Inhaltsverzeichnis

9 Hilberträume

{satz9.1}

Satz 9.1 **Parallelogrammgleichung**
Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \forall x, y \in X$$

gilt.

Beweis:
'⇒':

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

'⇐': Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir definieren:

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \Rightarrow \|x\| = \langle x,x\rangle^{½}$$

Wir müssen noch die Eigenschaften des Skalarproduktes nachweisen:

i) $\forall x_1, x_2, y \in X$ folgt aus der Parallelogrammgleichung

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 + y - x_2\|^2 =: \alpha$$

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = 2\|x_2 + y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|-x_1 + x_2 + y\|^2 =: \beta$$

Also:

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = \frac{\alpha+\beta}{2} = \|x_1+y\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_2+y\|^2 + \|x_1\|^2 - \frac{1}{2}(\|x_1+y-x_2\|^2 + \|-x_1+x_2+y\|^2)$$

Analog gilt:

$$\|x_1+x_2-y\|^2 = \|x_1-y\|^2+\|x_2\|^2+\|x_2-y\|^2+\|x_1\|^2-\frac{1}{2}(\|x_1-y-x_2\|^2+\|-x_1+x_2-y\|^2)$$

$$\begin{aligned}\langle x_1+x_2,y\rangle &= \frac{1}{4}(\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x_1+y\|^2-\|x_1-y\|^2+\|x_2+y\|^2-\|x_2-y\|^2)\\ &= \langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle\end{aligned}$$

ii) Nach i) gilt ii) für $\lambda \in \mathbb{N}$ und nach Konstruktion auch für $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$. Somit gilt ii) für $\lambda \in \mathbb{Z}$.
Sei $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

$$n\langle \lambda x,y\rangle = n\langle m\frac{x}{n},y\rangle = \langle mx,y\rangle = m\langle x,y\rangle = n\lambda\langle x,y\rangle$$

Also gilt ii) für $\lambda \in \mathbb{Q}$.
Die stetigen Funktionen ($\|\cdot\|$ ist stetig) $\lambda \mapsto \langle \lambda x,y\rangle$ und $\lambda \mapsto \lambda\langle x,y\rangle$ stimmen auf $\mathbb{Q}$ überein und sind daher gleich. Dies zeigt ii).

iii) $\surd$

iv) und v) folgt aus $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist die Argumentation ähnlich.

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-y\,\|x-iy\|^2)$$

□

{def9.2}

Definition 9.2
Sei X ein Prähilbertraum. Zwei Vektoren $x,y \in X$ heißen orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, falls $\langle x,y\rangle = 0$ gilt.
zwei Teilmengen $A,B \subseteq X$ heißen orthogonal, in Zeichen $A \perp B$, falls $x \perp y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt.
Die Menge $A^\perp := \{y \in X \mid x \perp y \forall x \in A\}$ heißt orthogonales Komplement von A.

Beispiel
$\mathbb{R}^2$, $x = \binom{1}{0}$, $y = \binom{0}{1}$. $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$. //

Bemerkung

i) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Satz von Pythagoras).

ii) $A^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Untervektorraum von X.

iii) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

iv) $A^\perp = (\overline{\operatorname{lin} A})^\perp$.

{satz9.3}

Satz 9.3 **Projektionssatz**
Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ sei abgeschlossen, nichtleer und konvex und es sei $x_0 \in H$. Dann existiert genau ein $x \in K$ mit

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|$$

Beweis: Für $x_0 \in K$ wähle $x = x_0$. Sei also $x_0 \notin K$ und o.B.d.A. $x_0 = 0$.

Existenz: Setze $d := \inf_{y \in K} \|y\|$. Es existiert $(y_n)_n \subset K$ mit $\|y_n\| \to d$. Wir zeigen zunächst: $(y_n)_n$ ist eine Cauchyfolge. Aus der Parallelogrammgleichung folgt:

$$\underbrace{\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2}_{\geq d^2} + \underbrace{\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2}_{\to 0} = \underbrace{\frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2)}_{\geq d^2} \to d^2$$

Also ist $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge. Da H vollständig, existiert ein $x \in H$ mit $x = \lim y_n$. Da K abgeschlossen, ist $x \in K$. Aus $\|y_n\| \to d$ folgt $\|x\| = d$. Hieraus folgt die Existenz.

Eindeutigkeit: Seien $x, \tilde{x} \in K$, $x \neq \tilde{x}$ mit

$$\|x\| = \|\tilde{x}\| = \inf_{y \in K} \|y\| = d$$

Dann folgt:

$$\underbrace{\left\|\frac{x + \tilde{x}}{2}\right\|^2}_{\in K} < \left\|\frac{x + \tilde{x}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x - \tilde{x}}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|\tilde{x}\|^2) = d^2 \lightning$$

□

{lemm

Lemma 9.4
Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Hilbertraumes H und $x_0 \in H$. Dann sind für ein $x \in K$ äquivalent:

i)
$$\|x_0 - x\| = \inf_{y \in K} \|x_0 - y\|$$

ii)
$$\mathrm{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \leq 0 \forall y \in K$$

Beweis:

ii)⇒i): Folgt aus

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - x + x - y\|^2 = \|x_0 - x\|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}\langle x_0 - x, x - y\rangle}_{\geq 0} + \|x - y\|^2 \leq \|x_0 - x\|^2$$

i)⇒ii): Zu $t \in [0,1]$ setze
$$y_t = (1-t)x + ty \in K \text{ falls } y \in K$$

Dann folgt aus i):

$$\|x_0 - x\|^2 \leq \|x_0 - y_t\|^2 = \langle x_0 - x + t(x-y), x_0 - x + t(x-y)\rangle = \|x_0 - x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x_0 - x, t(x-y)\rangle + t^2 \|x - y\|^2$$

Also:
$$\mathrm{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \leq \frac{t}{2} \|x - y\|^2 \forall t \in [0,1]$$

□

{thm9.5}

Theorem 9.5 **Satz von der Orthogonalprojektion**
Sei $U \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes H. Dann existiert eine lineare stetige Projektion p_U von H auf U mit $\|p_U\| = 1$ und $\ker p_U = U^\perp$.
$I - p_U$ ist eine Projektion von H auf $U^\perp$ mit $\|I - p_U\| = 1$ (es sei denn $U = H$) und es gilt $H = U \oplus_2 U^\perp$.
p_U wird Orthogonalprojektion genannt,

Beweis: Zu $x_0 \in H$ bezeichne $p_U x_0 \in U$ das eindeutig bestimmte Element aus **??**. Mit **??**:

$$\mathrm{Re}\langle x_0 - p_U, y - p_U x_0\rangle \leq 0 \forall y \in U$$

Da mit y auch $y - p_U x_0$ den Unterraum U durchläuft, gilt

$$\mathrm{Re}\langle x_0 - p_U x_0, y\rangle \le 0 \forall y \in U$$

Betrachte $-y$ und gegebenenfalls iy (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dann folgt

$$\langle x_0 - p_U x_0, y\rangle = 0 \forall y \in U \qquad (*)$$

$(*)$ ist sogar äquivalent zu ii) aus **??**. Somit ist $p_U x_0$ das eindeutig bestimmte Element $x \in U$ mit

$$x_0 - x \in U^\perp \qquad (**)$$

Da $U^\perp$ ein Unterraum ist, folgt

$$\lambda_1 x_1 - \lambda_1 p_U x_1 + (\lambda_2 x_2 - \lambda_2 p_U x_2) \in U^\perp \forall x_1, x_2 \in H \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

und

$$p_U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 p_U x_1 + \lambda_2 p_U x_2$$

Also is p_U linear.
Nach Konstruktion ist $\mathrm{ran}\, p_U = U$ und es gilt $\ker p_U = U^\perp$, denn

$$p_U x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 \in U^\perp$$

$I - p_U$ ist eine Projektion mit $\mathrm{ran}\, I - p_U = U^\perp$ und $\ker I - p_U = U$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$\|x_0\|^2 = \|p_U x_0 + (x_0 - p_U x_0)\|^2 = \|p_U x_0\|^2 + \|(I - p_U)x_0\|^2$$

Also ist $H = U \oplus_2 U^\perp$ und $\|p_U\| \le 1$ (da $\|x_0\|^2 \ge \|p_U x_0\|^2$), $\|I - p_U\| \le 1$. Da für Projektionen p $\|p\| \ge 1$ gilt, folgt

$$\|p_U\| = 1 = \|I - p_u\|$$

(falls $U \neq \{0\}$ und $U \neq H$). □

{kor9.6}

Korollar 9.6
Für einen Unterraum U eines Hilbertraumes H gilt

$$\bar{U} = (U^\perp)^\perp$$

Beweis: Aus **??** folgt $I - p_V$ für beliebige abgeschlossene Unterräume V. Sei $V = \bar{U}$. Dann ist $U^\perp = V^\perp$ sowie $I - p_{V^\perp} = p_{(V^\perp)^\perp}$. Also $p_V = p_{(V^\perp)^\perp}$ und somit $\bar{U} = V = (V^\perp)^\perp$. □

{thm9

Theorem 9.7 **Darstellungssatz von Fréchet-Riesz**
Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung $\Phi\colon H \to H'$, $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$ bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d.h. $\Phi(\lambda y) = \bar{\lambda}\Phi(y)$). D.h. zu $x' \in H'$ existiert genau ein $y \in H$ mit

$$x'(x) = \langle x, y\rangle \forall x \in H$$

mit $\|x'\| = \|y\|$.

Beweis: Offensichtlich ist Φ konjugiert linear. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|\Phi y\| = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|=1}} |\langle x, y\rangle| \le \|y\|$$

und für $x = \frac{y}{\|y\|}$ ($y = 0$ ist trivial) ist

$$\Phi(y)(x) = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|} = \|y\|$$

Φ ist also isometrisch und folglich injektiv.
Es bleibt zu zeigen: Φ ist surjektiv. Sei also $x' \in H'$. O.B.d.A. $\|x'\| = 1$. Sei $U = \ker x'$. Nach **??** ist dann $H = U \oplus U^{\perp}$, wobei $U^{\perp}$ eindimensional ist. Dann existiert ein $y \in H$ mit $U^{\perp} = \operatorname{lin}\{y\}$ und $x'(y) = 1$.
Für $x = u + \lambda y \in U \oplus_2 U^{\perp}$ gilt

$$x'(x) = x'(u) + \lambda x'(y) = \lambda$$

sowie

$$\{x, y\} = \lambda\langle y, y\rangle = \lambda\|y\|^2$$

$$\Phi\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right)(x) = \left\langle x, \frac{y}{\|y\|^2}\right\rangle = \lambda = x'(x)\forall x \in H$$

Also $\Phi\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = x'$ und somit ist Φ surjektiv. □

{kor9.8}

Korollar 9.8
Sei H ein Hilbertraum.

i) Eine Folge $(x_n)_n$ konvergiert in H schwach gegen x genau dann wenn

$$\langle x_n - x, y\rangle \to 0 \forall y \in H$$

ii) H ist reflexiv.

iii) Jede beschränkte Folge in H besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis:

i) Folgt aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz.

iii) Folgt aus ii), da in reflexiven Räumen jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

ii) Sei $\Phi\colon H \to H'$ die Abbildung aus **??**. Insbesondere ist Φ bijektiv und isometrisch. Es gilt: H' mit dem Skalarprodukt
$$\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_{H'} := \langle y, x\rangle_H$$
ist ein Hilbertraum. Wir wenden nun Fréchet-Riesz auf H' an und bezeichnen die kanonische Abbildung von H' nach H'' mit ψ. $\psi \circ \Phi\colon H \to H''$ ist dann bijektiv.
$$((\psi \circ \Phi)(x))(x') = \langle x', \Phi(x)\rangle_{H'} = \langle \Phi(y), \Phi(x)\rangle_{H'} = \langle x, y\rangle_H = (Pgi(y))(x) = x'(x) = (i_H(x))(x')$$
Also $i_H = \psi \circ \Phi$ und i_H ist surjektiv.

□

Im Folgenden sei H ein Hilbertraum.

{def9.9}

Definition 9.9
Eine Teilmenge $S \subseteq H$ heißt Orthonormalsystem, falls $\|e\| = 1$ und $\langle e, f\rangle = 0 \forall e, f \in S$ mit $e \neq f$.
Ein Orthonormalsystem S heißt Orthonormalbasis, falls gilt: $S \subseteq T$ und T Orthonormalsystem$\Rightarrow T = S$.

Beispiel
$H = \ell^2$ und $S = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Menge der Einheitsvektoren. S ist eine Orthonomalbasis. //

{satz9.10}

Satz 9.10 **Gram-Schmidt-Verfahren**
Sei $\{x_n\}_n$ eine linear unabhängige Teilmenge von H. Dann existiert ein Orthonormalsystem S mit
$$\overline{\operatorname{lin}\{x_n\}_n} = \overline{\operatorname{lin} S}$$

Beweis: Setze $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Betrachte
$$f_2 := x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1, \quad e_2 := \frac{f_2}{\|f_2\|}$$

Es gilt: $f_2 \neq 0$, da $\{x_1, x_2\}$ linear unabhängig und

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\|x_1\|} \frac{1}{\|f_2\|} \left\langle x_1, x_2 - \left\langle x_2, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\rangle \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x_1\| \, \|f_2\|} \left(\langle x_1, x_2 \rangle - \overline{\langle x_2, x_2 \rangle} \frac{\|x_1\|^2}{\|x_1\|^2} \right) = 0$$

d.h. $e_1 \perp e_2$.
Durch die Vorschrift

$$f_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

und $e_{k+1} := \frac{f_{k+1}}{\|f_{k+1}\|}$ wird so eine Folge $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definiert. Nach Konstruktion ist $S = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem mit $x_n \in \operatorname{lin} S$ und $e_n \in \operatorname{lin}\{x_k\}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

{satz9.11}

Satz 9.11 Besselsche Ungleichung
Ist $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Beweis: Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Setze

$$x_N = x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Dann ist $e_N \perp x_k$ für $k = 1, \ldots, N$, da

$$\langle x_N, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_k \rangle}_{\delta_{nk}} = 0$$

Aus dem Satz von Pythagoras:

$$\|x\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \|x_N\|^2 \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

□

9.12}

Lemma 9.12
Sei $\{e_n\}$ ein Orthonormalsystem, $x, y \in H$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle| < \infty$$

Beweis: Höldersche Ungleichung für Folgen $\{\langle x, e_n\rangle\}_n$, $\{\langle e_n, y\}\rangle_n$. □

{lemma9.13}

Lemma 9.13
Sei $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem und sei $x \in H$. Dann ist

$$S_x := \{e \in S \mid \langle x, e\rangle \neq 0\}$$

höchstens abzählbar.

Beweis: Besselsche Ungleichung besagt, dass

$$S_{x,n} := \left\{ e \in S \middle| |\langle x, e\rangle \geq \frac{1}{n} \right\}$$

endlich ist und daher ist

$$S_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_{x,n}$$

abzählbar oder endlich. □

{def9.14}

Definition 9.14
Sei X ein normierter Raum, I Indexmenge, $x_i \in X$, $i \in I$. Die Reihe $\sum_{i \in I} x_i$ konvergiert unbedingt gegen $x \in X$, falls

i) $I_0 = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar.

ii) Für jede Aufzählung $I_0 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ gilt die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n} = x$$

(Der Wert der Reihe $\sum x_{i_n}$ hängt also nicht von der Reihenfolge der x_{i_n}s ab). Schreibweise:

$$x = \sum_{i \in I} x_i$$

Bemerkung

i) In diesem Abschnitt unterscheiden wir zwischen $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}$.

ii) Ist $X = \mathbb{K}^n$, so gilt: Absolute und unbedingt Konvergenz sind äquivalent.

iii) Allgemein gilt der Satz von Dvoretzky-Rogers: In jedem unendlichdimensionalen Banachraum existiert eine unbedingt konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert.

{kor9.15}

Korollar 9.15 **Allgemeine Besselsche Ungleichung für Orthonormalsysteme**
Ist $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$, so ist

$$\sum_{e \in S} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

{satz9.16}

Satz 9.16
Sei $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem.

i) Für alle $x \in H$ konvergiert $\sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e$ unbedingt.

ii)
$$p : x \mapsto \sum_{e \in S} \langle x, e\rangle e$$
ist eine Orthonomalprojektion aus lin S.

Beweis:

i) Sei $\{e_1, e_2, ...\}$ eine Aufzählung von $\{e \in S \mid \langle x, e\rangle \neq 0\}$. Wir zeigen, dass $\sum \langle x, e_n\rangle e_n$ eine Cauchyreihe ist. Aus dem Satz von Pythagoras folgt:

$$\left\| \sum_{n=N}^{M} \langle x, e\rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=N}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \xrightarrow{N,M\to\infty} 0$$

Dann existiert $y := \sum \langle x, e_n \rangle e_n$ in H und analog konvergiert für eine Permutation $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe $y_\pi = \sum \langle x, e_{\pi(n)} \rangle e_{\pi(n)}$. Es bleibt zu zeigen: $y = y_\pi$. Sei $z \in H$ beliebig. Aus

$$\langle y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\pi(n)} \rangle \langle e_{\pi(n)}, y \rangle = \langle y_\pi, z \rangle$$

folgt $y - y_\pi \in H^\perp = \{0\}$.

ii) Wegen **??** (insbesondere $(**)$) genügt es zu zeigen, dass

$$\left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e \right\rangle = 0 \forall x \in S$$

Für $\langle x, e \rangle = 0 \forall e \in S$ ist dies klar. Sei also $\langle x, e \rangle \neq 0$ für ein $e \in S$. Dann ist $e = e_{n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt die Behauptung.

□

{satz9.17}

Satz 9.17
Sei $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem.

i) Es existiert eine Orthonormalbasis S' mit $S \subseteq S'$.

ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  a) S ist eine Orthonormalbasis.

  b) Ist $x \in H$ und $x \perp S$, so ist $x = 0$.

  c) Es gilt $H = \overline{\text{lin } S}$.

  d)
  $$x = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e \forall x \in H$$

  e)
  $$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle \langle e, x \rangle \forall x, y \in H$$

  f) Parsevalsche Gleichung:
  $$\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \forall x \in H$$

Beweis:

i) Folgt aus dem Zornschen Lemma.

ii) *a)⇒b):* Wäre $x \neq 0$, $x \perp S$, so wäre $S \cup \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ ein Orthonormalsystem. $\lightning$

b)⇒c): Folgt aus $\bar{U} = (U^{\perp})^{\perp}$.

c)⇒d): Dies ist **??**.

d)⇒e): Einsetzen unter Beachtung von **??** und **??**.

e)⇒f): Setze $x = y$.

f)⇒a): Angenommen, es gäbe x mit $\|x\| = 1$, so dass $S \cup \{x\}$ ein Orthonomalsystem ist.

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e\rangle|^2 = 0 \lightning$$

□

{satz9.18}

Satz 9.18
Ist S eine Orthonormalbasis von H, so ist $H \cong \ell^2(S)$. Hierbei ist

$$\ell^2(S) := \left\{ f : S \to \mathbb{K} \,\middle|\, \sum_{i \in S} |f(i)|^2 < \infty \right\}$$

ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i \in S} f(i)\overline{g(i)}$$

Beweis: Zu $x \in H$ definiere $Tx \in \ell^2(S)$ durch

$$(Tx)(e) = \{x, e\}$$

$Tx \in \ell^2(S)$ (folgt aus der Besselschen Ungleichung). $T \colon H \to \ell^2(S)$ ist linear und mit der Parsevalschen Gleichung isometrisch.
Ist umgekehrt $(f_e)_e \in \ell^2(S)$, so definiert $x = \sum_{e \in S} f_e e$ ein Element von H (siehe Beweis von **??**i)).
Es gilt: $Tx = (f_e)_{e \in S}$. hieraus folgt die Behauptung. □

9.19}

Korollar 9.19
Ist H separabel und $\dim H = \infty$, so ist $H \cong \ell^2$.

Beweis: Sei S eine Orthonormalbasis von H. Aus $\|e - f\| = \sqrt{2}$ $(\forall e, f \in S,\ e \neq f)$ folgt: S kann nicht überabzählbar sein (vergleiche Beweis der Inseparabilität von ℓ^2). **??** liefert die Behauptung. $\square$