

Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Grundlagen der Funktionalanalysis

Im Zweifel immer das Richtige nehmen.

Prof. Dr. B. Jacob

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Beispiele normierter Räume	7

Vorwort

Übungszettel:

- Immer Mittwochs, Abgabe: In der Vorlesung
- Keine Abgabepflicht, aber Bonussystem: 50% der Punkte \Rightarrow 0.3 Bonus, 75% der Punkte \Rightarrow 2 Notenschritte Bonus
- Mündliche Prüfung

Literatur: Werner - Funktionalanalysis, Springer Verlag, ISBN 3-540-43586-7

Motivation: Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit unendlichdimensionalen Vektorräumen (über \mathbb{R} oder \mathbb{C}), in denen der Konvergenzbegriff gegeben ist (Topologie), sowie den stetigen linearen Abbildungen (Operatoren) zwischen ihnen.

- Funktionen werden als Punkte bzw. als Elemente in Funktionenräumen betrachtet ($C([0, 1])$, $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$).
- Es gibt vielfältige Anwendungen innerhalb der Analysis (Integralgleichungen, partielle Differentialgleichungen), sowie der Optimierung, Numerik, Quantenmechanik.
- Die historischen Wurzeln liegen in der Fouriertransformation sowie ähnlichen Transformationen.

Funktionale $\hat{=}$ stetige lineare Abbildungen von Funktionenräumen nach \mathbb{R} oder \mathbb{C} , d.h. Funktion von Funktion (\rightsquigarrow Variationsrechnung).

In unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt es viele im Vergleich zur Analysis im \mathbb{R}^n ungewohnte Effekte, z.B.:

- i) Surjektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemeinen nicht injektiv.
Sei $V = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ und $A: V \rightarrow V$ sei gegeben durch

$$A(x_n)_n = A(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

$AV = V$ (A ist surjektiv), aber $A(x_1, 0, 0, \dots) = 0$ (A ist nicht injektiv).

- ii) Injektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemeinen nicht surjektiv.
 V wie oben.

$$A(x_n)_n = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

- iii) Lineare Selbstabbildungen müssen keine Eigenwerte haben.

$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$, $A : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ sei gegeben durch ($f \in C([a, b])$, $x \in [a, b]$):

$$(Af)(x) = (\sin x)f(x)$$

A ist der Multiplikationsoperator mit $\sin x$. A hat keine Eigenwerte. Andernfalls gäbe es $f \in C([a, b])$, $f \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$(\sin x)f(x) = \lambda f(x) \forall x \in [a, b]$$

Da $f \neq 0$ existiert ein $x_0 \in [a, b]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass:

$$f(x) \neq 0 \forall x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Also:

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[: \sin x = \lambda = \text{konstant} \neq$$

In der Funktionalanalysis untersucht man verschiedene Abschwächungen des Begriffs 'Eigenwert'.

- iv) Lineare Abbildungen sind im Allgemeinen nicht stetig.

$V = \{p : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom}\}$, versehen mit der gleichmässigen Konvergenz, d.h.

$$(p_j)_j \rightarrow p \text{ in } V \Leftrightarrow \|p_j - p\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty$$

Sei $A : V \rightarrow V$ definiert durch $Ax^n = 3^n x^n$ und sei $p_j(x) = \frac{1}{(2.5)^j} x^j$. Dann $\|p_j\|_\infty \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$, d.h. $p_j \rightarrow 0$ in V für $j \rightarrow \infty$, aber

$$\|Ap_j\|_\infty = \sup_{x \in [-2, 2]} \left| \frac{3^j}{2.5^j} x^j \right| = \frac{3^j 2^j}{2.5^j} = \left(\frac{6}{2.5} \right)^j \rightarrow \infty$$

für $j \rightarrow \infty$, d.h. $Ap_j \not\rightarrow 0 = A0$, d.h. A ist insbesondere nicht stetig.

1

Beispiele normierter Räume

Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Den trivialen Vektorraum $\{0\}$ schließen wir aus.

{def1.1}

Definition 1.1

Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $p: X \rightarrow [0, \infty[$ heißt **Halbnorm**, falls

- a) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in X$
- b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich c) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, so heißt p eine **Norm**. Das Paar (X, p) heißt **(halb-)normierter Raum**.

Ist p bekannt, so heißt X **(halb-)normierter Raum**. Normen werden mit $\|\cdot\|$ (statt p) bezeichnet.

Bemerkung

- i) Aus a) folgt $p(0) = 0$ (wähle $\lambda = 0$).
- ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x, y) := \|x - y\| \forall x, y \in X$ eine **Metrik auf X** .

{def1.2}

Definition 1.2

Sei X ein normierter Raum.

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ist eine **Cauchyfolge**, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N: \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \|x_n - x\| < \varepsilon$$

c) X ist ein **Banachraum**, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bemerkung

In normierten Räumen ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

Beispiel

\mathbb{K}^n ist ein Banachraum mit jeder der folgenden Normen ($x = (x_1, \dots, x_n)$):

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|$$

//

{prop1.3}

Proposition 1.3

In einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ auf X gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\frac{1}{c} \|x\| \leq \|x\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in X$$

Beweis: O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$.

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

ist eine Norm auf X . Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf X und $e_j := (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$, $1 \leq j \leq n$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| \leq \underbrace{\left(\max_{j=1, \dots, n} \|e_j\| \right)}_{=:c} \sum_{j=1}^n |x_j| = c \|x\|_1$$

Also: $\|x\| \leq c \|x\|_1$ für ein $c > 0$ und alle $x \in X$ und $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow [0, \infty]$ ist stetig.

$S = \{x \in X \mid \|x\|_1 = 1\}$ kompakt (\Leftrightarrow beschränkt und abgeschlossen). Dann folgt: $\min_{x \in S} \|x\| = \delta > 0$ mit $\delta = \|\tilde{x}\|$ mit $\|\tilde{x}\|_1 = 1$.

$$\|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \min_{\tilde{x} \in S} \|\tilde{x}\| \|x\|_1 \leq \frac{1}{\delta} \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \|x\|_1$$

□

{satz1.4}

Satz 1.4 Minkowskische Ungleichung, Version für Folgen

Für $x, y \in \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, gilt $\|x + y\| \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Beweis: $p = 1, \sqrt{\quad}$ Sei also $p > 1$. Wir zeigen die äquivalente Ungleichung

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}$$

Sei $x = (x_n)_n$ und $y = (y_n)_n$. Dann mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nach der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\|_p \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} + \|y\|_p \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Da außerdem gilt: $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \ell^p$ und $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum.

Behauptung: $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$ ist vollständig, d.h. ein Banachraum.

Beweis: Sei (x_n) eine Cauchyfolge in ℓ^p . Wir schreiben $(x_n) = (x_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$, $x_m^{(n)} \in \mathbb{K}$. Für alle $y = (y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $|y_m| \leq \|y\|_p$.

$$(x_n)_n \text{ Cauchyfolge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, k \geq N : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon$$

Aus

$$|x_m^{(n)} - x_m^{(k)}| \leq \|x_n - x_k\|_p$$

folgt: Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ ist $(x_m^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{K} (\mathbb{K} ist vollständig).

Sei $x_m := \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)}$ und $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Es bleibt zu zeigen: $x \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N} : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n, k \geq N$. Insbesondere gilt für $M \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{m=1}^M |x_m^{(n)} - x_m^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n, k \geq N$$

Mit $k \rightarrow \infty$ gilt $\forall M \in \mathbb{N} \forall n \geq N$:

$$\left(\sum_{m=1}^M |x_m^{(n)} - x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

M war beliebig und somit folgt:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^{(n)} - x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \forall n \geq N$$

Somit ist $x_N - x \in \ell^p$ und $x = x - x_N + x_N \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. □

□

{satz1.5}

Satz 1.5

Sei $(X, \|\cdot\|^*)$ ein halbnormierter Raum.

- a) $N := \{x \in X \mid \|x\|^* = 0\}$ ist ein Untervektorraum von X .
- b) $\|[x]\| := \|x\|^*$ definiert eine Norm auf X/N .
- c) Ist X vollständig, d.h. in X konvergiert jede Cauchyfolge, so ist X/N ein Banachraum.

Beweis:

- a) ✓

- b) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse: Seien $x, y \in X$ mit $[x] = [y]$. Zu zeigen: $\|x\|^* = \|y\|^*$.

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N \Leftrightarrow \|x - y\|^* = 0$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|\|x\|^* - \|y\|^*| \leq \|x - y\|^*$$

zeigt $\|x\|^* = \|y\|^*$. Homogenität und Dreiecksungleichung folgen nun direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $\|\cdot\|^*$.

$$\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^* = 0 \Leftrightarrow x \in N \Leftrightarrow x \sim 0 \Leftrightarrow [x] = [0]$$

- c) Folgt aus:

$$([x_n])_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X/N \Leftrightarrow ([x_n])_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X$$

□

Beispiel Die L^p -Räume

Sei I ein Intervall, dann ist $(I, B(I), \lambda_1)$ ein Maßraum (gleiche Überlegungen für einen Maßraum (X, \mathcal{A}, μ)). Sei $\mathcal{L}^\infty(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar, } \exists N \in B(I) \text{ mit } \lambda_1(N) = 0, f|_{I \setminus N} \text{ ist beschränkt}\}$.

$$\|f\|_{L^\infty}^* := \inf_{\substack{N \in B(I) \\ \lambda_1(N)=0}} \sup_{t \in I \setminus N} |f(t)| = \inf_{\substack{N \in B(I) \\ \lambda_1(N)=0}} \|f|_{I \setminus N}\|_\infty$$

Es gilt:

- i) $f \in \mathcal{L}^\infty(I) \Rightarrow \|f\|_{L^\infty}^* < \infty$
 ii) Zu $f \in \mathcal{L}^\infty(I)$ gibt es eine messbare Nullmenge N mit $\|f\|_{L^\infty}^* := \|f|_{I \setminus N}\|_\infty$.

Beweis: Zu $r \in \mathbb{N}$ wählen wir eine messbare Nullmenge N_r mit $\|f|_{I \setminus N_r}\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}^* + \frac{1}{r}$. Dann ist $N := \bigcup_{r \in \mathbb{N}} N_r$ auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f\|_{L^\infty}^* \leq \|f|_{I \setminus N}\|_\infty \leq \|f|_{I \setminus N_r}\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}^* + \frac{1}{r} \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

Da r beliebig ist, folgt die Behauptung. □

- iii) $(\mathcal{L}^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty}^*)$ ist ein halbnormierter Vektorraum.

Beweis: Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung, alle weiteren Eigenschaften folgen direkt. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\infty(I)$ und N_1, N_2 messbare Nullmengen gemäß ii).

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_{L^\infty}^* &= \inf_{\substack{N \in B(I) \\ \lambda_1(N)=0}} \|(f_1 + f_2)|_{I \setminus N}\|_\infty \\ &\leq \|(f_1 + f_2)|_{I \setminus (N_1 \cup N_2)}\|_\infty \\ &\leq \|f_1|_{I \setminus (N_1 \cup N_2)}\|_\infty + \|f_2|_{I \setminus (N_1 \cup N_2)}\|_\infty \\ &\leq \|f_1|_{I \setminus N_1}\|_\infty + \|f_2|_{I \setminus N_2}\|_\infty \\ &= \|f_1\|_{L^\infty}^* + \|f_2\|_{L^\infty}^* \end{aligned}$$

□

iv) $(\mathcal{L}^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty}^*)$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent.

Beweis: Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^\infty(I)$. Nach ii) existieren messbare Nullmengen $N_{n,m}$ mit

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty}^* = \|(f_n - f_m)|_{I \setminus N_{n,m}}\|_\infty$$

Sei $N = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} N_{n,m}$ (abzählbare Vereinigung). Dies ist auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty}^* = \|(f_n - f_m)|_{I \setminus N}\|_\infty$$

Also ist $(f_n|_{I \setminus N})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(\ell^\infty(I \setminus N), \|\cdot\|_\infty)$. Daher existiert $g \in \ell^\infty(I \setminus N)$ und $f_n|_{I \setminus N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ in $\ell^\infty(I \setminus N)$. Setze $f(t) = \begin{cases} g(t) & t \in I \setminus N \\ 0 & t \in N \end{cases}$. Dann ist f beschränkt und als punktweiser Limes der messbaren Funktionenfolge $(f_n \chi_{I \setminus N})_{n \in \mathbb{N}}$ wieder messbar. Daraus folgt:

$$\|f_n - f\|_{L^\infty}^* \leq \|(f_n - f)|_{I \setminus N}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

//

Sei $N_p := \{f \in \mathcal{L}^p(I) \mid \|f\|_p^q \text{ st} = 0\} = \{f : I \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar und } f = 0 \text{ fast überall}\}$, $L^p(I) = \mathcal{L}^p(I)/N_p$, $\|[f]\|_p = \|f\|_p^*$. Dann ist $(L^p(I), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Bemerkung

Ein nicht vollständiger Raum X kann stets in einen Banachraum 'eingebettet' werden. Sei $CF(X) := \{(x_n)_n \subset X \mid (x_n)_n \text{ ist eine Cauchyfolge}\}$. Auf $CF(X)$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

Sei $\hat{X} := \{[(x_n)] \mid (x_n)_n \in CF(X)\}$ mit $\|[(x_n)]\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. Dann gilt: $(\hat{X}, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum und indem man X mit den konstanten Folgen in \hat{X} identifiziert, wird X in natürlicher Weise in \hat{X} dicht eingebettet (d.h. $X \subset \hat{X}$ und $\bar{X} = \hat{X}$).

\hat{X} nennt man auch die **Vervollständigung von X** .

{satz1.6}

Satz 1.6Sei X ein normierter Raum.

- i) Aus $x_n \rightarrow x$ in X und $y_n \rightarrow y$ in X folgt $x_n + y_n \rightarrow x + y$.
- ii) Aus $\lambda_n \rightarrow \lambda$ in \mathbb{K} und $x_n \rightarrow x$ in X folgt $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$.
- iii) Aus $x_n \rightarrow x$ folgt $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

BemerkungAus iii) folgt: Konvergente Folgen in X sind beschränkt.**Beweis:**

i) folgt aus

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0$$

ii)

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| \leq |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\|$$

iii) folgt aus

$$0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

□

{satz1.7}

Satz 1.7Ist U ein Untervektorraum des normierten Raumes X , so ist sein Abschluss \bar{U} ebenfalls ein Untervektorraum.**Beweis:** Seien $x, y \in \bar{U}$. Dann existieren Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n$ in U mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Also:

$$x_n + y_n \rightarrow x + y \Rightarrow x + y \in \bar{U}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \bar{U}$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_n$ in U mit $x_n \rightarrow x$. Es folgt:

$$\lambda x_n \rightarrow \lambda x \Rightarrow \lambda x \in \bar{U}$$

□

Bemerkung

Ist $\dim U < \infty$, dann ist U abgeschlossen. Im Allgemeinen ist ein Untervektorraum nicht abgeschlossen.

{satz1.8}

Satz 1.8

Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$ zwei Normen auf X . Dann sind äquivalent:

- i) $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$ sind äquivalent, d.h. $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|x\| \leq \|x\| \leq c_2 \|x\| \forall x \in X$.
- ii) Eine Folge ist bezüglich $\|\cdot\|$ konvergent genau dann, wenn sie bezüglich $\|\cdot\|$ konvergent ist.
- iii) Eine Folge ist eine $\|\cdot\|$ -Nullfolge genau dann, wenn sie eine $\|\cdot\|$ -Nullfolge ist.

Beweis: i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) klar. Es bleibt zu zeigen: iii) \Rightarrow i).

Angenommen es gibt kein $c_2 > 0$, so dass die Ungleichung $\|x\| \leq c_2 \|x\| \forall x \in X$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in X : \|x_n\| > n \|x_n\|$. Setze $y_n := \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Dann folgt:

$$\|y_n\| = \left\| \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Also ist $(y_n)_n$ eine $\|\cdot\|$ -Nullfolge und mit iii) somit auch eine $\|\cdot\|$ -Nullfolge. Aber

$$\|y_n\| = \left\| \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n \|x_n\|} \|x_n\| > \frac{n \|x_n\|}{n \|x_n\|} = 1 \not\rightarrow 0$$

Die Existenz von $c_1 > 0 : c_1 \|x\| \leq \|x\| \forall x \in X$ lässt sich analog zeigen. □

Bemerkung

Zusätzliche Äquivalenz:

- iv) $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, \|\cdot\|)$ besitzen die selben Cauchyfolgen. Somit: $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig $\Leftrightarrow (X, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Beispiel

Aufgabe 3 zeigt, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|$ auf $C^1[a, b]$ nicht äquivalent sind. //

{lemma1.9}

Lemma 1.9 Rieszssches Lemma

Sei U ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raums X mit $U \neq X$. Ferner sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\forall u \in U : \|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta$$

Beweis: Sei $x \in X \setminus U$.

$$d := \inf\{\|x - u\| \mid u \in U\} > 0$$

Denn andernfalls gäbe es eine Folge $(u_n)_n \in U$ mit $u_n \rightarrow x$ und x läge dann in $\bar{U} = U$ (da U abgeschlossen). Es gilt: $d < \frac{d}{1-\delta}$. Dann existiert ein $u_\delta \in U$, für das gilt: $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$. Setze $x_\delta := \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}$. Dann ist $\|x_\delta\| = 1$ und es gilt für $u \in U$ beliebig:

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x - u_\delta\|} \|x - (u_\delta + \|x - u_\delta\| u)\| \geq \frac{1}{\|x - u_\delta\|} d > 1 - \delta$$

□

Bemerkung

Das Rieszssche Lemma gilt nicht für $\delta = 0$.

Beispiel

Sei $X = \{x \in C[0, 1] \mid x(1) = 0\}$. $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum. $U = \left\{x \in X \mid \int_0^1 x(t) dt = 0\right\}$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum.

Angenommen es gibt ein Element $x \in X$ mit $\|x - u\|_\infty \geq 1 = \|x\|_\infty \forall u \in U$. Setze $x_n(t) = 1 - t^n$. Dann sind $x_n \in X$, $\|x_n\|_\infty = 1$ und $\int_0^1 x_n(t) dt = 1 - \frac{1}{n+1}$. Setze

$$\lambda_n = \frac{\int_0^1 x(t) dt}{1 - \frac{1}{n+1}}, \quad u_n = x - \lambda_n x_n \in U$$

Daraus folgt: $\|x - u_n\|_\infty \geq 1$ und $\|x - u_n\|_\infty = \|\lambda_n x_n\|_\infty = |\lambda_n| \geq 1$.

$$\left| \int_0^1 x(t) dt \right| = |\lambda_n| \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| \geq \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aber $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, $\|x\|_\infty \leq 1$ und $x(1) = 0$. //

Beweis: $[a, b] = [0, 1]$. Sei $f \in C[0, 1]$.

$$P_n(s) = B_n(s, f) := \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} s^i (1-s)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Zu zeigen: $\|P_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Da f gleichmässig stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|s-t| \leq \sqrt{\delta}$ und es folgt $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$.

Es gilt für $|s-t| > \delta$ mit $\alpha = \frac{2\|f\|_\infty}{\delta}$:

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s)| + |f(t)| \leq 2\|f\|_\infty = \alpha\delta \leq \alpha(s-t)^2$$

Somit gilt für beliebige $s, t \in [0, 1]$:

$$|f(s) - f(t)| \leq \alpha(s-t)^2 + \varepsilon$$

Setze $y_t(s) := (t-s)^2$. Dann folgt:

$$-\varepsilon - \alpha y_t(s) < f(s) - f(t) < \alpha y_t(s) + \varepsilon \quad \forall s, t \in [0, 1]$$

Wir bestimmen nun die Bernstein-Polynome zu $f_j(s) = s^j$ für $j = 0, 1, 2$:

$$B_n(s, f_0) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} s^i (1-s)^{n-i} = (s + (1-s))^n = 1$$

$$B_n(s, f_1) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} s^i (1-s)^{n-i} \frac{i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} s^{i+1} (1-s)^{n-(i+1)} = s(s + (1-s))^{n-1} = s$$

$$\begin{aligned} B_n(s, f_2) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} s^i (1-s)^{n-i} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} s^i (1-s)^{n-i} \frac{i}{n} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} s^{i+1} (1-s)^{n-(i+1)} \frac{i+1}{n} \\ &= \frac{s}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} s^{i+1} (1-s)^{n-(i+1)} \frac{i}{n} \\ &= \frac{s}{n} + s \frac{n-1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} s^i (1-s)^{(n-1)-i}}_{B_{n-1}(s, f_1)} \frac{i}{n-1} \\ &= \frac{s}{n} + s^2 \frac{n-1}{n} \\ &= s^2 + \frac{s}{n} - \frac{s^2}{n} \\ &= s^2 + \frac{s(1-s)}{n} \end{aligned}$$

1 $\binom{n}{i} \frac{i}{n} = \binom{n-1}{i-1}$

Es folgt:

$$-B_n(s, \varepsilon + \alpha y_t) = B_n(s, -\varepsilon - \alpha y_t) \leq B_n(s, f - f(t)) \leq B_n(s, \alpha y_t + \varepsilon)$$

Für alle $s, t \in [0, 1]$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |P_n(s) - f(t)| &= |B_n(s, f) - f(t)B_n(s, f_0)| \\ &= |B_n(s, f) - B_n(s, f(t))| \\ &= |B_n(s, f - f(t))| \leq B_n(s, \alpha y - t + \varepsilon) \\ &= B_n(s, \varepsilon + \alpha(t^2 - 2st + t^2)) = B_n(s, \varepsilon) + \alpha B_n(s, t^2) - 2\alpha B_n(s, st) + \alpha B_n(s, s^2) \\ &= \varepsilon + \alpha t^2 - 2\alpha ts + \alpha \left(s^2 + \frac{s(1-s)}{n} \right) \end{aligned}$$

Mit $s = t$ folgt dann:

$$|P_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon + \alpha t^2 - 2\alpha t^2 + \alpha \left(t^2 + \frac{t(i-1)}{n} \right) \leq \varepsilon \frac{\alpha}{n}$$

Also:

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\alpha}{n}$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz. □

{kor1.10}

Korollar 1.10

$C[a, b]$ ist separabel.

Beweis: Aus dem Approximationssatz folgt: $C[a, b] = \overline{\text{lin}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$ mit $x_n(t) = t^n$. □

{satz1.11}

Satz 1.11

Sei $1 \leq p < \infty$. $C[a, b]$ ist dicht in $L^p[a, b]$.

Beweis: Zu zeigen: $\overline{C[a, b]} = L^p[a, b]$ (Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_p$)

Sei $B([a, b])$ die σ -Algebra der Borelmengen auf $[a, b]$. Aus der Definition des Lebesgueintegrals folgt: $\text{lin}\{\chi_A \mid A \in B([a, b])\}$, der Raum der Stufenfunktionen, liegt dicht in $L^p[a, b]$. Das Lebesgemaß ist **regulär**, d.h.:

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(O) \mid A \subseteq O, O \text{ offen}\}$$

Daraus folgt für alle $A \in B([a, b])$, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O mit $A \subseteq O$ existiert so dass:

$$\|\chi_A - \chi_O\|_p = \|\chi_{O \setminus A}\|_p = \lambda(O \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Somit:

$$\begin{aligned} \{\chi_A \mid A \in B([a, b])\} &\subseteq \overline{\{\chi_O \mid O \text{ offen}\}} \\ L^p[a, b] &= \overline{\text{lin}\{\chi_A \mid A \in B([a, b])\}} = \overline{\text{lin}\{\chi_O \mid O \text{ offen}\}} \end{aligned}$$

Jede offene Menge O ist eine abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen I_j . Aus $\lambda(O) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j)$ folgt: $\chi_O \in \overline{\text{lin}\{\chi_I \mid I \text{ offenes Intervall}\}}$. Hieraus folgt nun:

$$L^p[a, b] = \overline{\text{lin}\{\chi_I \mid I \text{ offenes Intervall}\}}$$

Es genügt zu zeigen: Zu jedem offenen Intervall $I \subset [a, b]$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine stetige Funktion f mit $\|f - \chi_I\|_p < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ und $a \leq a' < b' \leq b$. Wähle $f(x)$ geeignet. Dann folgt, dass $C[a, b]$ dicht in $L^p[a, b]$ liegt. \square

{kor1.12}

Korollar 1.12

$1 \leq p < \infty$. L^p ist separabel.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Polynome dicht in $L^p[a, b]$ liegen. Sei $f \in L^p[a, b]$. Nach ?? existiert eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen mit $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz existieren Polynome P_n mit $\|f_n - P_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}$. Wegen

$$\|g\|_p = \left(\int_a^b |g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{\infty}$$

für $g \in C[a, b]$ folgt $\|f_n - P_n\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Also folgt:

$$\|P_n - f\|_p \leq \|P_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$$

\square

Bemerkung

Ohne Beweis sei noch erwähnt:

- i) T kompakter Raum $\Rightarrow (C(T), \|\cdot\|_{\infty})$ ist separabel.
- ii) Ω offene Menge (z.B. \mathbb{R}). $L^p(\Omega)$ ist separabel, $1 \leq p < \infty$.

{def1.13}

Definition 1.13

Sei X ein normierter Raum und $A \subseteq X$. Der **Abstand** von $x \in X$ zu A ist gegeben durch:

$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$$

Bemerkung

Es gilt:

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

{satz1.14}

Satz 1.14

Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Untervektorraum. X/U bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in U$. Für $x \in X$ sei $[x] = x + U \in X/U$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Es gilt:

- i) $\|x\| = d(x, U)$ definiert eine Halbnorm auf X/U .
- ii) Ist U abgeschlossen, so ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X/U .
- iii) Ist X vollständig und U abgeschlossen, so ist X/U ein Banachraum.

Beweis:

- i) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert, denn: $[x_1] = [x_2]$ impliziert $x_1 = x_2 + u$ für ein $u \in U$, also $d(x_1, U) = d(x_2, U)$.

□