Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Grundlagen der Funktionalanalysis

Im Zweifel immer das Richtige nehmen.
Prof. Dr. B. Jacob

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Übungszettel:

- Immer Mittwochs, Abgabe: In der Vorlesung
- Keine Abgabepflicht, aber Bonussystem: 50% der Punkte$\Rightarrow$ 0.3 Bonus, 75% der Punkte$\Rightarrow$ 2 Notenschritte Bonus
- Mündliche Prüfung

Literatur: Werner - Funktionalanalysis, Springer Verlag, ISBN 3-540-43586-7

Motivation: Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit unendlichdimensionalen Vektorräumen (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), in denen der Konvergenzbegriff gegeben ist (Topologie), sowie den stetigen linearen Abbildungen (Operatoren) zwischen ihnen.

- Funktionen werden als Punkte bzw. als Elemente in Funktionenräumen betrachtet ($C([0,1]), \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$).
- Es gibt vielfältige Anwendungen innerhalb der Analysis (Integralgleichungen, partielle Differentialgleichungen), sowie der Optimierung, Numerik, Quantenmechanik.
- Die historischen Wurzeln liegen in der Fouriertransformation sowie ähnlichen Transformationen.

Funktionale$\hat{=}$stetige lineare Abbildungen von Funktionenräumen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. Funktion von Funktion ($\rightsquigarrow$Variationsrechnung).
In unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt es viele im Vergleich zur Analysis im $\mathbb{R}^n$ ungewohnte Effekte, z.B.:

i) Surjektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemein nicht injektiv.
Sei $V = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ und $A : V \longrightarrow V$ sei gegeben durch

$$A(x_n)_n = A(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

$AV = V$ (A ist surjektiv), aber $A(x_1, 0, 0, \ldots) = 0$ (A ist nicht injektiv.

ii) Injektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemeinen nicht surjektiv.
V wie oben.

$$A(x_n)_n = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

iii) Lineare Selbstabbildungen müssen keine Eigenwerte haben.
$C([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$, $A : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ sei gegeben durch ($f \in C([a,b])$, $x \in [a,b]$):

$$(Af)(x) = (\sin x) f(x)$$

A ist der Multiplikationsoperator mit $\sin x$. A hat keine Eigenwerte. Andernfalls gäbe es $f \in C([a,b])$, $f \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$(\sin x) f(x) = \lambda f(x) \forall x \in [a,b]$$

Da $f \neq 0$ existiert ein $x_0 \in [a,b]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass:

$$f(x) \neq 0 \forall]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Also:

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[: \ \sin x = \lambda = \text{konstant} \lightning$$

In der Funktionalanalysis untersucht man verschiedene Abschwächungen des Begriffs 'Eigenwert'.

iv) Lineare Abbildungen sind im Allgemeinen nicht stetig.
$V = \{p : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom}\}$, versehen mit der gleichmässigen Konvergenz, d.h.

$$(p_j)_j \to p \text{ in } V \Leftrightarrow \left\| p_j - p \right\|_\infty \to 0 \text{ für } j \to \infty$$

Sei $A : V \longrightarrow V$ definiert durch $Ax^n = 3^n x^n$ und sei $p_j(x) = \frac{1}{(2.5)^j} x^j$. Dann $\left\| p_j \right\|_\infty \to 0$ für $j \to \infty$, d.h. $p_j \to 0$ in V für $j \to \infty$, aber

$$\left\| A p_j \right\|_\infty = \sup_{x \in [-2,2]} \left| \frac{3^j}{2.5^j} x^j \right| = \frac{3^j 2^j}{2.5^j} = \left(\frac{6}{2.5} \right)^j \to \infty$$

für $j \to \infty$, d.h. $Ap_j \not\to 0 = A0$, d.h. A ist insbesondere nicht stetig.

1

Beispiele normierter Räume

Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Den trivialen Vektorraum $\{0\}$ schließen wir aus.

{def1.1}

Definition 1.1
Sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \longrightarrow [0,\infty[$ heißt Halbnorm, falls

a) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in X$

b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \forall x,y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich c) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, so heißt p eine Norm. Das Paar (X,p) heißt (halb-)normierter Raum.
Ist p bekannt, so heißt X (halb-)normierter Raum. Normen werden mit $\|\cdot\|$ (statt p) bezeichnet.

Bemerkung

i) Aus a) folgt $p(0) = 0$ (wähle $\lambda = 0$).

ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x,y) := \|x-y\| \; \forall x,y \in X$ eine Metrik auf X.

{def1.2}

Definition 1.2
Sei X ein normierter Raum.

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq X$ ist eine Cauchyfolge, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \geq N: \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \ \|x_n - x\| < \varepsilon$$

c) X ist ein Banachraum, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bemerkung
In normierten Räumen ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

Beispiel
$\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum mit jeder der folgenden Normen ($x = (x_1, \ldots, x_n)$):

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$$

//

{prop1.3}

Proposition 1.3
In einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ auf X gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\frac{1}{c}\|x\| \leq |||x||| \leq c\,\|x\| \ \forall x \in X$$

Beweis: O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$.

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

ist eine Norm auf X. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf X und $e_j := (0,\ldots,0,1_j,0,\ldots,0)$, $1 \le j \le n$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \|e_j\| \le \underbrace{\left(\max_{j=1,\ldots,n} \|e_j\| \right)}_{=:c} \sum_{j=1}^{n} |x_j| = c\, \|x\|_1$$

Also: $\|x\| \le c\, \|x\|_1$ für ein $c > 0$ und alle $x \in X$ und $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow [0,\infty]$ ist stetig.
$S = \{x \in X \mid \|x\|_1 = 1\}$ kompakt ($\Leftrightarrow$beschränkt und abgeschlossen). Dann folgt: $\min_{x\in S} \|x\| = \delta > 0$ mit $\delta = \|\tilde{x}\|$ mit $\|\tilde{x}\|_1 = 1$.

$$\|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \min_{\tilde{x}\in S} \|\tilde{x}\| \, \|x\|_1 \le \frac{1}{\delta} \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \|x\|_1$$

□