Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Grundlagen der Funktionalanalysis

Im Zweifel immer das Richtige nehmen.
Prof. Dr. B. Jacob

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Übungszettel:

- Immer Mittwochs, Abgabe: In der Vorlesung
- Keine Abgabepflicht, aber Bonussystem: 50% der Punkte$\Rightarrow$ 0.3 Bonus, 75% der Punkte$\Rightarrow$ 2 Notenschritte Bonus
- Mündliche Prüfung

Literatur: Werner - Funktionalanalysis, Springer Verlag, ISBN 3-540-43586-7

Motivation: Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit unendlichdimensionalen Vektorräumen (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), in denen der Konvergenzbegriff gegeben ist (Topologie), sowie den stetigen linearen Abbildungen (Operatoren) zwischen ihnen.

- Funktionen werden als Punkte bzw. als Elemente in Funktionenräumen betrachtet ($C([0,1]), \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$).
- Es gibt vielfältige Anwendungen innerhalb der Analysis (Integralgleichungen, partielle Differentialgleichungen), sowie der Optimierung, Numerik, Quantenmechanik.
- Die historischen Wurzeln liegen in der Fouriertransformation sowie ähnlichen Transformationen.

Funktionale$\hat{=}$stetige lineare Abbildungen von Funktionenräumen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. Funktion von Funktion ($\rightsquigarrow$Variationsrechnung).
In unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt es viele im Vergleich zur Analysis im $\mathbb{R}^n$ ungewohnte Effekte, z.B.:

i) Surjektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemein nicht injektiv.
Sei $V = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ und $A: V \to V$ sei gegeben durch

$$A(x_n)_n = A(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

$AV = V$ (A ist surjektiv), aber $A(x_1, 0, 0, \ldots) = 0$ (A ist nicht injektiv.

ii) Injektive lineare Selbstabbildungen sind im Allgemeinen nicht surjektiv.
V wie oben.

$$A(x_n)_n = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

iii) Lineare Selbstabbildungen müssen keine Eigenwerte haben.
$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$, $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ sei gegeben durch ($f \in C([a,b])$, $x \in [a,b]$):

$$(Af)(x) = (\sin x) f(x)$$

A ist der Multiplikationsoperator mit $\sin x$. A hat keine Eigenwerte. Andernfalls gäbe es $f \in C([a,b])$, $f \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$(\sin x) f(x) = \lambda f(x) \forall x \in [a,b]$$

Da $f \neq 0$ existiert ein $x_0 \in [a,b]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass:

$$f(x) \neq 0 \forall]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Also:

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[: \ \sin x = \lambda = \text{konstant} \lightning$$

In der Funktionalanalysis untersucht man verschiedene Abschwächungen des Begriffs 'Eigenwert'.

iv) Lineare Abbildungen sind im Allgemeinen nicht stetig.
$V = \{p : [-2,2] \to \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom}\}$, versehen mit der gleichmässigen Konvergenz, d.h.

$$(p_j)_j \to p \text{ in } V \Leftrightarrow \|p_j - p\|_\infty \to 0 \text{ für } j \to \infty$$

Sei $A : V \to V$ definiert durch $Ax^n = 3^n x^n$ und sei $p_j(x) = \frac{1}{(2.5)^j} x^j$. Dann $\|p_j\|_\infty \to 0$ für $j \to \infty$, d.h. $p_j \to 0$ in V für $j \to \infty$, aber

$$\|Ap_j\|_\infty = \sup_{x \in [-2,2]} \left| \frac{3^j}{2.5^j} x^j \right| = \frac{3^j 2^j}{2.5^j} = \left(\frac{6}{2.5} \right)^j \to \infty$$

für $j \to \infty$, d.h. $Ap_j \not\to 0 = A0$, d.h. A ist insbesondere nicht stetig.

1 Beispiele normierter Räume

Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Den trivialen Vektorraum $\{0\}$ schließen wir aus.

{def1.1}

Definition 1.1
Sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to [0,\infty[$ heißt Halbnorm, falls

a) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in X$

b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Gilt zusätzlich c) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, so heißt p eine Norm. Das Paar (X, p) heißt (halb-)normierter Raum.
Ist p bekannt, so heißt X (halb-)normierter Raum. Normen werden mit $\|\cdot\|$ (statt p) bezeichnet.

Bemerkung

i) Aus a) folgt $p(0) = 0$ (wähle $\lambda = 0$).

ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x,y) := \|x-y\| \; \forall x, y \in X$ eine Metrik auf X.

{def1.2}

Definition 1.2
Sei X ein normierter Raum.

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq X$ ist eine Cauchyfolge, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N: \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \ \|x_n - x\| < \varepsilon$$

c) X ist ein Banachraum, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bemerkung
In normierten Räumen ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

Beispiel
$\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum mit jeder der folgenden Normen ($x = (x_1, \ldots, x_n)$):

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$$

//

{prop1.3}

Proposition 1.3
In einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ auf X gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\frac{1}{c} \|x\| \leq |||x||| \leq c \|x\| \ \forall x \in X$$

Beweis: O.B.d.A. $X = \mathbb{K}^n$.

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

ist eine Norm auf X. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf X und $e_j := (0,\dots,0,1_j,0,\dots,0)$, $1 \le j \le n$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \|e_j\| \le \underbrace{\left(\max_{j=1,\dots,n} \|e_j\| \right)}_{=:c} \sum_{j=1}^{n} |x_j| = c\,\|x\|_1$$

Also: $\|x\| \le c\,\|x\|_1$ für ein $c > 0$ und alle $x \in X$ und $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|_1) \to [0,\infty]$ ist stetig.
$S = \{x \in X \mid \|x\|_1 = 1\}$ kompakt ($\Leftrightarrow$beschränkt und abgeschlossen). Dann folgt: $\min_{x\in S} \|x\| = \delta > 0$ mit $\delta = \|\tilde{x}\|$ mit $\|\tilde{x}\|_1 = 1$.

$$\|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \min_{\tilde{x}\in S} \|\tilde{x}\| \, \|x\|_1 \le \frac{1}{\delta} \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \|x\|_1 = \frac{1}{\delta} \|x\|_1$$

□

{satz1.4}

Satz 1.4 Minkowskische Ungleichung, Version für Folgen
Für $x, y \in \ell^p$, $1 \le p < \infty$, gilt $\|x + y\| \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

Beweis: $p = 1.\surd$ Sei also $p > 1$. Wir zeigen die äquivalente Ungleichung

$$\|x+y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p)\,\|x+y\|_p^{p-1}$$

Sei $x = (x_n)_n$ und $y = (y_n)_n$. Dann mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nach der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\le \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n + y_n|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\|_p \, \|x+y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \, \|x+y\|_p^{p/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\,\|x+y\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Da außerdem gilt: $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\,\|x\|_p$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \ell^p$ und $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum.
Behauptung: $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \le p < \infty$ ist vollständig, d.h. ein Banachraum.

Beweis: Sei (x_n) eine Cauchyfolge in ℓ^p. Wir schreiben $(x_n) = (x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$, $x_m^{(n)} \in \mathbb{K}$. Für alle $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $|y_m| \le \|y\|_p$.

$$(x_n)_n \text{ Cauchyfolge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n,k \ge N : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon$$

Aus

$$|x_m^{(n)} - x_m^{(k)}| \le \|x_n - x_k\|_p$$

folgt: Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ ist $(x_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ist vollständig).
Sei $x_m := \lim_{n\to\infty} x_m^{(n)}$ und $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Es bleibt zu zeigen: $x \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N} : \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n,k \ge N$. Insbesondere gilt für $M \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |x_m^{(n)} - x_m^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon \forall n,k \ge N$$

Mit $k \to \infty$ gilt $\forall M \in \mathbb{N} \forall n \ge N$:

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |x_m^{(n)} - x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon$$

M war beliebig und somit folgt:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^{(n)} - x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \forall n \ge N$$

Somit ist $x_N - x \in \ell^p$ und $x = x - x_N + x_N \in \ell^p$ und $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

□

{satz1.5}

Satz 1.5
Sei $(X, \|\cdot\|^*)$ ein halbnormierter Raum.

a) $N := \{x \in X \mid \|x\|^* = 0\}$ ist ein Untervektorraum von X.

b) $\|[x]\| := \|x\|^*$ definiert eine Norm auf X/N.

c) Ist X vollständig, d.h. in X konvergiert jede Cauchyfolge, so ist X/N ein Banachraum.

Beweis:

a) $\checkmark$

b) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse: Seien $x,y \in X$ mit $[x]=[y]$. Zu zeigen: $\|x\|^* = \|y\|^*$.

$$[x]=[y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow x-y \in N \Leftrightarrow \|x-y\|^* = 0$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|\,\|x\|^* - \|y\|^*\,| \le \|x-y\|^*$$

zeigt $\|x\|^* = \|y\|^*$. Homogenität und Dreiecksungleichung folgen nun direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $\|\cdot\|^*$.

$$\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^* = 0 \Leftrightarrow x \in N \Leftrightarrow x \sim 0 \Leftrightarrow [x]=[0]$$

c) Folgt aus:

$$([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X/N \Leftrightarrow ([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } X$$

□

Beispiel *Die L^p−Räume*
Sei I ein Intervall, dann ist $(I,B(I),\lambda_1)$ ein Maßraum (gleiche Überlegungen für einen Maßraum $(X,\mathscr{A},\mu)$). Sei $\mathscr{L}^\infty(I) := \{f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ messbar}, \exists N \in B(I) \text{ mit } \lambda_1(N)=0, f|_{I\setminus N} \text{ ist beschränkt}\}$.

$$\|f\|^*_{L^\infty} := \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \sup_{t\in I\setminus N} |f(t)| = \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \|f|_{I\setminus N}\|_\infty$$

Es gilt:

i) $f \in \mathscr{L}^\infty(I) \Rightarrow \|f\|^*_{L^\infty} < \infty$

ii) Zu $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ gibt es eine messbare Nullmenge N mit $\|f\|^*_{L^\infty} := \|f|_{I\setminus N}\|_\infty$.

Beweis: Zu $r \in \mathbb{N}$ wählen wir eine messbare Nullmenge N_r mit $\left\|f|_{I\setminus N_r}\right\|_\infty \le \|f\|^*_{L^\infty} + \frac{1}{r}$. Dann ist $N := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} N_r$ auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f\|^*_{L^\infty} \le \|f|_{I\setminus N}\|_\infty \le \left\|f|_{I\setminus N_r}\right\|_\infty \le \|f\|^*_{L^\infty} + \frac{1}{r} \forall r \in \mathbb{N}$$

Da r beliebig ist, folgt die Behauptung. □

iii) $(\mathscr{L}^\infty(I), \|\cdot\|^*_{L^\infty})$ ist ein halbnormierter Vektorraum.

Beweis: Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung, alle weiteren Eigenschaften folgen direkt. Seien $f_1,f_2 \in \mathscr{L}^\infty(I)$ und N_1,N_2 messbare Nullmengen gemäß ii).

$$\|f_1+f_2\|^*_{L^\infty} = \inf_{\substack{N\in B(I)\\ \lambda_1(N)=0}} \|(f_1+f_2)_{I\setminus N}\|_\infty$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\|(f1+f_2)|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty \\
&\leq \left\|f_1|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty + \left\|f_2|_{I\setminus(N_1\cup N_2)}\right\|_\infty \\
&\leq \left\|f_1|_{I\setminus N_1}\right\|_\infty + \left\|f_2|_{I\setminus N_2}\right\|_\infty \\
&= \|f_1\|^*_{L^\infty} + \|f_2\|^*_{L^\infty}
\end{aligned}
$$

□

iv) $(\mathscr{L}^\infty(I), \|\cdot\|^*_{L^\infty})$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent.

Beweis: Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathscr{L}^\infty(I)$. Nach ii) existieren messbare Nullmengen $N_{n,m}$ mit

$$\|f_n - f_m\|^*_{L^\infty} = \left\|(f_n - f_m)|_{I\setminus N_{n,m}}\right\|_\infty$$

Sei $N = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} N_{n,m}$ (abzählbare Vereinigung). Dies ist auch eine messbare Nullmenge und es gilt:

$$\|f_n - f_m\|^*_{L^\infty} = \|(f_n - f_m)|_{I\setminus N}\|_\infty$$

Also ist $(f_n|_{I\setminus N})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(\ell^\infty(I\setminus N), \|\cdot\|_\infty)$. Daher existiert $g \in \ell^\infty(I\setminus N)$ und $f_n|_{I\setminus N} \xrightarrow{n\to\infty} g$ in $\ell^\infty(I\setminus N)$. Setze $f(t) = \begin{cases} g(t) & t\in I\setminus N \\ 0 & t\in N\end{cases}$. Dann ist f beschränkt und als punktweiser Limes der messbaren Funktionenfolge $(f_n\chi_{I\setminus N})_{n\in\mathbb{N}}$ wieder messbar. Daraus folgt:

$$\|f_n - f\|^*_{L^\infty} \leq \|(f_n - f)_{I\setminus N}\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

//

Sei $N_p := \{f\in\mathscr{L}^p(I) \mid \|f\|^a_p st = 0\} = \{f : I\to\mathbb{K} \mid f \text{ messbar und } f = 0 \text{ fast überall}\}, L^p(I) = \mathscr{L}^p(I)/N_p$, $\|[f]\|_p = \|f\|^*_p$. Dann ist $(L^p(I), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Bemerkung

Ein nicht vollständiger Raum X kann stets in einen Banachraum 'eingebettet' werden. Sei $CF(X) := \{(x_n)_n \subset X \mid (x_n)_n \text{ ist eine Cauchyfolge}\}$. Auf $CF(X)$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

Sei $\hat{X} := \{[(x_n)] \mid (x_n)_n \subseteq CF(X)\}$ mit $\|[(x_n)_n]\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$. Dann gilt: $(\hat{X}, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum und indem man X mit den konstanten Folgen in $\hat{X}$ identifiziert, wird X in natürlicher Weise in $\hat{X}$ dicht eingebettet (d.h. $X\subset\hat{X}$ und $\bar{X} = \hat{X}$).
$\hat{X}$ nennt man auch die Vervollständigung von X.

Satz 1.6 {satz1.6}
Sei X ein normierter Raum.

i) Aus $x_n \to x$ in X und $y_n \to y$ in X folgt $x_n + y_n \to x + y$.

ii) Aus $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$ und $x_n \to x$ in X folgt $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

iii) Aus $x_n \to x$ folgt $\|x_n\| \to \|x\|$.

Bemerkung
Aus iii) folgt: Konvergente Folgen in X sind beschränkt.

Beweis:

i) folgt aus
$$\|x_n + y_n - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$$

ii)
$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| \leq |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\|$$

iii) folgt aus
$$0 \leq |\, \|x_n\| - \|x\| \,| \leq \|x_n - x\| \to 0$$

□

Satz 1.7 {satz1.7}
Ist U ein Untervektorraum des normierten Raumes X, so ist sein Abschluss $\bar{U}$ ebenfalls ein Untervektorraum.

Beweis: Seien $x, y \in \bar{U}$. Dann existieren Folgen $(x_n)_n$, (y_n) in U mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Also:
$$x_n + y_n \to x + y \Rightarrow x + y \in \bar{U}$$
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \bar{U}$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_n$ in U mit $x_n \to x$. Es folgt:
$$\lambda x_n \to \lambda x \Rightarrow \lambda x \in \bar{U}$$

□

Bemerkung
Ist $\dim U < \infty$, dann ist U abgeschlossen. Im Allgemeinen ist ein Untervektorraum nicht abgeschlossen.

{satz1.8}

Satz 1.8
Seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf X. Dann sind äquivalent:

i) $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ sind äquivalent, d.h. $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|x\| \leq |||x||| \leq c_2 \|x\| \; \forall x \in X$.

ii) Eine Folge ist bezüglich $\|\cdot\|$ konvergent genau dann, wenn sie bezüglich $|||\cdot|||$ konvergent ist.

iii) Eine Folge ist eine $\|\cdot\|$ −Nullfolge genau dann, wenn sie eine $|||\cdot|||$−Nullfolge ist.

Beweis: i)⇒ii)⇒iii) klar. Es bleibt zu zeigen: iii)⇒i).
Angenommen es gibt kein $c_2 > 0$, so dass die Ungleichung $|||x||| \leq c_2 \|x\| \; \forall x \in X$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\exists x_n \in X : |||x_n||| > n \|x_n\|$. Setze $y_n := \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Dann folgt:

$$\|y_n\| = \left\| \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n} \to 0$$

Also ist $(y_n)_n$ eine $\|\cdot\|$ −Nullfolge und mit iii) somit auch eine $|||\cdot|||$−Nullfolge. Aber

$$|||y_n||| = \left|\left|\left| \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right|\right|\right| = \frac{1}{n \|x_n\|} |||x_n||| > \frac{n \|x_n\|}{n \|x_n\|} = 1 \lightning$$

Die Existenz von $c_1 > 0 : c_1 \|x\| \leq |||x||| \forall x \in X$ lässt sich analog zeigen. □

Bemerkung
Zusätzliche Äquivalenz:

iv) $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, |||\cdot|||)$ besitzen die selben Cauchyfolgen. Somit: $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig⇔ $(X, |||\cdot|||)$ ist vollständig.

Beispiel
Aufgabe 3 zeigt, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|$ auf $C^1[a, b]$ nicht äquivalent sind. //

{lemma1.9}

Lemma 1.9 **Rieszsches Lemma**
Sei U ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raums X mit $U \neq X$. Ferner sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\forall u \in U : \|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta$$

Beweis: Sei $x \in X \setminus U$.

$$d := \inf\{\|x-u\| \mid u \in U\} > 0$$

Denn andernfalls gäbe es eine Folge $(u_n)_n \in U$ mit $u_n \to x$ und x läge dann in $\bar{U} = U$ (da U abgeschlossen). Es gilt: $d < \frac{d}{1-\delta}$. Dann existiert ein $u_\delta \in U$, für das gilt: $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$.
Setze $x_\delta := \frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|}$. Dann ist $\|x_\delta\| = 1$ und es gilt für $u \in U$ beliebig:

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x-u_\delta\|} \|x - (u_\delta + \|x-u_\delta\| u)\| \geq \frac{1}{\|x-u_\delta\|} d > 1-\delta$$

$\square$

Bemerkung
Das Rieszsche Lemma gilt nicht für $\delta = 0$.

Beispiel
Sei $X = \{x \in C[0,1] \mid x(1) = 0\}$. $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum. $U = \left\{x \in X \middle| \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum.
Angenommen es gibt ein Element $x \in X$ mit $\|x-u\|_\infty \geq 1 = \|x\|_\infty \, \forall u \in U$. Setze $x_n(t) = 1 - t^n$.
Dann sind $x_n \in X$, $\|x_n\|_\infty = 1$ und $\int_0^1 x_n(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n+1}$. Setze

$$\lambda_n = \frac{\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t}{1-\frac{1}{n+1}}, \qquad u_n = x - \lambda_n x_n \in U$$

Daraus folgt: $\|x - u_n\|_\infty \geq 1$ und $\|x-u_n\|_\infty = \|\lambda_n x_n\|_\infty = |\lambda_n| \geq 1$.

$$\left| \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t \right| = |\lambda_n| \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| \geq \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| \geq 1 n \forall \in \mathbb{N}$$

Aber $x \colon [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig, $\|x\|_\infty \leq 1$ und $x(1) = 0$. //

Beweis: $[a,b]=[0,1]$. Sei $f \in C[0,1]$.

$$P_n(s)=B_n(s,f):=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-i}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Zu zeigen: $\|P_n-f\|_\infty \to 0$. Da f gleichmässig stetig ist, existiert zu $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ mit $|s-t|\le\sqrt{\delta}$ und es folgt $|f(s)-f(t)|\le\varepsilon$.
Es gilt für $|s-t|>\delta$ mit $\alpha=\frac{2\|f\|_\infty}{\delta}$:

$$|f(s)-f(t)|\le|f(s)|+|f(t)|\le 2\,\|f\|_\infty=\alpha\delta\le\alpha(s-t)^2$$

Somit gilt für beliebige $s,t\in[0,1]$:

$$|f(s)-f(t)|\le\alpha(s-t)^2+\varepsilon$$

Setze $y_t(s):=(t-s)^2$. Dann folgt:

$$-\varepsilon-\alpha y_t(s)<f(s)-f(t)<\alpha y_t(s)+\varepsilon\forall s,t\in[0,1]$$

Wir bestimmen nun die Bernstein-Polynome zu $f_j(s)=s^j$ für $j=0,1,2$:

$$B_n(s,f_0)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-i}=(s+(1-s))^n=1$$

$$B_n(s,f_1)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-i}\frac{i}{n}=^{1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}s^{i+1}(1-s)^{n-(i+1)}=s(s-(1-s))^{n-1}=s$$

$$\begin{aligned}
B_n(s,f_2)&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^i(1-s)^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}s^i(1-s)^{n-i}\frac{i}{n}\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}s^{i+1}(1-s)^{n-(i+1)}\frac{i+1}{n}\\
&=\frac{s}{n}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}s^{i+1}(1-s)^{n-(i+1)}\frac{i}{n}\\
&=\frac{s}{n}+s\frac{n-1}{n}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}s^i(1-s)^{(n-1)-i}\frac{i}{n-1}}_{B_{n-1}(s,f_1)}\\
&=\frac{s}{n}+s^2\frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

1 $\binom{n}{i}\frac{i}{n}=\binom{n-1}{i-1}$

$$= s^2 + \frac{s}{n} - \frac{s^2}{n}$$
$$= s^2 + \frac{s(1-s)}{n}$$

Es folgt:

$$-B_n(s, \varepsilon + \alpha y_t) = B_n(s, -\varepsilon - \alpha y_t) \leq B_n(s, f - f(t)) \leq B_n(s, \alpha y_t + \varepsilon)$$

Für alle $s, t \in [0,1]$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
|P_n(s) - f(t)| &= |B_n(s,f) - f(t) B_n(s, f_0)| \\
&= |B_n(s,f) - B_n(s, f(t))| \\
&= |B_n(s, f - f(t))| \leq B_n(s, \alpha y - t + \varepsilon) \\
&= B_n(s, \varepsilon + \alpha(t^2 - 2st + t^2)) = B_n(s,\varepsilon) + \alpha B_n(s,t^2) - 2\alpha B_n(s,st) + \alpha B_n(s,s^2) \\
&= \varepsilon + \alpha t^2 - 2\alpha ts + \alpha \left(s^2 + \frac{s(1-s)}{n} \right)
\end{aligned}$$

Mit $s = t$ folgt dann:

$$|P_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon + \alpha t^2 - 2\alpha t^2 + \alpha \left(t^2 + \frac{t(i-1)}{n} \right) \leq \varepsilon \frac{\alpha}{n}$$

Also:

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\alpha}{n}$$

Hieraus folgt die gleichmässige Konvergenz. □

Korollar 1.10 {kor1.10}
$C[a,b]$ ist separabel.

Beweis: Aus dem Approximationssatz folgt: $C[a,b] = \overline{\text{lin}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$ mit $x_n(t) = t^n$. □

{satz

Satz 1.11
Sei $1 \leq p < \infty$. $C[a,b]$ ist dicht in $L^p[a,b]$.

Beweis: Zu zeigen: $\overline{C[a,b]} = L^p[a,b]$ (Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_p$)
Sei $B([a,b])$ die $\sigma-$Algebra der Borelmengen auf $[a,b]$. Aus der Definition des Lebesgueintegrals folgt: $\operatorname{lin}\{\chi_A \mid A \in B([a,b])\}$, der Raum der Stufenfunktionen, liegt dicht in $L^p[a,b]$. Das Lebesgzemaß ist regulär, d.h.:

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(O) \mid A \subseteq O, O \text{ offen}\}$$

Daraus folgt für alle $A \in B([a,b])$, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O mit $A \subseteq O$ existiert so dass:

$$\left\|\chi_A - \chi_O\right\|_p = \left\|\chi_{O \setminus A}\right\|_p = \lambda(O \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Somit:

$$\{\chi_A \mid A \in B([a,b])\} \subseteq \overline{\{\chi_O \mid O \text{ offen}\}}$$
$$L^p[a,b] = \overline{\operatorname{lin}\{\chi_A \mid A \in B([a,b])\}} = \overline{\operatorname{lin}\{\chi_O \mid O \text{ offen}\}}$$

Jede offene Menge O ist eine abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen I_j. Aus $\lambda(O) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j)$ folgt: $\chi_O \in \overline{\operatorname{lin}\{\chi_I \mid I \text{ offenes Intervall}\}}$. Hieraus folgt nun:

$$L^p[a,b] = \overline{\operatorname{lin}\{\chi_I \mid I \text{ offenes Intervall}\}}$$

Es genügt zu zeigen: Zu jedem offenen Intervall $I \subset [a,b]$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine stetige Funktioen f mit $\left\|f - \chi_I\right\|_p < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ und $a \leq a' < b' \leq b$. Wähle $f(x)$ geeignet. Dann folgt, dass $C[a,b]$ dicht in $L^p[a,b]$ liegt. $\square$

{kor1.12}

Korollar 1.12
$1 \leq p < \infty$. L^p ist separabel.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Polynome dicht in $L^p[a,b]$ liegen. Sei $f \in L^p[a,b]$. Nach **??** existiert eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen mit $\|f_n - f\|_p \to 0$. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz existieren Polynome P_n mit $\|f_n - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. Wegen

$$\|g\|_p = \left(\int_a^b |g|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|g\|_\infty$$

für $g \in C[a,b]$ folgt $\|f_n - P_n\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Also folgt:

$$\|P_n - f\|_p \leq \|P_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \to 0$$

□

Bemerkung
Ohne Beweis sei noch erwähnt:

i) T kompakter Raum$\Rightarrow (C(T), \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel.

ii) Ω offene Menge (z.B. $\mathbb{R}$). $L^p(\Omega)$ ist separabel, $1 \leq p < \infty$.

{def1.13}

Definition 1.13
Sei X ein normierter Raum und $A \subseteq X$. Der Abstand von $x \in X$ zu A ist gegeben durch:

$$d(x,A) := \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\}$$

Bemerkung
Es gilt:

$$d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

{satz

Satz 1.14
Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Untervektorraum. X/U bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in U$. Für $x \in X$ sei $[x] = x + U \in X/U$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Es gilt:

i) $\|x\| = d(x,U)$ definiert eine Halbnorm auf X/U.

ii) Ist U abgeschlossen, so ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X/U.

iii) Ist X vollständig und U abgeschlossen, so ist X/U ein Banachraum.

Beweis:

i) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert, denn: $[x_1] = [x_2]$ impliziert $x_1 = x_2 + u$ für ein $u \in U$, also $d(x_1,U) = d(x_2,U)$.

$$\begin{aligned}\|\lambda[x]\| &= \|[\lambda x]\| \\ &= d(\lambda x,U) \\ &= \inf\{\|\lambda x - u\| \mid u \in U\} \\ &= \inf\{\|\lambda x - \lambda u\| \mid u \in U\} \\ &= \inf\{|\lambda|\,\|x - u\| \mid u \in U\} \\ &= |\lambda| d(x,U) \\ &= |\lambda|\,\|x\|\end{aligned}$$

Seien $x_1, x_2 \in X$, sei $\varepsilon > 0$. Es existieren $u_1, u_2 \in U$ mit

$$\|x_i - u_i\| \le \|[x_i]\| + \varepsilon, i = 1,2$$

$\|[x_1]+[x_2]\| = \inf\{\|x_1+x_2-u\| \mid u \in U\} \le \|x_1+x_2-(u_1+u_2)\| \le \|x_i - u_i\| + \|x_2 - u_2\| \le \|[x_1]\| + \|[x_2]\|$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, gilt:

$$\|[x_1]+[x_2]\| \le \|[x_1]\| + \|[x_2]\|$$

$\|[0]\| = d(0,U) = 0$, da $0 \in U$.

ii)

$$\|[0]\| = 0 \Leftrightarrow d(x,U) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{U} = U \Leftrightarrow [x] = [0]$$

iii) Wir benutzen **??**. Sei also $(x_k)_k$ eine Folge in X mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|[x_k]\| < \infty$. Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{\infty} [x_k]$ konvergiert in X/U.
O.B.d.A.: $\|x_k\| \le \|[x_k]\| + 2^{-k}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|[x_k]\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

Nun folgt, da X vollständig ist, mit **??**:

$$\exists x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$$

$$\left\| [x] - \sum_{k=1}^{n} [x_k] \right\| = \left\| \left[x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right] \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Also: $[x] = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k]$

$\square$

Beispiel
Sei $D \subseteq [0,1]$ abgeschlossen. Wir betrachten den Quotienten $C[0,1]/U$ mit $U := \{x \in C[0,1] \mid x|_D = 0\}$. Die Quotientenabbildung $(x \in C[0,1] \mapsto [x] \in C[0,1]/U)$ identifiziert Funktionenm die auf D übereinstimmen. Die Elemente von $C[0,1]/U$ können als Funktionen auf D angesehen werden.
//

2 Funktionale und Operatoren

{def2.1}

Definition 2.1
Eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen heißt stetiger Operator. Ist der Bildraum der Skalarenkörper $\mathbb{K}$, so sagen wir Funktional statt Operator

Im Folgenden schreiben wir Tx statt $T(X)$, wenn $T: X \to Y$ ein stetiger Operator und $x \in X$.

{satz2.2}

Satz 2.2
Seien X und Y normierte Räume und sei $T: X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

i) T ist stetig.

ii) T ist stetig in 0.

iii) $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \|x\| \,\forall x \in X$.

iv) T ist gleichmäßig stetig.

Beweis:

iii)⇒iv) Ist klar, da aus iii) Lipschitz-Stetigkeit folgt.

iv)⇒i)⇒ Klar.

ii)⇒iii) Angenommen, iii) ist falsch, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X : \|Tx_n\| > n \|x_n\|$. Setze $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$.
Hieraus folgt: $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, aber

$$\|Ty_n\| = \left\| \frac{1}{n \|x_n\| \, Tx_n} \right\| = \frac{1}{n \|x_n\|} \|Tx_n\| > 1$$

Somit ist $(y_n)_n$ eine Nullfolge, aber Ty_n konvergiert nicht gegen 0, was ii) widerspricht.

□

{def2.3}

Definition 2.3
Die kleinste in iii) vorkommende Zahl M wird mit $\|T\|$ bezeichhnet, d.h.

$$\|T\| = \inf\{M \geq 0 \mid \|Tx\| \leq M\,\|x\|\ \forall x \in X\}$$

{satz2.4}

Satz 2.4
Sei $T: X \to Y$ ein stetiger Operator. Dann gilt:

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$$

sowie

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|\ \forall x \in X$$

Beweis: Klar:

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \left\| T\frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

und

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \alpha\in]0,1]}} \|T(\alpha x)\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \alpha\in]0,1]}} |\alpha|\,\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Setze $M_0 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$. Zeige: $\|T\| = M_0$.
Aus $\|Tx\| \leq M_0\,\|x\|\ \forall x \in X$ folgt schon $\|T\| \leq M_0$.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $x_\varepsilon \neq 0$, $x_\varepsilon \in X$ mit

$$\frac{\|Tx_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \geq M_0(1-\varepsilon) \Leftrightarrow \|Tx_\varepsilon\| \geq M_0(1-\varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|$$

. Daraus folgt: $\|T\| \geq M_0(1-\varepsilon)$, also insgesamt $\|T\| = M_0$. Aus dieser Gleichheit folgt dann auch $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|\ \forall x \in X$. □

Bemerkung
Da stetige Operatoren die Einheitskugel $\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ auf eine beschränkte Menge abbildet, spricht man auch von beschränkten Operatoren.

Sei $L(X,Y) := \{T: X \to Y \mid T$ ist linear unabhängig und stetig$\}$. $L(X,Y)$ ist bezüglich der algebraischen Operationen $(S+T)x = Sx + Tx$ und $S(\alpha x) = \alpha Sx$ ein Vektorraum. Weiter ist $L(X,Y) \neq \emptyset$, da der Nulloperator $x \mapsto 0$ in $L(X,Y)$ liegt. Sei $L(X) := L(X,X)$.

{satz2.5}

Satz 2.5

i) $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$ definiert eine Norm aus $L(X,Y)$, die Operatornorm.

ii) Ist Y vollständig, so ist auch $L(X,Y)$ vollständig.

Beispiel
$T\colon \ell^2 \to \mathbb{R}$, $T(x_n)_n = x_1$, ist sicherlich linear. T ist stetig, da:
Zu zeigen: $\exists M \geq 0 : |T(x_n)_n| \leq M \|(x_n)\|_{\ell^2}\ \forall (x_n)_\in \ell^2$. Sei $(x_n)_n \in \ell^2$ beliebig.

$$|T(x_n)_n| = |x_1| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_n)_n\|_{\ell^2}$$

Also ist T stetig und $\|T\| \leq 1$.
$x = e_1 \in \ell^2$. $|Te_1| = 1 = \|e_1\|_{\ell^2}$. Hieraus folgt $\|T\| = 1$. //

Beweis:

i) $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$ klar. $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$ klar. Zur Dreiecksungleichung: Sei $\|x\| \leq 1$.

$$\|(S+T)(x)\| = \|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \leq \|S\| + \|T\|$$

$$\|S+T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(S+T)(x)\| \leq \|S\| + \|T\|$$

ii) Sei (T_n) eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$. Sei $x \in X$ fest. $(T_n x) \subseteq Y$ ist eine Cauchyfolge in Y[1]. Da Y vollständig ist, existiert $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \forall x \in X$. Die so definierte Abbildung $T\colon X \to Y$ ist linear:

$$T(\lambda x_1+\mu x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x_1+\mu x_2) = \lim_{n\to\infty} \lambda T_n(x_1)+\mu T_n(x_2) = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n x_1+\mu \lim_{n\to\infty} T_n x_2 = \lambda T x_1+\mu T x_2$$

Es bleibt zu zeigen: $T \in L(X,Y)$ (d.h. $\|T\| < \infty$) und $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$.
Zu $\varepsilon > 0$ beliebig wÃ¤hle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon \forall n,m \geq n_0$. Sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Wähle $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \leq n_0$ mit $\left\|T_{m_0}x - Tx\right\| \leq \varepsilon$.

$$\forall n \geq n_0 : \|T_n x - Tx\| \leq \left\|T_n x - T_{m_0} x\right\| + \left\|T_{m_0} x - Tx\right\| \leq \left\|T_n - T_{m_0}\right\| \|x\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Also:

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n x - Tx\| \leq 2\varepsilon$$

Also ist $T_n - T \in L(X,Y)$ und $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$ sowie $T = T - T_n + T_n \in L(X,Y)$. □

1 $\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\|_{L(X,Y)} \|x\|_X$

Bemerkung

i) $B_x := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ Einheitskugel, $S_x = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ Einheitssphäre. Somit: $T_n \to T$ bezüglich der Operatornorm$\Leftrightarrow$ $T_n x \to Tx$ gleichmässig auf B_x.

ii) Konvergenz in der Operatornorm ist stärker als punktweise Konvergenz.
Seien $X = C_0$ und $Y = \mathbb{R}$. $T_n x = T_n(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = x_n$ für $x = (x_k)_k \in C_0$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. $T_n x = x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. T_n konvergiert punktweise gegen den 0−Operator, aber $\|T_n - 0\| = \|T_n\| = 1$, da $|T_n x| = |x_n| \leq \|x\|_\infty$ und $|T_n e_n| = 1$ und somit keine Konvergenz in der Operatornorm.

{satz2.6}

Satz 2.6
Ist D ein dichter Unterraum des normierten Raumes X, Y sei ein Banachraum und $T \in L(D,Y)$, so existiert genau eine stetige Fortsetzung $\hat{T} \in L(X,Y)$, d.h. $\hat{T}|_D = T$. Zusätzlich: $\|T\| = \|\hat{T}\|$.

Beweis:

Eindeutigkeit: Seien T_j, $j = 1,2$, zwei stetige lineare Fortsetzungen von T und $x \in X \setminus D$. Es existiert eine Folge $(x_n)_n \subseteq D$ mit $x_n \to x$. Also ist

$$T_1 x = T_1(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx = \lim_{n\to\infty} T_2 x = T_2(\lim_{n\to\infty} x_n) = T_2 x$$

Existenz: Sei $x \in X \setminus D$. Es existiert wieder eine Folge $(x_n)_n \subseteq D$ mit $x_n \to x$. $(x_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in D. Da $T : D \to Y$ stetig ist, folgt: $(Tx_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in Y. Da Y vollständig ist, existiert ein $y \in Y$ so dass $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. Setze $Tx := y$. Es gilt:

i) $\hat{T}$ ist wohldefiniert. Sei $x \in X$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n, y_n \in D$. Für $z_n := \begin{cases} x_k & n = 2k \\ y_k & n = 2k+1 \end{cases}$ $(z_n = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots))$ gilt $z_n \to x$ und $z_n \in D$. Also existiert $\lim Tz_n$ und somit $\lim Tx_n = \lim Ty_n$.

ii) $\hat{T}|_D = T\surd$. Sei $x \in D$, wähle $x_n = x \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) $\hat{T}$ ist linear. Seien $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$ mit $x_n, y_n \in D$. Dann gilt $\alpha x_n + y_n \in D \to \alpha x + y$.

$$\hat{T}(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n + y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} Ty_n = \alpha \hat{T}x + \hat{T}y$$

iv) $\hat{T}$ ist stetig. Sei $x \in X$. Es existiert eine Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x$.

$$\left\|\hat{T}x\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} Tx_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\| \, \|x_n\| = \|T\| (\lim_{n\to\infty} \|x_n\|) = \|T\| \, \|x\|$$

Also: $\left\|\hat{T}\right\| \leq \|T\|$. $\left\|\hat{T}\right\| \geq \|T\| \surd$ da $\hat{T}$ Fortsetzung. Somit insgesamt: $\left\|\hat{T}\right\| = \|T\|$ □

{lemma2.7}

Lemma 2.7
Für $S \in L(X,Y)$ und $T \in L(Y,Z)$ gilt $TS \in L(X,Z)$ mit $\|TS\| \le \|T\|\,\|S\|$.

Beweis: Die Linearität von TS ist klar und die Stetigkeit folgt aus

$$\|(TS)x\| = \|T(Sx)\| \le \|T\|\,\|Sx\| \le \|T\|\,\|S\|\,\|x\|\ \forall x \in X$$

□

Beispiel

i) Ist $X = Y$ und $T = I$ der identische operator, d.h. $Ix = x$, so gilt $\|T\| = 1$.

ii) Ist X endlichdimensional und Y ein beliebiger normierter Raum, so ist jede lineare Abbildung $T: X \to Y$ stetig.

Beweis: Die Stetigkeit bleibt erhalten, wenn man zu einer äquivalenten Norm auf X und Y übergeht (die Größe der Zahl $\|T\|$ hängt aber von der kokreten Wahl der Norm ab). Auf X sind alle Normen äquivalent, da $\dim X < \infty$. Wir nehmen an, dass X mit der Norm

$$\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$$

versehen ist.

$$\left\|T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i T e_i\right\| \le \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\,\|Te_i\| = \left(\max_{i=1}^n \|Te_i\|\right)\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = \left(\max_{i=1}^n \|Te_i\|\right)\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

□

iii) Setze $T: C[0,1] \to \mathbb{K}$, $Tx = x(0)$. Wir versehen $C[0,1]$ mit der Supremumsnorm. $T \in L(C[0,1],\mathbb{K})$ mit $\|T\| = 1$. Denn:

$$|Tx| = |x(0)| \le \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|_\infty\ \forall x \in C[0,1]$$

Also: $\|x\| \le 1$. Andererseits gilt für die konstante Funktion 1, d.h. $x(t) = 1 \forall t \in [0,1]$: $\|x\|_\infty = 1 = |Tx|$, also $\|T\| = 1$.

iv) $T_g: C[0,1] \to \mathbb{K}$, $T_g(x) = \int_0^1 x(t)d(t)\mathrm{d}t$. Hierbei ist $g \in C[0,1]$ eine gegebene Funktion. Dann gilt:

$$\|T_g\| = \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t$$

Denn:

$$|T_g(x)| = \left|\int_0^1 x(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |x(t)||g(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t\,\|x\|_\infty$$

Sei $\varepsilon > 0$, $x_\varepsilon := \frac{\overline{g(t)}}{|g(t)|+\varepsilon}$. Es folgt direkt: $x_\varepsilon \in C[0,1]$, $\|x_\varepsilon\| \leq 1$.

$$|T_g x_\varepsilon| = \int_0^1 \frac{|g(t)|^2}{|g(t)|+\varepsilon}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{|g(t)|^2-\varepsilon^2}{|g(t)|+\varepsilon}\mathrm{d}t = \int_0^1 |g(t)|-\varepsilon\mathrm{d}t = \int_0^1 |g(t)\mathrm{d}t - \varepsilon$$

$$\|T_g\| = \sup_{\|x\|=\leq 1} |T_g x| \geq \sup_{\varepsilon>0} |T_g x_\varepsilon| \geq \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t$$

//

{def2.8}

Definition 2.8
Sei X, Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T\colon X \to Y$ heißt Quotientenabbildung, wenn T die offene Kugel $\{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ auf die offene Kugel $\{y \in Y \mid \|y\| < 1\}$ abbildet, d.h.

$$T(\{x \in X \mid \|x\| < 1\}) = \{y \in Y \mid \|y\| < 1\} \qquad (*)$$

Bemerkung
Eine Quotientenabbildung ist surjektiv und stetig mit $\|T\| = 1$.

Beweis: $(*)$ und T linear$\Rightarrow$ T surjektiv.

$$\|Tx\| = (1+\varepsilon)\|x\| \left\| T\left(\frac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|}\right)\right\| < (1+\varepsilon)\|x\|$$

Dann folgt: T ist stetig und $\|T\| \leq 1$. Aus

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = 1$$

Hieraus folgt $\|T\| = 1$. □

z2.9}

Satz 2.9
Sei U ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes X. Dann ist die Abbildung $\omega\colon X \to X/U$, $x \mapsto [x]$, eine Quotientenabbildung.

Beweis: ω ist sicherlich linear. Es ist zu zeigen:

$$\omega(\{x \in X \mid \|x\| < 1\}) = \{x \in X/U \mid \|y\| < 1\}$$

'$\subseteq$': Folgt aus:

$$\|\omega(x)\| = \|[x]\| = d(x,U) \leq \|x\| < 1$$

falls $\|x\| < 1$.

'$\supseteq$': Sei $[x] \in X/U$ mit $\|[x]\| < 1$. Dann existiert ein $u \in U$ so dass $\|x - u\| < 1$.

$$\omega(x-u) = [x-u] = [x]$$

□

Bemerkung
Seien X und Y normierte Räume und $T\colon X \to Y$ eine lineare, stetige und bijektive Abbildung. Dann existiert $T^{-1}\colon Y \to X$ linear. T^{-1} muss aber nicht stetig sein.

Beispiel
Identität $I\colon (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ mit $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\mathrm{d}t$. Die Identität ist bijektiv, linear und stetig, da:

$$\|Ix\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\mathrm{d}t \leq \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|_\infty$$

Aber: I^{-1} ist nicht stetig, da für $x_n(t) = t^n$ gilt:

$$\|x_n\|_\infty = 1, \quad \|x_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

//

Bemerkung
Die Stetigkeit von T^{-1} ist wünschenswert. Ist etwa x_1 Lösung von $Tx_1 = y_1$ und x_2 Lösung von $Tx_2 = y_2$, so wird in Anwendung häufig benötigt:

$$y_1 \approx y_2 \Rightarrow x_1 \approx x_2$$

(stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten) Dies ist gerade die Stetigkeit von T^{-1}.

{def2.10}

Definition 2.10
Ein stetiger linearer Operator $T: X \to Y$ heißt Isomorphismus, falls T bijektiv und T^{-1} stetig ist.
Ein linearer Operator heißt isometrisch, falls $\|Tx\| = \|x\| \; \forall x \in X$.
Normierte Räume zwischen denen ein (isometrischer) Isomorphismus existiert, heißen (isometrisch) isomorph. In Zeichen $X \simeq Y$ (bzw. $X \cong Y$).

Bemerkung i) Isomorphismen sind lineare Surjektionen, die der Bedingung $\exists m, M > 0 : m\,\|x\| \leq \|T$
genügen.

ii) Isometrien sind stetig mit Norm 1 und injektiv.

{satz2.11}

Satz 2.11
$c \simeq c_0$.

Beweis: Wir definieren $\ell : x \to \mathbb{K}$ durch

$$\ell x = \ell(x_n)_n := \lim_{n\to\infty} x_n$$

ℓ linear$\surd$.

$$|\ell x| = |\lim_{n\to\infty} x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty, x \in c$$

und für konstante Folgen x gilt $|\ell x| = \|x\|_\infty \Rightarrow \|\ell\| = 1$.
Wir definieren $T: c \to c_0$ durch

$$(Tx)_n := \begin{cases} \ell(x) & n = 1 \\ x_{n-1} - \ell(x) & n \geq 2 \end{cases}, x = (x_n)_n \in c, n \in \mathbb{N}$$

Es gilt:

$$\|Tx\|_\infty = \max\left\{|\ell(x)|, \sup_{n\geq 2}|x_{n-1}-\ell(x)|\right\} \leq |\ell(x)| + \sup_{n\geq 1}|x_n| \leq 2\,\|x\|_\infty$$

D.h. T stetig und linear.
Umgekehrt definieren wir $S\colon c_0 \to c$ durch

$$(Sx)_n := x_{n+1} + x_1, n \in \mathbb{N}$$

$$\|Sx\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_{n+1}+x_1| \leq 2\,\|x\|_\infty$$

Also sind S und T linear und stetig. Weiter gilt:

$$ST = I_c, \qquad TS = I_{c_0}$$

D.h. $S = T^{-1}$ und T ist ein Isomorphismus. □

Bemerkung
Für eine Quotientenabbildung $T\colon X \to Y$ ist $X/\ker(T) \cong Y$.

{satz2.12}

Satz 2.12
Sei X ein normierter Raum und $T \in L(X)$. Konvergiert $\sum_{n=0}^\infty T^n$ in $L(X)$, so ist $I-T$ invertierbar mit

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n$$

(Neumannsche Reihe). Speziell ist die Voraussetzung $\sum T^n$ konvergent erfüllt, wenn X ein Banachraum ist und $\|T\| < 1$. in diesem Fall ist

$$\left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq (1-\|T\|)^{-1}$$

Beweis: Setze $S_m := \sum_{n=0}^m T^n$.

$$(I-T)S_m = S_m(I-T) = I - T^{n+1}$$

In jedem normierten Raum bilden die Glieder einer konvergenten Reihe eine Nullfolge (Beweis wie in $\mathbb{K}$). Also gilt $T^n \to 0$ bezüglich der Operatornorm, d.h. $\lim_{n\to\infty}\|T^n\| = 0$. Die Abbildungen $S \mapsto RS$ und $S \mapsto SR$, $R \in L(X)$ fest, sind stetig auf $L(X)$, denn: $\mathscr{L}\colon L(X) \to L(X)$, $S \mapsto RS$.

$$\|\mathscr{L}S\| = \|RS\| \leq \|R\|\,\|S\|$$

Daraus folgt:

$$I = \lim_{m\to\infty}(I - T^{m+1}) = \lim_{m\to\infty}(I-T)S_m = (I-T)\lim_{m\to\infty} S_m$$

Analog:

$$I = \left(\lim_{m\to\infty} S_m\right)(I-T)$$

Also:

$$(i-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

Für $\|T\| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\|T^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n < \infty$$

$\sum T^n$ ist also absolut konvergent. Da X vollständig ist und mit **??** konvergiert dann $\sum T^n$ und

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\|T^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = (1 - \|T\|)^{-1}$$

□

3

Dualräume und ihre Darstellungen

{def3.1}

Definition 3.1
Der Raum $L(X,\mathbb{K})$ der stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum X heißt der Dualraum von X und wird mit X' bezeichnet.

Bemerkung
Der Dualraum eines normierten Raumes versehen mit der Operatornorm $\|x'\| = \sup_{\|x\|\le 1} |x'(x)|$, $x' \in X'$, ist stets ein Banachraum.

{satz3.2}

Satz 3.2

i) Sei $1 \le p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist die Abbildung $T\colon \ell^q \to (\ell^p)'$ mit

$$(Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y y_n, \quad x = (x_n) \in \ell^q, y = (y_n) \in \ell^p$$

ein isometrischer Isomorphismus.

ii) Dieselbe Abbildungsvorschrift liefert einen isometrischen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(c_0)'$.

Beweis: Sei $1 \le p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $x = (x_n) \in \ell^q$ und $y = (y_n) \in \ell^p$. Nach der Hölderschen Ungleichung ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ absolut konvergent mit

$$|(Tx)(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \le \|xy\|_1 \le \|x\|_q \, \|y\|_p$$

Da T auch linear ist, folgt die Wohldefiniertheit und die Stetigkeit von T mit $\|Tx\| \le \|x\|_q$.

T ist injektiv: Aus $Tx = 0$ folgt $(Tx)(e_n) = x_n$ und somit $x = 0$.

T ist surjektiv und eine Isometrie: Sei $1 < p < \infty$. Sei $y' \in (\ell^p)'$. Es ist zu zeigen: $\exists x \in \ell^q$, $Tx = y'$ und $\|x\|_q \le \|y'\|$. Zu $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := y'(e_n)$ und $x = (x_n)_n$. Setze

$$y_n = \begin{cases} \frac{|x_n|^q}{x_n} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}$$

Für $N \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^{qp-p} = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^q$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |x_n|^q &= \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} y_n y'(e_n) \\ &= y'\left(\sum_{n=1}^{N} y_n e_n\right) \\ &\le \|y'\| \left\|\sum_{n=1}^{N} y_n e_n\right\|_p \\ &= \|y'\| \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|y'\| \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Also:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|y'\| \,\forall N \in \mathbb{N}$$

Und somit: $x \in \ell^q$ und $\|x\|_q \le \|y'\|$. Es gilt auch $Tx = y'$, da

$$(Tx)(e_n) = x_n := y'(e_n) \forall n \in \mathbb{N}$$

Da Tx und y linear sind folgt: Tx und y' stimmen auf $d = \text{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ überein. Da Tx und y' stetig auf ℓ^p, d.h. $\in (\ell^p)'$, stimmen Tx und y' auch auf $\bar{d} = \ell^p$ überein.

$p = 1$: Zu $n \in \mathbb{N}$ setze $x_n = y'(e_n)$ und $x = (x_n)_n$ für $y' \in (\ell^1)'$. Es gilt

$$|x_n| = |y'(e_n)| \le \|y'\| \|e_n\|_1 = \|y'\|$$

Also ist $x \in \ell^\infty$ und $\|x\|_\infty \le \|y'\|$. $Tx = y'$ folgt analog zum Fall $1 < p < \infty$.

zu ii): Sei $y' \in c_0'$. Zu $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n = y'(e_n)$ und $x = (x_n)_n$. Es ist zu zeigen: $x \in \ell^1$, $Tx = y'$ und $\|x\|_1 \leq \|y'\|$. Setze

$$y_n = \begin{cases} \frac{|x_n|}{x_n} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}$$

Dann gilt für $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n = \sum_{n=1}^{N} y_n y'(e_n) = y'\left(\sum_{n=1}^{N} y_n e_n\right) \leq \|y'\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \|y'\|$$

Also: $x \in \ell^1$ und $\|x\|_1 \leq \|y'\|$. $Tx = y'$ in c_0' analog zum Fall $1 < p < \infty$, da $\bar{d} = c_0$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

□

Bemerkung
Es gilt: $(\ell^p)' \cong \ell^q$ und $(c_0)' \cong \ell^1$.

Als nächstes betrachten wir die Räume $L^p[a,b]$. Dazu benötigen wir den folgenden Satz.

{satz3.3}

Satz 3.3 **Satz von Radon-Nikodym**
Σ sei die $\sigma-$Algebra der Borelmengen aus $[a,b]$, λ sei das Lebesgue-Maß auf $[a,b]$ und $\mu: \Sigma \to \mathbb{K}$ sei $\sigma-$additiv. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) Ist $E \in \Sigma$ mit $\lambda(E) = 0$, so ist auch $\mu(E) = 0$.

ii) es existiert eine integrierbare Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{K}$ ($g \in L^1[a,b]$):

$$\mu(E) = \int_E g \mathrm{d}\lambda \forall E \in \Sigma$$

{satz3.4}

Satz 3.4
Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann definiert $T: L^q[a,b] \to (L^p[a,b])'$ mit

$$(Tg)(f) = \int_a^b f g \mathrm{d}\lambda$$

einen isometrischen Isomorphismus.

Beweis: Die Höldersche Ungleichung zeigt, dass für $g \in L^q[a,b]$ Tg ein stetiges Funktional auf $L^p[a,b]$ mit $\|Tg\| \leq \|g\|_{L^q}$ ist. Es gilt sogar: $\|Tg\| = \|g\|_{L^q}$, denn:

$p > 1$: Für

$$f = \frac{\bar{g}}{|g|}\left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^q}}\right)^{\frac{q}{p}}$$

gilt:

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_a^b \frac{|g|^q}{\|g\|_{L^q}^q} \mathrm{d}\lambda = 1$$

und

$$\int fg \mathrm{d}\lambda = \left(\int |g|^{1+q/p} \mathrm{d}\lambda\right) \frac{1}{\|g\|_{L^q}^{q/p}} = \frac{\int |g|^q \mathrm{d}\lambda}{\left(\int |g|^q\right)^{1/p}} = \|g\|_{L^q}$$

Für $p = 1$ analog. Es bleibt zu zeigen: T ist surjektiv. Sei dazu $y' \in (L^p[a,b])'$ beliebig. Wir definieren $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ durch $\mu(E) := y'(\chi_E)$. μ ist wohldefiniert, da $\chi_E \in LL^p[a,b]$. μ ist auch σ−additiv: Seien $(E_n)_n \subseteq \Sigma$ paarweise disjunkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= y'\left(\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}\right)\\
&= y'\left(\lim_{n\to\infty} \chi_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} y'\left(\chi_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} y'\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y'(\chi_{E_i})\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)
\end{aligned}$$

Aus $\lambda(E) = 0$ folgt $\chi_E = 0$ fast überall und sonst $\mu(E) = y'(\chi_E) = 0$. Mit dem Satz von Radon-Nikodym existiert nun ein $g \in L^1[a,b]$ mit

$$y'(\chi_E) = \mu(E) = \int_E g \mathrm{d}\lambda = \int_a^b \chi_E g \mathrm{d}\lambda \forall E \in \Sigma$$

Zeige: $y'(f) = \int_a^b fg \mathrm{d}\lambda$ für $f \in L^\infty[a,b]$. Dies gilt mindestens für charakteristische Funktionen und somit für Stufenfunktionen. Aus $\|\cdot\|_{L^p} \leq (b-a)^{1/p} \|\cdot\|_\infty$ folgt $y' \in (L^\infty[a,b])'$ und $f \mapsto \int_a^b fg \mathrm{d}\lambda$ ist in $(L^\infty[a,b])'$, da $g \in L^1[a,b]$. Also gilt die Behauptung auch auf dem $\|\cdot\|_{L^\infty}$−Abschluss der Stufenfunktionen, d.h. auf $L^\infty[a,b]$ (Maßtheorie).
Zeige: $g \in L^q[a,b]$. Sei $q < \infty$. Setze $f(x) = \frac{|g(x)|^q}{g(x)}$ mit $\frac{0}{0} = 0$. f ist messbar und es gilt

$$|g|^q = fg = |f|^p$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$E_n\{x \in [a,b] \mid |g(x)| \leq n\}$$

Dann ist $\chi_{E_n} f$ in $L^\infty[a,b]$ und es gilt

$$\int_{E_n} |g|^q \mathrm{d}\lambda = \int_a^b \chi_{E_n} f g \mathrm{d}\lambda = y'(\chi_{E_n} f) \leq \|y'\| \, \|\chi_{E_n} f\|_{L^p} = \|y'\| \left(\int_{E_n} |f|^p \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \|y'\| \left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

Da $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ folgt hieraus:

$$\left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|y'\| \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Mit dem Satz von Beppo-Levi folgt nun $\|g\|_{L^q} \leq \|y'\|$. Also $g \in L^q$.
Sei nun $q = \infty$. Setze

$$E := \{x \mid |g(x)| > \|y'\|\}$$

Angenommen $\lambda(E) > 0$, $f = \chi_E \frac{|g|}{g} \in L^\infty[a,b]$. Es folgt:

$$\lambda(E) \|y'\| = \int_E \|y'\| \, \mathrm{d}\lambda < \int_E |g| \mathrm{d}\lambda = \int_E f g \mathrm{d}\lambda = y'(f) \leq \|y'\| \, \|f\|_{L^1}$$

Also: $\lambda(E) < \|f\|_{L^1}$ $\lightning$. Somit ist $g \in L^\infty$.
y' und Tg sind Elemente aus $(L^p[a,b])'$, welche auf den Stufenfunktionen Ã¼bereinstimmen.
Also stimmen y' und Tg auf $L^p[a,b]$ überein, da die Stufenfunktionen dicht in L^p liegen. $\square$

4
Kompakte Operatoren

{def4.1}

Definition 4.1
Eine lineare Abbildung T zwischen normierten Räumen X und Y heißt kompakt, wenn $T(B_x)$ relativ kompakt ist (d.h. $\overline{T(B_x)}$ ist kompakt).
Die Gesamtheit der kompakten Operatoren wird mit $K(X,Y)$ bezeichnet ($K(X) = K(X,X)$).

Bemerkung

i) Sei $T\colon X \to Y$ linear. Dann gilt:

T kompakt
$\Leftrightarrow T$ bildet beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen an
$\Leftrightarrow$ Für jede beschränkt Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ enthält die Folge $(Tx_n)_n \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge

ii) Da kompakte Mengen beschränkt sind, sind kompakte Abbildungen stetig, d.h. $K(X,Y) \subseteq L(X,Y)$.

{satz-

Satz 4.2
Seien X, Y, Z Banachräume.

i) Dann ist $K(X,Y)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $L(X,Y)$, d.h. $K(X,Y)$ ist ein Banachraum.

ii) Sind $T \in L(X,Y)$ und $S \in L(Y,Z)$ und ist S oder T kompakt, so ist auch ST kompakt.

Beweis:

i) Es ist sicherlich klar, dass mit T auch λT kompakt ist ($\lambda \in \mathbb{K}$). Seien nun $S, T \in K(X,Y)$. Zeige: $S+T \in K(X,Y)$. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkt Folge in X. Wähle eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$, so dass $(Sx_{n_k})_k$ in Y konvergiert. (x_{n_k}) ist eine Folge in X und wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(x_{n_k})_k$, die wir kurz mit $(y_n)_n$ bezeichnen, so dass $(Ty_n)_n$ in Y konvergiert. Dann konvergiert auch $(Sy_n + Ty_n)_n$ in Y, also gilt $S+T \in K(X,Y)$. Somit ist $K(X,Y)$ ein Untervektorraum von $L(X,Y)$.
Zeige: $K(X,Y)$ ist abgeschlossen. Seien $T_n \in K(X,Y)$ und $T \in L(X,Y)$ mit $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$.
Zu zeigen: $T \in K(X,Y)$. Sei weiter $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in X.
Zu zeigen: $\exists$Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit Tx_{n_k} konvergiert. Da T_1 kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(T_1 x_{n_k})_k$. Wir schreiben $x_k^{(1)} = x_{n_k}$. Da auch T_2 kompakt ist, existiert eine Teilfolge von $(x_i^{(1)})_i$, welche wir mit $(x_i^{(2)})_i$ bezeichnen; $(T_2 x_i^{(2)})_i$ konvergiert. Dies führen wir nun induktiv weiter: $(x_i^{(j)})_i$ ist eine Teilfolge von $(x_i^{(j-1)})_i$ und $(T_j x_i^{(j)})$ konvergiert. Wir betrachten nun die Diagonalfolge $y = (y_n)_n = (x_n^{(n)})_n$. $(T_j y_n)_n$ konvergiert dann für alle $j \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: $(Ty_n)_n$ konvergiert. Dazu genügt es zu zeigen:$(Ty_n)_n$ ist eine Cauchyfolge (da Y vollständig). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. O.B.d.A. $\|x_n\| \le 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Dann auch $\|y_n\| \le 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left\|T_{n_0} - T\right\| \le \varepsilon$ und $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|T_{n_0} y_i - T_{n_0} y_j\right\| \le \varepsilon, \quad i, j \ge i_0$$

Dann gilt für $i, j \ge i_0$:

$$\left\|Ty_i - Ty_j\right\| \le \left\|Ty_i - T_{n_0} y_i\right\| + \left\|T_{n_0} y_i - Ty_j\right\| \le 2\left\|T - T_{n_0}\right\| + \varepsilon \le 3\varepsilon$$

Hieraus folgt i).

ii) Ist $(x_n)_n \subseteq X$ eine beschränkte Folge und S kompakt, so ist $T(x_n)_n$ beschränkt und $(STx_n)_n$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Ist T kompakt, und $(Tx_{n_k})_k$ konvergent, so ist auch $(STx_{n_k})_k$ konvergent.

□

Beispiel

i) Ist X endlichdimensional, so ist jede lineare Abbildung $T: X \to Y$ kompakt. T ist nämlich stetig und bildet deshalb die kompakte Menge B_x auf eine kompakte Menge ab.

ii) Ist $\dim X = \infty$, so ist $I: X \to X$, $Ix = x$, nicht kompakt ($I \in L(x)$, aber $I \notin K(X)$).
Angenommen, I ist kompakt. Dann:

$$\overline{I(B_x)} = \overline{B_x} = B_x$$

B_x ist kompakt. Dies ist ein Widerspruch zu $\dim X = \infty$.

iii) Ist $T \in L(X,Y)$ und ist der Bildraum $T(X)$ endlichdimensional, so ist T kompakt.

Beweis: $T(B_x)$ ist beschränkt (da T stetig) und somit ist $\overline{T(B_x)}$ beschränkt und abgeschlossen. Da $\dim T(X) < \infty$ und $T(X) = \overline{T(X)}$ folgt, dass $\overline{T(B_x)}$ kompakt ist. □

//

Bemerkung
In Satz 4.2 wird nicht benötigt, dass X und Z Banachräume sind.

{kor4.3}

Korollar 4.3
Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Falls eine Folge (T_n) linear stetiger Operatoren mit endlichdimensionalem Bild existiert und $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$, so ist T kompakt.

Beweis: $T_n \in L(X,Y) \Rightarrow T_n$ kompakt, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow T$ ist kompakt. □

{satz4.4}

Satz 4.4 **Arzela-Ascoli**
Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. $C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$ versehen mit $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Sei $M \subseteq C(X)$. M ist genau dann relativ kompakt (d.h. $\bar{M}$ ist kompakt), wenn

i)
$$\sup_{f\in M}\sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$
(M ist beschränkt).

ii) $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists$Umgebung U von x: $\forall y \in U \forall f \in M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ($f$ ist gleichgradig stetig in jedem $x \in X$).

Beweis:

'⇒': O.B.d.A. M ist kompakt. Da $\|\cdot\|_\infty : C(X) \to \mathbb{R}$ stetig ist, folgt, dass $\{\|f\|_\infty \mid f \in M\}$ kompakt, also beschränkt ist. Hieraus folgt i).

zu ii): Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. In einer Umgebung U von x setze
$$M(U,\varepsilon) := \{f \in M \mid |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall y \in U\}$$
Es folgt:
$$M\left(U, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq M(\mathring{U},\varepsilon) \subseteq M(U,\varepsilon)$$
und da die Elemente von M stetig sind:
$$M \subseteq \bigcup_{U \text{ Umgebung von } x} M\left(U, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \bigcup_{U \text{ Umgebung von } x} M(\mathring{U},\varepsilon)$$
M ist auch kompakt, also:
$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} M(\mathring{U}_j,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} M(U_j,\varepsilon)$$
Mit $U := \bigcap_{j=1}^n U_j$ folgt: U ist Umgebung von x und $M \subseteq M(U,\varepsilon)$. Damit folgt ii).

'⇐': Wegen ii) gilt: $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}$ ist
$$W_x^n := \left\{ y \in X \,\middle|\, |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} \forall f \in M \right\}$$
eine Umgebung von x. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Menge $X_n \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{x\in X_n} W_x^n$. $X_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist abzählbar.
Sei $X_\infty := \{\xi_1, \xi_2, ...\}$ und $(f_n)_n$ sei eine Folge in M. Wir zeigen: (f_n) besitzt eine Cauchy-Teilfolge. Da $C(X)$ vollständig ist folgt dann die Behauptung.

Wegen i) gibt es eine Teilfolge $(f_{1,m})_m$ von (f_n), so dass $(f_{1,m}(\xi_1))_m$ konvergiert. Dann eine Teilfolge $(f_{2,m})_m$ von $(f_{1,m})_m$, so dass $(f_{2,m}(\xi_2))_m$ konvergiert, usw. Dann ist $(g_m) := (f_{m,m})_m$ eine Teilfolge von $(f_m)_m$ mit der Eigenschaft $(*) \forall \xi \in X_\infty$: $(g_m(\xi))_m$ konvergiert. Zeige nun: (g_m) ist eine Cauchy-Folge.
Sei dazu $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig (aber zunächst fest). $\exists \xi_x \in X_n \subseteq X_\infty$ mit $x \in W^n_{\xi_n}$. Es folgt:

$$|g_m(x) - g_l(x)| \le |g_m(x) - g_m(\xi_x)| + |g_m(\xi_x) - g_l(\xi_x)| + |g_l(\xi_x) - g_l(x)| \le \frac{2}{n} + \sup_{\xi \in X_n} |g_m(\xi) - g_l(\xi)|$$

Da x beliebig, folgt:

$$\|g_m - g_l\|_\infty \le \frac{2}{n} + \sup_{\xi \in X_n} |g_m(\xi) - g_l(\xi)|$$

Da $X_n \subseteq X_\infty$ endlich und wegen $(*)$ gilt: $(g_m)_m$ ist eine Cauchy-Folge.

□

Beispiel
Wir betrachten den Fredholmschen Integraloperator $T_k : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(T_k f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) \mathrm{d}t$$

mit $k \in C([0,1]^2)$. Aus der gleichmässigen Stetigkeit von k folgt $T_k f \in C[0,1]$. //

Bemerkung
Sei

$$F(X,Y) := \{T \in L(X,Y) \mid T \text{ hat endlichdimensionales Bild}\}$$

Sind X und Y Banachräume. so gilt

$$\overline{F(X,Y)} \subseteq K(X,Y)$$

{satz4.5}

Satz 4.5
Seien X und Y Banachräume und es gelte: Es existiert eine beschränkte Folge $(S_n)_n$ in $F(Y)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} S_n y = y \forall y \in Y$$

Dann gilt:

$$\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$$

Beweis: Sei $T \in K(X,Y)$ beliebig. Dann ist $S_n T \in F(X,Y)$. Wir zeigen:

$$\|S_n T - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze

$$K := \sup_n \|S_n\| < \infty$$

Da T kompakt ist, existieren endlich viele $y_1, \dots, y_r \in Y$ und es gilt:

$$\overline{T(B_x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} \{y \in Y \mid \|y - y_i\| < \varepsilon\}$$

Wegen der Voraussetzung in Satz 4.5 gibt es ein $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$:

$$\|S_n y_i - y_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r$$

Sei nun $x \in B_x$. Es existiert ein $j \in \{1, \dots, r\}$ so dass gilt:

$$\left\|Tx - y_j\right\| < \varepsilon$$

Dann gilt für $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\|S_n Tx - Tx\| &\leq \left\|S_n(Tx - y_j)\right\| + \left\|S_n y_j - y_j\right\| + \left\|y_j - Tx\right\| \\
&\leq \|S_n\| \left\|Tx - y_j\right\| + \left\|S_n y_j - y_j\right\| + \left\|y_j - Tx\right\| \\
&\leq K\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\
&= (K+2)\varepsilon
\end{aligned}$$

Mit

$$\|S_n T - T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \|S_n Tx - Tx\| \leq (K+2)\varepsilon \forall n \geq N$$

folgt nun die Behauptung. □

Bemerkung

i) Ein Banachraum Y, der die Eigenschaft aus Satz 4.5 besitzt ist separabel.

   Beweis: $S_n Y$ ist endlichdimensional, also separabel, d.h. $S_n Y = \bar{A_n}$ mit A_n abzählbar. Setze $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und es gilt $\bar{A} = Y$. □

ii) Die Eigenschaft aus Satz 4.5 ist schwächer also $\|S_n - I\| \to 0$ für $n \to \infty$. Aus $\|S_n - I\| \to 0$ folgt sogar $\dim Y < \infty$.

   Beweis: $K(Y)$ ist ein Banachraum und somit ist I kompakt.

$$B_y = \{y \in Y \mid \|y\| \leq 1$$

   ist kompakt, und somit $\dim Y < \infty$. □

{kor4.6}

Korollar 4.6
Sei X ein beliebiger Banachraum und Y einer der separablen Banachräume c_0, ℓ^p, $C[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$. Dann gilt:

$$\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$$

Beweis: Wir müssen jeweils zeigen, dass die Eigenschaft aus Satz 4.5 erfüllt ist.

$Y = c_0$ oder ℓ^p: Setze

$$S_n x = S_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

$Y = C[0,1]$:

$$(S_n y)(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} y\left(\frac{i}{n}\right)$$

S_n ordnet y also das $n-te$ Bernsteinpolynom zu (siehe Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes). Dort wurde auch $S_n y \to y$ gezeigt.

□

5
Der Satz von Hahn-Banach

Wir werden insbesondere zeigen, dass auf jedem normierten Raum ein stetiges lineares Funktional $\neq 0$ existiert.

{def5.1}

Definition 5.1
Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $p\colon X \to \mathbb{R}$ heißtsublinear, falls

i) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \forall \lambda \geq 0, x \in X$

ii) $p(x+y) = p(x) + p(y) \forall x, y \in X$

Beispiel

i) Jede Halbnorm ist sublinear.

ii) Jede lineare Abbildung $T\colon X \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum ist sublinear.

iii) $(x_n)_n \mapsto \limsup_{n\to\infty} x_n$ ist sublinear auf dem reellen ℓ^∞ und $(x_n)_n \mapsto \limsup_{n\to\infty} \operatorname{Re} x_n$ ist sublinear auf dem komplexen Raum ℓ^∞.

//

{satz5

Satz 5.2 **Satz von Hahn-Banach, Version der linearen Algebra**
Sei X ein reeller Vektorraum und sei U ein Untervektorraum von X. Ferner seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $l : U \to \mathbb{R}$ linear mit

$$l(x) \leq p(x) \forall x \in U$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$, $L|_U = l$ mit $L(x) \leq p(x) \forall x \in X$.

Beweis:

i) Es gelte zusätzlich $\dim X/U = 1$. Sei $x_0 \in X/U$ beliebig. Dann lässt sich jedes $x \in X$ eindeutig schreiben als

$$x = i + \lambda x_0, \quad u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$$

Sei r ein freier Parameter. Wir wählen den Ansatz

$$L_r(x) = l(u) + \lambda r$$

L_r ist eine lineare Abbildung, welches l fortsetzt. Zu zeigen: $\exists r \in \mathbb{R}$: $L_r \leq p$. Es gilt

$$\begin{aligned} & L_r \leq p \\ \Leftrightarrow & L_r(x) \leq p(x) \forall x \in X \\ \Leftrightarrow & l(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda x_0) \forall u \in U \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad (*) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $(*)$ für $\lambda = 0$ und alle $u \in U$. Sei $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow & \lambda r \leq p(u + \lambda x_0) - l(u) \forall u \\ \Leftrightarrow & r \leq p\left(\frac{u}{\lambda} + x_0\right) - l\left(\frac{u}{\lambda}\right) \forall u \\ \Leftrightarrow & r \leq \inf_{v \in U} (p(v + x_0) - l(v)) \end{aligned}$$

Analog für $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow & -r \leq p\left(\frac{u}{-\lambda} - x_0\right) - l\left(\frac{u}{-\lambda}\right) \forall u \\ \Leftrightarrow & r \geq l\left(\frac{u}{-\lambda}\right) - p\left(\frac{u}{-\lambda} - x_0\right) \forall u \\ \Leftrightarrow & r \geq \sup_{w \in U} (l(w) - p(w - x_0)) \end{aligned}$$

Somit: $\exists r \in \mathbb{R}$:

$$L_r \leq p \Leftrightarrow l(w) - p(w - x_0) \leq p(v + x_0) - l(v) \forall v, w \in U \qquad (**)$$

$(**)$ folgt aus: $\forall v, w \in U$:

$$l(w) + l(v) = l(w + v) \leq p(w + v) = p(w - x_0 + x_0 + v) \leq p(w - x_0) + p(v + x_0)$$

ii) Um die allgemeine Aussage zu beweisen, benötigen wir das Zornsche Lemma: Sei $(A, \leq)$ eine halbgeordnete nichtleere Menge (d.h. $\leq$ ist transitiv, reflexiv und antisymmetrisch) in der jede Kette (dies ist eine total geordnete Menge, also eine Teilmenge, für deren Elemente stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt) eine obere Schranke besitzt. Dann liegt jedes Element von A unter einem maximalen Element von A, also einem Element m mit $m \leq a \Rightarrow a = m$ (Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz).
Wir wählen

$A = \{(V, L_V) \mid V$ ist ein Unterraum von X mit $U \subseteq V$ und $L_V : V \to \mathbb{R}$ linear mit $L_V \leq p|_V$ und $L_V|_U = l\}$

Es gilt $A \neq \emptyset$, da $(U, l) \in A$. Wir wählen die Ordnung

$$(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2}) \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2 \text{ und } L_{V_2}|_{V_1} = L_{V_1}$$

Ist $((V_i, L_{V_i})_{i \in I})$ total geordnet, so ist (V, L_V) mit

$$V = \bigcup V_i \qquad L_V(x) = L_{V_i}(x) \qquad x \in V_i$$

als obere Schranke. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also ein maximales Element. Sei nun $m = (X_0, L_{X_0})$ ein maximales Element. Wäre $X_0 \neq X$, so gäbe es nach i) eine echte Majorante von m, und m wäre nicht maximal. Also ist $X_0 = X$ und $L = L_{X_0}$ löst unser Fortsetzungsproblem.

□

Bemerkung
L ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

{lemma5.3}

Lemma 5.3
Sei X ein $\mathbb{C}-$Vektorraum.

i) Ist $l : X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}-$lineares Funktional, d.h.

$$l(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 l(x_1) + \lambda_2(x_2) \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \forall x_1, x_2 \in X$$

und setze $\tilde{l}(x) = l(x) - il(ix)$, so ist $\tilde{l} : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}-$lineares Funktional und $l = \operatorname{Re} \tilde{l}$.

ii) Ist $h : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}-$lineares Funktional, $l = \operatorname{Re} h$ und $\tilde{l}$ wie in i), so ist l ein $\mathbb{R}-$lineares Funktional und $h = \tilde{l}$.

iii) Ist $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $l : X \to \mathbb{C}$ $C-$linear, so gilt die Äquivalenz

$$|l(x)| \leq p(x) \forall x \in X \Leftrightarrow |\operatorname{Re} l(x)| \leq p(x) \forall x \in X$$

iv) Ist X ein normierter Raum und $l : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$linear und stetig, so ist $\|l\| = \|\operatorname{Re} l\|$.

Bemerkung
Lemma 5.3 besagt: $l \mapsto \mathrm{Re}\, l$ ist eine bijektive $\mathbb{R}-$lineare Abbildung zwischen dem Raum der $\mathbb{C}-$linearen Funktionale und dem Raum der $\mathbb{R}-$linearen Funktionale. Im normierten Fall ist sie isometrisch.

Beweis:

i) Aus der Konstruktion folgt: $\tilde{l}$ $\mathbb{R}-$linear und $\mathrm{Re}\,\tilde{l} = l$. Es bleibt zu zeigen: $\tilde{l}(ix) = i\tilde{l}(x)$. Dies folgt aus:
$$\tilde{l}(ix) = l(ix) = -il(iix) = l(ix) = il(-x) = l(ix) + il(x) = i(l(x) - il(ix)) = i\tilde{l}(x)$$

ii) $l = \mathrm{Re}\, h$ ist $\mathbb{R}-$linear$\surd$
Für $x \in X$ gilt:
$$h(x) = \mathrm{Re}\, h(x) + i\,\mathrm{Im}\, h(x) = l(x) + i\,\mathrm{Im}\, h(x) = l(x) - i\,\mathrm{Re}\, ih(x) = l(x) - i\,\mathrm{Re}\, h(ix) = l(x) - il(ix) = \tilde{l}(x)$$

iii) Wegen $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \forall z \in \mathbb{C}$ gilt '$\Rightarrow$'. Für '$\Leftarrow$' sei $x \in X$. Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $l(x) = \lambda |l(x)|$.
$$|l(x)| = \lambda^{-1} l(x) = l(\lambda^{-1}x) = |\mathrm{Re}\, l(\lambda^{-1}x)| \leq p(\lambda^{-1}x) = |\lambda^{-1}| p(x) = p(x)$$

iv) folgt aus iii).

□

{satz5.4}

Satz 5.4 Satz von Hahn-Banach, Version der linearen Algebra, Komplexe Variante
Sei X ein komplexer Vektorraum und $U \subseteq X$ ein Untervektorraum. $p : X \to \mathbb{R}$ sei sublinear und $l : U \to \mathbb{C}$ linear mit
$$\mathrm{Re}\, l(x) \leq p(x) \forall x \in U$$
Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{C}$, $L|_U = l$ mit
$$\mathrm{Re}\, L(X) \leq p(x) \forall x \in X$$

Beweis: Satz 5.2 liefert ein $\mathbb{R}-$lineares Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F|_U = \mathrm{Re}\, l$ und $F(X) \leq p(x) \forall x \in X$. Mit Lemma 5.3 ist $F = \mathrm{Re}\, L$ für ein gewisses $\mathbb{C}-$lineares Funktional $L : X \to \mathbb{C}$. Es bleibt zu zeigen: $L|_U = l$. Dies folgt aus $\mathrm{Re}\, L|_U = \mathrm{Re}\, l$ und reflemma5.3 ii). □

{satz5.5}

Satz 5.5 **Satz von Hahn-Banach, Fortsetzungsversion**
Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Untervektorraum. Zu jedem stetigen (linearen) Funktional $u' : U \to \mathbb{K}$ existiert ein stetig (lineares) Funktional $x' : X \to \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$. Jedes stetig Funktional kann also normerhaltend fortgesetzt werden.

Beweis:

i) Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Setze $p(x) = \|u'\| \|x\|$ für $x \in X$. Es gilt:

$$u'(x) = |u'(x)| \leq \|u'\| \|x\| = p(x) \forall x \in U$$

Mit Satz 5.2 existiert eine lineare Abbildung $x' : X \to \mathbb{R}$ mit $x'|_U = u'$ und $x'(x) \leq p(x) \forall x \in X$. Es gilt auch

$$x'(-x) \leq p(-x) = p(x) \forall x \in X$$

Also:

$$|x'(x)| \leq p(x) = \|u'\| \|x\| \; \forall x \in X$$

Hieraus folgt die Behauptung.
Es gilt auch die Umkehrung:

$$\|u'\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |x'(u)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x'(x)| = \|x'\|$$

ii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Kombination von Teil i) und Satz 5.4 liefert: $\exists x' : X \to \mathbb{C}$ linear mit $x'|_U = u'$ und $\|\mathrm{Re}\, x'\| = \|u'\|$. Nach Lemma 5.3 iv) $\|\mathrm{Re}\, x'\| = \|x'\|$ und somit $\|u'\| = \|x'\|$.

□

Bemerkung

i) Die Fortsetzung x' ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

ii) Eine analoge Aussage für Operatoren ist falsch. So gibt es keinen stetigen Operator $T : \ell_\infty \to c_0$ der die Identität $I : c_0 \to c_0$ fortsetzt.

{kor5

Korollar 5.6
In jedem normierten Raum X existiert zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$, ein Funktional $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$ und $|x'(x)| = \|x\|$. Insbesondere trennt X' die Punkte von X, d .h. zu $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existiert ein $x' \in X'$ mit $x'(x_1) \neq x'(x_2)$.

Beweis: Setze $u' : \operatorname{lin}\{x\} \to \mathbb{K}$, $u'(\lambda x) = \lambda \|x\|$, normerhaltend auf X fort. Sei x' die Fortsetzung

$$|x'(x)| = |u'(x)| = \|x\|$$

$\|x'\| = \|u'\| = 1$, da:

$$|u'(\lambda x)| = |\lambda \|x\| | = \|\lambda x\| \Rightarrow \|u'\| = 1$$

Zum Beweis des Zusatzes betrachte $x = x_1 - x_2$ □

{kor5.7}

Korollar 5.7
In jedem normierten Raum gilt

$$\|x\| = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |x'(x)| = \max_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |x'(x)| \forall x \in X \qquad (*)$$

Beweis:

'≥': folgt aus $|x'(x)| \leq \|x'\| \|x\|$.

'≤': folgt aus Korollar 5.6 (der Fall $x = 0$ ist trivial).

□

Bemerkung
Betrachte die Symmetrie von $(*)$ zur Definition

$$\|x'\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x'(x)| \forall x' \in X'$$

{kor5.8}

Korollar 5.8
Sei X ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Untervektorraum und $x \in X$, $x \notin U$. Dann existiert $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ und $x'(x) \neq 0$.

Beweis: Sei $\omega\colon X \to X/U$ die kanonische Quotientenabbildung. Dann ist $\omega(u) = 0$ für $u \in U$ und $\omega(x) \neq 0$. Wir wählen nach Korollar 5.6 ein Funktional $l \in (X/U)'$ mit $l(\omega(x)) \neq 0$. Setze $x' := l \circ \omega$. x' leistet das Gewünschte. □

{kor5.9}

Korollar 5.9
Ist X ein normierter Raum und U ein Untervektorraum, so sind äquivalent:

i) U ist dicht in X.

ii) $x' \in X$ mit $x'|_U = 0 \Rightarrow x' = 0$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

{satz5.10}

Satz 5.10
Die Abbildung $T\colon \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ mit

$$(Tx)(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_n), y = (y_n)$$

ist isometrisch, aber nicht surjektiv.

Beweis: Der Beweis der Isometrie ist einfach (analog zu $\ell' \cong c_0'$). Es bleibt zu zeigen: T ist nicht surjektiv.
Wir betrachten das Funktional

$$\lim\colon C = \{(y_n)_n \mid y_n \in \mathbb{K} \wedge \exists \lim y_n\} \to \mathbb{K}$$

$$\lim(x_n)_n := \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$|\lim(x_n)_n| \leq \|(x_n)_n\|_\infty \Rightarrow \|\lim\| = 1$$

Mit Hahn-Banach existiert ein $x' \in (\ell^\infty)'$, so dass

$$x'|_C = \lim, \qquad \|x'\| = 1$$

Hätte x' eine Darstellung

$$x'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

für eine Folge $(x_n)_n \in \ell^1$, so wäre

$$x_n x'(e_n) = \lim e_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

$x' = 0 \lightning$. Also ist T nicht surjektiv. □

{satz5.11}

Satz 5.11
Ein normierter Raum X ist separabel, falls der Dualraum X' separabel ist.

Bemerkung
ℓ^1 ist separabel und ℓ^∞ ist nicht separabel. D.h. es kann keinen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(\ell^\infty)'$ geben.

Beweis: Mit X' ist $S_{X'} = \{x' \in X' \mid \|x'\| = 1\}$ separabel (dies war eine Übungsaufgabe). Sei also die Menge $\{x'_n\}_n$ dicht in $S_[X']$. Wähle $x_i \in S_X$ mit $|x'_i(x_i)| \geq \frac{1}{2}$. Wir setzen $U = \mathrm{lin}\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und zeigen $\bar{U} = X$ (dann ist X separabel). Mit Korollar 5.9 genügt es zu zeigen: Aus $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ folgt stets $x' = 0$.
Sei also $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$. Angenommen $x' \neq 0$. O.B.d.A. $\|x'\| = 1$. Dann existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left\|x' - x'_{i_0}\right\| \leq \frac{1}{4}$. Aber:

$$\frac{1}{2} \leq |x'_{i_0}(x_{i_0})| = |x'_{i_0}(x_{i_0}) - x'(x_{i_0})| = |(x'_{i_0} - x')(x_{i_0})| \leq \left\|x'_{i_0} - x'\right\| \left\|x_{i_0}\right\| = \frac{1}{4} \lightning$$

Also $x' = 0$, somit $\overline{\mathrm{lin}\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}} = X$ und X separabel. □

Das Trennungsproblem. Existiert zu konvexen Mengen U und $V \subseteq X$ ein Funktional $x' \in X'$, $x' \neq 0$, mit

$$\sup_{x \in U} x'(x) \leq \inf_{x \in V} x'(x) \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

bzw.

$$\sup_{x \in U} \mathrm{Re}\, x'(x) \leq \inf_{x \in V} \mathrm{Re}\, x'(x) \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

{def5.12}

Definition 5.12
Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Das Minkowski-Funktional $P_A : X \to [0,\infty]$ wird durch

$$P_A(x) := \inf\left\{\lambda > 0 \middle| \frac{x}{\lambda} \in A\right\}$$

definiert.
A heißt absorbierend, falls $P_A(x) < \infty \forall x \in X$.
Ist X ein normierter Raum und $A = \{x \mid \|x\| \le 1\}$, so folgt $P_A(x) = \|x\|$.

{lemma5.13}

Lemma 5.13
Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ eine konvexe Teilmne mit $0 \in \mathring{U}$. Dann gilt:

i) U ist absorbierend, genauer: Aus $\{x \mid \|x\| < \varepsilon\} \subset U$ folgt $P_U(x) \le \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$.

ii) P_U ist sublinear.

iii) Ist U offen, so gilt $U = P_U^{-1}([0,1[)$.

Beweis:

i) Klar.

ii)

$$\begin{aligned} P_U(\lambda x) &= \inf\left\{\mu > 0 \middle| \frac{\lambda x}{\mu} \in U\right\} \\ &= \lambda \inf\left\{\mu > 0 \middle| \frac{x}{\mu} \in U\right\} \\ &= \lambda P_U(x), \qquad \lambda > 0 \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen:

$$P_U(x+y) = P_U(x) + P_U(y)$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wähle $\lambda, \mu > 0$ mit

$$\lambda \le P_U(x) + \varepsilon, \quad \mu \le P_U(y) + \varepsilon$$

so dass $\frac{x}{\lambda} \in U$ und $\frac{y}{\mu} \in U$. Da U konvex ist können wir eine Konvexkombination wählen und es folgt:

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\lambda+\mu} \in U$$

Also folgt:

$$P_U(x+y) \le \lambda + \mu \le P_U(x) + P_U(y) + 2\varepsilon$$

iii) $P_U(x) < 1$, existiert $\lambda < 1$ mit $\frac{x}{\lambda} \in U$. Dann:

$$x = \lambda \frac{x}{\lambda} + (1-\lambda)0 \in U$$

Also ist $P_U^{-1}([0,1[) \subseteq U$.
Ist $P_U(x) \geq 1$, so ist $\frac{x}{\lambda} \notin U \forall 0 < \lambda < 1$. Also $\frac{x}{\lambda} \in X \setminus U \forall 0 < \lambda < 1$. Da $X \setminus U$ abgeschlossen ist, folgt

$$x = \lim_{\lambda \to 1, \lambda < 1} \frac{x}{\lambda} \in X \setminus U$$

□

{lemma5.14}

Lemma 5.14
Ist X ein normierter Raum und $V \subseteq X$ konvex und offen mit $0 \notin V$, so existiert $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 \forall x \in V$$

Im Beweis benutzen wir die Schreibweise

$$A \pm B := \{a \pm b \mid a \in A, b \in B\}, \quad A, B \subseteq X$$

Es gilt: A und B konvex$\Rightarrow A \pm B$ konvex.

Beweis: Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in V$ beliebig. Setze $y_0 := -x_0$ und $U = V - \{x_0\}$. U ist offen und konvex, $0 \in U$, $y_0 \notin U$. P_U sei das Minkowskifunktional zu U. Nach Lemma 5.13 ist dieses $\mathbb{R}-$wertig, sublinear und es gilt $P_U(y_0) \geq 1$. Sei $Y := \operatorname{lin}\{y_0\}$. Auf Y definieren wir

$$y'(ty_0) = tP_U(y_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dann ist $y'(y) \leq P_U(y) \forall y \in Y$.
Mit Satz 5.2 wählen wir eine lineare Fortsetzung x' von y' mit $x' \leq P_U$. Lemma 5.13 zeigt $x' \in X'$, denn es gilt:

$$|x'(x)| = \max\{x'(x), -x'(x)\} = \max\{x'(x), x'(-x)\} \leq \max\{P_U(x), P_U(-x)\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|x\|$$

Weiter gilt:

$$x'(y_0) = P_U(y_0) \geq 1$$

und für $x \in V$:

$$x'(x) = x'(u - y_0) = x'(u) - x'(y_0) \leq y'(u) - 1 < P_U(u) - 1 < 0$$

Somit folgt die Behauptung für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt aus dem hier gezeigten und Lemma 5.3. □

Bemerkung
Die Voraussetzung V offen ist nicht verzichtbar.

Beispiel
Sei $X = (d, \|\cdot\|_\infty)$ und

$$V = \{(x_n)_n \in d \setminus \{0\} \mid x_N > 0 \text{ für } N := \max\{j \mid x_j \neq 0\}\}$$

Dann gilt: $0 \notin V$, V konvex. Aber es gibt kein $x' \in d'$ mit $x'|_V < 0$.
Angenommen, es existiert ein $x' \in d'$ mit $x'|_V < 0$. Dann besitzt x' eine eindeutige Fortsetzung $y' \in c_0'$. Da $\ell^1 \cong c_0'$ können wir y' mit einer Folge in ℓ^1 identifizieren, d.h. $y' = (y_n)_n \in \ell^1$, $y'((x_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$.
Angenommen $y_n \geq 0$. Da $e_n \in V$, ist $x'(e_n) = y'(e_n) = y_n \geq 0$. Also $y_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $x = -\frac{y_2}{y_1} e_1 + e_2 \in V$ und

$$y'(x) = y'\left(-\frac{y_2}{y_1} e_1 + e_2\right) = -\frac{y_2}{y_1} y_1 + y_2 = 0 \lightning$$

//

{thm5.15}

Theorem 5.15 Satz von Hahn-Banach, Trennungsversion 1
Sei X ein normierter Raum, $V_1, V_2 \subseteq X$ seien konvex und V_1 sei offen und es gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann existiert $x' \in X'$:

$$\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2) \forall v_1 \in V_1 \forall v_2 \in V_2$$

Beweis: Sei $V = V_1 - V_2$. Als Differenzmengee konvexer Mengen ist V konvex. Aus $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ folgt $0 \notin V$. Aus der Darstellung

$$V = \bigcup_{x \in V_2} (V_1 - \{x\})$$

folgt V offen. Nach Lemma 5.14 existiert $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2) < 0 \forall v_1 \in V_1 \forall v_2 \in V_2$$

□

{thm5.16}

Theorem 5.16 **Satz von Hahn-Banach, Trennungsversion 2**
Sei X ein normierter Raum, $V \subseteq X$ konvex und abgeschlossen und $x \notin V$. Dann existiert $x' \in X'$:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf\{\operatorname{Re} x'(v) \mid v \in V\}$$

Es existiert also ein $\varepsilon > 0$:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(v) \forall v \in V$$

Beweis: Da V abgeschlossen ist, existiert $r > 0$:

$$U_r(x) \cap V = \emptyset$$

Nach Theorem 5.15 existiert $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x+u) < \operatorname{Re} x'(v) \forall v \in V \forall u \in U_r(x)$$

$$\operatorname{Re} x'(x) + \underbrace{\left\|\operatorname{Re} x'\right\| r}_{=:\varepsilon} < \operatorname{Re} x'(v) \forall v \in V$$

□

6
Schwache Konvergenz und Reflexivität

Sei X ein normiert Raum, X' der Dualraum und $X'' = (X')'$ dessen Dualraum. Wir nennen X'' den Bidualraum von X.
Sei $x \in X$, so kann auf kanonische Weise eine Abbildung $i(x)\colon X' \to \mathbb{K}$, $(i(x))(x') = x'(x)$, definiert werden. $i(x)$ ist sicher linear, $i(x)$ ist stetig, da:

$$|(i(x))(x')| = |x'(x)| \leq \left\|x'\right\| \|x\| = \|x\| \left\|x'\right\| \forall x' \in X'$$

mit $\|i(x)\| \leq \|x\|$. Es gilt sogar $\|i(x)\| = \|x\|$ (dies folgt aus dem Satz von Hahn-Banach).
Also $i(x) \in X''$ und i Isometrie.

{satz6.1}

Satz 6.1
Die Abbildung $i\colon X \to X''$, $(i(x))(x') = x'(x)$, ist eine lineare Isometrie (im Allgemeinen nicht surjektiv).

i heißt auch kanonische Abbildung von X nach X''. Wir schreiben auch i_X. Auf diese Weise wird X mit einem Unterraum von X'' identifiziert. Da X'' vollständig ist, gilt das folgende Korollar:

{kor6.2}

Korollar 6.2
Jeder normierte Raum ist isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Banachraumes.

Beispiel

i) Sei $X = c_0$. Es 'gilt': $X' \cong \ell^1$ und $X'' \cong \ell^\infty$. Mit dieser Identifizierung gilt $i_{c_0}(x) = x$, denn: Identifizieren wir $(y_n)_n \in \ell^1$ mit dem Funktional $(x_n)_n \mapsto \sum y_n x_n$, so folgt:

$$(i_{c_0}(x))(y) = y_(x) = \sum_n y_n x_n = z(y)$$

mit $z \in \ell^\infty$ stellt das Funktional $(y_n) \mapsto \sum_n x_n y_n$.
Somit $z = x = i_{c_0}(x)$. Insbesondere i_{c_0} ist nicht surjektiv.

ii) $X = \ell^1$. Es gilt $X' = \ell^\infty$ und nach Kapitel 5 ist $X'' = (\ell^\infty)'$ nicht isometrisch isomorph zu ℓ^1. Also ist i_{ℓ^1} nicht surjektiv.

iii) Analoge Überlegungen zu i) zeigen: Für $1 < p 1 \infty$ stimmt die kanonische Einbettung i_{ℓ^p} mit der Identität $I: \ell^p \to \ell^p$ überein. Somit ist i_{ℓ^p} surjektiv.
Die gleichen überlegungen gelten für L^p.

//

{def6.3}

Definition 6.3
Ein Banachraum X heißt reflexiv, wenn i_X surjektiv ist.

Für reflexive Räume gilt $X \cong X''$. Die Umkehrung hiervon gilt nicht (ein Beispiel wurde 1950 von James angegeben).

Beispiel

i) ℓ^p und L^p sind reflexiv für $1 < p < \infty$.

ii) c_0, ℓ^1 sind nicht reflexiv.

iii) Endlich dimensionale Räume X sind reflexiv, da

$$\dim X = \dim X' = \dim X''$$

//

{satz6.4}

Satz 6.4

i) Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.

ii) Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

Beweis:

i) X reflexiv, $U \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $u'' \in U''$. $x' \mapsto u''(x'|_U)$ liegt in X'', denn

$$|u''(x'|_U)| \leq \|u''\| \, \|x'|_U\| \leq \|u''\| \, \|x'\|$$

□

7
Hauptsätze für Operatoren auf Banachräumen

{satz7.1}

Satz 7.1 **Satz von Baire**
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener und dichter Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_n$ dicht in X.

Beweis: Sei $D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_n$. Es ist zu zeigen: Jede $\varepsilon-$Kugel in X enthält ein Element von D.
Sei

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$$

eine dieser Mengen. Da $\mathcal{O}_1$ offen und dicht ist, existiert ein $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon_0$ so dass

$$b_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq \mathcal{O}_1 \cap B_{\varepsilon_0}(x_0)$$

Weiter induktiv:

$$B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq \mathcal{O}_n \cap B_{\varepsilon_n}(x_n)$$

mit $0 < \varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_n$.
Sei $m > n$. Dann folgt:

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon_n < 2^{-1}\varepsilon_{n-1} < \ldots < 2^{-n}\varepsilon_0$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in X.
Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

$$d(x_n,x) \le d(x_n,x_m) + d(x_m,x) < e_n$$

für m hinreichend groß. Also ist

$$x \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq \mathcal{O}_{n-1} \cap B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \subseteq \mathcal{O}_{n-1} \cap \ldots \cap \mathcal{O}_1 \cap B_{\varepsilon_0}(x_0) \forall n \in \mathbb{N}$$

Und somit $x \in D \cap B_{\varepsilon_0}(x_0)$. □

{kor7.2}

Korollar 7.2 **Bairescher Kategoriensatz**
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit A_n abgeschlossen. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N} : \mathring{A}_{n_0} \neq \emptyset$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Bemerkung
Der Bairesche Kategoriensatz liefert häufig relativ einfache Beweise für Existenzaussagen, z.B.: Es gibt stetige Funktionen auf $[0,1]$ die an keiner Stelle differenzierbar sind.

{thm7.3}

Theorem 7.3 **Satz von Banach-Steinhaus, Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit**
Seien X ein Banachraum und Y ein normierter Raum, I eine Indexmenge und $T_i \in L(X,Y)$, $i \in I$. Falls

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \forall x \in X$$

so folgt

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$$

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n := \left\{ x \in X \,\middle|\, \sup_{i\in I} \|T_i x\| \leq n \right\}$$

Aus der Voraussetzung folgt: $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Da die T_is stetig sind, ist die Menge

$$E_n = \bigcap_{i\in I} \|T_i\|^{-1}([0,n])$$

abgeschlossen. Nach dem Baireschen Kategoriensatz hat dann mindestens eine Menge E_n einen inneren Punkt. Also $\exists N \in \mathbb{N} : \exists y \in E_N \exists \varepsilon > 0$:

$$\|x - y\| \leq \varepsilon \Rightarrow x \in E_N$$

Da E_N symmetrisch ist, d.h. $z \in E_N \Rightarrow -z \in E_N$, hat $-y$ dieselbe Eigenschaft. Da E_N konvex ist folgt:

$$\|u\| \leq \varepsilon, u \in X \Rightarrow u = \frac{1}{2}((u+y)+(u-y)) \in \frac{1}{2}(E_n + E_n) = E_n$$

Somit gilt: Aus $\|u\| \leq \varepsilon$ folgt $\|T_i u\| \leq N \forall i \in I$.

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| = \sup_{i\in I} \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 1}} \|T_i u\| \leq \frac{N}{\varepsilon} < \infty$$

□

Bemerkung

i) Der Satz von Banach-Steinhaus gibt keinen Aufschluss über die Größe von $\sup_{i\in I} \|T_i\|$.

ii) Die Vollständigkeit von X ist wesentlich für den Satz von Banach-Steinhaus.

Beispiel
$X = (d, \|\cdot\|_\infty)$ und $T_n : d \to \mathbb{K}$ mit $T_n(x_m)_{m\in\mathbb{N}} = n x_n$. T_n ist linear.
Sei $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in d$ beliebig.

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N, 0, \ldots 0)$$

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \|T_i x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |i x_i| = \sup_{i=1}^{N} |i x_i| < \infty$$

Aber es gilt:

$$\|T_i\| = \sup_{\substack{x\in d\\ \|x\|_\infty\leq 1}} \|T_i x\| = \sup_{\substack{x\in d\\ \|x\|_\infty\leq 1}} |i x_i| = i$$

Also $T_i \in L(d, \mathbb{K})$ und $\sup \|T_i\| = \infty$. //

{kor7.4}

Korollar 7.4
Für eine Teilmenge M eines normierten Raumes X sind äquivalent:

i) M ist beschränkt, d.h. $\exists c > 0 : \|x\| \leq c \forall x \in M$.

ii) $\forall x' \in X'$ ist $x'(M) \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt.

Beweis:

i)⇒ii): trivial, da $x' \in X'$.

ii)⇒i): Wir betrachten die Funktionale $i_X(x)$ für $x \in M$, welche auf dem Banachraum X' definiert sind. Nach Voraussetzung gilt:

$$\sup_{x\in M} |x'(x)| = \sup_{x\in M} |i_X(x)(x')| < \infty \forall x' \in X'$$

Mit dem Satz von Banach-Steinhaus ($I := M$, für X wählen wir X', $Y := \mathbb{K}$, $T_i := i_X(x)$) folgt:

$$\sup_{x \in M} \|x\| = \sup_{x \in M} \|i_X(x)\| < \infty$$

□

{kor7.5}

Korollar 7.5
Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis: Konvergiert $(x_n)_n$ schwach, so ist für $x' \in X'$ die Folge $(x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, da konvergent. Mit Korollar 7.4 folgt die Behauptung. □

{kor7.6}

Korollar 7.6
Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X'$. Dann sind äquivalent:

i) M ist beschränkt.

ii) $\forall x \in X$ ist $\{x'(x) \mid x' \in M\}$ beschränkt.

Beweis:

i)⇒ii): $\surd$

ii)⇒i): Dies ist ein Spezialfall vom Satz von Banach-Steinhaus.

□

r7.7}

Korollar 7.7
Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum, sowie $T_n \in L(X,Y)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Für $x \in X$ existiere $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Dann gilt $T \in L(X,Y)$.

Beweis: Die Linearität von T ist klar, da 'lim' linear ist. Es bleibt zu zeigen: T ist stetig. Da $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in X$ konvergiert, ist stets $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty \forall x \in X$. Mit dem Satz von Banach-Steinhaus folgt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| =: M < \infty$$

Also:

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M \|x\| \; \forall x \in X$$

□

{def7.8}

Definition 7.8
Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt offen, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Bemerkung
Eine offene Abbildung muss abgeschlossene Mengen nicht auf abgeschlossene Mengen abbilden.

Beispiel
$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(s,t) = s$. p ist offen, aber die abgeschlossene Menge

$$\{(s,t) \mid s \geq 0, st \geq 1\}$$

wird auf $]0,\infty[$ abgebildet. //

{lemma7.9}

Lemma 7.9
Für eine lineare Abbildung $T: X \to Y$ zwischen normierten Räumen sind äquivalent:

i) T ist offen.

ii) T bildet offene Kugeln um 0 auf Nullumgebungen ab, d.h.
$$\forall r > 0 \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subseteq T(B_r(0))$$

iii)
$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subseteq T(B\_1(0))$$

Beweis:

ii)⇔iii): Klar, da T linear.

i)⇒ii): $B_r(0)$ offen. Da T offen gilt, dass $T(B_r(0))$ offen ist und $0 \in T(B_r(0))$. Daraus folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ mit der gewünschten Eigenschaft existiert.

ii)⇒i): Sei $O \subseteq X$ offen und $x \in O$. Dann ist $Tx \in T(O)$. Da O offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $x + B_r(0) \subseteq O$. Dann folgt $Tx + T(B_r(0)) \subseteq T(O)$. Mit ii) folgt nun:
$$Tx + B_\varepsilon(0) \subseteq Tx + T(B_r(0)) \subseteq T(O)$$
Da x beliebig war, ist $T(O)$ offen.

□

Beispiel

i) Jede Quotientenabbildung ist offen (T Quotientenabbildung⇔ $T(B_1(0)) = B_1(0)$).

ii) Die Abbildung $T: \ell^\infty \to c_0$, $(x_n)_n \mapsto \left(\frac{1}{n}x_n\right)_n$, ist nicht offen, denn:
$$T(B_1(0)) = \left\{(y_n)_n \in c_0 \middle| |y_n| < \frac{1}{n}\right\}$$
ist keine Nullumgebung.

iii) Jede offene lineare Abbildung ist surjektiv. In vollständigen Räumen gilt auch die Umkehrung, wie der folgende Satz zeigt.

//

{thm7.10}

Theorem 7.10 Satz von der offenen Abbildung
Sind X und Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ ist surjektiv, dann ist T offen.

Beweis: Wir zeigen, dass Lemma 7.9 iii) gilt.

i) Zeige zunächst:
$$\exists e_0 > 0 : B_{\varepsilon_0}(0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}$$
Da T surjektiv ist, gilt
$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(B_n(0)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_n(0))}$$
Mit dem Baireschen Kategoriensatz existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\overset{\circ}{\overline{T(B_n(0))}} \neq \emptyset$, also existiert ein $y_0 \in \overset{\circ}{\overline{T(B_n(0))}}$ und $\varepsilon > 0$:
$$\|z - y_0\| < \varepsilon \Rightarrow z \in T(B_N(0))$$
Nun ist $\overset{\circ}{\overline{T(B_N(0))}}$ symmetrisch, d.h. diese Menge enthält mit z auch $-z$ (denn $T(B_n(0))$ ist symmetrisch und damit auch der Abschluss und das Innere). Dann hat $-y_0$ dieselbe Eigenschaft, d.h.
$$\|z + y_0\| < \varepsilon \Rightarrow z \in \overset{\circ}{\overline{T(B_N(0))}}$$
Sei nun $\|y\| < \varepsilon$. Dann:
$$\|(y_0 + y) - y_0\| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|(-y_0 + y) + y_0\| < \varepsilon$$
Somit gilt $y_0 + y, -y_0 + y \in \overline{T(B_N(0))}$. Da $\overline{T(B_N(0))}$ konvex ist, gilt: T(
$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{T(B_N(0))}$$
Also: $B_\varepsilon(0) \subseteq \overline{T(B_N(0))}$ und $B_{\frac{\varepsilon}{N}}(0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}$.

ii) Sei $\varepsilon_0 > 0$ wie in Teil i). Es bleibt zu zeigen:
$$B_{\varepsilon_0}(0) \subseteq T(B_1(0))$$
Sei dazu $y \in Y$ mir $\|y\| < \varepsilon_0$ beliebig. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\|y\| < \varepsilon < \varepsilon_0$ und setze $\bar{y} := \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} y$. Dann:
$$\|\bar{y}\| = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \|y\| < \varepsilon_0$$
und aus Teil i) folgt $\bar{y} \in \overline{T(B_1(0))}$. Dann existiert ein $y_0 = Tx_0 \in T(B_1(0))$ mit $\|\bar{y} - y_0\| < \alpha\varepsilon_0$. Hierbei ist $\alpha \in]0,1[$ so klein gewählt, so dass
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{1}{1-\alpha} < 1 \Rightarrow \frac{\bar{y} - y_0}{\alpha} \in B_{\varepsilon_0}(0) \Rightarrow \frac{\bar{y} - y_0}{\alpha} \in \overline{T(B_1(0))}$$

Dann existiert ein $y_1 = Tx_1 \in T(B_1(0))$ mit

$$\left\| \frac{\bar{y} - y_0}{\alpha} - y_1 \right\| < \alpha\varepsilon_0 \Rightarrow \|\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1)\| < \alpha^2 \varepsilon_0 \Rightarrow \frac{\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1)}{\alpha^2} \in B_{\varepsilon_0}(0)$$

Mit vollständiger Induktion existiert nun eine Folge $(x_n)_n \in B_1(0)$:

$$\left\| \bar{y} - T\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i x_i \right) \right\| < \alpha^{n+1} \varepsilon_0$$

Wegen $\alpha \in]0,1[$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i$$

absolut. Da X vollständig existiert der Grenzwert

$$\bar{x} := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i \in X$$

Nach Konstruktion ist $T\bar{x} = \bar{y}$. Setze $x := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\bar{x} \Rightarrow Tx = y$ und

$$\|x\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \|\bar{x}\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{1}{1-\alpha} < 1$$

Also ist $y \in T(B_1(0))$ und somit folgt die Behauptung.

□

{kor7.11}

Korollar 7.11
Sind X und Y Banachräume und ist $T \in L(X,Y)$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung T^{-1} stetig.

{def7.12}

Definition 7.12
Seien X und Y normierte Räume, $D \subseteq X$ sei ein Untervektorraum, $T: D \to Y$ sei eine lineare Abbildung. Dann heißt T abgeschlossen, falls: Konvergiert eine Folge $(x_n)_n$, $x_n \in D$, gegen $x \in X$ und konvergiert $(Tx_n)_n$, etwa gegen $y \in Y$, so folgt $x \in D$ und $Tx = y$. Ist T auf $D \subseteq X$ definiert, so schreibt man $\operatorname{dom}(T) = D$ bzw. $T\colon \operatorname{dom}(T) \subseteq X \to Y$.

Bemerkung *Wie hängen Abgeschlossenheit und Stetigkeit zusammen?*
Für den Spezialfall $\mathrm{dom}(T) = X$ betrachten wir die Aussagen:

i) $x_n \to x$ in X.

ii) (Tx_n) konvergiert, etwa $Tx_n \to y$ in Y.

iii) $Tx = y$.

Dann gilt:
T stetig, falls i)⇒ii) und iii).
T ist abgeschlossen: i) und ii)⇒iii)
Somit: T stetig⇒ T ist abgeschlossen.

Bemerkung
Abgeschlossene Operatoren bilden im Allgemeinen nicht abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. Abgeschlossenheit heißt hier 'Graphen abgeschlossen'.
Für eine lineare Abbildung $T : D \subseteq X \to Y$ ist der Graph von T definiert als

$$\mathrm{Gr}(T) := \{(x, Tx) \mid x \in D\} \subseteq X \times Y$$

{lemma7.13}

Lemma 7.13
Seien X, Y normierte Räume, $D \subseteq X$ ein Untervektorraum und $T : D \to Y$ linear. Dann gilt:

i) $\mathrm{Gr}(T)$ ist ein Untervektorraum von $X \times Y$.

ii) T ist abgeschlosssen genau dann, wenn $\mathrm{Gr}(T)$ in $X \times Y$ abgeschlossen is. (Hierbei sei $X \times Y$ versehen mit der Norm $\|(x, y)\|_1 := \|x\| + \|y\|$)

Beweis:

i) Klar.

ii) $\mathrm{Gr}(T)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn

$$(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (x, y) \Rightarrow (x, y) \in \mathrm{Gr}(T)$$

Dies ist äquivalent zu

$$x_n \to x, Tx_n \to y \Rightarrow x \in D, y = Tx$$

d.h. zur Abgeschlossenheit von T. □

Beispiel

i) Sei $X = Y = C[0,1]$ und $D = C^1[0,1]$. Der Operator $T\colon D \to Y$ sei definiert durch $Tx = x'$. T ist abgeschlossen, denn: Sei $(x_n)_n \subseteq C^1[0,1]$ eine Funktionenfolge, welche gleichmäßig gegen $x \in C[0,1]$ konvergiert. Zusätzlich konvergiere die Funktionenfolge $(x'_n)_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $y \in C[0,1]$. Nach einem Satz aus Analysis: $x \in C^1[0,1]$ und $x' = y$.

ii) Sei $X = Y = \ell^2$, $D = d$ und $T(x_n)_n = (nx_n)_n$. T ist linear. Dann ist T nicht abgeschlossen, denn: Sei

$$x^k = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{k^2}, 0, 0, \dots\right) \in d$$

Dann konvergiert $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $x = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2 und

$$(Tx^k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

gegen $y = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2, jedoch $x \notin D = d$.

//

{lemma7.14}

Lemma 7.14
Seien X und Y Banachräume, $D \subseteq X$ Untervektorraum und $T\colon D \subseteq X \to Y$ sei abgeschlossen. Dann gelten:

i) D versehen mit der Norm

$$|||x||| := \|x\| + \|Tx\|$$

ist ein Banachraum.

ii) T ist als Abbildung von $(D, |||\cdot|||)$ nach Y stetig.

Beweis:

i) $|||\cdot|||$ Norm folgt direkt.
Ist $(x_n)_n \subseteq D$ eine $|||\cdot|||-$Cauchyfolge, so sind $(x_n)_n$ und $(Tx_n)_n$ jeweils $\|\cdot\|-$Cauchyfolgen und die Limiten $x = \lim x_n$ und $y = \lim Tx_n$ existieren. Da T abgeschlossen, folgt $x \in D$ und $y = Tx$. Das heißt

$$|||x_n - x||| = \|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Also ist $(D, |||\cdot|||)$ vollständig.

ii) Dies folgt aus

$$\|Tx\| \le \|x\| + \|Tx\| = |||x|||, \quad x \in D$$

□

{satz7.15}

Satz 7.15
Seien X und Y Banachräume, $D \subseteq X$ Untervektorraum und $T\colon D \subseteq X \to Y$ abgeschlossen und surjektiv. Dann ist T offen.
Ist T zusätzlich injektiv, so ist T^{-1} stetig.

Beweis: Lemma 7.14 zeigt: $T\colon (D, |||\cdot|||) \to Y$ ist stetig. Der Satz von der offenen Abbildung zeigt: $T\colon (D, |||\cdot|||) \to Y$ ist offen. Wegen $\|x\| \leq |||x|||$ für alle $x \in D$ ist jede $\|\cdot\|$ −offene Menge von D auch $|||\cdot|||$−offen. Also ist T auch offen bezüglich der Originalnorm $\|\cdot\|$.
Der Zusatz ist klar. □

{thm7.16}

Theorem 7.16 **Satz vom abgeschlossenen Graphen**
Seien X und Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ sei linear und abgeschlossen. Dann ist T stetig.

Beweis: Lemma 7.14 zeigt, dass $T\colon (X, |||\cdot|||) \to Y$ stetig ist ($D = Y$, $|||x||| := \|x\| + \|Tx\|$). $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, |||\cdot|||)$ sind Banachräume und wegen $\|\cdot\| \leq |||\cdot|||$ ist die Identität $I\colon (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ stetig. Nach Korollar 7.11 ist I^{-1} stetig. Also sind die Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent. Also ist T stetig bezüglich der Originalnorm. □

8 Projektionen auf Banachräumen

{def8.1}

Definition 8.1
Eine Projektion auf einem Vektorraum ist eine Abbildung p mit $p^2 = p$.

Bemerkung
Aus der linearen Algebra folgt: Sei U ein Untervektorraum eines Vektorraumes X, so existiert ein Komplementärraum V so dass X algebraisch isomorph zur direkten Summe $U \oplus V$ ist ($U + V$ mit $U \cap V = \{0\}$). Daraus folgt, dass Projektion von X auf U linear ist. All dies folgt aus dem Basisergänzungssatz.

In normierten Räumen sind wir an stetigen linearen Projektionen interessiert.

Bemerkung *Weitere Fragen*
Ist X auch topologisch isomorph zu $U \oplus V$, d.h. $U \oplus V \simeq X$ oder äquivalent: $(u_n + v_n)_n \subseteq X$ konvergiert genau dann, wenn $(u_n)_n$ und $(v_n)_n$ konvergieren.
In diesem Fall reden wir auch von einer topologischen direkten zerlegung.

{lemm

Lemma 8.2
Sei p eine stetige lineare Projektion auf dem normierten Raum X . Dann gilt:

i) Entweder $p = 0$ oder $\|p\| \geq 1$.

ii) Der Kern $\ker p$ und das Bild $\operatorname{ran} p$ sind abgeschlossene Untervektorräume.

iii) Es gilt $X \cong \ker p \oplus \operatorname{ran} p$

Beweis:

i) Aus $\|p\| = \left\|p^2\right\| \leq \|p\|^2$ folgt $p = 0$ oder $1 \leq \|p\|$.

ii) $\ker p$ und $\operatorname{ran} p$ sind Unterräume, da p linear. Der Kern $\ker p = p^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen, da p stetig ist. Auch $I - p$ ist eine stetige lineare Projektion[1] und $\operatorname{ran} p = \ker(I - p)$.[2] Somit ist auch $\operatorname{ran} p$ abgeschlossen.

iii) Es ist klar, dass X algebraisch mit der direkten Summe $\ker p \oplus \ker(I - p)$ identifiziert werden kann, denn es gilt:
$$\forall x \in X : x = (I - p)x + px$$
Das die Summe auch topologisch direkt ist, folgt aus der Stetigkeit von p.

□

Beispiel

i) Aus ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$, definiert $(x_n)_n \mapsto (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ eine stetige lineare Projektion mit $\|p\| = 1$.

ii) Es gibt keine stetige lineare Projektion von ℓ^∞ auf c_0.

//

1 $(I - p)^2 = I - p - p + p^2 = I - p$

2 $x \in \ker(I - p) \Rightarrow px = x \Rightarrow x \in \operatorname{ran} p$
$x \in \operatorname{ran} p \Rightarrow \exists y \in X : py = x \Rightarrow x = py = p^2 y = px \Rightarrow x \in \ker(I - p)$

9 Hilberträume

{satz9.1}

Satz 9.1 **Parallelogrammgleichung**
Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\forall x,y\in X$$

gilt.

Beweis:

'⇒':

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\&=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2-\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\&=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\end{aligned}$$

'⇐': Sei zunächst $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Wir definieren:

$$\langle x,y\rangle:=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)\Rightarrow\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}$$

Wir müssen noch die Eigenschaften des Skalarproduktes nachweisen:

i) $\forall x_1,x_2,y\in X$ folgt aus der Parallelogrammgleichung

$$\|x_1+x_2+y\|^2=2\|x_1+y\|^2+2\|x_2\|^2-\|x_1+y-x_2\|^2=:\alpha$$

$$\|x_1+x_2+y\|^2=2\|x_2+y\|^2+2\|x_1\|^2-\|-x_1+x_2+y\|^2=:\beta$$

Also:

$$\|x_1+x_2+y\|^2=\frac{\alpha+\beta}{2}=\|x_1+y\|^2+\|x_2\|^2+\|x_2+y\|^2+\|x_1\|^2-\frac{1}{2}(\|x_1+y-x_2\|^2+\|-x_1+x_2+y\|^2)$$

Analog gilt:

$$\|x_1+x_2-y\|^2 = \|x_1-y\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_2-y\|^2 + \|x_1\|^2 - \frac{1}{2}(\|x_1-y-x_2\|^2 + \|-x_1+x_2-y\|^2)$$

$$\begin{aligned}\langle x_1+x_2, y\rangle &= \frac{1}{4}(\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2)\\ &= \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle\end{aligned}$$

ii) Nach i) gilt ii) für $\lambda \in \mathbb{N}$ und nach Konstruktion auch für $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$. Somit gilt ii) für $\lambda \in \mathbb{Z}$.
Sei $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

$$n\langle \lambda x, y\rangle = n\langle m\frac{x}{n}, y\rangle = \langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle = n\lambda\langle x, y\rangle$$

Also gilt ii) für $\lambda \in \mathbb{Q}$.
Die stetigen Funktionen ($\|\cdot\|$ ist stetig) $\lambda \mapsto \langle \lambda x, y\rangle$ und $\lambda \mapsto \lambda\langle x, y\rangle$ stimmen auf $\mathbb{Q}$ überein und sind daher gleich. Dies zeigt ii).

iii) $\surd$

iv) und v) folgt aus $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist die Argumentation ähnlich.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - y\,\|x-iy\|^2)$$

$\square$

{def9.2}

Definition 9.2
Sei X ein Prähilbertraum. Zwei Vektoren $x, y \in X$ heißen orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt.
zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ heißen orthogonal, in Zeichen $A \perp B$, falls $x \perp y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt.
Die Menge $A^\perp := \{y \in X \mid x \perp y \forall x \in A\}$ heißt orthogonales Komplement von A.

Beispiel
$\mathbb{R}^2$, $x = \binom{1}{0}$, $y = \binom{0}{1}$. $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$. //

Bemerkung

i) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Satz von Pythagoras).

ii) $A^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Untervektorraum von X.

iii) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

iv) $A^\perp = (\overline{\mathrm{lin} A})^\perp$.

{satz9.3}

Satz 9.3 **Projektionssatz**
Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ sei abgeschlossen, nichtleer und konvex und es sei $x_0 \in H$. Dann existiert genau ein $x \in K$ mit

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|$$

Beweis: Für $x_0 \in K$ wähle $x = x_0$. Sei also $x_0 \notin K$ und o.B.d.A. $x_0 = 0$.

Existenz: Setze $d := \inf_{y \in K} \|y\|$. Es existiert $(y_n)_n \subset K$ mit $\|y_n\| \to d$. Wir zeigen zunächst: $(y_n)_n$ ist eine Cauchyfolge. Aus der Parallelogrammgleichung folgt:

$$\underbrace{\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2}_{\geq d^2} + \underbrace{\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2}_{\to 0} = \underbrace{\frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2)}_{\geq d^2} \to d^2$$

Also ist $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge. Da H vollständig, existiert ein $x \in H$ mit $x = \lim y_n$. Da K abgeschlossen, ist $x \in K$. Aus $\|y_n\| \to d$ folgt $\|x\| = d$. Hieraus folgt die Existenz.

Eindeutigkeit: Seien $x, \tilde{x} \in K$, $x \neq \tilde{x}$ mit

$$\|x\| = \|\tilde{x}\| = \inf_{y \in K} \|y\| = d$$

Dann folgt:

$$\underbrace{\left\|\frac{x + \tilde{x}}{2}\right\|^2}_{\in K} < \left\|\frac{x + \tilde{x}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x - \tilde{x}}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|\tilde{x}\|^2) = d^2 \lightning$$

$\square$

{lemm

Lemma 9.4
Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Hilbertraumes H und $x_0 \in H$. Dann sind für ein $x \in K$ äquivalent:

i)
$$\|x_0 - x\| = \inf_{y \in K} \|x_0 - y\|$$

ii)
$$\mathrm{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \leq 0 \forall y \in K$$

Beweis:

ii)⇒i): Folgt aus

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - x + x - y\|^2 = \|x_0 - x\|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}\langle x_0 - x, x - y\rangle}_{\geq 0} + \|x - y\|^2 \leq \|x_0 - x\|^2$$

i)⇒ii): Zu $t \in [0,1]$ setze
$$y_t = (1-t)x + ty \in K \text{ falls } y \in K$$

Dann folgt aus i):

$$\|x_0 - x\|^2 \leq \|x_0 - y_t\|^2 = \langle x_0 - x + t(x-y), x_0 - x + t(x-y)\rangle = \|x_0 - x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x_0 - x, t(x-y)\rangle + t^2 \|x - y\|^2$$

Also:
$$\mathrm{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \leq \frac{t}{2} \|x - y\|^2 \forall t \in [0,1]$$

□

{thm9.5}

Theorem 9.5 **Satz von der Orthogonalprojektion**
Sei $U \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes H. Dann existiert eine lineare stetige Projektion p_U von H auf U mit $\|p_U\| = 1$ und $\ker p_U = U^\perp$.
$I - p_U$ ist eine Projektion von H auf $U^\perp$ mit $\|I - p_U\| = 1$ (es sei denn $U = H$) und es gilt $H = U \oplus_2 U^\perp$.
p_U wird Orthogonalprojektion genannt,

Beweis: Zu $x_0 \in H$ bezeichne $p_U x_0 \in U$ das eindeutig bestimmte Element aus **??**. Mit **??**:

$$\mathrm{Re}\langle x_0 - p_U, y - p_U x_0\rangle \leq 0 \forall y \in U$$

Da mit y auch $y - p_U x_0$ den Unterraum U durchläuft, gilt

$$\operatorname{Re}\langle x_0 - p_U x_0, y\rangle \leq 0 \forall y \in U$$

Betrachte $-y$ und gegebenenfalls iy (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dann folgt

$$\langle x_0 - p_U x_0, y\rangle = 0 \forall y \in U \qquad (*)$$

$(*)$ ist sogar äquivalent zu ii) aus **??**. Somit ist $p_U x_0$ das eindeutig bestimmte Element $x \in U$ mit

$$x_0 - x \in U^\perp \qquad (**)$$

Da $U^\perp$ ein Unterraum ist, folgt

$$\lambda_1 x_1 - \lambda_1 p_U x_1 + (\lambda_2 x_2 - \lambda_2 p_U x_2) \in U^\perp \forall x_1, x_2 \in H \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

und

$$p_U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 p_U x_1 + \lambda_2 p_U x_2$$

Also is p_U linear.
Nach Konstruktion ist $\operatorname{ran} p_U = U$ und es gilt $\ker p_U = U^\perp$, denn

$$p_U x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 \in U^\perp$$

$I - p_U$ ist eine Projektion mit $\operatorname{ran} I - p_U = U^\perp$ und $\ker I - p_U = U$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$\|x_0\|^2 = \|p_U x_0 + (x_0 - p_U x_0)\|^2 = \|p_U x_0\|^2 + \|(I - p_U)x_0\|^2$$

Also ist $H = U \oplus_2 U^\perp$ und $\|p_U\| \leq 1$ (da $\|x_0\|^2 \geq \|p_U x_0\|^2$), $\|I - p_U\| \leq 1$. Da für Projektionen p $\|p\| \geq 1$ gilt, folgt

$$\|p_U\| = 1 = \|I - p_u\|$$

(falls $U \neq \{0\}$ und $U \neq H$). □

Korollar 9.6 {kor9.6}
Für einen Unterraum U eines Hilbertraumes H gilt

$$\bar{U} = (U^\perp)^\perp$$

Beweis: Aus **??** folgt $I - p_V$ für beliebige abgeschlossene Unterräume V. Sei $V = \bar{U}$. Dann ist $U^\perp = V^\perp$ sowie $I - p_{V^\perp} = p_{(V^\perp)^\perp}$. Also $p_V = p_{(V^\perp)^\perp}$ und somit $\bar{U} = V = (V^\perp)^\perp$. □

{thm9

Theorem 9.7 **Darstellungssatz von Fréchet-Riesz**
Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung $\Phi\colon H \to H'$, $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$ bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d.h. $\Phi(\lambda y) = \bar{\lambda}\Phi(y)$). D.h. zu $x' \in H'$ existiert genau ein $y \in H$ mit

$$x'(x) = \langle x, y\rangle \forall x \in H$$

mit $\|x'\| = \|y\|$.

Beweis: Offensichtlich ist Φ konjugiert linear. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|\Phi y\| = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|=1}} |\langle x, y\rangle| \leq \|y\|$$

und für $x = \frac{y}{\|y\|}$ ($y = 0$ ist trivial) ist

$$\Phi(y)(x) = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|} = \|y\|$$

Φ ist also isometrisch und folglich injektiv.
Es bleibt zu zeigen: Φ ist surjektiv. Sei also $x' \in H'$. O.B.d.A. $\|x'\| = 1$. Sei $U = \ker x'$. Nach **??** ist dann $H = U \oplus U^{\perp}$, wobei $U^{\perp}$ eindimensional ist. Dann existiert ein $y \in H$ mit $U^{\perp} = \operatorname{lin}\{y\}$ und $x'(y) = 1$.
Für $x = u + \lambda y \in U \oplus_2 U^{\perp}$ gilt

$$x'(x) = x'(u) + \lambda x'(y) = \lambda$$

sowie

$$\{x, y\} = \lambda\langle y, y\rangle = \lambda \|y\|^2$$

$$\Phi\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right)(x) = \left\langle x, \frac{y}{\|y\|^2}\right\rangle = \lambda = x'(x) \forall x \in H$$

Also $\Phi\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = x'$ und somit ist Φ surjektiv. □

{kor9.8}

Korollar 9.8
Sei H ein Hilbertraum.

i) Eine Folge $(x_n)_n$ konvergiert in H schwach gegen x genau dann wenn

$$\langle x_n - x, y\rangle \to 0 \forall y \in H$$

ii) H ist reflexiv.

iii) Jede beschränkte Folge in H besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis:

i) Folgt aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz.

iii) Folgt aus ii), da in reflexiven Räumen jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

ii) Sei $\Phi\colon H \to H'$ die Abbildung aus **??**. Insbesondere ist Φ bijektiv und isometrisch. Es gilt: H' mit dem Skalarprodukt
$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{H'} := \langle y, x \rangle_H$$
ist ein Hilbertraum. Wir wenden nun Fréchet-Riesz auf H' an und bezeichnen die kanonische Abbildung von H' nach H'' mit ψ. $\psi \circ \Phi\colon H \to H''$ ist dann bijektiv.
$$((\psi \circ \Phi)(x))(x') = \langle x', \Phi(x) \rangle_{H'} = \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle_{H'} = \langle x, y \rangle_H = (Pgi(y))(x) = x'(x) = (i_H(x))(x')$$
Also $i_H = \psi \circ \Phi$ und i_H ist surjektiv.

□

Im Folgenden sei H ein Hilbertraum.

{def9.9}

Definition 9.9
Eine Teilmenge $S \subseteq H$ heißt Orthonormalsystem, falls $\|e\| = 1$ und $\langle e, f \rangle = 0 \forall e, f \in S$ mit $e \neq f$.
Ein Orthonormalsystem S heißt Orthonormalbasis, falls gilt: $S \subseteq T$ und T Orthonormalsystem$\Rightarrow T = S$.

Beispiel
$H = \ell^2$ und $S = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Menge der Einheitsvektoren. S ist eine Orthonomalbasis. //

{satz9.10}

Satz 9.10 **Gram-Schmidt-Verfahren**
Sei $\{x_n\}_n$ eine linear unabhängige Teilmenge von H. Dann existiert ein Orthonormalsystem S mit
$$\overline{\operatorname{lin}\{x_n\}_n} = \overline{\operatorname{lin} S}$$

Beweis: Setze $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Betrachte
$$f_2 := x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1, \quad e_2 := \frac{f_2}{\|f_2\|}$$

Es gilt: $f_2 \neq 0$, da $\{x_1, x_2\}$ linear unabhängig und

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\|x_1\|} \frac{1}{\|f_2\|} \left\langle x_1, x_2 - \left\langle x_2, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\rangle \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x_1\| \, \|f_2\|} \left(\langle x_1, x_2 \rangle - \overline{\langle x_2, x_2 \rangle} \frac{\|x_1\|^2}{\|x_1\|^2} \right) = 0$$

d.h. $e_1 \perp e_2$.
Durch die Vorschrift

$$f_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

und $e_{k+1} := \frac{f_{k+1}}{\|f_{k+1}\|}$ wird so eine Folge $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definiert. Nach Konstruktion ist $S = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem mit $x_n \in \operatorname{lin} S$ und $e_n \in \operatorname{lin}\{x_k\}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $\square$

{satz9.11}

Satz 9.11 **Besselsche Ungleichung**
Ist $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Beweis: Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Setze

$$x_N = x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Dann ist $e_N \perp x_k$ für $k = 1, \ldots, N$, da

$$\langle x_N, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_k \rangle}_{\delta_{nk}} = 0$$

Aus dem Satz von Pythagoras:

$$\|x\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \|x_N\|^2 \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

$\square$

{lemma9.12}

Lemma 9.12
Sei $\{e_n\}$ ein Orthonormalsystem, $x, y \in H$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle| < \infty$$

Beweis: Höldersche Ungleichung für Folgen $\{\langle x, e_n\rangle\}_n$, $\{\langle e_n, y\}\rangle_n$. □

{lemma9.13}

Lemma 9.13
Sei $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem und sei $x \in H$. Dann ist

$$S_x := \{e \in S \mid \langle x, e\rangle \neq 0\}$$

höchstens abzählbar.

Beweis: Besselsche Ungleichung besagt, dass

$$S_{x,n} := \left\{ e \in S \middle| |\langle x, e\rangle \geq \frac{1}{n} \right\}$$

endlich ist und daher ist

$$S_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_{x,n}$$

abzählbar oder endlich. □

{def9.14}

Definition 9.14
Sei X ein normierter Raum, I Indexmenge, $x_i \in X$, $i \in I$. Die Reihe $\sum_{i \in I} x_i$ konvergiert unbedingt gegen $x \in X$, falls

i) $I_0 = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar.

ii) Für jede Aufzählung $I_0 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ gilt die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n} = x$$

(Der Wert der Reihe $\sum x_{i_n}$ hängt also nicht von der Reihenfolge der x_{i_n}s ab). Schreibweise:

$$x = \sum_{i \in I} x_i$$

Bemerkung

i) In diesem Abschnitt unterscheiden wir zwischen $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}$.

ii) Ist $X = \mathbb{K}^n$, so gilt: Absolute und unbedingt Konvergenz sind äquivalent.

iii) Allgemein gilt der Satz von Dvoretzky-Rogers: In jedem unendlichdimensionalen Banachraum existiert eine unbedingt konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert.

{kor9.15}

Korollar 9.15 **Allgemeine Besselsche Ungleichung für Orthonormalsysteme**
Ist $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$, so ist

$$\sum_{e \in S} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

{satz9.16}

Satz 9.16
Sei $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem.

i) Für alle $x \in H$ konvergiert $\sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e$ unbedingt.

ii)

$$p : x \mapsto \sum_{e \in S} \langle x, e\rangle e$$

ist eine Orthonomalprojektion aus $\operatorname{lin} S$.

Beweis:

i) Sei $\{e_1, e_2, ...\}$ eine Aufzählung von $\{e \in S \mid \langle x, e\rangle \neq 0\}$. Wir zeigen, dass $\sum \langle x, e_n\rangle e_n$ eine Cauchyreihe ist. Aus dem Satz von Pythagoras folgt:

$$\left\| \sum_{n=N}^{M} \langle x, e\rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=N}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \xrightarrow{N,M\to\infty} 0$$

Dann existiert $y := \sum \langle x, e_n \rangle e_n$ in H und analog konvergiert für eine Permutation $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe $y_\pi = \sum \langle x, e_{\pi(n)} \rangle e_{\pi(n)}$. Es bleibt zu zeigen: $y = y_\pi$. Sei $z \in H$ beliebig. Aus

$$\langle y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\pi(n)} \rangle \langle e_{\pi(n)}, y \rangle = \langle y_\pi, z \rangle$$

folgt $y - y_\pi \in H^\perp = \{0\}$.

ii) Wegen **??** (insbesondere $(**)$) genügt es zu zeigen, dass

$$\left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e \right\rangle = 0 \forall x \in S$$

Für $\langle x, e \rangle = 0 \forall e \in S$ ist dies klar. Sei also $\langle x, e \rangle \neq 0$ für ein $e \in S$. Dann ist $e = e_{n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt die Behauptung.

□

{satz9.17}

Satz 9.17
Sei $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem.

i) Es existiert eine Orthonormalbasis S' mit $S \subseteq S'$.

ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) S ist eine Orthonormalbasis.

b) Ist $x \in H$ und $x \perp S$, so ist $x = 0$.

c) Es gilt $H = \overline{\text{lin } S}$.

d)
$$x = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e \forall x \in H$$

e)
$$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle \langle e, x \rangle \forall x, y \in H$$

f) Parsevalsche Gleichung:

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \forall x \in H$$

Beweis:

i) Folgt aus dem Zornschen Lemma.

ii) *a)⇒b):* Wäre $x \neq 0$, $x \perp S$, so wäre $S \cup \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ ein Orthonormalsystem. $\lightning$

b)⇒c): Folgt aus $\bar{U} = (U^{\perp})^{\perp}$.

c)⇒d): Dies ist **??**.

d)⇒e): Einsetzen unter Beachtung von **??** und **??**.

e)⇒f): Setze $x = y$.

f)⇒a): Angenommen, es gäbe x mit $\|x\| = 1$, so dass $S \cup \{x\}$ ein Orthonomalsystem ist.

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 = 0 \lightning$$

□

{satz9.18}

Satz 9.18
Ist S eine Orthonormalbasis von H, so ist $H \cong \ell^2(S)$. Hierbei ist

$$\ell^2(S) := \left\{ f : S \to \mathbb{K} \,\middle|\, \sum_{i \in S} |f(i)|^2 < \infty \right\}$$

ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in S} f(i)\overline{g(i)}$$

Beweis: Zu $x \in H$ definiere $Tx \in \ell^2(S)$ durch

$$(Tx)(e) = \{x, e\}$$

$Tx \in \ell^2(S)$ (folgt aus der Besselschen Ungleichung). $T : H \to \ell^2(S)$ ist linear und mit der Parsevalschen Gleichung isometrisch.
Ist umgekehrt $(f_e)_e \in \ell^2(S)$, so definiert $x = \sum_{e \in S} f_e e$ ein Element von H (siehe Beweis von **??**i)).
Es gilt: $Tx = (f_e)_{e \in S}$. hieraus folgt die Behauptung. □

9.19}

Korollar 9.19
Ist H separabel und $\dim H = \infty$, so ist $H \cong \ell^2$.

Beweis: Sei S eine Orthonormalbasis von H. Aus $\|e-f\| = \sqrt{2}$ $(\forall e, f \in S,\ e \neq f)$ folgt: S kann nicht überabzählbar sein (vergleiche Beweis der Inseparabilität von ℓ^2). **??** liefert die Behauptung. $\square$

10
Operatoren auf Hilberträumen

Sei stets H (bzw. (H_1, H_2)) ein Hilbertraum.

{def10.1}

Definition 10.1
Sei $T \in L(H_1, H_2)$. Die Abbildung $T^* \in L(H_2, H_1)$ heißt adjungiert zu T, falls

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T1^* y \rangle_{H_1} \forall x \in H_1, y \in H_2$$

{satz10.2}

Satz 10.2
Zu jedem Operator $T \in L(H_1, H_2)$ existiert ein eindeutig bestimmter adjungierter Operator T^* und es gilt

$$\|T\| = \|T^*\|$$

Beweis:

Eindeutigkeit: Seien S_1 und S_2 adjungiert zu T.

$$\langle x, (S_1 - S_2)y \rangle_{H_1} = \langle Tx, y \rangle_{H_2} - \langle Tx, y \rangle_{H-2} = 0$$

für alle $x \in H_1$, $y \in H_2$. Alsi gilt $S_1 = S_2$

Existenz: Für $y \in H_2$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle Tx, y \rangle_{H_2}$ stetig und linear. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz existiert ein $y^* \in H_1$ so dass

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, y^* \rangle_{H_1} \forall x \in H_1$$

Die Zuordnung $T^* : y \mapsto y^*$ ist linear und wegen

$$\|T^*\| = \sup_{\substack{y \in H_2 \\ \|y\| \le 1}} \|y^*\| = \sup_{\substack{y \in H_2 \\ \|y\| \le 1}} \sup_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\| \le 1}} |\langle x, y^* \rangle_{H_1}| = \|T\|$$

auch stetig. Hieraus folgt die Behauptung. □

{satz10.3}

Satz 10.3
Seien $S,T \in L(H_1,H_2)$, $R \in L(H_2,H_3)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

i) $(S+T)^* = S^* + T^*$.

ii) $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$.

iii) $(RS)^* = S^* R^*$.

iv) $S^{**} = S$.

v) $\|SS^*\| = \|S^*S\| = \|S\|^2$.

vi) $\ker S = (\operatorname{ran} S^*)^\perp$ und $\ker S^* = (\operatorname{ran} S)^\perp$. Insbesondere ist S genau dann injektiv, wenn $\operatorname{ran} S^*$ dicht liegt.

Beweis: i) bis iv) lassen sich einfach nachrechnen. Wir zeigen v). Es gilt

$$\|Sx\| = \langle Sx, Sx\rangle_{H_2} = \langle x, S^*Sx\rangle \leq \|x\| \left\|S^*Sx\right\|$$

$$\|S\|^2 = \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Sx\|_{H_2}^2 \leq \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|x\| \left\|S^*Sx\right\| \leq \left\|S^*\right\| \|S\| = \|S\|^2$$

Also $\|S\|^2 = \|S^*S\|$ und folglich

$$\left\|S^2\right\| = \left\|S^*\right\|^2 = \left\|S^{**}S^*\right\| = \left\|SS^*\right\|$$

Zu vi):

$$\begin{aligned} x \in \ker S &\Leftrightarrow Sx = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle Sx, y\rangle_{H_2} = 0 \forall y \in H_2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, S^*y\rangle_{H_1} = 0 \forall y \in H_2 \\ &\Leftrightarrow x \in (\operatorname{ran} S^*)^\perp \end{aligned}$$

und somit auch

$$\ker S^* = (\operatorname{ran} S^{**})^\perp = (\operatorname{ran} S)^\perp$$

□

{def10.4}

Definition 10.4
Sei $T \in L(H_1, H_2)$.

i) T heißt unitär, falls T invertierbar ist mit $TT^* = I_{H_2}$ und $T^*T = I_{H_1}$.

ii) Sei $H_1 = H_2$. T^* heißt selbstadjungiert (oder hermitesch), falls $T = T^*$.

iii) Sei $H_1 = H_2$. T heißt normal, falls $TT^* = T^*T$.

Bemerkung

i) T unitär$\Leftrightarrow$ T surjektiv und

$$\langle Tx, Ty\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1} \forall x, y \in H_1$$

ii) T ist selbstadjungiert$\Leftrightarrow$ $\langle Tx, y\rangle_{H_1} = \langle x, Ty\rangle_{H_2}$.

iii) T ist normal$\Leftrightarrow$ $\langle Tx, Ty\rangle_{H_1} = \langle T^*y, T^*y\rangle_{H_1}$.

iv) T selbstadjungiert$\Rightarrow$ T normal.

v) $H_1 = H_2$, T unitär$\Rightarrow$ T normal.

Beispiel

i) Sei $H = \mathbb{K}^n$. Wird $T \in L(H)$ durch die Matrix $(a_{ij})_{ij}$ dargestellt, so wird T^* durch die Matrix $(\bar{a}_{ji})_{ji}$ dargestellt.

ii) Sei $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ der Shiftoperator $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$. Dann ist $T^*(y_1, y_2, \ldots) = (0, y_1, y_2, \ldots)$. T ist nicht normal, da $TT^* = I_{\ell^2}$ und $T^*T = p_U$, $U = \{(x_n)_n \in \ell^2 \mid x_1 = 0\}$.

iii) T^*T und TT^* sind stets selbstadjungiert.

//

{lemma10.5}

Lemma 10.5
Für $T \in L(H_1, H_2)$ sind äquivalent:

i) T ist eine Isometrie, d.h. $\|Tx\| = \|x\| \, \forall x \in H$.

ii) $\langle Tx, Ty\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1} \forall x, y \in H_1$.

Beweis:

ii)⇒i): Setze $x = y$.

i)⇒ Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann folgt aus

$$\langle x, y\rangle_{H_1} = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|Tx+Ty\|^2 - \|Tx-Ty\|^2) = \langle Tx, Ty\rangle$$

die Behauptung. Analog für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

□

{satz10.6}

Satz 10.6 **Satz von Hellinger-Toeplitz**
Erfüllt eine lineare Abbildung $T: H \to H$ die Symmetriebedingung

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \forall x, y \in H$$

so ist T stetig, folglich selbstadjungiert.

Beweis: Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist zu zeigen:

$$x_n \to, Tx_n \to y \Rightarrow Tx = y$$

$$\begin{aligned}
\|Tx - y\|^2 &= \langle Tx - y, Tx - y\rangle \\
&= \left\langle Tx - \lim_{n\to\infty} Tx_n, Tx - y\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle T(x - x_n), Tx - y\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle x - x_n, T^*(Tx - y)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also ist $Tx = y$. □

{satz10.7}

Satz 10.7
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann sind für $T \in L(H)$ äquivalent:

i) T ist selbstadjungiert.

ii) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \forall x \in H$

Beweis:

i)⇒ii): Folgt aus $\langle Tx,x\rangle = \langle x,Tx\rangle = \overline{\langle Tx,x\rangle} \in \mathbb{R}$.

ii)⇒i): Für $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachte die reelle Zahl

$$\langle T(x+\lambda y),x+\lambda y\rangle = \langle Tx,x\rangle + \bar{\lambda}\langle Tx,y\rangle + \lambda\langle Ty,x\rangle + |\lambda|^2\langle Ty,y\rangle$$

Wir nehmen alle konjugiert komplex:

$$\langle T(x+\lambda y),x+\lambda y\rangle = \langle Tx,x\rangle + \lambda\langle y,Tx\rangle + \bar{\lambda}\langle x,Ty\rangle + |\lambda|^2\langle Ty,y\rangle$$

Also gilt:

$$\bar{\lambda}\langle Tx,y\rangle + \lambda\langle Ty,x\rangle = \lambda\langle x,Tx\rangle + \langle x,\bar{T}y\rangle$$

Wir wählen $\lambda = 1$ und $\lambda = -i$:

$$\langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle = \langle y,Tx\rangle + \langle x,Ty\rangle$$

$$\langle Tx,y\rangle - \langle Ty,x\rangle = -\langle y,Tx\rangle + \langle x,Ty\rangle$$

Also folgt $\langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle$.

□

{satz10.8}

Satz 10.8
Für selbstadjungierte operatoren $T \in L(H)$ gilt

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx,x\rangle|$$

Beweis: '≥' ist klar.
Setze

$$M := \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx,x\rangle|$$

Aus $T = T^*$ folgt:

$$\langle T(x+y),x+y\rangle - \langle T(x-y),x-y\rangle = 2\langle Tx,y\rangle + 2\langle Ty,x\rangle = 2\langle Tx,y\rangle + 2\overline{\langle Tx,y\rangle} = 4\operatorname{Re}\langle Tx,y\rangle$$

Also:

$$4\operatorname{Re}\langle Tx,y\rangle \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Weiter gilt:

$$\operatorname{Re}\langle Tx,y\rangle \leq M \forall \|x\|, \|y\| \leq 1$$

Multiplikation mit geeigneten λ, $|\lambda| = 1$ liefert:

$$|\langle Tx,y\rangle| \leq M \forall \|x\|, \|y\| \leq 1$$

Also ist $\|T\| \leq M$. □

{kor10.9}

Korollar 10.9
Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert und es gilt $\langle Tx, y\rangle = 0$, so ist $T = 0$.

Bemerkung
Die Aussage gilt nur für selbstadjungierte Operatoren: Sei $H = \mathbb{R}^2$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt:

$$\langle Tx, x\rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = x_2 x_2 - x_1 x_2 = 0$$

{lemma10.10}

Lemma 10.10
Ist $T \in L(H)$ ein normaler Operator, so gilt

$$\|Tx\| = \left\|T^* x\right\|$$

Insbesondere $\ker T = \ker T^*$.

Beweis: Es gilt:

$$0 = \langle (TT^* - T^*T)x.x\rangle = \left\|T^* x\right\|^2 - \|Tx\|^2 \, \forall x \in H$$

□

{satz10.11}

Satz 10.11
Sei $p \in L(H)$eine Projektion (d.h. $p^2 = p$) mit $p \neq 0$. Dann sind äquivalent:

i) p ist eine Orthogonalprojektion (d.h. $\operatorname{ran} p \perp \ker p$).

ii) $\|p\| = 1$.

iii) p ist selbstadjungiert (d.h. $p = p^*$).

iv) p ist normal (d.h. $pp^* = p^* p$).

v) $\langle px, x\rangle \geq 0 \forall x \in H$.

Beweis:

i)⇒ii): Dies ist **??**.

ii)⇒i): Sei $x \in \ker p$ und $y \in \operatorname{ran} p$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$p(x+\lambda y) = \lambda y$$

$$\|\lambda y\|^2 = \|p(x+\lambda y)\|^2 \le \|x+\lambda y\|^2 = \left\|x^2\right\| + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \|\lambda y\|^2$$

$$-\lambda \operatorname{Re}\langle x,y\rangle \le \|x\|^2 \,\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Es folgt: $\operatorname{Re}\langle x,y\rangle = 0$. Analog für $\lambda \in i\mathbb{R}$: $\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = 0$, also folgt i).

i)⇒iii): Es ist

$$\langle Px,y\rangle = \langle px, py + (y-py)\rangle = \langle px, py\rangle$$

und

$$\langle x, py\rangle = \langle px + (x-px), py\rangle = \langle px, py\rangle$$

iii)⇒iv): $\surd$

iv)⇒i): Lemma 10.10: T normal⇒ $\|Tx\| = \|T^*x\| \,\forall x \in H$. Mit Lemma 10.10:

$$\ker p = \ker p^* = (\operatorname{ran} p)^\perp$$

iii)⇒v):

$$\langle px,x\rangle = \langle p^2x,x\rangle = \langle p(px),y\rangle = \langle px, p^*x\rangle = \langle px,px\rangle = \|px\|^2 \ge 0$$

v)⇒i): Für $y \in \ker p$, $y \in \operatorname{ran} p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 \le \langle p(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle = \langle \lambda y, x+\lambda y\rangle = \lambda\langle y,x\rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

$$\langle y,x\rangle \ge -\lambda \|y\|^2 \,\forall \lambda > 0$$

$$\langle y,x\rangle \le -\lambda \|y\|^2 \,\forall \lambda < 0$$

Also folgt: $\lambda y,x\rangle = 0$.

□

11

Das Spektrum eines beschränkten Operators

X sei stets ein Banachraum und $T \in L(X)$.

{def11.1}

Definition 11.1
Die Resolventenmenge von T ist gegeben durch

$$\rho(T) = \langle \lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda I - T)^{-1} \text{ existiert in } L(X) \}$$

Die Abbildung $R(\cdot, T)\colon \mathbb{K} \to L(X)$, $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, heißt Resolventenabbildung.
Das Spektrum von T ist gegeben durch

$$\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$$

Wir definieren die folgenden Teilmengen des Spektrums:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I - T \text{ ist nicht injektiv}\}$$

(Punktspektrum)

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I - T \text{ ist injektiv, nicht surjektiv aber hat dichtes Bild}\}$$

(Stetiges Spektrum)

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I - T \text{ ist injektiv, ohne dichtes Bild}\}$$

(Restspektrum)

Bemerkung
Es gilt:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_s(T) \cup \sigma_r(T)$$

da $(\lambda I - T)^{-1}$ automatisch stetig ist, falls $\lambda I - T$ bijektiv ist (folgt aus satz von der offenen Abbildung).
Die Elemente von $\sigma_p(T)$ heißen Eigenwerte, ein $x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$ heißt Eigenvektor (oder Eigenfunktion, falls X ein Funktionenraum ist).

{satz11.2}

Satz 11.2
Ist X ein Hilbertraum, so gilt:

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}, T \in L(X)$$

Beweis: $\lambda I - T$ Isomorphismus$\Leftrightarrow (\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*$ Isomorphismus. Hieraus folgt direkt die Aussage. □

Beispiel

i) $\dim X < \infty$. Dann gilt

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\text{Menge der Eigenwerte}\}$$

$\sigma(T)$ kann im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ leer sein.

ii) $X = C[0,1]$, $T \in L(X)$ und

$$(Tx)(s) = \int_0^s x(t)\mathrm{d}t$$

Zeige: $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

Beweis: Sei $\lambda = 0$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert: T ist injektiv. Aus $(Tx)(0) = 0$ folgt: T hat kein dichtes Bild. Also ist $0 \in \sigma_r(T)$.
Sei nun $\lambda \neq 0$. Es ist zu zeigen: $\forall y \in C[0,1]$ ist die Gleichung

$$\lambda x - Tx = y \qquad (*)$$

eindeutig nach x auflösbar ($x \in C[0,1]$). Sei zunächst $y \in C^1[0,1]$ mit $y' =: z$. Dann ist $(*)$ äquivalent zu

$$x'(t) - \frac{1}{\lambda}x(t) = \frac{1}{\lambda}z(t), x(0) = \alpha := \frac{1}{\lambda}y(0) \qquad (**)$$

Diese Gleichung hat die eindeutige Lösung

$$x(t) = e^{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\frac{s}{\lambda}} z(s) \mathrm{d}s + \alpha \right) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} y(s) \mathrm{d}s + \frac{1}{\lambda} y(t)$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass x auch für beliebiges $y \in C[0,1]$ Lösung von $(*)$ ist. Für $y = 0$ hat die Gleichung $(*)$ nur die triviale Lösung. Also ist $\lambda I - T$ bijektiv. □

iii) Wir betrachten den Operator aus ii) auf

$$X = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = 0\}$$

Zeige: $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \{0\}$.

Beweis: Analog zu ii) gilt: $\lambda \in \rho(T)$ für $\lambda \neq 0$ und wieder ist T injektiv. Wegen

$$\operatorname{ran} T = \{y \in C^1[0,1] \mid y(0) = y'(0) = 0\}$$

gilt:

$$\operatorname{ran} T \neq \overline{\operatorname{ran} T} = X$$

Also ist $0 \in \sigma_c(T)$. □

//

{satz11.3}

Satz 11.3
Es gilt

i) $\rho(T)$ ist offen.

ii) Die Resolventenabbildung ist analytisch, d.h. sie wird lokal durch eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $L(X)$ beschrieben.

iii) $\sigma(T)$ ist kompakt, genauer: $|\lambda| \leq \|T\|$ für $\lambda \in \sigma(T)$.

iv) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Beweis:

i) Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ und

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \left\| (\lambda_0 I - T)^{-1} \right\|^{-1}$$

Dann folgt

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) + (\lambda - \lambda_0) I = (\lambda_0 I - T)(I - (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})$$

Nach Wahl von λ konvergiert die Neumannsche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}((\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1})^n$$

und es gilt: $(I-(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1})$ ist invertierbar. Also ist $\lambda I-T$ invertier(bar und $\lambda\in\rho(T)$. Somit ist $\rho(T)$ offen.

ii) Mit Hilfe der Neumannschen Reihe folgt:

$$\begin{aligned}
R(\lambda,T)&=(\lambda I-T)^{-1}\\
&=(I-(\lambda_0-\lambda)(\lambda_0 I-T)^{-1})^{-1}(\lambda_0 I-T)^{-1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n(\lambda_0 I-T)^{-n}(\lambda_0 I-T)^{-1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 I-T)^{-(n+1)}(\lambda_0-\lambda)^n
\end{aligned}$$

iii) Nach i) ist $\sigma(T)$ abgeschlossen und für $|\lambda|>\|T\|$:

$$(\lambda I-T)^{-1}=\lambda^{-1}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}T^n \qquad (*)$$

ist konvergent (Neumannsche Reihe, $\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|<1$). Also folgt:

$$\sigma(T)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{K}\mid|\lambda|\leq\|T\|\}$$

iv) Angenommen, $\sigma(T)=\emptyset$. Dann $\rho(T)=\mathbb{C}$. Dann ist die Resolventenabbildung auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und es gilt lokal:

$$R(\lambda,T)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n R(\lambda_0,T)^{n+1}(\lambda-\lambda_0)^n$$

Sei nun $l\in L(X)'$ beliebig.

$$l(R(\lambda,T))=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n l(R(\lambda_0,T)^{n+1})(\lambda-\lambda_0)^n$$

ist analytisch. $l(R(\cdot,T))$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt: Für $|\lambda|>2\|T\|$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}
|l(R(\lambda,T))|&=\left|\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}l(T^n)\right|\\
&\leq|\lambda|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{-n}\|l\|\left\|T^n\right\|\\
&\leq|\lambda|^{-1}\|l\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |\lambda|^{-1} \|l\| \frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} \\
&= |\lambda|^{-1} \|l\| \frac{|\lambda|}{|\lambda|-\|T\|} \\
&= \frac{\|l\|}{|\lambda|-\|T\|} \\
&\leq \frac{\|l\|}{\|T\|}
\end{aligned}
$$

und auf der kompakten Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 2\|T\|\}$ ist sie aus Stetigskeitsgründen beschränkt.

Satz von Lioville (Funktionentheorie) Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte beschränkte analytische Funktion ist konstant.

Mit dem Satz folgt: $\lambda \mapsto l(R(\lambda,T))$ ist konstant. Es gilt aber

$$l(R(\lambda,T)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n l(R(0,T)^{n+1})\lambda^n$$

lokal um 0. Somit gilt:

$$l(R(0,T)^{n+1}) = 0$$

Insbesondere folgt $l(T^{-2}) = 0$. Die gilt für jedes $l \in L(X)'$. Mit Hahn-Banach gilt dann $T^{-2} = 0$. Der Nulloperator ist aber nicht invers zu T^2 ↯. Also $\sigma(T) \neq \emptyset$.

□

{lemma11.4}

Lemma 11.4
Die reelle Zahlenfolge (a_n) erfülle $0 \leq a_{m+n} \leq a_n a_m$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(\sqrt[n]{a_n})_n$ gegen $a := \inf \sqrt[n]{a_n}$.

{def11.5}

Definition 11.5

$$r(T) := \inf \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}$$

wird Spektralradius von $T \in L(X)$ genannt.

Lemma 11.4 garantiert, dass der limes existiert.

{satz11.6}

Satz 11.6

i) $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow |\lambda| \leq r(T)$

ii) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so existiert $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$, d.h.

$$r(T) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$$

{satz11.7}

Satz 11.7
Ist H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ normal, so ist $r(T) = \|T\|$.

{satz11.8}

Satz 11.8
Sei $T \in K(X)$.

i) Ist $\dim X = \infty$, so ist $0 \in \sigma(T)$.

ii) Die (eventuell leere) Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ist höchstens abzählbar.

iii) $\sigma(T)$ besitzt keinen von 0 verschiedenen Häufungspunkt.

iv) Jedes $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von T mit $\dim \ker(\lambda I - T) < \infty$.

Beweis:

i) Angenommen $0 \in \rho(T)$. Dann existiert T^{-1} in $L(X)$. Also ist $I = TT^{-1} \in K(X)$. Dann wäre $B(0,1)$ kompakt$\lightning$.

$\square$