Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Grundlagen der Funktionalanalysis

Im Zweifel immer das Richtige nehmen.
Prof. Dr. B. Jacob

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Übungszettel:

- Immer Mittwochs, Abgabe: In der Vorlesung
- Keine Abgabepflicht, aber Bonussystem: 50% der Punkte$\Rightarrow$ 0.3 Bonus, 75% der Punkte$\Rightarrow$ 2 Notenschritte Bonus
- Mündliche Prüfung

Literatur: Werner - Funktionalanalysis, Springer Verlag, ISBN 3-540-43586-7

Motivation: Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit unendlichdimensionalen Vektorräumen (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), in denen der Konvergenzbegriff gegeben ist (Topologie), sowie den stetigen linearen Abbildungen (Operatoren) zwischen ihnen.

- Funktionen werden als Punkte bzw. als Elemente in Funktionenräumen betrachtet ($C([0,1]), \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$).
- Es gibt vielfältige Anwendungen innerhalb der Analysis (Integralgleichungen, partielle Differentialgleichungen), sowie der Optimierung, Numerik, Quantenmechanik.
- Die historischen Wurzeln liegen in der Fouriertransformation sowie ähnlichen Transformationen.

Funktionale$\hat{=}$stetige lineare Abbildungen von Funktionenräumen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. Funktion von Funktion ($\rightsquigarrow$Variationsrechnung).
In unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt es viele im Vergleich zur Analysis im $\mathbb{R}^n$ ungewohnte Effekte, z.B.:

i) Surjektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemein nicht injektiv.
Sei $V = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ und $A : V \to V$ sei gegeben durch

$$A(x_n)_n = A(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

$AV = V$ (A ist surjektiv), aber $A(x_1, 0, 0, \ldots) = 0$ (A ist nicht injektiv.

ii) Injektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemeinen nicht surjektiv.
V wie oben.

$$A(x_n)_n = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

iii) Lineare Selbstabbildungen müssen keine Eigenwerte haben.
$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$, $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ sei gegeben durch ($f \in C([a,b])$, $x \in [a,b]$):

$$(Af)(x) = (\sin x)f(x)$$

A ist der Multiplikationsoperator mit $\sin x$. A hat keine Eigenwerte. Andernfalls gäbe es $f \in C([a,b])$, $f \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$(\sin x)f(x) = \lambda f(x) \forall x \in [a,b]$$

Da $f \neq 0$ existiert ein $x_0 \in [a,b]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass:

$$f(x) \neq 0 \forall]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Also:

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[: \ \sin x = \lambda = \text{konstant} \lightning$$

In der Funktionalanalysis untersucht man verschiedene Abschwächungen des Begriffs 'Eigenwert'.

iv) Lineare Abbildungen sind im Allgemeinen nicht stetig.
$V = \{p : [-2,2] \to \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom}\}$, versehen mit der gleichmässigen Konvergenz, d.h.

$$(p_j)_j \to p \text{ in } V \Leftrightarrow \|p_j - p\|_\infty \to 0 \text{ für } j \to \infty$$

Sei $A : V \to V$ definiert durch $Ax^n = 3^n x^n$ und sei $p_j(x) = \frac{1}{(2.5)^j} x^j$. Dann $\|p_j\|_\infty \to 0$ für $j \to \infty$, d.h. $p_j \to 0$ in V für $j \to \infty$, aber

$$\|Ap_j\|_\infty = \sup_{x \in [-2,2]} \left| \frac{3^j}{2.5^j} x^j \right| = \frac{3^j 2^j}{2.5^j} = \left(\frac{6}{2.5}\right)^j \to \infty$$

für $j \to \infty$, d.h. $Ap_j \not\to 0 = A0$, d.h. A ist insbesondere nicht stetig.

1 Beispiele normierter Räume

Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Den trivialen Vektorraum $\{0\}$ schließen wir aus.

{def1.1}

Definition 1.1
Sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty[$ heißt Halbnorm, falls

a) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in X$

b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich c) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, so heißt p eine Norm. Das Paar (X, p) heißt (halb-)normierter Raum.
Ist p bekannt, so heißt X (halb-)normierter Raum. Normen werden mit $\|\cdot\|$ (statt p) bezeichnet.

Bemerkung

i) Aus a) folgt $p(0) = 0$ (wähle $\lambda = 0$).

ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x, y) := \|x - y\| \; \forall x, y \in X$ eine Metrik auf X.

{def1.2}

Definition 1.2
Sei X ein normierter Raum.

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq X$ ist eine Cauchyfolge, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N: \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \|x_n - x\| < \varepsilon$$

c) X ist ein Banachraum, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bemerkung
In normierten Räumen ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

Beispiel
$\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum mit jeder der folgenden Normen ($x = (x_1, \ldots, x_n)$):

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$$

//

{prop1.3}

Proposition 1.3
In einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ auf X gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\frac{1}{c} \|x\| \leq |||x||| \leq c \|x\| \; \forall x \in X$$

Beweis: O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$.

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

ist eine Norm auf X. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf X und $e_j := (0,\dots,0,1_j,0,\dots,0)$, $1 \le j \le n$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \|e_j\| \le \underbrace{\left(\max_{j=1,\dots,n} \|e_j\| \right)}_{=:c} \sum_{j=1}^{n} |x_j| = c \, \|x\|_1$$

Also: $\|x\| \le c\,\|x\|_1$ für ein $c > 0$ und alle $x \in X$ und $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|_1) \to [0,\infty]$ ist stetig.
$S = \{x \in X \mid \|x\|_1 = 1\}$ kompakt ($\Leftrightarrow$beschränkt und abgeschlossen). Dann folgt: $\min_{x\in S} \|x\| = \delta > 0$ mit $\delta = \|\tilde{x}\|$ mit $\|\tilde{x}\|_1 = 1$.

$$\|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \min_{\tilde{x}\in S} \|\tilde{x}\| \, \|x\|_1 \le \frac{1}{\delta} \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \|x\|_1$$

□

{satz1.4}

Satz 1.4 Minkowskische Ungleichung, Version für Folgen
Für $x, y \in \ell^p$, $1 \le p < \infty$, gilt $\|x + y\| \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

Beweis: $p = 1.\surd$ Sei also $p > 1$. Wir zeigen die äquivalente Ungleichung

$$\|x + y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p)\, \|x + y\|_p^{p-1}$$

Sei $x = (x_n)_n$ und $y = (y_n)_n$. Dann mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nach der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\le \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\|_p \, \|x + y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \, \|x + y\|_p^{p/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\, \|x + y\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Da außerdem gilt: $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\,\|x\|_p$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \ell^p$ und $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum.
Behauptung: $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$ ist vollständig, d.h. ein Banachraum.

Beweis: Sei (x_n) eine Cauchyfolge in ℓ^p. Wir schreiben $(x_n) = (x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$, $x_m^{(n)} \in \mathbb{K}$. Für alle $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $|y_m| \leq \|y\|_p$.

$$(x_n)_n \text{ Cauchyfolge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n,k \geq N : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon$$

Aus

$$|x_m^{(n)} - x_m^{(k)}| \leq \|x_n - x_k\|_p$$

folgt: Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ ist $(x_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ist vollständig).
Sei $x_m := \lim_{n\to\infty} x_m^{(n)}$ und $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Es bleibt zu zeigen: $x \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N} : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n,k \geq N$. Insbesondere gilt für $M \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |x_m^{(n)} - x_m^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n,k \geq N$$

Mit $k \to \infty$ gilt $\forall M \in \mathbb{N} \forall n \geq N$:

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |x_m^{(n)} - x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

M war beliebig und somit folgt:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^{(n)} - x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \forall n \geq N$$

Somit ist $x_N - x \in \ell^p$ und $x = x - x_N + x_N \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

□

{satz1.5}

Satz 1.5
Sei $(X, \|\cdot\|^*)$ ein halbnormierter Raum.

a) $N := \{x \in X \mid \|x\|^* = 0\}$ ist ein Untervektorraum von X.

b) $\|[x]\| := \|x\|^*$ definiert eine Norm auf X/N.

c) Ist X vollständig, d.h. in X konvergiert jede Cauchyfolge, so ist X/N ein Banachraum.

Beweis:

a) $\surd$

b) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse: Seien $x, y \in X$ mit $[x] = [y]$. Zu zeigen: $\|x\|^* = \|y\|^*$.

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N \Leftrightarrow \|x - y\|^* = 0$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|\,\|x\|^* - \|y\|^*\,| \leq \|x - y\|^*$$

zeigt $\|x\|^* = \|y\|^*$. Homogenität und Dreiecksungleichung folgen nun direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $\|\cdot\|^*$.

$$\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^* = 0 \Leftrightarrow x \in N \Leftrightarrow x \sim 0 \Leftrightarrow [x] = [0]$$

c) Folgt aus:

$$([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X/N \Leftrightarrow ([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X$$

□

Beispiel *Die L^p–Räume*

Sei I ein Intervall, dann ist $(I, B(I), \lambda_1)$ ein Maßraum (gleiche Überlegungen für einen Maßraum $(X, \mathscr{A}, \mu)$). Sei $\mathscr{L}^\infty(I) := \{f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ messbar}, \exists N \in B(I) \text{ mit } \lambda_1(N) = 0, f|_{I\setminus N} \text{ ist beschränkt}\}$.

$$\|f\|^*_{L^\infty} := \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \sup_{t\in I\setminus N} |f(t)| = \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \|f|_{I\setminus N}\|_\infty$$

Es gilt:

i) $f \in \mathscr{L}^\infty(I) \Rightarrow \|f\|^*_{L^\infty} < \infty$

ii) Zu $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ gibt es eine messbare Nullmenge N mit $\|f\|^*_{L^\infty} := \|f|_{I\setminus N}\|_\infty$.

Beweis: Zu $r \in \mathbb{N}$ wählen wir eine messbare Nullmenge N_r mit $\left\|f|_{I\setminus N_r}\right\|_\infty \leq \|f\|^*_{L^\infty} + \frac{1}{r}$. Dann ist $N := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} N_r$ auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f\|^*_{L^\infty} \leq \|f|_{I\setminus N}\|_\infty \leq \left\|f|_{I\setminus N_r}\right\|_\infty \leq \|f\|^*_{L^\infty} + \frac{1}{r} \forall r \in \mathbb{N}$$

Da r beliebig ist, folgt die Behauptung. □

iii) $(\mathscr{L}^\infty(I), \|\cdot\|^*_{L^\infty})$ ist ein halbnormierter Vektorraum.

Beweis: Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung, alle weiteren Eigenschaften folgen direkt. Seien $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^\infty(I)$ und N_1, N_2 messbare Nullmengen gemäß ii).

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\|^*_{L^\infty} &= \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \|(f_1 + f_2)_{I\setminus N}\|_\infty \\
&\leq \left\|(f1 + f_2)|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty \\
&\leq \left\|f_1|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty + \left\|f_2|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty \\
&\leq \left\|f_1|_{I\setminus N_1}\right\|\infty + \left\|f_2|_{I\setminus N_2}\right\|_\infty \\
&= \|f_1\|^*_{L^\infty} + \|f_2\|^*_{L^\infty}
\end{aligned}$$

□

iv) $(\mathscr{L}^\infty(I), \|\cdot\|^*_{L^\infty})$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent.

Beweis: Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathscr{L}^\infty(I)$. Nach ii) existieren messbare Nullmengen $N_{n,m}$ mit

$$\|f_n - f_m\|^*_{L^\infty} = \left\|(f_n - f_m)|_{I\setminus N_{n,m}}\right\|_\infty$$

Sei $N = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} N_{n,m}$ (abzählbare Vereinigung). Dies ist auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f_n - f_m\|^*_{L^\infty} = \|(f_n - f_m)|_{I\setminus N}\|_\infty$$

Also ist $(f_n|_{I\setminus N})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(\ell^\infty(I\setminus N), \|\cdot\|_\infty)$. Daher existiert $g \in \ell^\infty(I\setminus N)$ und $f_n|_{I\setminus N} \xrightarrow{n\to\infty} g$ in $\ell^\infty(I\setminus N)$. Setze $f(t) = \begin{cases} g(t) & t \in I\setminus N \\ 0 & t \in N \end{cases}$. Dann ist f beschränkt und als punktweiser Limes der messbaren Funktionenfolge $(f_n \chi_{I\setminus N})_{n\in\mathbb{N}}$ wieder messbar. Daraus folgt:

$$\|f_n - f\|^*_{L^\infty} \le \|(f_n - f)_{I\setminus N}\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

//