Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Grundlagen der Funktionalanalysis

Im Zweifel immer das Richtige nehmen.
Prof. Dr. B. Jacob

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Übungszettel:

- Immer Mittwochs, Abgabe: In der Vorlesung
- Keine Abgabepflicht, aber Bonussystem: 50% der Punkte$\Rightarrow$ 0.3 Bonus, 75% der Punkte$\Rightarrow$ 2 Notenschritte Bonus
- Mündliche Prüfung

Literatur: Werner - Funktionalanalysis, Springer Verlag, ISBN 3-540-43586-7

Motivation: Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit unendlichdimensionalen Vektorräumen (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), in denen der Konvergenzbegriff gegeben ist (Topologie), sowie den stetigen linearen Abbildungen (Operatoren) zwischen ihnen.

- Funktionen werden als Punkte bzw. als Elemente in Funktionenräumen betrachtet ($C([0,1]), \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$).
- Es gibt vielfältige Anwendungen innerhalb der Analysis (Integralgleichungen, partielle Differentialgleichungen), sowie der Optimierung, Numerik, Quantenmechanik.
- Die historischen Wurzeln liegen in der Fouriertransformation sowie ähnlichen Transformationen.

Funktionale$\hat{=}$stetige lineare Abbildungen von Funktionenräumen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. Funktion von Funktion ($\rightsquigarrow$Variationsrechnung).
In unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt es viele im Vergleich zur Analysis im $\mathbb{R}^n$ ungewohnte Effekte, z.B.:

i) Surjektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemein nicht injektiv.
Sei $V = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ und $A: V \to V$ sei gegeben durch

$$A(x_n)_n = A(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

$AV = V$ (A ist surjektiv), aber $A(x_1, 0, 0, \dots) = 0$ (A ist nicht injektiv.

ii) Injektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemeinen nicht surjektiv.
V wie oben.

$$A(x_n)_n = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

iii) Lineare Selbstabbildungen müssen keine Eigenwerte haben.
$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$, $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ sei gegeben durch ($f \in C([a,b])$, $x \in [a,b]$):

$$(Af)(x) = (\sin x) f(x)$$

A ist der Multiplikationsoperator mit $\sin x$. A hat keine Eigenwerte. Andernfalls gäbe es $f \in C([a,b])$, $f \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$(\sin x) f(x) = \lambda f(x) \forall x \in [a,b]$$

Da $f \neq 0$ existiert ein $x_0 \in [a,b]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass:

$$f(x) \neq 0 \forall]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Also:

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[: \ \sin x = \lambda = \text{konstant} \lightning$$

In der Funktionalanalysis untersucht man verschiedene Abschwächungen des Begriffs 'Eigenwert'.

iv) Lineare Abbildungen sind im Allgemeinen nicht stetig.
$V = \{p : [-2,2] \to \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom}\}$, versehen mit der gleichmässigen Konvergenz, d.h.

$$(p_j)_j \to p \text{ in } V \Leftrightarrow \|p_j - p\|_\infty \to 0 \text{ für } j \to \infty$$

Sei $A : V \to V$ definiert durch $Ax^n = 3^n x^n$ und sei $p_j(x) = \frac{1}{(2.5)^j} x^j$. Dann $\|p_j\|_\infty \to 0$ für $j \to \infty$, d.h. $p_j \to 0$ in V für $j \to \infty$, aber

$$\|Ap_j\|_\infty = \sup_{x \in [-2,2]} \left| \frac{3^j}{2.5^j} x^j \right| = \frac{3^j 2^j}{2.5^j} = \left(\frac{6}{2.5} \right)^j \to \infty$$

für $j \to \infty$, d.h. $Ap_j \not\to 0 = A0$, d.h. A ist insbesondere nicht stetig.

1
Beispiele normierter Räume

Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Den trivialen Vektorraum $\{0\}$ schließen wir aus.

{def1.1}

Definition 1.1
Sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Eine Abbildung $p: X \to [0,\infty[$ heißt Halbnorm, falls

a) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in X$

b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich c) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, so heißt p eine Norm. Das Paar (X, p) heißt (halb-)normierter Raum.
Ist p bekannt, so heißt X (halb-)normierter Raum. Normen werden mit $\|\cdot\|$ (statt p) bezeichnet.

Bemerkung

i) Aus a) folgt $p(0) = 0$ (wähle $\lambda = 0$).

ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x,y) := \|x-y\| \; \forall x, y \in X$ eine Metrik auf X.

{def1.2}

Definition 1.2
Sei X ein normierter Raum.

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq X$ ist eine Cauchyfolge, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N: \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \ \|x_n - x\| < \varepsilon$$

c) X ist ein Banachraum, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bemerkung
In normierten Räumen ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

Beispiel
$\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum mit jeder der folgenden Normen ($x = (x_1, \ldots, x_n)$):

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$$

//

{prop1.3}

Proposition 1.3
In einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ auf X gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\frac{1}{c} \|x\| \leq |||x||| \leq c \|x\| \ \forall x \in X$$

Beweis: O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$.

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

ist eine Norm auf X. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf X und $e_j := (0,\ldots,0,1_j,0,\ldots,0)$, $1 \le j \le n$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \|e_j\| \le \underbrace{\left(\max_{j=1,\ldots,n} \|e_j\| \right)}_{=:c} \sum_{j=1}^{n} |x_j| = c\,\|x\|_1$$

Also: $\|x\| \le c\,\|x\|_1$ für ein $c > 0$ und alle $x \in X$ und $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|_1) \to [0,\infty]$ ist stetig.
$S = \{x \in X \mid \|x\|_1 = 1\}$ kompakt ($\Leftrightarrow$beschränkt und abgeschlossen). Dann folgt: $\min_{x \in S} \|x\| = \delta > 0$ mit $\delta = \|\tilde{x}\|$ mit $\|\tilde{x}\|_1 = 1$.

$$\|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \min_{\tilde{x} \in S} \|\tilde{x}\| \, \|x\|_1 \le \frac{1}{\delta} \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \|x\|_1$$

□

{satz1.4}

Satz 1.4 Minkowskische Ungleichung, Version für Folgen
Für $x, y \in \ell^p$, $1 \le p < \infty$, gilt $\|x + y\| \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

Beweis: $p = 1.\surd$ Sei also $p > 1$. Wir zeigen die äquivalente Ungleichung

$$\|x+y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p)\, \|x+y\|_p^{p-1}$$

Sei $x = (x_n)_n$ und $y = (y_n)_n$. Dann mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nach der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\le \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\|_p \, \|x+y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \, \|x+y\|_p^{p/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\, \|x+y\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Da außerdem gilt: $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\,\|x\|_p$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \ell^p$ und $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum.
Behauptung: $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \le p < \infty$ ist vollständig, d.h. ein Banachraum.

Beweis: Sei (x_n) eine Cauchyfolge in ℓ^p. Wir schreiben $(x_n) = (x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$, $x_m^{(n)} \in \mathbb{K}$. Für alle $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $|y_m| \le \|y\|_p$.

$$(x_n)_n \text{ Cauchyfolge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n,k \ge N : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon$$

Aus

$$|x_m^{(n)} - x_m^{(k)}| \le \|x_n - x_k\|_p$$

folgt: Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ ist $(x_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ist vollständig).
Sei $x_m := \lim_{n\to\infty} x_m^{(n)}$ und $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Es bleibt zu zeigen: $x \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N} : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n,k \ge N$. Insbesondere gilt für $M \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |x_m^{(n)} - x_m^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n,k \ge N$$

Mit $k \to \infty$ gilt $\forall M \in \mathbb{N} \forall n \ge N$:

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |x_m^{(n)} - x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon$$

M war beliebig und somit folgt:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^{(n)} - x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \forall n \ge N$$

Somit ist $x_N - x \in \ell^p$ und $x = x - x_N + x_N \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

□

{satz1.5}

Satz 1.5
Sei $(X, \|\cdot\|^*)$ ein halbnormierter Raum.

a) $N := \{x \in X \mid \|x\|^* = 0\}$ ist ein Untervektorraum von X.

b) $\|[x]\| := \|x\|^*$ definiert eine Norm auf X/N.

c) Ist X vollständig, d.h. in X konvergiert jede Cauchyfolge, so ist X/N ein Banachraum.

Beweis:

a) $\surd$

b) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse: Seien $x, y \in X$ mit $[x] = [y]$. Zu zeigen: $\|x\|^* = \|y\|^*$.

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N \Leftrightarrow \|x - y\|^* = 0$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|\, \|x\|^* - \|y\|^* \,| \leq \|x - y\|^*$$

zeigt $\|x\|^* = \|y\|^*$. Homogenität und Dreiecksungleichung folgen nun direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $\|\cdot\|^*$.

$$\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^* = 0 \Leftrightarrow x \in N \Leftrightarrow x \sim 0 \Leftrightarrow [x] = [0]$$

c) Folgt aus:

$$([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X/N \Leftrightarrow ([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X$$

□

Beispiel *Die L^p−Räume*
Sei I ein Intervall, dann ist $(I, B(I), \lambda_1)$ ein Maßraum (gleiche Überlegungen für einen Maßraum $(X, \mathscr{A}, \mu)$). Sei $\mathscr{L}^\infty(I) := \{f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ messbar}, \exists N \in B(I) \text{ mit } \lambda_1(N) = 0, f|_{I\setminus N} \text{ ist beschränkt}\}$.

$$\|f\|^*_{L^\infty} := \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \sup_{t\in I\setminus N} |f(t)| = \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \|f|_{I\setminus N}\|_\infty$$

Es gilt:

i) $f \in \mathscr{L}^\infty(I) \Rightarrow \|f\|^*_{L^\infty} < \infty$

ii) Zu $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ gibt es eine messbare Nullmenge N mit $\|f\|^*_{L^\infty} := \|f|_{I\setminus N}\|_\infty$.

Beweis: Zu $r \in \mathbb{N}$ wählen wir eine messbare Nullmenge N_r mit $\left\|f|_{I\setminus N_r}\right\|_\infty \leq \|f\|^*_{L^\infty} + \frac{1}{r}$. Dann ist $N := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} N_r$ auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f\|^*_{L^\infty} \leq \|f|_{I\setminus N}\|_\infty \leq \left\|f|_{I\setminus N_r}\right\|_\infty \leq \|f\|^*_{L^\infty} + \frac{1}{r} \forall r \in \mathbb{N}$$

Da r beliebig ist, folgt die Behauptung. □

iii) $(\mathscr{L}^\infty(I), \|\cdot\|^*_{L^\infty})$ ist ein halbnormierter Vektorraum.

Beweis: Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung, alle weiteren Eigenschaften folgen direkt. Seien $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^\infty(I)$ und N_1, N_2 messbare Nullmengen gemäß ii).

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\|^*_{L^\infty} &= \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \|(f_1 + f_2)_{I\setminus N}\|_\infty \\
&\leq \left\|(f1 + f_2)|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty \\
&\leq \left\|f_1|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty + \left\|f_2|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty \\
&\leq \left\|f_1|_{I\setminus N_1}\right\|_\infty + \left\|f_2|_{I\setminus N_2}\right\|_\infty \\
&= \|f_1\|^*_{L^\infty} + \|f_2\|^*_{L^\infty}
\end{aligned}$$

□

iv) $(\mathscr{L}^\infty(I), \|\cdot\|^*_{L^\infty})$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent.

Beweis: Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathscr{L}^\infty(I)$. Nach ii) existieren messbare Nullmengen $N_{n,m}$ mit

$$\|f_n - f_m\|^*_{L^\infty} = \left\|(f_n - f_m)|_{I\setminus N_{n,m}}\right\|_\infty$$

Sei $N = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} N_{n,m}$ (abzählbare Vereinigung). Dies ist auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f_n - f_m\|^*_{L^\infty} = \|(f_n - f_m)|_{I\setminus N}\|_\infty$$

Also ist $(f_n|_{I\setminus N})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(\ell^\infty(I\setminus N), \|\cdot\|_\infty)$. Daher existiert $g \in \ell^\infty(I\setminus N)$ und $f_n|_{I\setminus N} \xrightarrow{n\to\infty} g$ in $\ell^\infty(I\setminus N)$. Setze $f(t) = \begin{cases} g(t) & t \in I\setminus N \\ 0 & t \in N \end{cases}$. Dann ist f beschränkt und als punktweiser Limes der messbaren Funktionenfolge $(f_n\chi_{I\setminus N})_{n\in\mathbb{N}}$ wieder messbar. Daraus folgt:

$$\|f_n - f\|^*_{L^\infty} \le \|(f_n - f)_{I\setminus N}\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

//

Sei $N_p := \{f \in \mathscr{L}^p(I) \mid \|f\|^a_p st = 0\} = \{f : I \to \mathbb{K} \mid f$ messbar und $f = 0$ fast überall$\}$, $L^p(I) = \mathscr{L}^p(I)/N_p$, $\|[f]\|_p = \|f\|^*_p$. Dann ist $(L^p(I), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Bemerkung
Ein nicht vollständiger Raum X kann stets in einen Banachraum 'eingebettet' werden. Sei $CF(X) := \{(x_n)_n \subset X \mid (x_n)_n$ ist eine Cauchyfolge$\}$. Auf $CF(X)$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

Sei $\hat{X} := \{[(x_n)] \mid (x_n)_n \subseteq CF(X)\}$ mit $\|[(x_n)_n]\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Dann gilt: $(\hat{X}, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum und indem man X mit den konstanten Folgen in $\hat{X}$ identifiziert, wird X in natürlicher Weise in $\hat{X}$ dicht eingebettet (d.h. $X \subset \hat{X}$ und $\bar{X} = \hat{X}$).
$\hat{X}$ nennt man auch die Vervollständigung von X.

{satz1.6}

Satz 1.6
Sei X ein normierter Raum.

i) Aus $x_n \to x$ in X und $y_n \to y$ in X folgt $x_n + y_n \to x + y$.
ii) Aus $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$ und $x_n \to x$ in X folgt $\lambda_n x_n \to \lambda x$.
iii) Aus $x_n \to x$ folgt $\|x_n\| \to \|x\|$.

Bemerkung
Aus iii) folgt: Konvergente Folgen in X sind beschränkt.

Beweis:

i) folgt aus
$$\|x_n + y_n - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$$
ii)
$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| \leq |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\|$$
iii) folgt aus
$$0 \leq | \, \|x_n\| - \|x\| \, | \leq \|x_n - x\| \to 0$$

□

{satz1.7}

Satz 1.7
Ist U ein Untervektorraum des normierten Raumes X, so ist sein Abschluss $\bar{U}$ ebenfalls ein Untervektorraum.

Beweis: Seien $x, y \in \bar{U}$. Dann existieren Folgen $(x_n)_n$, (y_n) in U mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Also:
$$x_n + y_n \to x + y \Rightarrow x + y \in \bar{U}$$
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \bar{U}$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_n$ in U mit $x_n \to x$. Es folgt:
$$\lambda x_n \to \lambda x \Rightarrow \lambda x \in \bar{U}$$

□

Bemerkung
Ist $\dim U < \infty$, dann ist U abgeschlossen. Im Allgemeinen ist ein Untervektorraum nicht abgeschlossen.

{satz1.8}

Satz 1.8
Seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf X. Dann sind äquivalent:

i) $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ sind äquivalent, d.h. $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|x\| \leq |||x||| \leq c_2 \|x\| \, \forall x \in X$.

ii) Eine Folge ist bezüglich $\|\cdot\|$ konvergent genau dann, wenn sie bezüglich $|||\cdot|||$ konvergent ist.

iii) Eine Folge ist eine $\|\cdot\|$ −Nullfolge genau dann, wenn sie eine $|||\cdot|||$−Nullfolge ist.

Beweis: i)⇒ii)⇒iii) klar. Es bleibt zu zeigen: iii)⇒i).
Angenommen es gibt kein $c_2 > 0$, so dass die Ungleichung $|||x||| \leq c_2 \|x\| \, \forall x \in X$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\exists x_n \in X : |||x_n||| > n \|x_n\|$. Setze $y_n := \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Dann folgt:

$$\|y_n\| = \left\| \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n} \to 0$$

Also ist $(y_n)_n$ eine $\|\cdot\|$ −Nullfolge und mit iii) somit auch eine $|||\cdot|||$−Nullfolge. Aber

$$|||y_n||| = \left|\left|\left| \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right|\right|\right| = \frac{1}{n \|x_n\|} |||x_n||| > \frac{n \|x_n\|}{n \|x_n\|} = 1 \lightning$$

Die Existenz von $c_1 > 0 : c_1 \|x\| \leq |||x||| \forall x \in X$ lässt sich analog zeigen. □

Bemerkung
Zusätzliche Äquivalenz:

iv) $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, |||\cdot|||)$ besitzen die selben Cauchyfolgen. Somit: $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig⇔ $(X, |||\cdot|||)$ ist vollständig.

Beispiel
Aufgabe 3 zeigt, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|$ auf $C^1[a,b]$ nicht äquivalent sind. //

{lemma1.9}

Lemma 1.9 **Rieszsches Lemma**
Sei U ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raums X mit $U \neq X$. Ferner sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\forall u \in U : \|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta$$

Beweis: Sei $x \in X \setminus U$.

$$d := \inf\{\|x-u\| \mid u \in U\} > 0$$

Denn andernfalls gäbe es eine Folge $(u_n)_n \in U$ mit $u_n \to x$ und x läge dann in $\bar{U} = U$ (da U abgeschlossen). Es gilt: $d < \frac{d}{1-\delta}$. Dann existiert ein $u_\delta \in U$, für das gilt: $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$.
Setze $x_\delta := \frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|}$. Dann ist $\|x_\delta\| = 1$ und es gilt für $u \in U$ beliebig:

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x-u_\delta\|} \|x - (u_\delta + \|x-u_\delta\| u)\| \geq \frac{1}{\|x-u_\delta\|} d > 1-\delta$$

□

Bemerkung
Das Rieszsche Lemma gilt nicht für $\delta = 0$.

Beispiel
Sei $X = \{x \in C[0,1] \mid x(1) = 0\}$. $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum. $U = \left\{x \in X \middle| \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum.
Angenommen es gibt ein Element $x \in X$ mit $\|x-u\|_\infty \geq 1 = \|x\|_\infty \, \forall u \in U$. Setze $x_n(t) = 1 - t^n$.
Dann sind $x_n \in X$, $\|x_n\|_\infty = 1$ und $\int_0^1 x_n(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n+1}$. Setze

$$\lambda_n = \frac{\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t}{1 - \frac{1}{n+1}}, \qquad u_n = x - \lambda_n x_n \in U$$

Daraus folgt: $\|x - u_n\|_\infty \geq 1$ und $\|x-u_n\|_\infty = \|\lambda_n x_n\|_\infty = |\lambda_n| \geq 1$.

$$\left| \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t \right| = |\lambda_n| \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| \geq \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| \geq 1 n \forall \in \mathbb{N}$$

Aber $x\colon [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig, $\|x\|_\infty \leq 1$ und $x(1) = 0$. //

Beweis: $[a,b]=[0,1]$. Sei $f \in C[0,1]$.

$$P_n(s)=B_n(s,f):=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-i}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Zu zeigen: $\|P_n-f\|_\infty \to 0$. Da f gleichmässig stetig ist, existiert zu $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ mit $|s-t|\le\sqrt{\delta}$ und es folgt $|f(s)-f(t)|\le\varepsilon$.
Es gilt für $|s-t|>\delta$ mit $\alpha=\frac{2\|f\|_\infty}{\delta}$:

$$|f(s)-f(t)|\le|f(s)|+|f(t)|\le 2\,\|f\|_\infty=\alpha\delta\le\alpha(s-t)^2$$

Somit gilt für beliebige $s,t\in[0,1]$:

$$|f(s)-f(t)|\le\alpha(s-t)^2+\varepsilon$$

Setze $y_t(s):=(t-s)^2$. Dann folgt:

$$-\varepsilon-\alpha y_t(s)<f(s)-f(t)<\alpha y_t(s)+\varepsilon\forall s,t\in[0,1]$$

Wir bestimmen nun die Bernstein-Polynome zu $f_j(s)=s^j$ für $j=0,1,2$:

$$B_n(s,f_0)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-i}=(s+(1-s))^n=1$$

$$B_n(s,f_1)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-i}\frac{i}{n}={}^{1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}s^{i+1}(1-s)^{n-(i+1)}=s(s-(1-s))^{n-1}=s$$

$$\begin{aligned}
B_n(s,f_2)&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}s^i(1-s)^{n-i}\frac{i}{n}\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}s^{i+1}(1-s)^{n-(i+1)}\frac{i+1}{n}\\
&=\frac{s}{n}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}s^{i+1}(1-s)^{n-(i+1)}\frac{i}{n}\\
&=\frac{s}{n}+s\frac{n-1}{n}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}s^i(1-s)^{(n-1)-i}\frac{i}{n-1}}_{B_{n-1}(s,f_1)}\\
&=\frac{s}{n}+s^2\frac{n-1}{n}\\
&=s^2+\frac{s}{n}-\frac{s^2}{n}\\
&=s^2+\frac{s(1-s)}{n}
\end{aligned}$$

1 $\binom{n}{i}\frac{i}{n}=\binom{n-1}{i-1}$

Es folgt:

$$-B_n(s,\varepsilon+\alpha y_t)=B_n(s,-\varepsilon-\alpha y_t)\leq B_n(s,f-f(t))\leq B_n(s,\alpha y_t+\varepsilon)$$

Für alle $s,t\in[0,1]$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
|P_n(s)-f(t)| &= |B_n(s,f)-f(t)B_n(s,f_0)| \\
&= |B_n(s,f)-B_n(s,f(t))| \\
&= |B_n(s,f-f(t))| \leq B_n(s,\alpha y-t+\varepsilon) \\
&= B_n(s,\varepsilon+\alpha(t^2-2st+t^2)) = B_n(s,\varepsilon)+\alpha B_n(s,t^2)-2\alpha B_n(s,st)+\alpha B_n(s,s^2) \\
&= \varepsilon+\alpha t^2-2\alpha ts+\alpha\left(s^2+\frac{s(1-s)}{n}\right)
\end{aligned}$$

Mit $s=t$ folgt dann:

$$|P_n(t)-f(t)|\leq\varepsilon+\alpha t^2-2\alpha t^2+\alpha\left(t^2+\frac{t(i-1)}{n}\right)\leq\varepsilon\frac{\alpha}{n}$$

Also:

$$\|P_n-f\|_\infty\leq\varepsilon+\frac{\alpha}{n}$$

Hieraus folgt die gleichmässige Konvergenz. □

{kor1.10}

Korollar 1.10
$C[a,b]$ ist separabel.

Beweis: Aus dem Approximationssatz folgt: $C[a,b]=\overline{\mathrm{lin}\{x_n\mid n\in\mathbb{N}_0\}}$ mit $x_n(t)=t^n$. □

{satz1.11}

Satz 1.11
Sei $1\leq p<\infty$. $C[a,b]$ ist dicht in $L^p[a,b]$.

Beweis: Zu zeigen: $\overline{C[a,b]}=L^p[a,b]$ (Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_p$)
Sei $B([a,b])$ die $\sigma-$Algebra der Borelmengen auf $[a,b]$. Aus der Definition des Lebesgueintegrals folgt: $\mathrm{lin}\{\chi_A\mid A\in B([a,b])\}$, der Raum der Stufenfunktionen, liegt dicht in $L^p[a,b]$. Das Lebesgzemaß ist regulär, d.h.:

$$\lambda(A)=\inf\{\lambda(O)\mid A\subseteq O, O\text{ offen}\}$$

Daraus folgt für alle $A \in B([a,b])$, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O mit $A \subseteq O$ existiert so dass:

$$\left\|\chi_A - \chi_O\right\|_p = \left\|\chi_{O\setminus A}\right\|_p = \lambda(O \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Somit:

$$\{\chi_A \mid A \in B([a,b])\} \subseteq \overline{\{\chi_O \mid O \text{ offen}\}}$$
$$L^p[a,b] = \overline{\operatorname{lin}\{\chi_A \mid A \in B([a,b])\}} = \overline{\operatorname{lin}\{\chi_O \mid O \text{ offen}\}}$$

Jede offene Menge O ist eine abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen I_j. Aus $\lambda(O) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j)$ folgt: $\chi_O \in \overline{\operatorname{lin}\{\chi_I \mid I \text{ offenes Intervall}\}}$. Hieraus folgt nun:

$$L^p[a,b] = \overline{\operatorname{lin}\{\chi_I \mid I \text{ offenes Intervall}\}}$$

Es genügt zu zeigen: Zu jedem offenen Intervall $I \subset [a,b]$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine stetige Funktioen f mit $\left\|f - \chi_I\right\|_p < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ und $a \leq a' < b' \leq b$. Wähle $f(x)$ geeignet. Dann folgt, dass $C[a,b]$ dicht in $L^p[a,b]$ liegt. □

{kor1.12}

Korollar 1.12
$1 \leq p < \infty$. L^p ist separabel.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Polynome dicht in $L^p[a,b]$ liegen. Sei $f \in L^p[a,b]$. Nach **??** existiert eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen mit $\|f_n - f\|_p \to 0$. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz existieren Polynome P_n mit $\|f_n - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. Wegen

$$\|g\|_p = \left(\int_a^b |g|^p \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|g\|_\infty$$

für $g \in C[a,b]$ folgt $\|f_n - P_n\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Also folgt:

$$\|P_n - f\|_p \leq \|P_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \to 0$$

□

Bemerkung
Ohne Beweis sei noch erwähnt:

i) T kompakter Raum$\Rightarrow (C(T), \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel.

ii) Ω offene Menge (z.B. $\mathbb{R}$). $L^p(\Omega)$ ist separabel, $1 \leq p < \infty$.

{def1.13}

Definition 1.13
Sei X ein normierter Raum und $A \subseteq X$. Der Abstand von $x \in X$ zu A ist gegeben durch:

$$d(x,A) := \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\}$$

Bemerkung
Es gilt:

$$d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

{satz1.14}

Satz 1.14
Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Untervektorraum. X/U bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in U$.