Sebastian Kopf

Wintersemester 2016/17

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bergische Universität Wuppertal
2016/17

Inhaltsverzeichnis

1

Motivation, Beispiele, Grundaufgaben

Gesucht: Funktionale Beziehungen zwischen zwei Größen (z.B. Temperatur einer FlÃ¼ssigkeit in Abbhängigkeit von der Zeit). →Betrachte Ableitungen und finde Beziehungen zwischen Funktion, Ableitungen, weiteren Funktionen, Konstanten.→Differentialgleichung (DGL).

Beispiel 1.1 *Bier*
Auf dem Weg zu einem Grillfest halten sie unterwegs an einer Tankstelle und kaufen ein Sixpack Bier. Das Bier stand bereits den ganzen Tag im $7°C$ kalten Kühlregal. Ihr Auto hat eine Klimaanlage, aber $7°$ sind ihnen zu kalt. Andererseits wissen sie, dass ihre Freunde auf dem Grillfest sehr enttäuscht wären, wenn das Bier bei ihrer Ankunft wärmer als $10°C$ ist. Welche Temperatur stellen sie an der Klimaanlage ein?
Sei $T(t)$ die Temperatur zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Sie fahren bei $t = 0$ los und kommen bei $t = 90$ an. Wir wissen $T(0) = T_0 = 7$. Sei $T_A \geq 7$ die Temperatur der Klimaanlage. Wir nehmen an, dass $T = T(t)$ differenzierbar ist. Aus Erfahrung wissen wir, dass das Bier um so schneller warm wird, je höher die Außentemperatur ist. Sind Bier- und Außentemperatur gleich, dann ändert sich die Biertemperatur gar nicht. Außerdem muss $T'(t) \geq 0$ sein, da die Biertemperatur ansteigt. Wir nehmen die einfachste Funktion mit diesen drei Eigenschaften:

$$(*) \begin{cases} T'(t) = k(T_A - T(t)), t \geq 0 \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

wobei $k \geq 0$ eine (von der Biersorte abhängige) Konstante ist.
Angenommen, wir haben für jeweils k, T_0, T_A eine Funktion $T = T(t)$ mit der Eigenschaft $(*)$, dann können wir das Problem lösen:

1) Wir fahren z.B. 10 Minuten bei Temperatur $25°$ und messen dann die Biertemperatur. Mit der Lösung von $(*)$ können wir dann den numerischen Wert von k bestimmen.

2) Nun nehmen wir die Lösung von $(*)$ mit dem k aus 1) und der in 1) gemessenen Temperatur. Damit können wir dann dasjenige T_A bestimmen, welches $T(80) = 10$ liefert.
Wir brauchen also die Lösung von $(*)$. Wenn $T_A = 0$ ist, dann kann man eine Lösung von $T'(t) = -kT(t)$ leicht raten, nämlich $T_1(t) = e^{-kt}$ und natürlich sind $T_c = ce^{-kt}$ für $c \in \mathbb{R}$ auch Lösungen. Wir haben also Lösungen für $T'(t) + kT(t) = 0$, wollen welche für $T'(t) + kT(t) = kT_A$.

Da $T_c'(t) = (T_c(t)+B)'$ für jede Konstante $B \in \mathbb{R}$ gilt, versuchen wir es mit $T_{c,B}(t) = T_c(t)+B$. Dann

$$T'_{c,B}(t) + kT_{c,B}(t) = -kT_c(t) + k(T_c(t) + B) = -kT_c(t) + kT_c(t) + kB = kB$$

und wenn wir $B = T_A$ wählen, erhalten wir Lösungen

$$T_{c,T_A}(t) = ce^{-kt} + T_A$$

der Gleichung in $(*)$. Schließlich wollen wir noch $T(0) = T_0$, also

$$T_{c,T_A}(0) = ce^0 + T_A = T_0$$

d.h. wir müssen $c = T_0 - T_A$ wählen und bekommen die Lösung

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A$$

von $(*)$.

Jetzt zurück zum Bier: Sagen wir nach 10min bei 25° hat sich das Bier auf 8° erwärmt. D.h.

$$8 = T(10) = (7-25)e^{-k\cdot 10} + 25 \Rightarrow 18e^{-k\cdot 10} = 10 \Rightarrow e^{-k\cdot 10} = \frac{17}{18} \Rightarrow -k\cdot 10 = \log\frac{17}{18} \Rightarrow k \approx 0.0025$$

Nun verbleiben 80min Fahrt und wir starten mit $T_0 = 8$. Wir wollen $T(80) = 10$, d.h.

$$T(80) = (8 - T_A)e^{-k\cdot 80} + T_A = 10$$

$$8e^{-k\cdot 80} - T_A e^{-k\cdot 80} + T_A = 10 \Rightarrow T_A(1 - e^{-k\cdot 80}) = 10 - 8e^{-k\cdot 80} \Rightarrow T_A \approx 19.10$$

D.h. Einstellen der Klimaanlage auf $19°C$ garantiert bei Ankunft eine Biertemperaatur von $\leq 10°$ und lässt uns gleichzeitig so wenig wie möglich frieren. //

Beispiel 1.2 *Harmonischer Oszillator*
Wir betrachten eine Feder, daran befestigt ein Gewicht der Masse m, g ist die Erdbeschleunigung. D.h. es wirkt eine Kraft $F_g = mg$. Gleichzeitig wirkt eine Federkraft $F_f = -kx$, die proportonial zur Auslenkung und der Auslenkungsrichtung entgegengesetzt ist. Hier ist bei $x = 0$ die Ruhelage und k ist die Federkonstante.
Wir wollen $x = x(t)$, d.h. die Position des Schwingers in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ bestimmen, wenn wir den Schwinger zur Zeit $t = 0$ auslenken, $x(0) = X_0$, und mit einer Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_0$ in Gang setzen. $\dot{x} = \dot{x}(t) \equiv x'(t)$ ist die Geschwindigkeit des Schwingers und $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ die Beschleunigung.
Die am Schwinger ziehenden Kräfte verursachen eine Beschleunigungsänderung, d.h. die zu lösende Gleichung ist

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = mg - kx(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$$

//

Beispiel 1.3 *Exponentielles Wachstum*
Wir betrachten eine Population und $N(t)$ bezeichne die Anzahl der Nitglieder derselben zur Zeit $t \geq 0$. Wir wollen $N = N(t)$. Wenn wir zu einem Zeitpunkt t und zu einem Zeitpunkt $t+1 > t$ ein wenig später die Anzahl der Mitglieder vergleichen, erhalten wir die Änderung

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$$

Es ist sinnvoll anzunehmen, dass ΔN proportional zur anfänglichen Anzahl $N(t)$ und auch proportional zum (kleinen!) Zeitintervall Δt ist. D.h. $\Delta N \approx \alpha N(t)\Delta t$ für eine Konstante $\alpha > 0$. Die Annahme bedeutet grob gesagt, dass sich der Zuwachs verdoppelt, wenn man die anfängliche Mitgliederzahl verdoppelt oder die Zeitspanne verdoppelt. Dies ist bei kleinen Zeitspannen eine realistische Annahme, bei großen nicht, da die hinzukommenden Individuen ja auch zum Wachstum beitragen. Wir erhalten $\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \alpha$ bzw. für $\Delta t \to 0$:

$$\begin{cases} N'(t) = \alpha N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

//

Beispiel 1.4 *Kettenlinie*
Betrachte eine zwischen zwei Pfosten hängende Kette. Wir wollen wissen, welche Funktion die Form der Kette beschreibt. Zunächst wählen wir ein Koordinatensystem derart dass $y-$Achse durch den tiefsten Punkt C verläuft.
$P = P(x, y)$ sei ein beliebiger Punkt, $s(x)$ sei die Länge des Bogens CP und γ das konstante Gewicht der Kette pro Längeneinheit. In P wirkt eine tangentiale Kraft F, die wir in eine vertikale und eine horizontale Komponente zerlegen. Sei H die Kraft, die in C horizontal wirkt. Das Kettenstück CP ist im Gleichgewicht, wenn $F\cos\alpha = H$ und $F\sin\alpha = \gamma \cdot s$. Durch Division erhält man nun

$$\tan\alpha = \frac{\gamma s}{H}.$$

Mit $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\Delta x \to 0$ dann

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = \frac{\gamma s(x)}{H}.$$

Nochmaliges differenzieren liefert

$$y''(x) = \frac{\gamma}{H} s'(x).$$

Aus der Analysis 2 haben wie die Bogenlängenformel

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)'}\,\mathrm{d}t$$

und damit

$$\begin{cases} \frac{H}{\gamma} y'' = \sqrt{1+y'^2} \\ y(x_a) = y_a \\ y(x_b) = y_b \end{cases}$$

Wir bemerken, dass hier im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen Randwerte statt Anfangswerten zusätzlich zur Differentialgleichung gegeben sind. //

Nach diesen einführenden Beispielen formalisieren wir unsere Notation und formulieren die Aufgaben die wir uns stellen wollen.

Definition 1.5
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, $F : D \to \mathbb{R}$. Die Gleichung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

heißt Differentialgleichung n−ter Ordnung.
Sei I ein Intervall, $y : I \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion der Klasse

$$C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \;\; n-\text{mal stetig differenzierbar}\},$$

$y = y(x)$ heißt Lösung der Differentialgleichung, falls gilt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

für alle $x \in I$.

Beispiel 1.6
Betrachte das erste Beispiel (Bier), d.h. $T' = k(T_A - T)$. Schreibe dies als

$$T' - kT_A + kT = 0.$$

Setze $n = 1$, definiere $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^3$ per $[0, \infty[\times \mathbb{R}^2$ und

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - kT_A + kx_2.$$

Damit ist $T(t, T, T') = 0$ gerade die Differentialgleichung.
D hätten wir auch anders wählen können, aber wir wollten $(*)$ ja für $t \geq 0$ lösen.
Im Beispiel hatten wir uns bereits überlegt, dass

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A$$

für $t \geq 0$ die Gleichung löst, also ist $T = T(t)$ mit

$$T : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A$$

eine Lösung der Differentialgleichung im Sinne von Definition 1.5. //

Bemerkung 1.7

i) Wenn wir eine DGL notieren benutzen wir häufig die gleichen Buchstaben die wir auch für die Lösung und deren Ableitung benutzen. Das ist nicht ganz korrekt, aber sehr praktisch und ok, solange wir das im Kopf behalten.

ii) Oft treten explizite DGLn
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$
auf. Das ist der Spezialfall
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = f(x, y.y' \ldots., y^{(n-1)}) - y^{(n)}.$$

Definition 1.8
Wir betrachten die DGL 1. Ordnung
$$y' = F(x, y).$$
$y : I \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung auf I, d.h. $y'(x) = f(x, y(x))$ gilt für alle $x \in I$.
$y'(x_1) = f(x_1, y_1)$ ist gerade der Anstieg der Lösung $y = y(x)$ in x_1, und $\tan\tau = f(x_1, y_1)$.

i) Sei $(x_1, y_1) \subseteq D(f)$ (Definitionsbereich von f). Dann heißt das Tripel $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ Linienelement der DGL $y' = f(x, y)$.

ii) Die Menge aller Linienelemente heißt Richtungsfeld der DGL.

iii) Wir zeichnen das Richtungsfeld, indem an Punkte $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ eine Linie mit Steigung $f(x_1, y_1)$ anheften. Es kann sinnvoll sein, die Punkte (x_1, y_1) auf Isoklinen $\{(x_1, y_1) \mid f(x_1, y_1) = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, zu wählen. Hier sind dann die zu zeichnenden Linien parallel.

Beispiel 1.9
$y' = -\frac{x}{y}$, d.h. $f(x, y) = -\frac{x}{y}$, $D(f) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

1. Fall: $\alpha = 0$*:* $0 = -\frac{x}{y} \Rightarrow x = 0, y \neq 0$ und $\tan\tau = 0 \Rightarrow \tau = 0$.

2. Fall: $\alpha \neq 0$*:* $\alpha = -\frac{x}{y} \Rightarrow y = -\frac{1}{\alpha}x$ und $\tan\tau = \alpha \Rightarrow (\tan\tau) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = -1$.
//

Bemerkung 1.10
Definition 1.8 suggeriert, dass $y = y(x)$ eine Lösung der DGL ist, wenn $y = y(x)$ 'in das Richtungsfeld passt'. Im Beispiel würde man also vermuten, dass die Lösung Kreissube $y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$ sind.

Bemerkung 1.11 *Grundaufgaben für das Anfangswertproblem*

$$(AWP)\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

wobei $f : G \to \mathbb{R}^2$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet (d.h. offen, nichtleer, zusammenhängend), $(x_0, y_0) \in G$.

Aufgabe 1: Bestimmung von Lösung: Das ist nur in wenigen Fällen möglich!

Aufgabe 2: Existenz- und Einzigkeitsprobleme: Abstrakter Beweis, dass unter gewissen Voraussetzungen (an f, G, x_0, y_0) Lösungen existieren bzw. genau (oder höchstens) eine Lösung existiert.
Hierbei können Lösungen lokal existieren, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, eine Funktion $y :]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$ für $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ und $y(x_0) = y_0$. Sie kann aber auch global existieren, im Fall von G wie oben 'bis zum Rand von G gehen' oder falls $G = \mathbb{R}^2$ ist, auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

Aufgabe 3: Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten, betrachte

$$(AWP)^*\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_\varepsilon \end{cases}$$

mit $\varepsilon > 0$ klein. Dann stellt sich die Frage, ob die Lösung $y = y(x)$ und $y^* = y^*(x)$ 'nah beieinander bleiben' oder nicht.

Beispiel 1.12

i) 1.1 bis 1.4 sind Beispiele in denen man explizite Lösungen finden kann. Macht man die rechte Seite geeignet kompliziert, wird klar, dass 1.1 bis 1.4 nicht der Normalfall sein werden.

ii) Das AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

hat zwei Lösungen, $x(t) = 0$ und $x(t) = \frac{t^2}{4}$. AWPs sind also i.A. nicht eindeutig lösbar.

iii) Die DGL $y'^2 + 1 = 0$ hat gar keine Lösung. D.h. AWPs müssen überhaupt nicht lösbar sein (für keine Anfangsbedingung!).

iv) Das AWP aus 1.9,

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

hat eine lokale Lösung für $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, nämlich $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, sagen wir für $x \in \,]-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}[$. Obwohl wir für z.B. $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ nehmen können, gibt es keine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$. Die Lösung oben können wir fortsetzen zu $y\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, aber mehr geht nicht.

v) Das AWP aus 1.3,

$$(AWP)\begin{cases} N'(t) = \alpha N(t), \alpha > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases},$$

ist eindeutig lösbar: $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$ ist eine Lösung auf $\mathbb{R}$.
Sei $\tilde{N} = \tilde{N}(t)$ eine beliebige Lösung. Dann

$$(\tilde{N}(t)e^{-\alpha t})' = \tilde{N}'(t)e^{-\alpha t} - \alpha\tilde{N}(t)e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}(\tilde{N}'(t) - \alpha\tilde{N}(t)) = 0$$

$\tilde{N}(t)e^{-\alpha t}$ ist konstant, d.h. es existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{N}(t) = c \cdot e^{\alpha t}$, insbesondere $\tilde{N}(0) = c$. Da $\tilde{N}(0) = N_0$, ist $c = N_0$ und somit ist

$$\tilde{N}(t) = N_0 e^{\alpha t} = N(t).$$

Die Lösungen existieren alle global. Wenn wir N_0 variieren, werden sich für große t die Lösungen beliebig weit voneinander entfernen.

$$(AWP^*)\begin{cases} N'(t) = \alpha N(t) \\ N(0) = N_0 + \varepsilon \end{cases}$$

$N^*(t) = (N_0 + \varepsilon)e^{\alpha t}$ löst (AWP^*) eindeutig.

$$|N(t) - N^*(t)| = |N_0 e^{\alpha t} - (N_0 + \varepsilon)e^{\alpha t}| = \varepsilon e^{\alpha t}$$

Für $\alpha < 0$ würde die Differenz der Lösungen für $t \to \infty$ gegen Null gehen, sie wären 'unempfindlich' gegen Änderungen der Anfangsbedingung.

//

2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

In der Situation von 1.8 (DGL 1. Ordnung) betrachten wir den Spezialfall

$$y' = f(x,y) = g(x)h(y)$$

mit $g\colon I_1 \to \mathbb{R}$, $h\colon I_2 \to \mathbb{R}$ stetig, I_1, I_2 beschränkte oder unbeschränkte Intervalle, $h(y) \neq 0$ für alle $y \in I_2$. Wir wollen eine Lösung $y = y(x)$ finden. Nehmen wir mal an, wir hätten eine, d.h. $y\colon D(y) \to W(y)$ mit $D(y) \subseteq I_1$, $W(y) \subseteq I_2$ löst die DGL. Für $x \in D(y)$:

$$\frac{1}{h(y(x))} y'(x) = g(x).$$

Bilden der Stammfunktionen liefert:

$$\int \frac{1}{h(x)} \mathrm{d}y \bigg|_{y=y(x)} = \int g(x)\mathrm{d}x$$

D.h. jede Lösung der DGL löst die Integralgleichung

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(x)} = \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Es gilt auch die Umkehrung. Also angenommen, y löst die Integralgleichung, dann erhalten wir per Differenzieren nach x:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int \frac{1}{h(x)}\mathrm{d}y\bigg|_{y=y(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right) = g(x) \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y\right)\bigg|_{y=y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h(y(x))} y'(x)
\end{aligned}$$

Um die DGL zu lösen, können wir eine Lösung der INtegralgleichung suchen. Der Vorteil ist hier, dass wir (wenn wir Glück haben) Stammfunktionen von $\frac{1}{h}$ und g explizit finden und (mit noch mehr Glück) die erhaltene Gleichung nach y auflösen.

Beispiel 2.1
$y' = \frac{y}{1+4x^2}$, z.B. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+4x^2}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(y) = y$. D.h. die Integralgleichung ist

$$\int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+4x^2} \mathrm{d}x,$$

d.h.

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \arctan 2x + c$$

und das können wir nach y auflösen:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\arctan 2x} \underbrace{e^c}_{c_1}$$

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}\arctan 2x} \text{ oder } y = -c_1 e^{\frac{1}{2}\arctan 2x}$$

Also:

$$y = c_2 e^{\frac{1}{2}\arctan 2x} \text{ mit } c_2 \in \mathbb{R}$$

ist globale Lösung.
Wenn wir das AWP

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{1+4x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

lösen wollen, dann wir wie oben vorgehen und am Ende c_2 anpassen:

$$2 = y(0) = c_2 e^{\frac{1}{2}\arctan 2\cdot 0} = c_2.$$

D.h. $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}\arctan 2x}$ löst das AWP. Alternativ können wir auch anstelle von Stammfunktionen direkt bestimmte Integrale nehmen. Anstelle von

$$\int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+4x^2} \mathrm{d}x$$

betrachten wir

$$\int_2^x \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \int_2^x \frac{1}{1+4x^2} \mathrm{d}x$$

d.h.

$$\begin{aligned} &\ln|y| - \ln 2 = \frac{1}{2}\arctan 2x - \frac{1}{2}\arctan 2\cdot 0 \\ \Rightarrow &\ln|y| = \frac{1}{2}\arctan 2x + \ln 2 \\ \Rightarrow &|y| = e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\arctan 2x} e^{\ln 2} = 2e^{\frac{1}{2}\arctan 2x} \\ \Rightarrow &y = 2e^{\frac{1}{2}\arctan 2x} \text{ löst das AWP.} \end{aligned}$$

//

Bemerkung 2.2
Eine DGL der Form

$$y' = f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

heißt Ähnlichkeitsdifferentialgleichung. Die Substitution $u = \frac{y}{x}$ liefert

$$y = xu(x) \Rightarrow y' = u(x) + xu'(x) \Rightarrow u' = \frac{y'-u}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi(u)-u}{x}$$

also eine DGL mit getrennten Variablen, die wir mit der obigen Methode bearbeiten können. Haben wir eine Lösung $u = u(x)$, so bekommen wir per $y(x) = xu(x)$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel 2.3
$x^2y' = 3y^2 + yx$ können wir schreiben als

$$y' = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ mit } \varphi(u) = 3u^2 + u.$$

D.h.

$$u' = \frac{\varphi(u)-u}{x} = \frac{3u^2+u-u}{x}$$

ist zuz lösen. in sehr praktischer 'Physiker-Notation':

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{3u^2}{x} \Rightarrow \frac{1}{3u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{3u^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3}u^{-1} = \ln|x| + c \Rightarrow -u^{-1} = 3\ln|x| + c \Rightarrow u = \frac{-1}{3\ln|x|+c} \Rightarrow y = \frac{-x}{3\ln|x|+c}$$

Wir beachten (vgl. Grundaufgaben), dass das INtervall auf dem y definiert ist, von c abhängt.
//

Bemerkung 2.4
Wir haben noch nicht die Frage beantwortet, ob DGLn mit getrennten Variablen immer (eindeutig) lösbar sind. Dies verschieben wir auf das nächste Kapitel.

3 Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten eine DGL der Form

$$(*) \qquad g(x,y) + h(x,y)y' = 0$$

mit $g,h\colon R \to \mathbb{R}$ stetig und $R = J_1 \times J_2$, $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle.

Definition 3.1
Die DGL $(*)$ heißt exakt, falls eine Funktion $F\colon R \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = h(x,y)$$

für $x, y \in R$.

Bemerkung 3.2
Fassen wir $(g,h)\colon R \to \mathbb{R}^2$ als Vektorfeld auf, so heißt obiges, dass F eine Stammfunktion des Feldes ist.

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (g,h)$$

Aus der Analysis 2 wissen wir, dass dies für $g,h \in C^1(R)$ genau dann der Fall ist, wenn die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ für $(x,y) \in R$ erfüllt ist.

Beispiel 3.3

$$\underbrace{xy^2 - 1}_{g} + \underbrace{x^2y - 1}_{h} y' = 0$$

Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial h}{\partial x} \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

D.h. die obige DGL ist exakt auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. //

Sei die DGL $(*)$ exakt, F eine Stammfunktion und $y=y(x)$ eine Lösung auf $I\subseteq J_1$. Betrachte $z\colon I\to\mathbb{R}$, $z(x)=F(x,y(x))$. Dann

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}y'=g(x,y)+h(x,y)y'=0.$$

D.h. z ist konstant.
Ist umgekehrt $y\colon I\to J_2$ eine differenzierbare Funktion, sodass $z(x)=F(x,y(x))$ konstant ist, dann ist $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$ und nach obiger Rechnung ist $y=y(x)$ eine Lösung. D.h. die Lösungen sind genau die Funktionen $y=y(x)$ für die $F(x,y(x))$ auf einem Intervall konstant ist.
Also finden wir alle Lösungen, indem wir die Gleichung

$$F(x,y)=c\in\operatorname{ran}(F)$$

differenzierbar nach y auflösen, d.h. $y\colon I\to\mathbb{R}$ differenzierbar finden mit $F(x,y(x))=c$ für alle $x\in I$ und $I\subseteq J_1$. Die Lösungen werden von c abhängen, wir sprechen dann von der allgemeinen Lösung.
Um obige Gleichung nun aufzulösen, verwenden wir den Satz über implizite Funktionen: Die Funktion $G\colon R\to\mathbb{R}$ sei in einer Umgebung von $(x_0,y_0)\in R$ stetig differenzierbar. Es gelte $G(x_0,y_0)=0$ und $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Dann existiert $\delta>0$ und genau eine Funktion $y\colon\,]x_0-\delta,x_0+\delta[\to J_2$ derart, dass $G(x,y(x))=0$ für $x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[$ und $y(x_0)=y_0$. Insbesondere ist y differenzierbar.
Wähle $x_0,y_0\in R$ mit $F(x_0,y_0)=c$ (oder wenn das AWP mit Anfangsbedingung $y(x_0)=y_0$ betrachtet wird, definiere $c:=F(x_0,y_0)$) und setze $G(x,y)=F(x,y)-c$. Dann ist G stetig differenzierbar, $G(x_0,y_0)=0$ und

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=h(x_0,y_0).$$

Wenn wir also zusätzlich $h(x_0,y_0)\neq 0$ fordern, so erhalten wir, dass das AWP lokal eindeutig lösbar ist. Wir haben also folgendes bewiesen:

Satz 3.4
Das AWP

$$\begin{cases} g(x,y)+h(x,y)y'=0\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

mit exakter DGL und $h(x_0,y_0)\neq 0$ ist lokal eindeutig lösbar.

Um Lösungen zu finden, müssen wir nach obigem eine Stammfunktion finden und dann auflösen.
Ersteres machen wir wie folgt: Wegen $\frac{\partial F}{\partial x}=g$ muss

$$F(x,y)=\int g(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)$$

gelten und wegen $\frac{\partial F}{\partial y} = h$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int g(x,y)\mathrm{d}x = h(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int g(x,y)\mathrm{d}x,$$

d.h.

$$\varphi(y) = \int\left(h(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int g(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Beispiel 3.5

$$\underbrace{(xy^2-1)}_{g} + \underbrace{(x^2y-1)}_{h}y' = 0$$

$$\int g(x,y)\mathrm{d}x = \int xy^2 - 1\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2y^2 - x$$

$$\varphi(y) = \int\left(x^2y - 1 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - x\right)\right)\mathrm{d}y = \frac{x^2y^2}{2} - y - \frac{x^2y^2}{2} = -y$$

Es folgt:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x - y.$$

- Die allgemeine Lösung erhält man durch auflösen von

  $$\frac{1}{2}x^2y^2 - x - y = c$$

  nach y.
- Das AWPzur Anfangsbeidngung $y(0) = 0$ hat eine eindeutige Lösung, da $h(0,0) = -1 \neq 0$. $F(0,0) = 0$, d.h. wir müssen $\frac{1}{2}x^2y^2 - x - y = 0$ auflösen. Für $x \neq 0$:

  $$y^2 - \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1}{x^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{x^2}\sqrt{1+2x^3} \Rightarrow y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\sqrt{1+2x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

  ist die Lösung für x geeignet nah bei Null.

//

Bemerkung 3.6
Wenn $g(x,y) + h(x,y)y' = 0$ nicht exakt ist, kann man versuchen, einen integrierenden Faktor, d.h. $M = M(x,y) \neq 0$ mit $Mg(x,y) + Mh(x,y)y' = 0$ exakt, zu finden. Für $M \in C^1$ ist die Exaktheit äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial y}(Mg) = \frac{\partial}{\partial x}(Mh) \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}g + M\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}h + M\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Letzteres ist eine partielle Differentialgleichung (i.A. noh schlimmer), kann aber in Beispielen durch Ansätze, z.B. $M = M(x)$, $M = M(y)$, $M = M(xy)$, $M = M\left(\frac{x}{y}\right)$ gelöst werden.

Beispiel 3.7

$$\underbrace{(xy-1)y}_{g}+\underbrace{x(xy-3)}_{h}y'=0$$

Ansatz $M=M(xy)$ liefert (Schreibe $M_y\equiv\frac{\partial M}{\partial y}$ usw., $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=:M'$, beachte $M=M(z)$):

$$\begin{aligned}(Mg)_y&=M'x(xy^2-y)+M(2xy-1)\\-(Mh)_x&=M'y(x^2y-3x)+M(2xy-3)\\(Mg)_y-(Mh)_x&=M'\cdot 2xy+M\cdot 2\neq 0\end{aligned}$$

Wir müssen also $M'z+M=0$, d.h. $z\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=-M$, lösen, und das können wir:

$$\int\frac{\mathrm{d}M}{M}=-\int\frac{\mathrm{d}z}{z}\Rightarrow\ln|M|=-\ln|z|\Rightarrow|M|=e^{-\ln|z|}\Rightarrow M=e^{-\ln|z|}=(e^{\ln|z|})^{-1}=\frac{1}{|z|}.$$

Man sieht, dass $M(x,y)=\frac{1}{xy}$ obiges erfüllt. D.h.

$$Mg+Mhy'=\left(y-\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{3}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

ist exakt. Obige DGL können wir jetzt wie vorher behandeln und da $M(x,y)\neq 0$ ist, sind die Lösungen von $Mg+Mhy'=0$ dieselben wie die von $g+hy'=0$. //

Es bleibt noch der versprochene Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die getrennten Variablen. Betrachte

$$(AWP)\begin{cases}y'=g(x)h(x)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$$

mit $g\colon J_1\to\mathbb{R}$, $h\colon J_2\to\mathbb{R}$ stetig, $h(y)\neq 0$ auf J_2. Die DGL können wir also als $g(x)-\frac{1}{h(y)}y'=0$ schreiben. Wie vor 3.5 ist

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t-\int_{y_0}^{y}\frac{1}{h(t)}\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion für beliebige $x_0\in J_1$, $y_0\in J_2$. Ferner ist $\frac{1}{h(y_0)}\neq 0$. D.h. als Spezialfall von 3.4 erhalten wir:

Satz 3.8
Unter obigen Annahmen ist (AWP) in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 eindeutig lösbar, und zwar dadurch, dass man

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{h(t)}=\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t$$

nach y auflöst. Alternativ kann man auch

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\mathrm{d}x+c$$

nach y auflösen und c der Anfangsbedingung anpassen.

4
Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten eine DGL 1. Ordnung der Form

$$(*) \qquad y' = a(x)y + b(x)$$

mit $a, b : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Definition 4.1
Die DGL heißt lineare DGL 1. Ordnung. Sie heißt homogen, wenn $b = 0$ ist und inhomogen, webb $b \neq 0$. In diesem Fall heißt b die Inhomogenität oder Störfunktion.

Beispiel 4.2

i) Die Gleichung aus 1.1,

$$T'(t) = k(T_a - T(t)) = \underbrace{-k}_{a(t)} T(t) \underbrace{-kT_A}_{b(t)},$$

ist eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung.

ii) Die DGL des exponentiellen Wachstums aus 1.3,

$$M'(t) = \underbrace{\alpha}_{a(t)} N(t),$$

ist eine homogene lineare DGL 1. Ordnung.

iii) Die obige DGL modelliert den Wachstumsprozess ohne äußere Einflüsse. Will man diese im Modell hinzufügen, kann man z.B. die Wachstumsrate α zeitabhängig machen oder eine den Zuwachs änderende Störfunktion addieren. Dann erhält man wieder eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung.

//

5
Methode der Laplace-Transformation

Beweis: Es gilt für die stetige Funktion g:

$$\forall n \geq 0 : \int_0^1 r^n g(r)\mathrm{d}r = 0$$

Also auch

$$\forall \text{Polynom } p : \int_0^1 p(r)g(r)\mathrm{d}r = 0$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Mit Weierstraß folgt: Es existiert ein Polynom p mit $\max_{x\in[0,1]}|p(x)-g(x)| < \varepsilon$. Dann

$$\int_0^1 g^2(r)\mathrm{d}r = \int_0^1 (g(r)-p(r))g(r)\mathrm{d}r + \int_0^1 p(r)g(r)\mathrm{d}r \leq \int_0^1 |g(r)-p(r)||g(r)|\mathrm{d}r \leq \varepsilon \cdot \max_{x\in[0,1]}|g(r)|.$$

Da ε beliebig:

$$\int_0^1 g^2(r)\mathrm{d}r = 0 \Rightarrow g^2 \equiv 0 \Rightarrow g \equiv 0.$$

Es gilt also:

$$\forall r \in]0,1] : r^{s_0} f(-\ln r) = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

□

Bemerkung 5.1
Man kann nun unter Beschränkung auf stetige Funktionen, explizit Formeln für $\mathscr{L}^{-1}F$ angeben, z.B. $\mathscr{L}^{-1}(F(s/a)) = af(at)$ im Fall von 5.6 iii) wenn $F = \mathscr{L}f$ gilt. Eine Tabelle, auch mit konkreten Funktion, kann jeder selbst erstellen.

Bemerkung 5.2
Wie wir gesehen haben, kann man die Methode der Laplacetransformation anwenden kann um DGL zu lösen. Dies kann man mit der in 5.10 erwähnten Tabelle 'nach Rezept' machen. Allerdings ist es auch hier wie in den Kapiteln vorher so, dass man an Grenzen stößt, weil es nicht möglich ist $\mathscr{L}f$ bzw. $\mathscr{L}^{-1}F$ explizit zu bilden. Ferner hat das Kapitel illustriert, dass eine ordentliche Theorie der Laplacetransformation nicht trivial ist.

6

Metrische Räume und der Banachsche Fixpunktsatz

Definition 6.1
Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d: M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik auf M, falls gilt:

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x, y \in M: d(x,y) = d(y,x)$.

iii) $\forall x, y, z \in M: d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(M,d) heißt metrischer Raum.

Definition 6.2
Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann induziert d eine Topologie auf M und wir können 'topologische Eigenschaften' betrachten:

i) $A \subseteq M$ heißt offen, falls $\forall x \in A \exists r > 0: B_r(x) \subseteq A$, wobei $B_r(x) = \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r ist.

ii) $A \subseteq M$ heißt abgeschlossen, falls $M \setminus A$ offen ist.

iii) Für $A \subseteq M$ ist $\mathring{A} = \{x \in A \mid \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A\}$ das Innere von A und $\bar{A} = \{x \in M \mid \forall r > 0: B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$ der Abschluss von A.

Bemerkung 6.3
Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

i) $U_j \subseteq M$ offen, $j \in J$ =beliebige Indexmenge. Dann ist $\bigcup_{j \in J} U_j$ offen.

ii) $U_1, \ldots, U_n$ offen, dann ist $\bigcap_{j=1}^{n}$ offen.

iii) $A_j \subseteq M$ abgeschlossen, $j \in J$ beliebige Indexmenge. Dann ist $\bigcap_{j\in J} A_j$ abgeschlossen.

iv) $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossen, dann ist $\bigcup_{j=1}^n$ abgeschlossen.

v) $\emptyset, M$ offen und abgeschlossen, $\mathring{A}$ offen, $\bar{A}$ abgeschlossen.

vi) A offen$\Leftrightarrow A = \mathring{A}$ und A abgeschlossen$\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

vii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ und $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

viii) $B_r(x)$ ist offen, die abgeschlossene Kugel um x mit Radius $r > 0$ $\bar{B}_r(x) = \{y \in M \mid d(x,y) \le r\}$ ist abgeschlossen.

ix) $\overline{B_r(x)} \subseteq \bar{B}_r(x)$.

Definition 6.4
Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n \subset M$ ist konvergent mit Grenzwert $x \in M$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \ge n_0 : d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Die Folge ist eine Cauchyfolge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \ge n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Bemerkung 6.5

i) Wenn $(x_n)_n$ konvergent ist, dann ist der Grenzwert $x \in M$ eindeutig bestimmt, wir schreiben $x_n \to x$ oder $\lim x_n = x$.

ii) Für $A \subseteq M$ gilt

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A : x_n \to x.$$

iii) $x_n \to x$ in $M \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$ in $\mathbb{R}$.

iv) $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

v) Jede konvergente Folge ist Cauchy. Räume in denen die Umkehrung gibt bekommen einen eigenen Namen:

Definition 6.6
Ein metrischer Raum (M,d) in dem jede Cauchyfolge konvergiert, ist vollständig.

Definition 6.7
Seien (M,d) und (N,d) metrische Räume (wir benutzen denselben Buchstaben für beide Metriken). Eine Abbildung $f: M \to N$ ist stetig in $x \in M$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in M : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

f ist stetig, falls f in jedem $x \in M$ stetig ist.

Lemma 6.8
Sei $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischem Räumen. Sei $x \in M$. Dann ist f stetig in x genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_n \subseteq M$ gilt $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Beweis:

'$\Rightarrow$': Sei $(x_n)_n \subseteq M$ mit $x_n \to x$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. f stetig$\Rightarrow \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x)) < \varepsilon$. Wähle n_0 derart, dass $d(x, x_n) < \delta$ für $n \geq n_0$. D.h. $d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. D.h. $f(x_n) \to f(x)$.

'$\Leftrightarrow$': Angenommen, f ist nicht stetig in x. Dann

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y \in M : d(x,y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Wähle $\varepsilon_0 > 0$ wie oben. Fixiere $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Setze $\delta := \frac{1}{n}$ in die Bedingung. Wähle y entsprechend der Bedingung. Setze $x_n := y$. Dann haben wir für jedes n:

$$d(x, x_n) \leq \frac{1}{n} \wedge d(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon_0.$$

D.h. $x_n \to x$ und $f(x_n) \not\to f(x)$.

$\square$

Lemma 6.9
Seien f, M, N wie in 6.8. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) f ist stetig.

ii) $U \subseteq N$ offen$\Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq M$ offen.

iii) $A \subseteq N$ abgeschlossen$\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq M$ abgeschlossen.

Beweis:

i)⇒ii): Sei $U \subseteq N$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. D.h. $f(x) \in U$ und es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. f stetig$\Rightarrow \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Behauptung: $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$.
Sei $y \in B_\Delta(x)$. Dann $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. Also $y \in f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(U)$ offen.

ii)⇒i): Sei $x \in M$, $\varepsilon > 0$. $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$ offen. Dann ist $V := f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq M$ offen. Da $f(x) \in B_\varepsilon(f(x))$, gilt $x \in V$. D.h. es existiert $\delta > 0$ so dass $B_\delta(x) \subseteq V$. Sei $y \in M$ mit $d(x,y) < \delta$. D.h. $y \in B_\delta(x) \subseteq V$. Also $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$ und somit $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Also ist f stetig.

ii)⇔iii): Für $A \subseteq M$ gilt $M \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(M \setminus A)$.

□

Satz 6.10 **Banachscher Fixpunktsatz**
Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum. Sei $\Phi\colon M \to M$ eine Kontraktion, d.h.

$$\exists \lambda \in]0,1[\forall x, y \in M : d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \lambda d(x,y).$$

Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt, d.h. $x \in M$ mit $\Phi(x) = x$. Für $x_0 \in M$ konvergiert die Folge $(x_n)_n \subseteq M$ definiert durch $x_n := \Phi(x_{n-1})$, $n \geq 1$ gegen den Fixpunkt x.

Beweis:

Eindeutigkeit: Seien x, y Fixpunkte. Dann

$$0 \leq d(x,y) = d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \lambda d(x,y).$$

Wegen $\lambda \in]0,1[$ kann das nur gelten, wenn $x = y$.

Existenz: Wir zeigen, dass die im Satz definierte Folge eine Cauchyfolge ist: Sei $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) = (+)$$

$$\begin{aligned} d(x_{j+1}, x_j) &= d(\Phi(x_j), \Phi(x_{j-1})) \\ &\leq \lambda d(x_j, x_{j-1}) \\ &= \lambda d(\Phi(x_{j-1}), \Phi(x_{j-1})) \\ &\leq \lambda^2 d(x_{j-1}, x_{j-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^j d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$(+) = \sum_{j=n}^{n+k-1} d(x_{j+1} x_j) \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} \lambda^j d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0)\lambda^n \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j \leq d(x_1, x_0\lambda^n) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j = d(x_1, x_0)\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Also ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. Setze $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in M$. Das Φ als Kontraktion stetig ist, folgt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_{n-1}) = \Phi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \Phi(x)$$

und x ist der gesuchte Fixpunkt.

□

Definition 6.11

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist eine Norm auf X, falls:

i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

ii) $\forall x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

iii) $\forall x, y \in X$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum.

Bemerkung 6.12

i) Aus ii) folgt $\|0\| = 0$ und aus iii) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.

ii) Jeder normierte Raum X ist ein metrischer Raum mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$. Konvergenz, Stetigkeit, Offenheit, etc. in X beziehen sich auf diese Metrik.

Lemma 6.13
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann

i) $\overline{B_r(x)} = \bar{B}_r(x)$.

ii) $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$, $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_n \to \lambda$, dann gilt $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda_n x_n \to \lambda x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

iii) $U \subseteq X$ linearer Unterraum, dann ist auch $\bar{U} \subseteq X$ ein linearer Unterraum.

Beweis:

i) Sei $y \in \bar{B}_r(x)$. D.h. $\|x - y\| \le r$. Definiere

$$y_n = x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y - x) \quad \text{für} \quad n \ge 1.$$

Dann $y_n \to y$ und $\|y_n - x\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|y - x\| < r$ für jedes $n \ge 1$. D-h- $(y_n)_n \subseteq B_r(x)$ und daher $y \in \overline{B_r(x)}$.

ii) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 derart, dass für $n \ge n_0$ gilt

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \quad \|y_n - y\| \le \varepsilon, \quad |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon.$$

Dann für $n \ge n_0$

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < 2\varepsilon$$

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \le \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| \le |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + \|x\| \, |\lambda_n - \lambda| \le \varepsilon(c_1 + c_2)$$

Die letzte Aussage folgt aus

$$|\, \|x_n\| - \|x\| \,| \le \|x_n - x\| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

iii)
- $x, y \in \bar{U}$, es existieren $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq U$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$. Mit ii) folgt dann $x_n + y_n \to x + y$, also liegt $x + y \in \bar{U}$.
- $x \in \bar{U}$, es existiert $(x_n)_n \subseteq U$ mit $x_n \to x$. Dann folgt $\lambda x_n \to \lambda x$, also $\lambda x \in \bar{U}$.
- $0 \in U$, also $0 \in \bar{U}$.

$\square$

Definition 6.14
Ein vollständiger normierter Raum ist ein Banachraum.

Definition 6.15
Sei X ein Vektorraum. Seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf X. Die Normen sind äquivalent, $\|\cdot\|_1, \sim \|\cdot\|_2$, falls $c, C > 0$ existieren mit

$$\forall x \in X : c\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1 .$$

Satz 6.16
Sei X ein Vekotrraum und $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen.

i) $id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ und $(X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_2)$ sind stetig.
ii) $x_n \to x$ in $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow x_n \to x$ in $(X, \|\cdot\|_2)$.
iii) $(x_n)_n$ ist $\|\cdot\|_1$ −Cauchy$\Leftrightarrow (x_n)_n$ ist $\|\cdot\|_2$ −Cauchy.

Beweis:

i)
$$d_2(id(x), id(y)) = \|x-y\|_2 \leq C\,\|x-y\|_1 = C \cdot d_1(x,y)$$
für alle $x, y \in X$. D.h. für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = c \cdot \varepsilon$. Für die andere Richtung $\delta = \frac{1}{c}\varepsilon$.

ii) folgt aus i).

iii) Es genügt, eine Richtung zu zeigen. $(x_n)_n$ sei $\|\cdot\|_1$-Cauchy. D.h.
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : \underbrace{\|x_n - x_n\|_1}_{\leq \frac{1}{C}\|x_n - x_m\|_2} < \varepsilon.$$
Es folgt
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\| < C \cdot \varepsilon.$$

□

Beispiel 6.17
$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, ist ein Banachraum.

Beweis:

- $0 \in [a,b]\surd$
- $f, g \in C[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + g \in C[a,b]\surd$

$\Rightarrow C[a,b] \subseteq \mathbb{R}^{[a,b]} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$ ist linearer Unterraum.

- $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b] : |f(x)| = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$
- $$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty$$
  für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$.
- $$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} (|f(x)| + |g(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[<,b]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ ist Norm auf $C[a,b]$.
Sei $(f_n)_n \subseteq C[a,b]$ Cauchy. D.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n,m \ge n_0 : \|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Es folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n,m \ge n_0 \forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

$$\forall x \in [a,b] : (f_n(x))_n \subseteq \mathbb{R} \text{ ist Cauchyfolge.}$$

$$\forall x \in [a,b] : \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \text{ existiert.}$$

Wir haben also $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ punktweise und müssen zeigen, dass letzteres auch gleichmäßig gilt. Dann folgt aus bekannten Sätzen der Analysis 1, dass f stetig ist, also in $C[a,b]$ liegt und dass $f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Aus $(*)$ folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \ge n_0 \forall x \in [a,b] \forall m \ge n_0 : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 wie oben. Sei $n \ge n_0$, $x \in [a,b]$. Dann

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| =: (+)$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Für $m \ge n_0$ ist $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Da x jetzt fest ist, finden wir $m > n_0$ mit $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$. D.h. $(+) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ für dieses m. Damit sind wir fertig. $\square$

//

7

Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir betrachten das folgende

$$(AWP)\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

und wollen in diesem Kapitel Bedingungen an f finden, die garantieren, dass (AWP) genau eine (lokale) Lösung besitzt.

Satz 7.1 **Picard-Lindelöf**
Seien $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Sei $Q = [\xi - a, \xi + a] \times [\eta - b, \eta + b]$. Die Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ sei auf Q stetig und genügt dort einer Lipschitzbedingung bezüglich y, d.h.

$$\exists L \geq 0 \forall (x, y_1), (x, y_2) \in Q : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Dann hat das (AWP) von oben im Intervall $[\xi - h, \xi + h]$ mit $h = \min\{a, \frac{b}{m}\}$, $m = \max_{(x,y)\in Q} |f(x, y)|$, genau eine Lösung.

Bemerkung 7.2

i) Falls $m = 0$, heißt dies, dass $f \equiv 0$, also $y \equiv \eta$ eine Lösung auf $[\xi - a, \xi + a]$. Wir können also oben $\frac{b}{0} = \infty$ lesen.

ii) Die Lipschitzbedingung ist eine Wachstumsbeschränkung an f in $y-$Richtung bei festgehaltenem x, wobei die Lipschitzkonstante L unabhängig von x ist.

iii) Dass (ξ, η) in der Mitte von Q liegt, haben wir auf Bequemlichkeit angenommen. Wir diskutieren später noch lokale und globale Lipschitzbedingungen sowie die Frage ob der Anfangswert auch auf dem Rand des Quaders liegen darf.
Erstmal geben wir uns mit dem Quader zufrieden und bringen hierfür eine hinreichende Bedingung sowie Beispiele.

Lemma 7.3
Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig, $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y$ existiere und sei auf Q beschränkt (also z.B. f_y stetig ist). Dann genügt f auf Q einer Lipschitzbedingung in y.

Beweis: Seien $(x,y_1), (x,y_2) \in Q$, $y_1 < y_2$. Dann ist $f(x,\cdot) :- [y_1,y_2] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]y_1,y_2[$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\tilde{y} \in]y_1,y_2[$ so dass
$|f(x,y_1) - f(y,y_2)| = |f_y(x,\tilde{y})||y_1 - y_2|$. Da f_y auf Q beschränkt ist, existiert ein $L \geq 0$ so dass für alle $(x,y) \in Q$ gilt: $|f_y(x,y)| \leq L$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 7.4

i) Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2$. Dann erfüllt f auf jedem (kompakten(!)) Quader eine Lipschitzbedingung bezüglich y, denn
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2|$$
und
$$|y_1 + y_2| \leq \sup_{\tilde{y}_1,\tilde{y}_2 \in [\xi - a, a+\xi]} |\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2| =: L < \infty$$
erfülllt also sogar eine Lipschitzbedingung auf $[\xi - a, a + \xi] \times \mathbb{R}$, aber nicht auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

ii) Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$. Das
$$(AWP) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
hat die Lösungen $y \equiv 0$ und $y = x^3$ auf $\mathbb{R}$. Nach Satz 7.1 kann f also auf keinem Quader um $(\xi,\eta) = (0,0)$ eine Lipschitzbedingung bezüglich y erfüllen.

//

Beweis von Satz 1: Der Beweis hat 4 Schritte:

i) Umformulierung des AWPs in eine äquivalente Integralgleichung: Wir zeigen, dass für $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $\xi \in I$, die folgenden zwei Bedingungen äquivalent sind:

   a) $y = y(x)$ löst das AWP $y' = f(x,y)$, $y(\xi) = \eta$ auf I.

   b) $y \in C(I)$ und
   $$y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t,y(t)) \mathrm{d}t \forall x \in I.$$

a)⇒b): $y = y(x)$ Lösung⇒ $y'(t) = f(t, y(t))$ für $t \in I$, letztere Funktion ist stetig, $y(\xi) = \eta$. Es folgt:

$$y(x) - \eta = \int_\xi^x f(t, y(t))\mathrm{d}t \forall x \in I.$$

$y \in C(I)$ ist klar, da y ja sogar differenzierbar ist.

b)⇒a): Sei $y \in C(I)$ und es gelte die Integralgleichung von oben. $f(r, y(r))$ ist stetig auf I, und mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung folgt, dass

$$x \mapsto \int_\xi^x f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

differenzierbar und eine Stammfunktion von $f(x, y(x))$ ist. Also $y'(x) = f(x, y(x))$ für $x \in I$ und $y(\xi) = \eta + 0 = \eta$.

Wir können also statt das AWP zu lösen, zeigen, dass genau eine Funktion $y \in C[\xi - h, \xi + h]$ existiert mit

$$(IGL) \quad y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

für $y \in [\xi - h, \xi + h]$.

ii) Umformulierung der IGL in ein Fixpunktproblem: Setze $I := [\xi - h, \xi + h]$, $M = \{\varphi \in C[I] \mid \max_{t \in I} |\varphi(t) - \eta| \leq b\}$ und

$$T \colon M \to M, \varphi \mapsto T(\varphi) \colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto T(\varphi)(x) := \eta + \int_\xi^x f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t$$

Es gilt

$$T(\varphi) = \varphi \Leftrightarrow \forall x \in I : \varphi(x) = T(\varphi)(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t.$$

Beachte: Wir wollen $T(\varphi)$ wie oben definieren, damit wir (IGL) als Fixpunktproblem schreiben können. Da f aber nicht auf $I \times \mathbb{R}$, sondern nur auf Q definiert ist, können wir nicht $T \colon C(I) \to C(I)$ betrachten, sondern müssen T auf $M \subseteq C(I)$ definieren. So bekommen wir auf jeden Fall $T \colon M \to C(I)$, dass $T\varphi \in M$ gilt für jedes $\varphi \in M$ müssen wir noch prüfen: Für $x \in I$:

$$|T(\varphi)(x) - \eta| = \left| \int_\xi^x f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t \right| \leq \int_\xi^x |f(t, \varphi(t))Y \mathrm{d}t \leq \int_\xi^x \max_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in Q} |f(\tilde{x}, \tilde{y})|\mathrm{d}t = \max_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in Q} |f(\tilde{x}, \tilde{y})||x - \xi| \leq m \cdot h \leq b$$

Also:

$$\max_{x \in I} |T(\varphi)(x) - \eta| \leq b \Rightarrow T(\varphi) \in M$$

iii) Wahl einer Metrik auf M, die $T \colon M \to M$ zu einer Kontraktion und M vollständig macht. Eine naheliegende Metrik auf M wäre die folgende: Wir statten $C(I)$ mit der Supremumsnorm aus. Damit ist $C(I)$ ein Banachraum. $M \subseteq (C(I), \|\cdot\|_\infty)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge und daher ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der induzierten Metrik.

In dieser Metrik würde T aber i.A. keine Kontraktion sein. Daher verwenden wir auf $C(I)$ eine sogenannte Morgensternnorm:

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \max_{t\in I} e^{-\alpha|t-\xi|}|\varphi(t)|$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Das α können wir später so wählen, dass wir eine Kontraktion bekommen. Zunächst aber die anderen Punkte:

- Aufg. 16$\Rightarrow \|\cdot\|_{\infty,\alpha} \sim \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (C(I), \|\cdot\|_{\infty,\alpha})$ vollständig.
- $M \subseteq (C(I), \|\cdot\|_\infty)$ ist abgeschlossen, denn

$$M = \{\varphi \in C(I) \mid \max_{t\in I}|\varphi(t) - \eta| \le b\} = \{\varphi \in C(I) \mid \left\|\varphi - \psi\right\|_\infty \le b\} = \bar{B}_b(\psi)$$

- Kapitel 5.16$\Rightarrow M \subseteq (C(I), \|\cdot\|_{\infty,\alpha})$ abgeschlossen. Setze $d_{\infty,\alpha}(\varphi,\psi) = \left\|\varphi - \psi\right\|_{\infty,\alpha}$ für $\varphi,\psi \in C(I)$ bzw. in M.
  Dann ist (M,d) vollständig: Eine $d_{\infty,\alpha}-$Cauchyfolge in M ist $D_{\infty,\alpha}-$ bzw. $\|\cdot\|_{\infty,\alpha}-$Cauchyfolge in $C(I)$, dort konvergent und wegen der Abgeschlossenheit liegt der Grenzwert in M.
- Nun behaupten wir, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $T\colon (M,d_{\infty,\alpha}) \to (M,d_{\infty,\alpha})$ kontraktierend ist .Also für $\varphi,\psi \in M$:

$$\begin{aligned}
d_{\infty,\alpha}(T(\varphi),T(\psi)) &= \max_{x\in I} e^{-\alpha|x-\xi|}|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| \\
&= \max_{x\in I} e^{-\alpha|x-\xi|}\left|\int_\xi^x f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\mathrm{d}t\right| \\
&\le \max_{x\in I}\left|\int_\xi^x |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))|\mathrm{d}t\right| \\
&\le \max_{x\in I} e^{-\alpha|x-\xi|} L\left|\int_\xi^x |\varphi(t)-\psi(t)|e^{-\alpha|t-\xi|}e^{\alpha|t-\xi|}\mathrm{d}t\right| \\
&\le \max_{x\in I} e^{-\alpha|x-\xi|} L\left|\int_\xi^x e^{\alpha|t-\xi|}\mathrm{d}t\right| d_{\infty,\alpha}(\varphi,\psi) \\
&\le \frac{L}{\alpha}\max_{x\in I} e^{-\alpha|x-\xi|}(e^{\alpha|x-\xi|}-1)d_{\infty,\alpha}(\varphi,\psi) \\
&= \frac{L}{\alpha}\max_{x\in I}(1-e^{-\alpha|x-\xi|})d_{\infty,\alpha}(\varphi,\psi) \\
&\le \frac{L}{\alpha}d_\infty(\varphi,\psi)
\end{aligned}$$

  Mit $\alpha > L$ erhalten wir also, dass T eine Kontraktion ist.

iv) Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Es gibt also genau ein $y \in M$ mit $T(y) = y$.

□

8
Fortsetzung von Lösungen

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $(\xi, \eta) \in D$. Wir betrachten

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}.$$

Wir erkennen bereits Bedingungen an f, die garantieren, dass eine eindeutige Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ des AWP existiert, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\xi \in I$ ist. Wir wollen jetzt herausfinden, unter welchen Bedingungen wir φ (eindeutig) fortsetzen können.

Definition 8.1
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. f genügt einer lokalen Lipschitzbedinung bzgl. der zweiten Variablen, wenn für jeden Punkt $(x0, y_0) \in D$ eine Umgebung U von $(x0, y_0)$ und ein $L > 0$ existiert, so dass

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < L|y_1 - y_2| \forall (x,y_1),(x,y_2) \in U$$

gilt.

Bemerkung 8.2

i) Ist (X, d) metrischer Raum und $x \in X$, so ist $U \subseteq X$ eine Umgebung von x, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $x \in B_r(x) \subseteq U$.

ii) f genügt einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genau dann, wenn für jeden Punkt eine Umgebung existiert, auf der f einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt, d.h. $\forall (x_0, y_0) \in D \exists$Umgebung U von (x_0, y_0): $f|_U$ erfüllt Lipschitzbedinung bzgl. y. Insbesondere dürfen die Konstanten L von der Umgebung (bzw. von (x_0, y_0)) abhängen.

iii) Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genügt, dann können wir eine Umgebung von (ξ, η) finden in der f eine Lipschitbedingung bzgl. y erfüllt. In dieser Umgebung können wir einen Quader einpassen und dann die erste Version des Satzes von Picard-Lindelöf anwenden um eine eindeutige lokale Lösung von $(*)$ zu finden.

Satz 8.3 **Über lokale Losbarkeit**
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und genüge in D einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y. Dann ist das AWP $(*)$ für jedes (ξ, η) lokal eindeutig lösbar, d.h. in einer Umgebung von ξ existiert genau eine Lösung.

Lemma 8.4
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und genüge in D einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y. Sei φ Lösung des AWP $(*)$ auf $]\tilde{a}, \tilde{b}[$ und sei $]a, b[\supset]\tilde{a}, \tilde{b}[$. Dann gibt es höchstens eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ von φ auf $]a, b[$, die das AWP löst.

Lemma 8.5
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

i) Sei $\Phi\colon [\xi, b[\to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$, die in einer kompakten Menge $A \subseteq D$ verläuft. Dann lässt sich Φ auf $[\xi, \eta]$ als Lösung fortsetzen.

ii) Sei $\Phi\colon [\xi, b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung, $\psi\colon [b, c] \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ und $\psi(b) = \Phi(b)$. Dann ist
$$u(x) = \begin{cases} \Phi(x) & x \in [\xi, b] \\ \psi(x) & x \in]b, c] \end{cases}$$
eine Lösung auf $[\xi, c]$.

Beweis:

i) A kompakt$\Rightarrow f|_A$ beschränkt. D.h. $\Phi'(t) = f(t, \Phi(t))$ ist auf $[\xi, b[$ beschränkt. Daraus folgt, dass Φ gleichmäßig stetig auf $[\xi, b[$ ist. Daher existiert $\beta := \lim_{x \nearrow b} \Phi(x)$ und $(b, \beta) \in A$, da A abgeschlossen ist. Setze $\Phi(b) = \beta$, dann ist $\Phi\colon [\xi, b] \to \mathbb{R}$ stetig und daher auch $f(\cdot, \Phi(\cdot))\colon [\xi, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Die Gleichung
$$\Phi(x) = \Phi(\xi) + \int_\xi^x f(t, \Phi(t))\mathrm{d}t$$
gilt für $x \in [\xi, b[$, weil hier Φ das AWP $y' = f(x, y)$, $y(\xi) = \Phi(\xi)$ löst, vgl. Beweis von 8.1. Grenzübergang $x \nearrow b$ in obiger Gleichung zeigt, dass letztere auch für $x = b$ gilt. D.h., dass Φ in b (linksseitig) differenzierbar ist und $\Phi'(b) = f(b, \Phi(b))$ gilt.

ii) Es ist nur zu zeigen, dass u an der Stelle b die DGL erfüllt. u ist in b links- und rechtsseitig differenzierbar, und die Ableitungen sind gleich: $f(b,\Phi(b)) = f(b,\psi(b))$. Damit sind wir fertig.

□

Wir fassen zusammen und erhalten:

Satz 8.6 **Globaler Existent und Eindeutigkeitssatz**
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y. Dann hat das

$$(AWP) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

für jedes $(\xi,\eta) \in D$ eine Lösung Φ, die nicht fortsetzbar ist und die nach rechts und links dem Rand von D beliebig nahe kommt. Sie ist eindeutig bestimmt, d.h. alle Lösungen von (AWP) sind Restriktionen von Φ.

Definition 8.7
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $J \subset \mathbb{R}$, $\Phi\colon J \to \mathbb{R}$ sei derart, dass $(x,\Phi(x)) \in D$ gilt für alle $x \in J$. Wir setzen

$$G = \overline{\operatorname{graph}\Phi} = \overline{\{(x,\Phi(x)) \mid x \in J\}},$$

$$G_+ = \{(x,y) \in G \mid x \geq \xi\}$$

und sagen, dass Φ nach rechts dem Rand von D beliebig nahe kommt, falls G_+ keine kompakte Teilmenge von D ist.

Bemerkung 8.8

i) Etwas weniger technisch und griffiger formuliert, sagt der Satz, dass die Lösung jedes in D liegende Kompaktum verlässt.

ii) in den Übungen diskutieren wir obiges noch genauer und finden äquivalente und anschaulichere Formulierungen.

Beweis von 8.6: Aus 8.3 folgt: $\exists \tilde{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}$, I Intervall, $\tilde{\varphi}$ ist Lösung und jede andere Lösung stimmt auf I mit $\tilde{\varphi}$ überein. Betrachte

$$M = \{\varphi\colon J_\varphi \to \mathbb{R} \mid J_\varphi \supseteq I, \varphi \text{ Lösung}\}.$$

Wegen 8.4 gilt $J_{\varphi_1} \subseteq J_{\varphi_2} \Rightarrow \varphi_2|_{J_{\varphi_1}}$, sonst wären $\varphi_1, \varphi_2|_{J_{\varphi_1}}$ zwei verschiedene Fortsetzungen von $\tilde{\varphi}$.
$J := \bigcup_{\varphi \in M} J_\varphi$, $\Phi\colon J \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \varphi(x)$ für $x \in J_\varphi$. Per Konstruktion kann φ nicht fortgesetzt werden. Es bleibt die Aussage über den Rand.
Es genügt, den rechten Rand anzuschauen: Angenommen, $G_+ \subseteq D$ ist kompakt. Dann muss $J \cap [\xi, \infty[$ beschränkt sein und es gibt zwei Fälle:

1. *Fall: $J \cap [\xi,\infty[= [\xi, b[$ mit $b \in \mathbb{R}$:* 8.5 i)$\Rightarrow$ Φ lässt sich auf $[\xi, b]$ fortsetzen. Widerspruch zur Maximalität von J.
2. *Fall: $J \cap [\xi,\infty[= [\xi, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$:* D.h. $(b, \Phi(b)) \in D$, also $\exists$Lösung ψ in Umgebung von b mit $\psi(b) = \Phi(b)$. Nach 8.5 ii) kann Φ über J hinaus nach rechts fortgesetzt werden.$\lightning$

$\square$

Bemerkung 8.9

i) Für $D = \mathbb{R}^2$ liefert 8.6 die Aussage von 7.9 unter schwächeren Voraussetzungen.

ii) Die Sätze 7.1 und 7 werden insofern verbessert als dass die Lösungen bis auf den Rand fortgesetzt werden können (gemäß 8.6 können wir die Lösung fortsetzen sodass sie dem Rand beliebig nahe kommt: Nehme $D = \mathring{Q}$, und kopiere den Beweis von 8.5 i). Erkenne, dass $A \subseteq \bar{D}$ kompakt auch reicht. Damit setzen wir die Lösung Φ auf $[\xi, b]$ stetig fort und $(b, \Phi(b)) \in \partial D = [a_1, b_1] \times \{a_2, b_2\} \cup \{a_1, b_1\} \times [a_2, b_2]$. Hierfür genügt wieder eine lokale Lipschitzbedingung).

iii) In 8.8 können wir auf den Rand fortsetzen, brauchen dafür aber die Lipschitzbedingung auf $[a,b] \times \mathbb{R}$. Mit 8.6 können wir die Voraussetzungen zu einer lokalen Lipschitzbedingung abschwächen, erhalten dann aber wieder i.A. keine Fortsetzung auf den Rand, selbst wenn wir lokal Lipschitz auch auf dem Rand fordern. Andererseits erhalten wir für alle Streifen $J \times \mathbb{R}$ (also auch $J =]a, b[, [a, b], [a, b[$) die Existenz auf ganz $]a, b[$.

9

Differentialgleichungen höherer Ordnung als System erster Ordnung

10

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition 10.1
Ist L wie in 3., so nennen wir $y_1,\dots,y_n$ ein Fundamentalsystem, falls $y_1,\dots,y_n$ ein linear unabhängiges System von Lösungen von $Ly=0$ ist, d.h. eine Basis des Lösungsraums $\ker L$ ist.

Leider können wir - Im Gegensatz zur ersten Ordnung - keine allgemeine Lösungsformel finden. Aber wir können, wenn wir eine Lösung kennen, die Ordnung des Problems reduzieren.

Beispiel 10.2

$$x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0$$

D.h.

$$\tilde{L} = x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1$$

auf $C^2]0,\infty[$. Wir raten die Lösung $y_1(x) = x$ und machen den Ansatz

$$y_2(x) = y_1\int v\,\mathrm{d}x = x\int v\,\mathrm{d}x$$

wobei wir jetzt v so zu bestimmen haben, dass y_2 die DGL $\tilde{L}y = 0$ löst.
Wir bestimmen

$$y_2'(x) = \int v\,\mathrm{d}x + xv, \quad y_2'' = v + v + xv' = 2v + xv'.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}y_2 &= x^2y_2'' - xy_2' + y_2\\
&= x^2(2v + xv') - x\left(\int v\,\mathrm{d}x + xv\right) + x\int v\,\mathrm{d}x\\
&= 2x^2v + x^2v' - x\int v\,\mathrm{d}x - x^2v + x\int v\,\mathrm{d}x\\
&= x^2v + x^3v'
\end{aligned}$$

$$= 0$$

Es folgt:

$$v' = -\frac{1}{x}v \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \to y_2(x) = x\int v\,\mathrm{d}x = x\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x.$$

Probe:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ y_2''(x) &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \tilde{L}y_2 &= x^2\frac{1}{x} - x(\ln x + 1) + x\ln x = x - x\ln x - x + x\ln x = 0 \end{aligned}$$

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{pmatrix} = x(\ln x + 1) - (x\ln x)1 = x\ln x + x - x\ln x = x \neq 0$$

für $x \in]0, \infty[$, d.h. $\{y_1, y_2\}$ linear unabhängig, also Fundamentalsystem. //

Satz 10.3
Sei L wie in 3., $y_1 = y_1(x)$ sei eine Lösung von $Ly = 0$, die $\neq 0$ auf I ist.

i) Dann ist
$$\frac{1}{y_1(x)}L\left(y_1\int v(x)\mathrm{d}x\right) = 0 \qquad (*)$$
eine lineare homogene DGL $(n-1)$−ter Ordnung in v.

ii) Bilden $v_2 = v_2(x), \ldots, v_n = v_n(x)$ ein Fundamentalsystem für $(*)$, dann bilden
$$y_1(x), y_2(x) = y_1(x)\int v_2(x)\mathrm{d}x, \ldots, y_n(x) = y_1(x)\int v_n(x)\mathrm{d}x$$
ein Fundamentalsystem für $Ly = 0$.

Beweis:

i) Setze $\int v(x)\mathrm{d}x =: u$ und wende die Produktregel
$$(y_1 u)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}y_1^{(k-j)}u^{(k)}$$
an um $L(y_1 u)$ zu berechnen:
$$a_0 y_1 u = a_0 y_1 u$$

$$
\begin{aligned}
&a_1(y_1u)' = a_1y_1u + a_1y_1u' \\
&a_2(y_1u)'' = a_2y''u + 2a_2y_1'u' + a_2y_1u'' \\
&\vdots \\
&a_{n-1}(y_1u)^{(n-1)} = a_{n-1}y_1^{(n-1)}u + (n-1)a_{n-1}y_1^{(n-2)}u' + \ldots + a_{n-1}y_1u^{(n-1)} \\
+&(y_1u)^{(n)} = y_1^{(n)}u + ny_1^{(n-1)}u' + \ldots + y_1u^{(n)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L(y_1u) = (Ly_1)u + \alpha_1u' + \ldots + \alpha_{n-1}u^{(n-1)} + y_1u^{(n)} \\
=&0 + \alpha_1v + \ldots + \alpha_{n-1}v^{(n-2)}y_2v^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

Also:

$$\frac{1}{y_1(x)}L\left(y_1\int v\mathrm{d}x\right) = \frac{\alpha_1}{y_1(x)}v + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{y_1(x)}v^{(n-2)} + v^{(n-1)}$$

und somit ist $(*)$ lineare homogene DGL $(n-1)$−ter Ordnung in v.

ii) Ist v eine Lösung von $(*)$, so ist $y := y_1(x)\int v\mathrm{d}x$ eine Lösung von $Ly = 0$. Seien $v_1, \ldots, v_n$ ein Fundamentalsystem für $(*)$, d.h. linear unabhängig. Es muss gezeigt werden , dass die $y_1, \ldots, y_n$ dann ebenfalls linear unabhängig sind.
Gelte $c_1y_1 + \ldots + c_ny_n = 0$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, also

$$
\begin{aligned}
&c_1y_1 + c_2y_1\int v_2(x)\mathrm{d}x + \ldots + c_ny_1\int v_n(x)\mathrm{d}x = 0 \\
\Rightarrow &c_1 + c_2\int v_2(x)\mathrm{d}x + \ldots + c_n\int v_n(x)\mathrm{d}x = 0 \\
\Rightarrow &c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0 \\
\Rightarrow &c_2 = \ldots = c_n = 0 \Rightarrow c_1y_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.
\end{aligned}
$$

D.h. $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ist Fundamentalsystem.

□

Nehmen wir mal an, wir haben . z.B. durch Raten und Reduktion - ein Fundamentalsystem $y_!, \ldots, y_n$ für $Ly = 0$ gefunden. Jetzt wollen wir analog zur 1. Ordnung per Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung von $Ly = b$ finden.
Ansatz:

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i \Rightarrow y_p'(x) = \sum_{i=0}^{n} c_1'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i'(x)$$

Foderung: $\sum c_i'y_i = 0$. Dann:

$$y_p''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i''(x)$$

Forderung: $\sum c_i'y_i' = 0$, usw. Am Ende:

$$y_p^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_iy_i^{(n)}(x)$$

Sei nun $\sum c_i y_i^{(n-1)} = b$. Damit erhalten wir das folgende LGS:

$$\begin{aligned}
&y_1 c_1' + y_2 c_2' + \ldots + y_n c_n' = 0 \\
&y_1' c_1' + y_2' c_2' + \ldots + y_n' c_n' = 0 \\
&\vdots \\
&y_1^{(n-1)} c_1' + y_2^{(n-1)} c_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} c_n' = b
\end{aligned}$$

9. impliziert $W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ für alle $x \in I$. Nach der Cramerschen Regel gilt nun

$$c_i'(x) = \frac{\det A_i(x)}{\det A(x)}$$

mit $A_1 = A$, aber mit $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ statt $i-$ter Spalte. Obiges liefert für jedes x die eindeutige Lösung und da A_i, A stetig sind, ist $\det A_i$, $\det A$ stetig, d.h. c_i' stetig. Die gesuchten c_i findn wir nun per $c_i = \int c_i' \mathrm{d}x$.

Satz 10.4
Sei L wie in 3.m $b : I \to \mathbb{R}$ stetig. $c_i = c_i(x)$ sei definiert wie oben für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $y_b(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i(x)$ Lösung von $Ly = b$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
Ly_p &= y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_p \\
&= b + \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i^{(n)} + a_{n-1} \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i^{(n-1)} + \ldots + a_0 \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i \\
&= b + \sum_{i=1}^n c_i(x) \left(y_i^{(n)} + a_{n-1} y_i^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_i \right) \\
&= b
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 10.5

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = e^x(x-1), \quad x > 1$$

Homogene DGL hat Lösungen $y_1 = e^x$, $y_2 = x$ und diese sind offenbar linear unabhängig, d.h. $\{y_1, y_2\}$ ist Fundamentalsystem.

$$y_p(x) =_1 (x)e^x + c_2(x)x$$

liefert

$$\begin{aligned} y_1c_1' + y_2c_2' &= 0 \\ y_1'c_1' + y_2'c_2' &= e^x(x-1) \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} &e^xc_1' + xc_2' = 0 \Rightarrow e^xc_1' = -xc_2' \\ &e^xc_1' + c_2' = e^x(x-1) \Rightarrow c_2'(1-x) = e^x(x-1) \Rightarrow c_2' = -e^x \Rightarrow c_1' = x \end{aligned}$$

Nach Integration: $c_1 = \frac{x^2}{2}$, $c_2 = -e^x$.

$$y_p = e^x\left(\frac{x^2}{2} - x\right), \qquad y_{allg}^{inhom} = c_1e^x + c_2x + e^x\left(\frac{x^2}{2} - x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

//

Als letztes in diesem Kapitel betrachten wir homogene lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten, dieser Typ DGL erlaubt die explizite Angabe eines Fundamentalsystems. Also nur auf Intervall I:

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + y_0y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

und wir suchen n linear unabhängige Lösungen.
Ansatz:

$$\begin{aligned} y = e^{\lambda x} &\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}, y''\lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \\ &\Rightarrow Ly = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_0e^{\lambda x} = 0 \\ &\Rightarrow p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

$(*)$ heißt charakteristische Gleichung der DGL $Ly = 0$, es liegt eine algebraische Gleichung $n-$ten Grades vor, d.h. in $\mathbb{C}$ haben wir genau n Lösungen, wenn wir Vielfachheiten mitzählen.

i) $(*)$ hat n paarweise verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann sind $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$ linear unabhängige Lösungen.

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{(n-1)}e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{(n-1)}e^{\lambda_2 x} & \lambda_n^{(n-1)}e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_n \\ \vdots & \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \\
&= e^{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)x} \prod_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k) \neq 0
\end{aligned}
$$

da $\lambda_i \neq \lambda_k$. Also ist $\{y_1, \dots, y_n\}$ Fundamentalsystem.

ii) $(*)$ hat nur reelle Lösungen, nicht notwendig von Vielfachheit 1.
Sei λ_0 eine Lösung mit Viehcfachheut $\nu_0 > 1$. Dann sind $y_1 = e^{\lambda_0 x}, y_2 = xe^{\lambda_0 x}, \dots, a_{\nu_0} = x^{\nu_0 - 1} e^{\lambda_0 x}$ linear unabhängige Lösungen. Schreibe

$$
p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\nu_m}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j, \nu_1 + \dots + \nu_m = n
$$

Partialbruchzerlegung:

$$
\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{q_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}} + \dots + \frac{q_m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_m)^{\nu_m}}, \quad q_k \text{ geeignete Polynome}
$$

$$
1 = q_1(\lambda) p_1(\lambda) + \dots + q_m(\lambda) p_m(\lambda), \quad p_k(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j} \qquad (+)
$$

Bemerkung *Schreibweise*
Sei $q(\mu) = b_k \mu^k + \dots + b_1 \mu + b_0$ ein Polynom. Wir kürzen $u' = DU$, $u'' = D^2 u$ ab und definieren den Differentialoperator

$$
q(D) := b_k D^k + \dots + b_1 D + b_0
$$

oder ausführlicher

$$
q(D)u := b_k u^{(k)} + \dots + b_1 u' + b_0 u
$$

Auf diese Weise gilt $p(D) = L$, und aus $(+)$ bekommen wir

$$
u = \underbrace{q_1(D) p_1(D) u}_{u_1} + \dots + \underbrace{q_m(D) p_m(D) u}_{= u_m} = u_1 + \dots + u_m
$$

für $u \in C^\infty(I)$. Sei nun u eine Lösung, d.h. $p(D)u = 0$. Dann

$$
\begin{aligned}
(D - \lambda_k)^{\nu_k} u_k &= (D - \lambda_k)^{\nu_k} q_k(D) p_k(D) u \\
&= q_k(D) \underbrace{(D - \lambda_k)^{\nu_k} p_k(D)}_{= p(D)} u \\
&= q_k(D) p(D) u = 0
\end{aligned}
$$

Jede Lösung u von $Ly = 0$ hat die Form $u = u_1 + ... + u_m$ mit $(D-\lambda_k)^{\nu_k} u_k = 0$ für $k = 1, ..., m$. Umgekehrt gilt für u_k mit $(D-\lambda_k)^{\nu_k} u_k = 0$:

$$p(D)u_k = p_k(D)(D-\lambda_k)^{\nu_k} u_k = 0$$

Somit ist auch $p(D)(u_1 + ... + u_m) = 0$.
Wir müssen also die Teilgleichungen $(D-\lambda_k)^{\nu_k} u_k = 0$ für $k = 1, ..., m$ lösen. Aufgabe 29:

$$u_k = (c_{k,0} + c_{k,1}x + ... + c_{k,\nu_k-1}x^{\nu_k-1})e^{\lambda_{\nu_k}x}$$

für $k = 1, ..., m$. Dass die Summanden linear unabhängig sind ist leicht zu sehen.

iii) $\lambda_0 = \alpha + \beta i$ ist nicht-reelle Lösung der Vielfachheit $\nu_0 > 1$. Dann ist $\bar{\lambda}_0 = \alpha - \beta i$ ebenfalls Lösung der Vielfachheit $\nu_0 > 1$. Die Argumentation in ii) funktioniert auch komplex; wir erinnern uns, dass für $f: I \to \mathbb{C}$, $f' := \operatorname{Re} f' + i(\operatorname{Im} f)'$ definiert ist. Also erhalten wir linear unabhängige komplexwertige Lösungen $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, ..., x^{\nu_0-1}e^{\lambda_0 x}$ und per

$$e^{\lambda_0 x} = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$xe^{\lambda_i x} = xe^{\alpha x}(\cos\beta + i\sin\beta x), ..., x^{\nu_0-1}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

bekommen wir $2\nu_0$ reelle Lösungen

$$y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad k = 1, ..., \nu_0.$$

Bemerkung 10.6

i) Obige Fälle können zu einem Satz zusammengefasst werden, der zeigt wie für $o \in \mathbb{R}[\lambda]$, $L = p(D)$, stets ein Fundamentalsystem angegeben werden kann.

ii) In konkreten Situationen ist das Lösen der charakteristischen Gleichung nicht-trivial: bei höheren Ordnungen evtl. praktisch unmöglich.

iii) Wir bekommen, wenn wir das wollen, in i) immer Lösungen auf $I = \mathbb{R}$.

iv) Den in i) erwähnten Satz kann man (gehe i) bis iii) nochmal durch) auch für $p \in \mathbb{C}[\lambda]$ bekommen. Beachte, dass wir nur komplexwertige DGLn dann betrachten und keine Ableitungen im Sinne der Funktionentheorie.

Beispiel 10.7

$$y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$$

Charakteristische Gleichung aufstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm isqrt3, \text{ jeweils VFH } 2$$

Lösungen sind also $\lambda_0 = \alpha + i\beta = 0 + i\sqrt{3}$, VFH 2, und $\lambda_1 = \alpha + i\beta = 0 + i\sqrt{3}$, VFH 2.
Fundamentalsystem:

$$FS = \{y_1 = \cos\sqrt{3}x, y_2 = \sin\sqrt{3}x, y_3 = x\cos\sqrt{3}x, y_3 = x\sin\sqrt{3}x\}$$

//

11

Funktionenreihen und das Lösen von linearen Differentialgleichungen

Wir betrachten jetzt wieder die inhomogene lineare DGL $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = b$ mit nicht notwendigerweise konstanten Koeffizienten unter der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = \eta_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}.$$

Unser erstes Ziel ist es zu zeigen, dass unter der Annahme, dass die Koeffizienten und die rechte Seite in einer Umgebung von x_0 als Potenzreihe darstellbar sind, dies auch für die gemäß Kapitel 10 existierende Lösung der Fall ist.

Satz 11.1
Sei $r > 0$ und seien $a_{n-1}, \ldots, a_0, b : B_r(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ als Potenzreihen darstellbar. Dann ist die Lösung des AWP

$$\begin{cases} Ly = b \\ y(x_0) = \eta_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1} \end{cases}$$

auf $B_r(x_0)$ als Potenzreihe darstellbar.

Beweis: Wir machen nur $n = 2$ und O.E. $x_0 = 0$, d.h.

$$Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

auf $B_r(0)$.
Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann:

$$Ly = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}(m+1)a_{m+1}\right)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}a_m\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{m=0}^{n}(m+1)p_{n-m}a_{m+1} + \sum_{m=0}^{n} q_{n-m}a_m\right)x^n \\
&\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}a_{m+1} + \sum_{m=0}^{n} q_{n-m}a_m$$

bzw.

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left(b_n - \sum_{m=0}^{n}(m+1)p_{n-m}a_{m+1} - \sum_{m=0}^{n} q_{n-m}a_m\right) \qquad (*)$$

Also $y(0) = a_0 = \eta_0$ und $y'(0) = a_1 = \eta_1$.
Wir setzen also $a_0 := \eta_0$, $a_1 := \eta_1$, $a_2 := a_{0+2} = \frac{1}{2}(b_0 - p_0 a_1 - q_0 a_0)$,..., und behaupten, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $B_r(0)$ konvergiert. □

12 Systeme linearer Differentialgleichungen

In Kapitel 9 hatten wir Systeme $y' = f(x, y)$, $f : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^n \to \mathbb{R}^n$ angesehen. Nun betrachten wir lineare Systeme und benutzen die Notation $x = x(t)$ statt $y = y(x)$. D.h. wir untersuchen das System

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

mit $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=1,\dots,n}$ mit $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$ stetig für alle j,k) und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für $b \equiv 0$ ist das System homogen, für $b \not\equiv 0$ ist es inhomogen. Wir suchen eine Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ für $t \in I$. Ausgeschrieben suchen wir $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$.

Satz 12.1
Unter den obigen Voraussetzungen hat

$$(AWP)\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = \eta \end{cases}$$

für $t_0 \in I$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung auf I.

Beweis: Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ haben wir

$$\begin{aligned} \|A(t)x_1 + b(t) - (A(t)x_2 + b(t))\| &= \|A(t)(x_1 - x_2)\| \\ &\le \|A(t)\|\,\|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

wobei $\|B\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Bx\|$ für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genommen werden kann. $t \mapsto \|A(t)\|$ ist stetig, d.h. für kompaktes I bekommen wir die Lipschitzbedingung. Wenn nicht, dann machen wir's lokal und setzen dann mit lokaler Lipschitzbedingung bis zum Rand (oder bis ∞) fort.
Für (t,x), $(\bar{t},\bar{x}) \in I \times \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left\| f(t,x) - f(\bar{t},\bar{x}) \right\| = \left\| A(t)x - b(t) - (A(\bar{t})\bar{x} + b(\bar{t}) \right\|$$

$$\begin{aligned}&\leq \left\|A(t)x - A(\bar{t})x + A(\bar{t})x - A(\bar{t})barx\right\| + \left\|b(t) - b(\bar{t})\right\| \\ &\leq \left\|(A(t) - A(\bar{t}))x\right\| + \left\|A(\bar{t})(x - \bar{x})\right\| + \left\|b(t) - b(\bar{t})\right\| \\ &\leq \left\|A(t) - A(\bar{t})\right\| \|x\| + \left\|A(\bar{t})\right\| \|x - \bar{x}\| + \left\|b(t) - b(\bar{t})\right\|\end{aligned}$$

weshalb $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ stetig auf $I \times \mathbb{R}^n$ ist. □

Wir betrachten nun zunächst das homogene System. Es ist klar, dass die Menge der Lösungen

$$L_H = \{x : I \to \mathbb{R}^n \mid \forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t)\}$$

ein Vektorraum ist.

Satz 12.2
Unter den obigen Voraussetzungen seien $x_1, \dots, x_k \in L_H$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

i) $x_1, \dots, x_k$ sind linear unabhängig.

ii) $\forall t \in I : x_1(t), \dots, x_k(t)$ linear unabhängig.

iii) $\exists t \in I : x_1(t), \dots, x_k(t)$ linear unabhängig.

Beweis:

ii)⇒iii)⇒i): klar.

i)⇒ii): Seien $x_1, \dots, x_k$ linear unabhängig, aber es existiere ein $\tau \in I$ mit $x_1(\tau), \dots, x_k(\tau)$ linear abhängig. D.h. es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_j x_j(\tau) = 0$ und nicht alle α_j sind Null. Definiere $x(t) := \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j(t)$. Dies ist eine Lösung und erfüllt die Anfangsbedingung $x(\tau) = 0$. Also muss $x(t) \equiv 0$ wegen der Eindeutigkeit sein. Dies widerspricht der linearen unabhängigkeit der $x_1, \dots, x_k$.

□

Satz 12.3
Unter unseren generellen Voraussetzungen gilt $\dim L_H = n$.

Beweis: Sei $e_j = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$. Fixiere $\tau \in I$. Dann existieren nach Satz 1 $x_1, \dots, x_n \in L_H$ mit $x_j(\tau) = e_j$ für $j = 1, \dots, n$. Nach Satz 2 iii) sind $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig, d.h. $\dim L_H \geq n$. $n+1$ Lösungen sind wegen Satz 2 iii) stets linear abhängig. □

Definition 12.4
Eine Basis $x_1,...,x_n$ von L_H heißt Fundamentalsystem von Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$. $X = [x_1,x_2,...,x_n]$ heißt dann Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$.

Bemerkung 12.5

i) In obiger Notation kann man schreiben $\dot{X} = A(t)X(t)$.

ii) Es gilt $L_H = \{X(t)c \mid c \in \mathbb{R}^n\}$, denn $X(t)c = c_1x_1 + ... + c_nx_n$.

iii) Die eindeutige Lösung des AWPs $\dot{x} = A(t)$, $x(t_0) = \eta$, ist gegeben durch $x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}\eta$: $x(t_0)$ ist per Definition invertiertbar. $x(t) = X(t)c$ mit $c = X(t_0)^{-1}\eta \in \mathbb{R}^n$ ist nach ii) eine Lösung und $x(t_0) = X(t_0)X(t_0)^{-1}\eta = \eta$.

iv) $Y(t) := X(t)X(t_0)^{-1}$ ist eine Fundamentalmatrix von $\dot{y} = A(t)x$: Die Spalten von Y sind Linearkombinationen der Spalten von X, d.h. sie liegen in L_H. Wegen $Y(t_0) = X(t_0)X(t_0)^{-1} = I$ sind mit Satz 2 iii) die Spalten von Y linear unabhängig.

Beispiel 12.6

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{t}x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{t^2}x_1 - \frac{2}{t}x_2 \end{cases}$$

d.h. $A(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}$ auf $I =]0,\infty[$. $x^{(1)}(t) = \binom{t^2}{-t}$, $x^{(2)}(t) = \binom{-t^2\ln t}{t+t\ln t}$ sind linear unabhängige Lösungen.

$$\dot{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(t)x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+t \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -2t\ln t - t \\ 2+\ln t \end{pmatrix}, \quad A(t)x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t^2\ln t \\ t+t\ln t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\ln t - t - t\ln t \\ -\ln t + 2 + 2\ln t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t\ln t - t \\ 2+\ln t \end{pmatrix}$$

$x^{(1)}(1) = \binom{1}{-1}$ und $x^{(2)}(1) = \binom{0}{1}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$. Nach Satz 2 sind $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ dann linear unabhängig auf I. Also ist die Fundamentalmatrix $X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2\ln t \\ -t & t+t\ln t \end{pmatrix}$ und

$$x_{allg}(t) = X(t)c = c_1\begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -t^2\ln t \\ t+t\ln t \end{pmatrix}$$

mit $c = \binom{c_1}{c_2} \in \mathbb{R}^2$. Für die Anfangsbedingung $x_1(1) = \eta_1$, $x_2(1) = \eta_2$ ergibt sich

$$X(1) = \begin{pmatrix} 1^2 & -1^2\ln 1 \\ -1 & 1+1\ln 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y(t) = X(t)X(1)^{-1} = \begin{pmatrix} t^2 - t^2\ln t & -t^2\ln t \\ t\ln t & t+t\ln t \end{pmatrix}$$

Nun ist $X(t) = Y(t)\eta$ die Lösung des AWPs mit $\eta = \binom{\eta_1}{\eta_2}$ für jedes η(!). //

Nun zum inhomogenen System. Wir lassen alle Voraussetzungen wie bisher, setzen

$$L_I = \{x : I \to \mathbb{R}^n \mid \forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)\}.$$

Dann ist klar, dass $L_I = L_H + x_{inhom}^{part}$ für $x_{inhom}^{part} \in L_I$ beliebig gilt. Haben wir also eine Fundamentalmatrix X von $\dot{x} = A(t)x$, dann gilt $x_{inhom}^{allg} = X(t)c + x_{inhom}^{part} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + x_{inhom}^{part}$ und wir müssen (wieder einmal) eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL finden. Das geht (wieder einmal) per Variation der Konstanten.

Satz 12.7
Unter den Voraussetzungen des Kapitels sei X eine Fundamentalmatrix für $\dot{x} = Ax$.

i) Man erhält eine Lösung der inhomogenen DGL $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ durch den Ansatz $x_p(t) = X(t)c(t)$. Daraus ergibt sich

$$c(t) = c + \int_{t_0}^{t} X(\tau)^{-1} b(\tau) \mathrm{d}\tau$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$.

ii) Das AWP $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = \eta$ hat die Lösung

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}\eta + \int_{t_0}^{t} X(t)X(\tau)^{-1} b(\tau) \mathrm{d}\tau$$

('Variation der Konstanden-Formel').

Beweis:

i)

$$x = Xc \Rightarrow \dot{x} = \dot{X}c + X\dot{c} = AXc + X\dot{c}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Xc) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_j\right)_{i=1,\ldots,n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_{ij}c_j + x_{ij}\dot{c}_j\right)_{i=1,..,n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_{ij}c_j\right)_{i=1,..,n} + \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\dot{c}_j\right)_{i=1,\ldots,n}
\end{aligned}$$

$$= \dot{X}c + X\dot{c}$$

Nun $\dot{x} = Ax + b$ einsetzen:

$$AXc + X\dot{c} = AXc + b \Rightarrow X\dot{c} = b \Rightarrow \dot{c} = X^{-1}b \Rightarrow c(t) = \int_{t_0}^{t} X(\tau)^{-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau + c$$

wbei $t, t_0 \in I$.

ii) Bemerkungen vor dem Satz$\Rightarrow x_{allg}^{inhom} = X(t)c + X(t)\int_{t_0}^{t} X(\tau)^{-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau$ mit $c \in \mathbb{R}^n$.

$$X(t_0) = \eta \Rightarrow x_{allg}^{inhom}(t_0) = X(t_0) + 0 = \eta \Rightarrow c = X(t_0)^{-1}\eta$$

$\square$

Bemerkung 12.8
Man kann Ableitung und (Riemann-)Integral für Funktionen $f: I \to \mathbb{R}^m$ abstrakt definieren und zeigen, dass dies genau auf koordinatenweises Ableiten bzw. Integrieren hinausläuft.

Für Ableitungen kennen Sie das: Die Ableitung von f ist $JF = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$. Für das Riemann-Integral ist das straight forward.
Haben wir $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist das vielleicht ungewohnt, aber da $\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^n$ ist, egal welche Normen wir verwenden, dann sieht man, dass es sich doch nur um einen Spezialfall handelt.

13 Lineare Differentialgleichungs-Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das AWP

$$(*)\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = \eta \end{cases} ,$$

also den Spezialfall der Situation in Kapitel 12, in dem $A(t) \equiv A$ konstant und $b \equiv 0$ ist. Wenn wir für $(*)$ eine Fundamentalmatrix haben, können wir per Variation der Konstanten auch $\dot{x} = Ax + b$ mit $b \neq 0$ nicht-konstant behandeln.
In Fall $n = 1$ ist $A = a \in \mathbb{R}$ und wir haben nur $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax$, $x(t_0) = \eta$ zu lösen. Hier kennen wir die Lösung:

$$x(t) = e^{(t-t_0)a}\eta.$$

Formales Rechnen suggeriert, dass

$$x(t) = e^{t-t_0)A}\eta$$

für $n > 1$ das AWP $(*)$ lösen könnte. Das ist tatsächlich richtig, wir müssen aber erklären wir e^{tB} für eine Matrix B definiert ist und dies so machen, dass $t \mapsto e^{tB}$ differenzierbar mit Ableitung Be^{tB} wird.
Da wir später Eigenwerte von Matrizen berechnen werden (ähnlich wie im vorletzten Kapitel) sind wir gut beraten von hier an komplex zu arbeiten, wenn auch unser Interesse auf reelle Differentialgleichungssysteme beschränkt bleibt.

Bemerkung 13.1

i) $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbb{C}^{n\times n}$ sind endlich dimensionale Vektorräume, auf ihnen sind alle Normen äquivalent und bzgl. jeder Norm liegt Konvergenz genau dann vor, wenn alle Koordinaten bzw, Einträge konvergieren. Grenzwerte, die Existenz von Ableitungen, deren Wert, etc. sind unabhängig bon der gewählten Norm. Abschätzungen und darin vorkommende Konstanten können wir der Norm abhängen.

ii) Wir wählen eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ und eine auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ für die gelten

- $\forall x \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$,

- $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

iii) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Folge von Matrizen, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ wohldefiniert (=Folge der Partialsummen bzw. deren Grenzwerte in $\mathbb{C}^{n\times n}$). Die Folge der Partialsummen konvergiert genau dann, wenn sie koordinatenweise konvergiert. Da $\mathbb{C}^{n\times n}$ ein Banachraum mist, beweist man wie in $\mathbb{R}$, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad \text{konvergiert.}$$

Beispiel 13.2

i) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Also:

$$\sum_{k=0}^{N} A^k = I + A^1 + \ldots + A^N = \begin{pmatrix} N+1 & 0+1+2+\ldots+N \\ 0 & N+1 \end{pmatrix}$$

ist nicht konvergent für $N \to \infty$.

ii) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

$$\sum_{k=0}^{N} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!} \xrightarrow{N\to\infty} e^{\|A\|} < \infty$$

Somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

//

Definition 13.3

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ gemäß Bemerkung 2 i) wohldefiniert. Die Abbildung $T: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \mapsto e^{tA}$ heißt Matrixexponentialfunktion.

Lemma 13.4

i) Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.

ii) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t, h \in \mathbb{C}$. Dann gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, $e^{(t+h)A} = e^{tA}e^{hA}$, $e^{A+hI} = e^h e^A$.

Beweis:

i) Betrachte das Cauchyprodukt und gehe wie in der Analysis 1 vor.

ii)
$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$$

Genauso $e^{-A}e^A = I$. Die zwei anderen Gleichungen folgen aus i).

□

Satz 13.5

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ differenzierbar.

i) Die Matrixexponentialfunktion $T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $T(t) = e^{tA}$, ist differenzierbar und es gibt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} = Ae^{tA}$.

ii) Es gilt
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA}x(t)) = e^{tA}\dot{x}(t) + Ae^{tA}x(t).$$

Beweis:

i) Fixiere $t \in \mathbb{R}$, sei $h \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned}\frac{T(t+h) - T(t)}{h} &= \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h}\\ &= \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h}\\ &= e^{tA}\frac{e^{hA-I}}{h}\\ &= e^{tA}\left(A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2A^3}{3!} + \dots\right)\\ &= e^{tA}A + \alpha(h)\end{aligned}$$

und

$$\|\alpha(h)\| = \underbrace{\left\|e^{tA}\right\|}_{\leq e^{\|tA\|}} |h| \underbrace{\left\|\frac{A^2}{2} + \frac{hA^3}{3!} + \ldots\right\|}_{\leq \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{|h|\|A\|^3}{3!} + \ldots} \leq |h| e^{\|tA\|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = |h| e^{\|tA\|} e^{\|A\|} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Wegen

$$e^{tA} A = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right) A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k A}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} A \frac{(tA)^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = A e^{tA}.$$

ii) wie vorhin.

□

Wir haben also unsere anfänglichen Probleme unseren Wünschen gemäß beantwortet und bekommen

Satz 13.6
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = \eta \end{cases}$$

genau eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ existiert und durch $x(t) = e^{(t-t_0)A}\eta$ gegeben ist.

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit haben wir schon erledigt, wir müssen nur zeigen, dass x wie oben das AWP löst:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{(t-t_0)A}\eta = A e^{(t-t_0)A}\eta = Ax(t).$$
$$x(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}\eta = I\eta = \eta$$

□

Korollar 13.7
i) e^{tA} ist eine Fundamentalmatrix für $\dot{x} = Ax$, vgl Kap. 12, Satz 5.

ii) Das AWP $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(t_0) = \eta$, hat

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}\eta + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau) \mathrm{d}\tau$$

als Lösung.