1}(y) \le c'_1|y| \le \frac{c'_1}{c'_2\tilde{\mathcal{N}}(y_{**})}\tilde{\mathcal{N}_2}(y)$$

$$\frac{c'_2}{c'_1}\tilde{\mathcal{N}_2}(y_{**})\tilde{\mathcal{N}_1} \le \tilde{\mathcal{N}_2}$$

$$\tilde{\mathcal{N}_2}(y) \le c'_2|y| \le \frac{c'_2}{c'_1\tilde{\mathcal{N}_1}(y_*)}\tilde{\mathcal{N}_1}(y)$$

$$c := \max\left\{\frac{c_1'}{c_2'}\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_2(y_*)}, \frac{c_2'}{c_1'}\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_1(y_*)}\right\}$$

liefert das Verlangte. □

**Lemma** 1.2.11
$(V, \|\cdot\|)$ sei normierter Vektorraum, ebenso $(Y, \|\cdot\|_Y)$. $f : V \to Y$ sei auf einer kompakten Menge $K \subset V$ stetig. Dann ist $f$ auf $K$ gleichmäßig stetig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass $\left\|f(x') - f(x'')\right\|_Y \leq \varepsilon$, wenn immer $x', x'' \in K$ mit $\left\|x' - x''\right\| \leq \delta$ sind.

**Beweis:** Zu $\varepsilon > 0$ und $\tilde{x} \in K$ wähle $\delta_{\tilde{x}} > 0$ mit $f(B(\tilde{x}, \delta_{\tilde{x}} \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. Dann überdeckt $(B(\tilde{x}, \delta_{\tilde{x}}/2))_{\tilde{x} \in K}$ $K$. Wähle $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(\tilde{x}_j, \delta_{\tilde{x}_j}/2), \quad \delta := \frac{1}{2}\min\{\delta_{\tilde{x}_j}, \ldots, \delta_{\tilde{x}_N}\}.$$

Sind jetzt $x', x'' \in K$, $\left\|x' - x''\right\| < \delta$, für ein $j \in \{1, \ldots, N\}$ ist dann $x'' \in B(\tilde{x}_j, \delta_{\tilde{x}_j}/2)$. Dann ist

$$\left\|x' - \tilde{x}_j\right\| \leq \left\|x' - x''\right\| + \left\|x'' - \tilde{x}_j\right\| \leq \delta_{\tilde{x}_j}.$$

$$\left\|f(x') - f(x'')\right\|_Y \leq \left\|f(x') - f(\tilde{x}_j)\right\| + \left\|f(\tilde{x}_j) - f(x'')\right\| < \varepsilon$$

□

**Definition** 1.2.12
$(V, \|\cdot\|)$ sei normierter Raum, $f : V \to V$ heißt kontrahierend, wenn $\exists 0 < x < 1$ mit $\left\|f(x') - f(x'')\right\| \leq c\left\|x' - x''\right\|$ für $x', x'' \in V$.

**Satz** 1.2.13 **Banachscher Fixpunktsatz**
$(V, \|\cdot\|)$ sei vollständiger normierter Vektorraum, $f : V \to V$ sei kontrahierend. Dann hat $f$ genau einen Fixpunkt $x_0 \in V$, also $f(x_0) = x_0$.

**Beweis:** $x_1 \in V$ sei beliebig, induktiv definiere: $x_{n+1} := f(x_n)$. Dann ist

$$\|x_{n+1} - x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1} - f(x_n))\| \leq c\,\|x_{n+1} - x_n\|.$$

Somit:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le c^{n-1}\,\|x_2 - x_1\|\,.$$

Für $m > k$ gilt dann:

$$\|x_m - x_k\| = \left\|\sum_{l=k}^{m-1}(x_{l+1} - x_l)\right\| \le \sum_{l=k}^{m-1}\|x_{l+1} - x_l\| \le \left(\sum_{l=k}^{m-1} c^{l-1}\right)\|x_2 - x_1\| \le \frac{c^{k-1}}{1-c}\,\|x_2 - x_1\|\,.$$

Also bildet $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge, es existiert $x_0\colon \lim x_n$.
Da $f$ stetig ist, gilt

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0.$$

Ist $y_0 \in V$ und $f(y_0) = y_0$, so

$$\|x_0 - y_0\| = \|f(x_0) - f(y_0)\| \le c\,\|x_0 - y_0\| \Rightarrow x_0 - y_0 = 0.$$

Ergänzung:

$$\|x_m - x_k\| \le \frac{c^{k-1}}{1-c}\,\|x_2 - x_1\| \Rightarrow \|x_k - x_0\| \le \frac{c^{k-1}}{1-c}\,\|x_2 - x_1\|$$

□

# 2

# Differentiation im $\mathbb{R}^n$