Inhaltsverzeichnis

13
Lineare Differentialgleichungs-Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das AWP

$$(*)\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ x(t_0) = \eta\end{cases},$$

also den Spezialfall der Situation in Kapitel 12, in dem $A(t) \equiv A$ konstant und $b \equiv 0$ ist. Wenn wir für $(*)$ eine Fundamentalmatrix haben, können wir per Variation der Konstanten auch $\dot{x} = Ax + b$ mit $b \neq 0$ nicht-konstant behandeln.
In Fall $n = 1$ ist $A = a \in \mathbb{R}$ und wir haben nur $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax$, $x(t_0) = \eta$ zu lösen. Hier kennen wir die Lösung:

$$x(t) = e^{(t-t_0)a}\eta.$$

Formales Rechnen suggeriert, dass

$$x(t) = e^{t-t_0)A}\eta$$

für $n > 1$ das AWP $(*)$ lösen könnte. Das ist tatsächlich richtig, wir müssen aber erklären wir e^{tB} für eine Matrix B definiert ist und dies so machen, dass $t \mapsto e^{tB}$ differenzierbar mit Ableitung Be^{tB} wird.
Da wir später Eigenwerte von Matrizen berechnen werden (ähnlich wie im vorletzten Kapitel) sind wir gut beraten von hier an komplex zu arbeiten, wenn auch unser Interesse auf reelle Differentialgleichungssysteme beschränkt bleibt.

Bemerkung 13.1

i) $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbb{C}^{n\times n}$ sind endlich dimensionale Vektorräume, auf ihnen sind alle Normen äquivalent und bzgl. jeder Norm liegt Konvergenz genau dann vor, wenn alle Koordinaten bzw, Einträge konvergieren. Grenzwerte, die Existenz von Ableitungen, deren Wert, etc. sind unabhängig bon der gewählten Norm. Abschätzungen und darin vorkommende Konstanten können wir der Norm abhängen.

ii) Wir wählen eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ und eine auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ für die gelten

- $\forall x \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$,

- $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

iii) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Folge von Matrizen, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ wohldefiniert (=Folge der Partialsummen bzw. deren Grenzwerte in $\mathbb{C}^{n\times n}$). Die Folge der Partialsummen konvergiert genau dann, wenn sie koordinatenweise konvergiert. Da $\mathbb{C}^{n\times n}$ ein Banachraum mist, beweist man wie in $\mathbb{R}$, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad \text{konvergiert.}$$

Beispiel 13.2

i) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Also:

$$\sum_{k=0}^{N} A^k = I + A^1 + \ldots + A^N = \begin{pmatrix} N+1 & 0+1+2+\ldots+N \\ 0 & N+1 \end{pmatrix}$$

ist nicht konvergent für $N \to \infty$.

ii) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

$$\sum_{k=0}^{N} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!} \xrightarrow{N\to\infty} e^{\|A\|} < \infty$$

Somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

//

Definition 13.3
Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ gemäß Bemerkung 2 i) wohldefiniert. Die Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \mapsto e^{tA}$ heißt Matrixexponentialfunktion.

Lemma 13.4

i) Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.

ii) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t, h \in \mathbb{C}$. Dann gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, $e^{(t+h)A} = e^{tA}e^{hA}$, $e^{A+hI} = e^h e^A$.

Beweis:

i) Betrachte das Cauchyprodukt und gehe wie in der Analysis 1 vor.

ii)
$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$$
Genauso $e^{-A}e^A = I$. Die zwei anderen Gleichungen folgen aus i).

□

Satz 13.5

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ differenzierbar.

i) Die Matrixexponentialfunktion $T: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $T(t) = e^{tA}$, ist differenzierbar und es gibt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} = Ae^{tA}$.

ii) Es gilt
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA}x(t)) = e^{tA}\dot{x}(t) + Ae^{tA}x(t).$$

Beweis:

i) Fixiere $t \in \mathbb{R}$, sei $h \in \mathbb{R}$. Dann
$$\begin{aligned}
\frac{T(t+h)-T(t)}{h} &= \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \\
&= \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} \\
&= e^{tA}\frac{e^{hA-I}}{h} \\
&= e^{tA}\left(A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2A^3}{3!} + \dots\right) \\
&= e^{tA}A + \alpha(h)
\end{aligned}$$

und

$$\|\alpha(h)\| = \underbrace{\left\|e^{tA}\right\|}_{\le e^{\|tA\|}} |h| \underbrace{\left\|\frac{A^2}{2} + \frac{hA^3}{3!} + \dots\right\|}_{\le \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{|h|\|A\|^3}{3!} + \dots} \le |h| e^{\|tA\|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = |h| e^{\|tA\|} e^{\|A\|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Wegen

$$e^{tA}A = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right) A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k A}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} A \frac{(tA)^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = A e^{tA}.$$

ii) wie vorhin.

□

Wir haben also unsere anfänglichen Probleme unseren Wünschen gemäß beantwortet und bekommen

Satz 13.6
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = \eta \end{cases}$$

genau eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ existiert und durch $x(t) = e^{(t-t_0)A}\eta$ gegeben ist.

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit haben wir schon erledigt, wir müssen nur zeigen, dass x wie oben das AWP löst:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{(t-t_0)A}\eta = A e^{(t-t_0)A}\eta = Ax(t).$$

$$x(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}\eta = I\eta = \eta$$

□

Korollar 13.7

i) e^{tA} ist eine Fundamentalmatrix für $\dot{x} = Ax$, vgl Kap. 12, Satz 5.

ii) Das AWP $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(t_0) = \eta$, hat

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}\eta + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\mathrm{d}\tau$$

als Lösung.