Inhaltsverzeichnis

10
Operatoren auf Hilberträumen

Sei stets H (bzw. (H_1, H_2)) ein Hilbertraum.

{def10.1}

Definition 10.1
Sei $T \in L(H_1, H_2)$. Die Abbildung $T^* \in L(H_2, H_1)$ heißt adjungiert zu T, falls

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T1^* y\rangle_{H_1} \forall x \in H_1, y \in H_2$$

{satz10.2}

Satz 10.2
Zu jedem Operator $T \in L(H_1, H_2)$ existiert ein eindeutig bestimmter adjungierter Operator T^* und es gilt

$$\|T\| = \|T^*\|$$

Beweis:

Eindeutigkeit: Seien S_1 und S_2 adjungiert zu T.

$$\langle x, (S_1 - S_2)y\rangle_{H_1} = \langle Tx, y\rangle_{H_2} - \langle Tx, y\rangle_{H-2} = 0$$

für alle $x \in H_1$, $y \in H_2$. Alsi gilt $S_1 = S_2$

Existenz: Für $y \in H_2$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle Tx, y\rangle_{H_2}$ stetig und linear. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz existiert ein $y^* \in H_1$ so dass

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, y^*\rangle_{H_1} \forall x \in H_1$$

Die Zuordnung $T^* : y \mapsto y^*$ ist linear und wegen

$$\|T^*\| = \sup_{\substack{y \in H_2 \\ \|y\| \le 1}} \|y^*\| = \sup_{\substack{y \in H_2 \\ \|y\| \le 1}} \sup_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\| \le 1}} |\langle x, y^*\rangle_{H_1}| = \|T\|$$

auch stetig. Hieraus folgt die Behauptung. □

{satz10.3}

Satz 10.3
Seien $S,T \in L(H_1,H_2)$, $R \in L(H_2,H_3)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

i) $(S+T)^* = S^* + T^*$.

ii) $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$.

iii) $(RS)^* = S^* R^*$.

iv) $S^{**} = S$.

v) $\|SS^*\| = \|S^*S\| = \|S\|^2$.

vi) $\ker S = (\operatorname{ran} S^*)^\perp$ und $\ker S^* = (\operatorname{ran} S)^\perp$. Insbesondere ist S genau dann injektiv, wenn $\operatorname{ran} S^*$ dicht liegt.

Beweis: i) bis iv) lassen sich einfach nachrechnen. Wir zeigen v). Es gilt

$$\|Sx\| = \langle Sx, Sx\rangle_{H_2} = \langle x, S^*Sx\rangle \leq \|x\| \left\|S^*Sx\right\|$$

$$\|S\|^2 = \sup_{\|x\|_{H_1}\leq 1} \|Sx\|_{H_2}^2 \leq \sup_{\|x\|_{H_1}\leq 1} \|x\| \left\|S^*Sx\right\| \leq \left\|S^*\right\| \|S\| = \|S\|^2$$

Also $\|S\|^2 = \|S^*S\|$ und folglich

$$\left\|S^2\right\| = \left\|S^*\right\|^2 = \left\|S^{**}S^*\right\| = \left\|SS^*\right\|$$

Zu vi):

$$\begin{aligned} x \in \ker S &\Leftrightarrow Sx = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle Sx, y\rangle_{H_2} = 0 \forall y \in H_2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, S^*y\rangle_{H_1} = 0 \forall y \in H_2 \\ &\Leftrightarrow x \in (\operatorname{ran} S^*)^\perp \end{aligned}$$

und somit auch

$$\ker S^* = (\operatorname{ran} S^{**})^\perp = (\operatorname{ran} S)^\perp$$

□

{def10.4}

Definition 10.4
Sei $T \in L(H_1, H_2)$.

i) T heißt unitär, falls T invertierbar ist mit $TT^* = I_{H_2}$ und $T^*T = I_{H_1}$.

ii) Sei $H_1 = H_2$. T^* heißt selbstadjungiert (oder hermitesch), falls $T = T^*$.

iii) Sei $H_1 = H_2$. T heißt normal, falls $TT^* = T^*T$.

Bemerkung

i) T unitär$\Leftrightarrow T$ surjektiv und

$$\langle Tx, Ty\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1} \forall x, y \in H_1$$

ii) T ist selbstadjungiert$\Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle_{H_1} = \langle x, Ty\rangle_{H_2}$.

iii) T ist normal$\Leftrightarrow \langle Tx, Ty\rangle_{H_1} = \langle T^*y, T^*y\rangle_{H_1}$.

iv) T selbstadjungiert$\Rightarrow T$ normal.

v) $H_1 = H_2$, T unitär$\Rightarrow T$ normal.

Beispiel

i) Sei $H = \mathbb{K}^n$. Wird $T \in L(H)$ durch die Matrix $(a_{ij})_{ij}$ dargestellt, so wird T^* durch die Matrix $(\bar{a}_{ji})_{ji}$ dargestellt.

ii) Sei $T : \ell^2 \to \ell^2$ der Shiftoperator $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$. Dann ist $T^*(y_1, y_2, \ldots) = (0, y_1, y_2, \ldots)$. T ist nicht normal, da $TT^* = I_{\ell^2}$ und $T^*T = p_U$, $U = \{(x_n)_n \in \ell^2 \mid x_1 = 0\}$.

iii) T^*T und TT^* sind stets selbstadjungiert.

//

{lemma10.5}

Lemma 10.5
Für $T \in L(H_1, H_2)$ sind äquivalent:

i) T ist eine Isometrie, d.h. $\|Tx\| = \|x\| \, \forall x \in H$.

ii) $\langle Tx, Ty\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1} \forall x, y \in H_1$.

Beweis:

ii)⇒i): Setze $x = y$.

i)⇒ Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann folgt aus

$$\langle x, y\rangle_{H_1} = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|Tx+Ty\|^2 - \|Tx-Ty\|^2) = \langle Tx, Ty\rangle$$

die Behauptung. Analog für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

□

{satz10.6}

Satz 10.6 **Satz von Hellinger-Toeplitz**
Erfüllt eine lineare Abbildung $T: H \to H$ die Symmetriebedingung

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \forall x, y \in H$$

so ist T stetig, folglich selbstadjungiert.

Beweis: Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist zu zeigen:

$$x_n \to, Tx_n \to y \Rightarrow Tx = y$$

$$\begin{aligned}
\|Tx-y\|^2 &= \langle Tx-y, Tx-y\rangle \\
&= \left\langle Tx - \lim_{n\to\infty} Tx_n, Tx-y\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle T(x-x_n), Tx-y\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle x-x_n, T^*(Tx-y)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also ist $Tx = y$. □

{satz10.7}

Satz 10.7
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann sind für $T \in L(H)$ äquivalent:

i) T ist selbstadjungiert.

ii) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \forall x \in H$

Beweis:

i)⇒ii): Folgt aus $\langle Tx,x\rangle = \langle x,Tx\rangle = \overline{\langle Tx,x\rangle} \in \mathbb{R}$.

ii)⇒i): Für $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachte die reelle Zahl

$$\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle = \langle Tx,x\rangle + \bar{\lambda}\langle Tx,y\rangle + \lambda\langle Ty,x\rangle + |\lambda|^2\langle Ty,y\rangle$$

Wir nehmen alle konjugiert komplex:

$$\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle = \langle Tx,x\rangle + \lambda\langle y,Tx\rangle + \bar{\lambda}\langle x,Ty\rangle + |\lambda|^2\langle Ty,y\rangle$$

Also gilt:

$$\bar{\lambda}\langle Tx,y\rangle + \lambda\langle Ty,x\rangle = \lambda\langle x,Tx\rangle + \langle x,\bar{T}y\rangle$$

Wir wählen $\lambda = 1$ und $\lambda = -i$:

$$\langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle = \langle y,Tx\rangle + \langle x,Ty\rangle$$

$$\langle Tx,y\rangle - \langle Ty,x\rangle = -\langle y,Tx\rangle + \langle x,Ty\rangle$$

Also folgt $\langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle$.

□

{satz10.8}

Satz 10.8
Für selbstadjungierte operatoren $T \in L(H)$ gilt

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx,x\rangle|$$

Beweis: '≥' ist klar.
Setze

$$M := \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx,x\rangle|$$

Aus $T = T^*$ folgt:

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2\langle Tx,y\rangle + 2\langle Ty,x\rangle = 2\langle Tx,y\rangle + 2\overline{\langle Tx,y\rangle} = 4\,\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle$$

Also:

$$4\,\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle \le M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Weiter gilt:

$$\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle \le M \forall \|x\|, \|y\| \le 1$$

Multiplikation mit geeigneten λ, $|\lambda| = 1$ liefert:

$$|\langle Tx,y\rangle| \le M \forall \|x\|, \|y\| \le 1$$

Also ist $\|T\| \le M$. □

{kor10.9}

Korollar 10.9
Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert und es gilt $\langle Tx, y\rangle = 0$, so ist $T = 0$.

Bemerkung
Die Aussage gilt nur für selbstadjungierte Operatoren: Sei $H = \mathbb{R}^2$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt:

$$\langle Tx, x\rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = x_2 x_2 - x_1 x_2 = 0$$

{lemma10.10}

Lemma 10.10
Ist $T \in L(H)$ ein normaler Operator, so gilt

$$\|Tx\| = \left\|T^* x\right\|$$

Insbesondere $\ker T = \ker T^*$.

Beweis: Es gilt:

$$0 = \langle (TT^* - T^*T)x.x\rangle = \left\|T^* x\right\|^2 - \|Tx\|^2 \; \forall x \in H$$

□