

Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Einführung in die Funktionentheorie

Beweis ist relativ einfach. Haben kein Platz, also machen wir Platz.

Prof. Dr. N. V. Shcherbina

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	7
1.1 \mathbb{R} - der Körper der reellen Zahlen	7
1.2 Topologische Grundbegriffe	8
1.3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen	11
1.4 Konvergente und absolut konvergente Reihen	14
1.5 Stetige Funktionen	16
1.6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in \mathbb{C}	18
1.7 Komplexe Differentialrechnung	23
1.8 Holomorphe Funktionen	25
2 Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie	29
2.1 Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz	29
3 Potenzreihen	31
3.1 Konvergenzkriterien	31
3.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen	34
3.3 Holomorphie von Potenzreihen	35
3.3.1 Beispiele holomorpher Funktionen	37
4 Elementar-transzendente Funktionen	39
4.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	39
4.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln	41
4.3 Logarithmusfunktion	43
5 Komplexe Integralrechnung	45
5.1 Wegintegrale in \mathbb{C}	45
5.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale	45
5.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen	45
6 Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung	49
6.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	49
6.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	52
6.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen	54
7 Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen	59
7.1 Identitätssatz	59

7.2	Existenz singulärer Punkte	61
7.3	Konvergenzsätze von Weierstraß	63
7.4	Offenheitssatz und Maximumprinzip	65
7.5	Allgemeine Version von Cauchys Satz	69
8	Isolierte Singularitäten	73
8.1	Hebbare Singularitäten, Pole	73
8.2	Entwicklung von Funktionen um Polstellen	76
8.3	Wesentliche Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstrass	77
9	Laurentreihen und Fourierreihen	79
9.1	Laurentdarstellung in Kreisringen	80
9.2	Eigenschaften von Laurentreihen	83
10	Residuenkalkül	85
10.1	Residuensatz	85
10.2	Conformal mappings - Konforme Abbildungen	91

Vorwort

Hier kommt noch das Vorwort hin, wenn mir was einfällt. Solang müsst ihr hier mit 'ner zu 90% leeren Seite auskommen.

1

Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen

1.1 \mathbb{R} - der Körper der reellen Zahlen

Im 2-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2 der geordneten reellen Zahlenpaare $z := (x, y)$ wird eine Multiplikation eingeführt vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Dadurch wird \mathbb{R}^2 , zusammen mit der Vektorraumaddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

zu einem (kommutativen) Körper mit dem Element $(1, 0)$ als Einselement; das Inverse von $z = (x, y) \neq 0$ ist

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Dieser Körper heißt **der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen**.

Man definiert weiter $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$. Offensichtlich gilt $i^2 = -1$, man nennt i die **imaginäre Einheit** von \mathbb{C} . Für jede Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ besteht die eindeutige Darstellung $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, d.h. $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, (wir identifizieren die reellen Zahlen x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$). Man setzt

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y$$

wobei $z = x + iy$ und nennt x bzw. y **Realteil** bzw. **Imaginärteil von z** . Die Zahl z heißt **reell** bzw. **rein imaginär**, wenn $\operatorname{Im} z = 0$ bzw. $\operatorname{Re} z = 0$, letzteres bedeutet $z = y$.

Für $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{C}$ ist

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(w, \bar{z}) = xu + yv$$

(für $z = x + iy$ ist $\bar{z} := x - iy$) das euklidische Skalarprodukt im reellen Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist die euklidische Länge von z , sie heißt der **absolute Betrag** von z . Es gilt:

i) $|\bar{z}| = |z|$

- ii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- iii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$
- iv) $\langle aw, az \rangle = |a|^2 \langle w, z \rangle, \langle \bar{w}, \bar{z} \rangle = \langle w, z \rangle \forall w, z, a \in \mathbb{C}$
- v) $|\langle w, z \rangle| \leq |w||z| \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
- vi) $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w, z \rangle \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cosinussatz)

Zwei Vektoren z, w heißen **orthogonal**, wenn $\langle z, w \rangle = 0$.

Fundamental für das Rechnen mit dem Absolutbetrag sind folgende Regeln:

- i) $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- ii) $|zw| = |z||w|$ (Produktregel)
- iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$-1 \leq \frac{\langle w, z \rangle}{|w||z|} \leq 1 \forall w, z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Es folgt:

$$\exists! \varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi \leq \pi : \cos \varphi = \frac{\langle w, z \rangle}{|z||w|}$$

Man nennt φ den Winkel zwischen $w, z \in \mathbb{C}$, in Zeichen $\angle(w, z) = \varphi$.

1.2 Topologische Grundbegriffe

Definition 1.2.1

Ist X irgendeine Menge, so heißt eine Funktion $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$, eine **Metrik auf X** , wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt:

- i) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(X, d) heißt **metrischer Raum**.

Im Fall $X = \mathbb{C}$ nennt man $d(w, z) := |w - z| = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2}$ (die **euklidische Entfernung** der Punkte w, z in der Zahlenebene) die **euklidische Metrik** von \mathbb{C} .

In einem metrischen Raum X mit Metrik d heißt die Menge

$$B_r(c) := \{x \in X \mid d(x, c) < r\}$$

die offene Kugel vom Radius $r > 0$ mit Mittelpunkt $c \in X$.
Im Fall der euklidischen Metrik auf \mathbb{C} heißen die Kugeln

$$B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$$

$r > 0$, offene Kreisscheibe in \mathbb{C} . Wir schreiben durchweg

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

Definition 1.2.2

Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes X heißt **offen** (in X) $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0$ so dass $B_r(x) \subset U$ (\emptyset ist offene Menge per definitionem).

- i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ offen
- ii) U_1, U_2, \dots, U_m offen $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i$ offen

Definition 1.2.3

Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** (in X) $\Leftrightarrow X \setminus A$ offen.

- i) $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ abgeschlossene Mengen $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ abgeschlossen
- ii) A_1, A_2, \dots, A_m abgeschlossen $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i$ abgeschlossen

Definition 1.2.4

$A \subset X$ beliebig. Die **abgeschlossene Hülle** \bar{A} von A ist $\bar{A} := \bigcap B$, so dass $B \supset A$, B abgeschlossen.

Eine Menge $W \subset X$ heißt **Umgebung der Menge** $M \subset X$, wenn $\exists V$ offen mit $M \subset V \subset W$.
Sei $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$. Eine Abbildung $\{k, k+1, k+2, \dots\} \rightarrow X$, $n \mapsto c_n$, heißt **Folge** in X . Man schreibt kurz (c_n) , im Allgemeinen ist $k = 0$.

Definition 1.2.5

Eine Folge (c_n) heißt **konvergent** in X , wenn es einen Punkt $c \in X$ gibt, so dass in jeder Umgebung von c fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder c_n liegen. Der Punkt c heißt ein **Limes der Folge**. In Zeichen:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen in X , wenn der Limes jeder konvergenten Folge (c_n) , $c_n \in M$, stets zu M gehört.

Definition 1.2.6

Ein Punkt $p \in X$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge $M \subset X : \Leftrightarrow \forall$ Umgebung U von p gilt:

$$U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

In jeder Umgebung eines Häufungspunktes p von M liegen unendlich viele Punkte von M ; es gibt stets eine Folge (c_n) in $M \setminus \{p\}$ mit $\lim c_n = p$.

Beispiel

- i) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$. Die Menge U aller Häufungspunkte? $U = \mathbb{R}$.
- ii) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Z}$. $U = \emptyset$.
- iii) $X = \mathbb{R}$, $M = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $U = \{0\}$.
//

Definition 1.2.7

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt **dicht**, in $X : \Leftrightarrow \forall$ offene $U \subset X : U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$.

Beispiel

$X = C[a, b]$, $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$, $f, g \in X$, $A = \mathcal{P}$ = alle Polynome auf $[a, b]$. //

Satz 1.2.8 Äquivalenzsatz

Folgende Aussagen über einen metrischen Raum X sind äquivalent:

- i) Jede offene Überdeckung $U = \{U_j\}_{j \in J}$ von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (Heine-Borel-Eigenschaft)
- ii) Jede Folge (x_n) in X besitzt eine konvergente Teilfolge. (Weierstraß-Bolzano-Eigenschaft)

Definition 1.2.9

Man nennt X **kompakt**, wenn die Bedingungen i) und ii) aus ?? erfüllt sind. Eine Teilmenge K von X heißt **kompakt**, oder auch ein **Kompaktum** (in X), wenn K mit der induzierten Metrik ein kompakter Raum ist.

- (*) Jedes Kompaktum in X ist abgeschlossen in X . In einem kompakten Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.
- (**) Jede offene Menge D in \mathbb{C} ist die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen von D .

1.3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen

Konvergiert die Folge c_n gegen $c \in \mathbb{C}$, so liegen in jeder Kreisscheibe $B_\varepsilon(c)$, $\varepsilon > 0$, um c fast alle Folgenglieder c_n .

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die **Potenzfolge** z^n konvergent: $\lim z^n = 0$; für alle $|z| > 1$ ist die Folge z^n divergent.

Definition 1.3.1

Eine Folge c_n heißt **beschränkt**: $\Leftrightarrow \exists M > 0$, so dass $|c_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Wie im Reellen folgt: Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt. Sind c_n, d_n konvergente Folgen, so gelten die Limesregeln:

- i) $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ist $ac_n + bd_n$ konvergent:

$$\lim(ac_n + bd_n) = a \lim c_n + b \lim d_n$$

(\mathbb{C} -Linearität)

ii) Die Produktfolge $c_n d_n$ ist konvergent:

$$\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$$

iii) Ist $\lim d_n \neq 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $d_n \neq 0 \forall n \geq k$; die Quotientenfolge $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n \geq k}$ konvergiert gegen $\frac{\lim c_n}{\lim d_n}$.

iv) Die Betragsfolge $|c_n|$ reeller Zahlen ist konvergent:

$$\lim |c_n| = |\lim c_n|$$

v) Die Folge \bar{c}_n konvergiert gegen \bar{c} .

Satz 1.3.2

Folgende Aussagen über eine Folge c_n sind äquivalent:

i) c_n ist konvergent.

ii) Die beiden reellen Folgen $\operatorname{Re} c_n, \operatorname{Im} c_n$ sind konvergent. Im Fall der Konvergenz gilt:

$$\lim c_n = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$ Limesregeln i) und v) und $\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2}(c_n + \bar{c}_n)$, $\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2i}(c_n - \bar{c}_n)$.

$ii) \Rightarrow i)$

$$\lim c_n = \lim(\operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n) = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

□

Definition 1.3.3

Eine Folge c_n heißt **Cauchy-Folge**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, so dass $|c_n - c_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k$.

Satz 1.3.4 Konvergenzkriterium von Cauchy

Folgende Aussagen über eine Folge (c_n) sind äquivalent:

- i) (c_n) ist konvergent.
- ii) (c_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$ Da (c_n) konvergent ist, $\exists c$, so dass $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists k \in \mathbb{N} : |c_n - c| < \varepsilon \forall n \geq k$. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$|c_n - c_m| \leq |c_n - c| + |c - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m \geq k$$

$ii) \Rightarrow i)$ (c_n) ist eine Cauchyfolge. Es gilt:

$$|\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c_m| \leq |c_n - c_m|, \quad |\operatorname{Im} c_n - \operatorname{Im} c_m| \leq |c_n - c_m|$$

Also sind $(\operatorname{Re} c_n)$ und $(\operatorname{Im} c_n)$ reelle Cauchy-Folgen, also nach Analysis 1 konvergent. Somit ist auch $c_n = \operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n$ konvergent.

□

Satz 1.3.5

Für $K \subset \mathbb{C}$ ist K kompakt $\Leftrightarrow K$ beschränkt und abgeschlossen.

Satz 1.3.6 Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

1.4 Konvergente und absolut konvergente Reihen

Definition 1.4.1

Ist $(a_v)_{v \geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge $(s_n)_{n \geq k}$, $s_n := \sum_{v=k}^n a_v$, der Partialsummen eine **(unendliche) Reihe** mit den **Gliedern** a_v . Man schreibt $\sum_{v=k}^{\infty} a_v$, $\sum_k^{\infty} a_v$, $\sum_{v \geq k}$ oder einfach $\sum a_v$.

Eine Reihe $\sum a_v$ heißt **konvergent**, wenn die Partialsummenfolge (s_n) konvergiert, andernfalls heißt sie **divergent**. Im Konvergenzfall schreibt man suggestiv:

$$\sum a_v := \lim s_n$$

Wegen $a_n = s_n - s_{n-1}$ gilt $\lim a_n = 0$ für jede konvergente Reihe. Die Limesregeln i) und v) übertragen sich sofort auf Reihen:

$$\sum_{v \geq k} (a a_v + b b_v) = a \sum_{v \geq k} a_v + b \sum_{v \geq k} b_v$$

$$\overline{\sum_{v \geq k} a_v} = \sum_{v \geq k} \bar{a}_v$$

Speziell folgt: Die komplexe Reihe $\sum_{v \geq k} a_v$ ist genau dann konvergent wenn die beiden reellen Reihen $\sum_{v \geq k} \operatorname{Re} a_v$ und $\sum_{v \geq k} \operatorname{Im} a_v$ konvergieren; also dann gilt:

$$\sum_{v \geq k} a_v = \sum_{v \geq k} \operatorname{Re} a_v + \sum_{v \geq k} \operatorname{Im} a_v$$

Satz 1.4.2 Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine Reihe $\sum a_v$ konvergiert genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left| \sum_{m+1}^n a_v \right| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$

Definition 1.4.3

Eine Reihe $\sum a_v$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum |a_v|$ nichtnegativer reeller Zahlen konvergiert.

Satz 1.4.4 Majorantenkriterium

Es sei $\sum_{v \geq k} t_v$ eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern $t_v \geq 0$; es sei $(a_v)_{v \geq k}$ eine komplexe Zahlenfolge, so dass $\forall v : |a_v| \leq t_v$. Dann ist $\sum_{v \geq k} a_v$ absolut konvergent.

Beweis:

$$\sum_{m+1}^n |a_v| \leq \sum_{m+1}^n t_v < \varepsilon$$

Also ist $\sum |a_v|$ konvergent. \square

Wegen $\max(|\operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} a|) \leq |a| \leq |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|$ gilt (nach dem Majorantenkriterium): $\sum a_v$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} a_v, \sum \operatorname{Im} a_v$ sind absolut konvergent.

Satz 1.4.5 Umordnungssatz

$\sum_{v \geq 0} a_v$ konvergiere absolut. Dann konvergiert jede 'Umordnung'² dieser Reihe.

Beweis: $\sum_{v \geq 0}$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{v \geq 0} \operatorname{Re} a_v, \sum_{v \geq 0} \operatorname{Im} a_v$ absolut konvergent, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\sum_{m+1}^n |\operatorname{Re} a_v| < \varepsilon, \sum_{m+1}^n |\operatorname{Im} a_v| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$. $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Bijektion $\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\tau(n) \geq n_0 \forall n \geq N_0$. Also:

$$\sum_{N_0+1}^N |\operatorname{Re} a_{\tau(v)}| < \varepsilon, \quad \sum_{N_0+1}^N |\operatorname{Im} a_{\tau(v)}| < \varepsilon$$

Diese Reihen sind konvergent nach Cauchy, somit auch absolut konvergent und die Behauptung folgt. \square

Sind $\sum_0^\infty a_\mu, \sum_0^\infty a_v$ zwei Reihen, so heißt jede Reihe $\sum_0^\infty c_\lambda$, wobei c_0, c_1, c_2, \dots genau einmal alle Produkte $a_\mu b_v$ durchläuft, eine **Produktreihe** von $\sum a_\mu$ und $\sum b_v$. Die wichtigste Produktreihe ist das **Cauchyprodukt** $\sum p_\lambda$ mit $p_\lambda := \sum_{\mu+v=\lambda} a_\mu b_v$. Diese Bildung wird nahegelegt, wenn man Potenzreihen formal ausmultipliziert:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu x^\mu \right) \left(\sum_0^\infty b_v x^v \right) = \sum_0^\infty p_\lambda x^\lambda$$

¹ Cauchy-Kriterium

² $\sum a_{\tau(v)}, \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Bijektion

Satz 1.4.6 Reihenproduktsatz

Es seien $\sum_0^\infty a_\mu, \sum_0^\infty b_\nu$ absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert jede Produktreihe $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut. Es gilt stets:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

Beweis: $\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$, so dass $c_0, c_1, c_2, \dots, c_l$ unter den Produkten $a_\mu b_\nu, 0 \leq \mu, \nu \leq m$, vorkommen. Dann:

$$\sum_0^l |c_\lambda| \leq \left(\sum_0^m |a_\mu|\right)\left(\sum_0^m |b_\nu|\right) \leq \left(\sum_0^\infty |a_\mu|\right)\left(\sum_0^\infty |b_\nu|\right) < +\infty$$

Also ist $\sum_0^\infty |c_\lambda|$ konvergent, also $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut konvergent und somit unabhängig von Umordnungen. Insbesondere:

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_m)(b_0 + b_1 + \dots + b_m) = (c_0 + c_1 + \dots + c_{(m+1)^2-1})$$

Es folgt:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

□

1.5 Stetige Funktionen

$f: X \rightarrow Y$, f heißt **Funktion** oder **Abbildung**, X heißt **Argumentbereich** und Y **Wertebereich**. Man schreibt auch $X \ni x \rightarrow f(x) \in Y$.

Definition 1.5.1

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **stetig im Punkt** $a \in X$, wenn das f -Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ einer jeden Umgebung V von $f(a)$ in Y eine Umgebung von a in X ist.

Definition 1.5.2

Die Funktion $f: X \rightarrow Y$ konvergiert bei Annäherung an $a \in X$ gegen $b \in Y$, in Zeichen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ oder $f(x) \rightarrow b$ wenn $x \rightarrow a$, wenn es zu jeder Umgebung V von b in Y eine Umgebung U von a in X gibt mit $f(U \setminus \{a\}) \subset V$.

Bemerkung

f ist stetig in $a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Satz 1.5.3 Folgenkriterium

Genau dann ist $f: X \rightarrow Y$ stetig in a , wenn \forall Folgen (x_n) von Punkten $x_n \in X$ mit $\lim x_n = a$ gilt: $\lim f(x_n) = f(a)$.

Zwei Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ werden zusammengesetzt zu $g \circ f: X \rightarrow Z$, $z \rightarrow (g \circ f)(x) := g(f(x))$. Bei dieser Komposition von Abbildungen vererbt sich die Stetigkeit: Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig in $a \in X$ und ist $g: Y \rightarrow Z$ stetig in $f(a) \in Y$, so ist $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig in a .

Definition 1.5.4

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Satz 1.5.5 Stetigkeitskriterium

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) f ist stetig.
- ii) Das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder in Y offenen Menge V ist offen in X .
- iii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder in Y abgeschlossenen Menge A ist abgeschlossen in X .

Satz 1.5.6

Es sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und $K \subset X$ ein Kompaktum. Dann ist auch $f(K) \subset Y$ ein Kompaktum.

Beweis: Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Sei $W_\alpha := f^{-1}(U_\alpha) \forall \alpha \in A$. f ist stetig, also ist für alle $\alpha \in A$ W_α offen. Also ist $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existieren endlich viele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^m W_{\alpha_i}$. Dann ist $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ eine endliche Überdeckung von $f(K)$. Somit ist $f(K)$ nach Definition ein Kompaktum. \square

In Satz 5.5 ist enthalten, dass reellwertige stetige Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Kompaktum K in X Maxima und Minima annehmen.

Komplexwertige Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ lassen sich addieren und multiplizieren: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $x \in X$. Die zu f konjugierte Funktion \bar{f} wird durch $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$, $x \in X$, definiert.

Rechenregeln: $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$, $\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$, $\bar{\bar{f}} = f$. Realteil und Imaginärteil von f werden durch $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ und $(\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, $x \in X$, erklärt. Für $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$ (reellwertige Funktionen) gilt: $f = u + iv$, $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$, $f\bar{f} = u^2 + v^2$.

Man hat:

- i) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $a \in X \Rightarrow f+g, fg, \bar{f}$ stetig in a .
- ii) $f = u + iv$ stetig in $a \Leftrightarrow u, v$ stetig in a .
- iii) g nullstellenfrei in X (d.h. $g(x) \neq 0 \forall x \in X$), dann heißt die Funktion $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ die **Quotientenfunktion** von f und g . Sind f und g stetig in $a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in a .

1.6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in \mathbb{C}

Definition 1.6.1

Sei (X, d_x) ein metrische Raum, $A \subset X$ eine Menge. A ist **zusammenhängend** $\Leftrightarrow \nexists U_1, U_2$ offen in X , so dass:

- i) $U_1 \cup U_2 \supset A$
- ii) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- iii) $U_1 \cap A \neq \emptyset, U_2 \cap A \neq \emptyset$

Beispiel

i) $\mathbb{R} = X$, $d_x(x, y) = |x - y|$, $A = \mathbb{Q}$: $U_1 = (-\infty, \sqrt{2})$, $U_2 = (\sqrt{2}, +\infty)$

ii) $\mathbb{R} = X$, $d_x(x, y) = |x - y|$, $A = [0, 1]$.

Seien U_1, U_2 offene Mengen mit i)-iii), $0 \in U_1$, $1 \in U_2$, $\frac{1}{2} \in U_1 \Rightarrow I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$, $\frac{3}{4} \in U_2 \Rightarrow I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$
 $\Rightarrow \exists! x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ (Intervallschachtelungsprinzip). x_0 liegt also in U_1 oder U_2 . U_1 ist offen,
 also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U_1$, aber $I_n \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ für n genügend
 groß! Also ist A zusammenhängend.

//

Bemerkung

Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $A, B \subset X$ zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.

Definition 1.6.2

Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. $\forall x_0 \in A$ definieren wir

$$K(x) := \left\{ \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \mid x_0 \in A_{\alpha}, A_{\alpha} \subset A \text{ zusammenhängend} \right\}$$

$K(x)$ heißt **Zusammenhangskomponente** des Punktes x von A .

Bemerkung

$K(x_0)$ ist zusammenhängend.

Definition 1.6.3

(X, d_x) metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. A ist **wegzusammenhängend** $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in A \exists$ stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ so dass $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Bemerkung

$A \subset X$ wegzusammenhängend $\not\Rightarrow A$ zusammenhängend.

Beispiel

$\mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1, A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}$ //

Proposition 1.6.4

$A \subset \mathbb{R}^2$ offen, $d_{\mathbb{R}^2}(x, y) = \|x - y\|$. A zusammenhängend $\Rightarrow A$ wegzusammenhängend.

Beweis: Sei $x_0 \in A$ beliebig, aber fixiert. $A(x_0) := \{y \in A \mid \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y\}$.

- i) $A(x_0)$ ist wegzusammenhängend.
- ii) $A(x_0)$ ist offen, weil $\forall y \in A(x_0) \subset A \exists \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(y)$. Also ist die Kurve γ von x_0 zu y + der Radius von y zu beliebigem Punkt von $B_\varepsilon(y)$ auch eine stetige Kurve. Also ist auch $B_\varepsilon(y) \subset A(x_0)$ und somit ist $A(x_0)$ offen.
- iii) $A(x_0)$ ist abgeschlossen in A . Sei $y^* \in A$ und $\exists y_n \in A(x_0), y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y^*$. Da A offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(y^*) \subset A$. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $y_n \in B_\varepsilon(y^*)$. Also existiert ein $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$, so dass $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_n$. Dann ist diese Kurve + der Radius $[y_n, y^*]$ eine Kurve die x_0 mit y^* verbindet. Also $y^* \in A(x_0)$. Somit ist $A(x_0)$ in A abgeschlossen.

Also sind $A(x_0)$ und $A \setminus A(x_0)$ offen $\nsubseteq A \setminus A(x_0) = \emptyset \Rightarrow A(x_0) = A$. Da $A(x_0)$ wegzusammenhängend ist, ist somit auch A wegzusammenhängend. \square

Definition 1.6.5

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal-konstant** genau dann wenn $\forall x \in X \exists$ offene Umgebung $U \subset X, x \in U$, so dass $f|_U = \text{konstant}$.

Ist f lokal-konstant, dann ist f stetig.

Satz 1.6.6

X metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- i) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ lokal-konstant $\Rightarrow f$ konstant
- ii) $A \subset X$ nicht leer, offen und abgeschlossen $\Rightarrow A = X$
- iii) X zusammenhängend

Beweis:

- $i) \Rightarrow ii)$ Sei $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, offen und abgeschlossen. $B := X \setminus A$ offen und abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$,
 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in B \end{cases}$. Es folgt direkt dass f lokal-konstant, also insbesondere stetig ist. Also
 ist f konstant, nämlich $f = 1$, denn $A \neq \emptyset$. Da $A = f^{-1}(1) = X$, ist $A = X$.
- $ii) \Rightarrow i)$ Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ lokal-konstant. Fixiere $c \in X$. $A := f^{-1}(f(c))$. Da f lokal-konstant, ist
 A offen, $c \in A \neq \emptyset$. Da f stetig, ist A abgeschlossen. Also ist $A = X$. Insbesondere ist
 $f(x) = f(c) \forall x \in X$. Also ist f konstant.

□

Satz 1.6.7

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall $\Rightarrow I$ zusammenhängend.

Definition 1.6.8

- i) $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $t \in [0, 1]$. γ heißt **Strecke** von z_0 nach z_1 , $\gamma = [z_0, z_1]$.
- ii) $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$, dann ist $[z_0, z_1] = \text{Intervall}$.
- iii) Seien $\gamma_1: [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Der **Summenweg** $\gamma_1 + \gamma_2$ von γ_1 und γ_2 ist $\gamma: [a_1, b_2 - a_2 + b_1]$, $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1] \end{cases}$.
- iv) γ heißt **Polygon** oder **Streckenweg**, falls $\gamma = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \dots + [z_{n-1}, z_n]$.
- v) Polygon γ heißt **achsenparallel**, falls $[z_j, z_{j+1}]$ parallel zur x -Achse oder y -Achse ist, $j = 0, \dots, n-1$, d.h. $\operatorname{Re} z_j = \operatorname{Re} z_{j+1}$ oder $\operatorname{Im} z_j = \operatorname{Im} z_{j+1}$.
- vi) $D \subset \mathbb{C}$ heißt **Bereich**, falls D offen und nicht leer ist.

Satz 1.6.9

Sei $B \subset \mathbb{C}$ Bereich. Dann sind äquivalent:

- i) B ist zusammenhängend.
- ii) $\forall p, q \in B \exists$ Polygon in B , das p und q verbindet.
- iii) B ist wegzusammenhängend.

Beweis:

ii) \Rightarrow iii) Jedes Polygon ist ein Weg.

iii) \Rightarrow i) Folgt aus Bemerkung oben.

i) \Rightarrow ii) Sei $p \in B$ fest, $z \in B$.

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \exists \text{ Polygon von } p \text{ nach } z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige: f lokal konstant. Sei $w \in B$. Da B offen, gibt es eine Kreisscheibe $\Delta \subset B$, $w \in \Delta$. Ist $z \in \Delta$, so existiert ein Polygon von z nach w in Δ . D.h. $f(w) = 1 \Rightarrow f(z) = 1$ und $f(w) = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \forall z \in \Delta$. Also ist f lokal-konstant auf B und f somit konstant. Da $f(p) = 1$ folgt $f = 1$.

□

Definition 1.6.10

$G \subset \mathbb{C}$ Bereich. Ist G (weg-)zusammenhängend, so heißt G Gebiet.

G ab jetzt immer ein Gebiet, und D immer ein Bereich.

Definition 1.6.11

$p, q \in D$ $p \sim_D q \Leftrightarrow \exists$ Weg in D der p und q verbindet. Die Äquivalenzklasse $[p]_D$ heißt Zusammenhangskomponente die p enthält.

$z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $d(z_0, z_1) = |z_0 - z_1|$ Abstand zwischen z_0 und z_1 .

$z_0 \in \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, $d(z_0, A) = \inf\{d(z_0, w) \mid w \in A\}$

$D \subset \mathbb{C}$ Bereich, $c \in D$, $\partial D = \bar{D} \setminus D$. Randabstand $d_c(D) = d(c, \partial D)$.

Sonderfall: $D = \mathbb{C}$, $d_c(D) = +\infty$.

$d = d_c(D)$ ist der maximale Radius, so dass $B_d(c) \subset D$ enthalten ist.

Beispiel

$D = B_r(a)$. $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$. //

1.7 Komplexe Differentialrechnung

Definition 1.7.1

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar** in $c \in D$, wenn es eine in c stetige Funktion $f_1: D \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(z) = f(c) + (z - c)f_1(z) \forall z \in D$$

(\mathbb{C} -Linearisierung)

Die Funktion f_1 ist dann eindeutig durch f bestimmt:

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \forall z \in D \setminus \{c\}$$

(Differenzenquotient)

Wegen der Stetigkeit von f_1 in c gilt, wenn man $h = z - c$ setzt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f_1(c)$$

Die Zahl $f_1(c) \in \mathbb{C}$ heißt die **Ableitung (nach z) von f in c** .

f in c differenzierbar $\Rightarrow f$ in c stetig.

Man beweist direkt: f in c komplex differenzierbar $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass

$$|f(c+h) - f(c) - f'(c)h| \leq \varepsilon |h| \forall h \in \mathbb{C}, |h| \leq \delta$$

Wir schreiben $c = a + ib = (a, b)$, $z = x + iy = (x, y)$. Ist $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex differenzierbar in $c \in D$, so gilt:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+ih) - f(c)}{ih}$$

Wählt man h reell, so folgt

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h, b) - u(a, b)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h, b) - v(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a, b+h) - u(a, b)}{ih} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a, b+h) - v(a, b)}{ih} \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\exists u_x(c), v_x(c), u_y(c), v_y(c)$ und

$$f'(c) = u_x(c) + iv_x(c) = v_y(c) - iu_y(c) \Rightarrow \begin{cases} u_x(c) = v_y(c) \\ v_x(c) = -u_y(c) \end{cases}$$

Dies ist die **Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung**. Sie ist eine notwendige Bedingung für komplexe Differenzierbarkeit.

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in D$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. f ist in c reell differenzierbar genau dann, wenn eine \mathbb{R} -lineare Abbildung T existiert, so dass

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - T(h)|}{|h|}$$

$$T = \begin{pmatrix} u_x(c) & v_x(c) \\ u_y(c) & v_y(c) \end{pmatrix}$$

Sind u, v in D stetig differenzierbare reelle Funktionen, so ist die komplexe Funktion $f = u + iv$ in jedem Punkt von D reell differenzierbar. Gilt zusätzlich $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ überall in D , so ist f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar.

Beweis: Sei $c = a + ib = (a, b)$, $h = \Delta x + i\Delta y = (\Delta x, \Delta y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(a+\Delta x, b+\Delta y) + iv(a+\Delta x, b+\Delta y) - u(a, b) - iv(a, b)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{u_x(a, b)\Delta x + u_y(a, b)\Delta y + iv_x(a, b)\Delta x + iv_y(a, b)\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(u_x(a, b) + iv_x(a, b))\Delta x + i(v_y(a, b) + u_y(a, b))\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(u_x(a, b) + iv_x(a, b))(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= u_x(a, b) + iv_x(a, b) \end{aligned}$$

□

Beispiel

$f(z) = 2yx + 3ixy^2$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? $u(x, y) = 2yx$, $v(x, y) = 3xy^2$.

$$u_x = 2y = 6xy = v_y$$

$$v_x = 3y^2 = -2x = -u_y$$

Lösungen dieses LGS: $(x = 0, y = 0)$, $\left(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ und $\left(x = \frac{1}{3}, y = \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. //

Laplace-Operator:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

Definition 1.7.2

Sei $\varphi \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist φ **harmonisch** in G genau dann, wenn $\Delta\varphi \equiv 0$ in G ist.

Satz 1.7.3

Ist $f = u + iv$ überall in D komplex differenzierbar und sind u und v zweimal reell stetig differenzierbar in D , so gilt: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = 0$ in D .

Beweis: $u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}$, $u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$. Also:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Anderer Fall analog. □

1.8 Holomorphe Funktionen

Definition 1.8.1

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph** in D , wenn f in jedem Punkt $c \in D$ komplex differenzierbar ist.

Die Menge der holomorphen Funktionen in D bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(D)$.

Summen- und Produktregel. $\forall f, g \in \mathcal{O}(D) \forall a, b \in \mathbb{C}$ ist $af + bg \in \mathcal{O}(D)$ und $fg \in \mathcal{O}(D)$ und $(af + bg)' = af' + bg'$, $(fg)' = f'g + fg'$. Insbesondere $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$.

Quotientenregel. $\forall f, g \in \mathcal{O}(D), \forall z \in D : g(z) \neq 0: \frac{f}{g} \in \mathcal{O}(D)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettenregel. $g \in \mathcal{O}(D), h \in \mathcal{O}(D'), g(D) \subset D': (h \circ g)(z) := h(g(z)) \in \mathcal{O}(D)$

$$(h \circ g)'(z) = h'(g(z))g'(z) \forall z \in D$$

Proposition 1.8.2

Folgende Aussagen über eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

- i) f ist lokal-konstant in D .
- ii) f ist holomorph in D und es gilt $f'(z) = 0 \forall z \in D$.

Beweis:

i) \Rightarrow ii) Trivial.

ii) \Rightarrow i) $0 = f'(z) = u_x + iv_x$, also $u_x = 0 = v_y$ und $v_x = 0 = -u_y$. Also sind alle partiellen Ableitungen identisch 0. Somit ist $u \equiv c$, $v \equiv c$ auf jeder Zusammenhangskomponente von D , also ist f lokal-konstant,

□

Korollar 1.8.3

$f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z) \in \mathbb{R} \forall z \in D$ oder $f(z) \in i\mathbb{R} \forall z \in D$. Dann ist f lokal-konstant.

Beweis: Sei $f(z) \in \mathbb{R} \forall z \in D$, d.h. $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit $v(z) \equiv 0$ in D . Dann ist nach Cauchy-Riemann: $u_x = v_y \equiv 0$ und $u_y = -v_x \equiv 0$ in D . Also ist f lokal-konstant in D .
Anderer Fall analog.

□

Korollar 1.8.4

$f \in \mathcal{O}(D)$, $|f(z)| = 1 \forall z \in D$. Dann ist f lokal-konstant in D .

Beweis: Sei $f(z) = u(z) + iv(z)$, $|f(z)| = 1$, also $u^2 + v^2 \equiv 1$. Dann ist $uu_x + vv_x \equiv 0$ und $uu_y + vv_y \equiv 0$. Mit Cauchy-Riemann folgt dann:

$$u^2 u_x + uvv_x - uvv_x + v^2 u_x = (u^2 + v^2)u_x \equiv 0$$

Also: $u_x \equiv 0 = v_y$. Ebenfalls mit Cauchy-Riemann:

$$v^2 v_x + uvu_x + u^2 v_x - uvu_x = (u^2 + v^2)v_x \equiv 0$$

Also: $v_x \equiv 0$, und somit ist f lokal-konstant in D . □

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$, D offene Menge, $f = u + iv$ ist in D reell differenzierbar. Wir definieren:

$$f_x := u_x + iv_x, \quad f_y := u_y + iv_y, \quad f_z := \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

Von hier bekommen wir direkt:

$$u_x = \frac{1}{2}(f_x + \bar{f}_x), \quad v_x = \frac{1}{2i}(f_x - \bar{f}_x), \quad u_y = \frac{1}{2}(f_y + \bar{f}_y), \quad v_y = \frac{1}{2i}(f_y - \bar{f}_y), \quad f_x = f_z + f_{\bar{z}}, \quad f_y = i(f_z - f_{\bar{z}})$$

Satz 1.8.5

Genau dann ist eine in D stetig reell differenzierbare Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in D , wenn $\forall c \in D \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0$. Allschon ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ die Ableitung f' von f in D .

Beweis:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(f_x + if_y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) \equiv 0$$

Nach Cauchy-Riemann ist f dann holomorph. □

2

Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie

2.1 Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz

Definition 2.1.1

Eine Funktionenfolge $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $A \subset \mathbb{C}$ **gleichmäßig konvergent** gegen $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0$ und $\forall x \in X$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Beispiel i) $f_n(x) = x^n$, $A = [0, 1]$. $f(x) \equiv 0 \forall x \in A$. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

ii) $A = [0, 1]$.

$$f_n(z) = \begin{cases} 2nx & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2nx & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$f(x) \equiv 0 \forall x \in [0, 1].$$

//

3

Potenzreihen

3.1 Konvergenzkriterien

Definition 3.1.1

Ist $c \in \mathbb{C}$ fixiert, so heißt jede Funktionenreihe $\sum_0^\infty a_\nu(z - c)^\nu$, $a_\nu \in \mathbb{C}$, eine (formale) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt c und Koeffizienten a_ν .

Um bequem formulieren zu können, nehmen wir häufig $c = 0$ an. Wir schreiben B_r anstelle von $B_r(0)$.

Man nennt eine Potenzreihe **konvergent**, wenn es noch einen weiteren Punkt $z_1 \neq c$ gibt, wo sie konvergiert.

Lemma 3.1.2 Konvergenzlemma von Abel

Zur Potenzreihe $\sum a_\nu(z - c)^\nu$ gebe es positive reelle Zahlen s, M , so dass stets gilt:

$$|a_\nu|s^\nu \leq M$$

Dann ist die Potenzreihe konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_s(c)$.

Beweis: Sei $c = 0$. Sei r mit $0 < r < s$ beliebig. Setzt man $q := rs^{-1}$, so gilt

$$|a_\nu z^\nu|_{B_r} = |a_\nu| r^\nu \leq M q^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Da $\sum q^\nu < \infty$ wegen $0 < q < 1$, so folgt

$$\sum |a_\nu z^\nu|_{B_r} \leq M \sum q^\nu < \infty$$

Da dies für alle $r < s$ gilt, folgt die normale Konvergenz in B_s . □

Korollar 3.1.3

Konvergiert die Reihe $\sum a_\nu z^\nu$ in $z_0 \neq 0$, so ist $\sum a_\nu z^\nu$ normal konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_{|z_0|}$.

Satz 3.1.4 Konvergenzsatz für Potenzreihen

Es sei $\sum a_\nu (z - c)^\nu$ eine Potenzreihe. Sei R das Supremum aller reellen Zahlen $t \geq 0$, so dass die Folge $|a_\nu| t^\nu$ beschränkt ist. Dann gilt:

- i) In der Kreisscheibe $B_R(c)$ ist die Reihe normal konvergent.
- ii) In jedem Punkt $x \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(c)}$ ist die Reihe divergent.

Beweis: Sei $c = 0$. Es gilt $0 \leq R < \infty$. Im Fall $R = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $R > 0$. Für jedes s , $0 < s < R$, ist die Folge $|a_\nu| s^\nu$ beschränkt. Nach dem Konvergenzlemma konvergiert $\sum a_\nu z^\nu$ mithin normal in B_s . Da $s < R$ beliebig nah bei R wählbar ist, folgt die normale Konvergenz in B_R .

Für jedes w mit $|w| > R$ ist die Folge $|a_\nu| |w|^\nu$ unbeschränkt und die Reihe $\sum a_\nu w^\nu$ notwendig divergent. \square

Bemerkung

Die Grenzfunktion von $\sum a_\nu (z - c)^\nu$ ist stetig in $B_R(c)$. Wir bezeichnen diese Funktion durchweg mit f .

Die durch den Konvergenzsatz eindeutig bestimmte Größe R mit $0 \leq R \leq \infty$ heißt der **Konvergenzradius**, die Menge $B_R(c)$ heißt die **Konvergenzkreisscheibe** der Potenzreihe.

Definition 3.1.5

Für eine Folge $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ reeller Zahlen ist

$$\limsup \alpha_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup(\alpha_N, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \dots)$$

Satz 3.1.6 Formel von Cauchy-Hadamard

Die Potenzreihe $\sum a_\nu(z-c)^\nu$ hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$$

Beweis: Wir setzen $L := (\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|})^{-1}$. Es ist zu zeigen: Für jedes r , $0 < r < L$, gilt $r \leq R$ und für jedes s , $L < s < \infty$, gilt $s \geq R$.

Sei zunächst $0 < r < L$, also $r^{-1} > \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Nach Definition von \limsup gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < r^{-1} \forall \nu \geq \nu_0$$

Mithin ist die Folge $|a_\nu| r^\nu$ beschränkt, d.h. $r \leq R$.

Sei nun $L < s < \infty$, also $s^{-1} < \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Nach Definition von \limsup existiert eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass für alle $m \in M$ gilt:

$$s^{-1} < \sqrt[m]{|a_m|}$$

Das heißt $|a_m| s^m > 1$, also ist $|a_\nu| s^\nu$ keine Nullfolge und somit $s \geq R$. □

Satz 3.1.7 Quotientenkriterium

Es sei $\sum a_\nu(z-c)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Es sei $a_\nu \neq 0$ für alle ν . Dann gilt:

$$\liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} \leq R \leq \limsup \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

Speziell:

$$R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

falls der Limes existiert.

Beweis: Setzt man

$$S := \liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}, \quad T := \limsup \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

so genügt es zu zeigen: Für jedes s , $0 < s < S$, gilt $s \leq R$ und für jedes t , $T < t < \infty$, gilt $t \geq R$.

Sei zunächst $0 < s < S$. Nach Definition von \liminf gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $a_\nu \neq 0$ und $|a_\nu a_{\nu+1}^{-1}| > s$, d.h. $|a_{\nu+1}| s < |a_\nu|$ für alle $\nu \geq l$. Setzt man $A := |a_l| s^l$, so folgt sofort $|a_{l+m}| s^{l+m} \leq A$ für alle $m \geq 0$ durch Induktion. Die Folge $|a_\nu| s^\nu$ ist mithin beschränkt, d.h. $s \leq R$.

Sei nun $T < t < \infty$. Dann gibt es laut Definition von \limsup ein $l \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $a_\nu \neq 0$

und $|a_v a_{v+1}^{-1}| < t$, d.h. $|a_{v+1}|t > |a_v|$ für alle $v \geq l$. Setzt man $B := |a_l|t^l$, so folgt jetzt induktiv $|a_{l+m}|t^{l+m} \geq B$ für alle $m \geq 0$. Da $B \geq 0$, so ist also $|a_v|t^v$ keine Nullfolge, d.h. $t \geq R$. \square

3.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen

Exponentialreihe und trigonometrische Reihen, Eulersche Formel

Die **Exponentialreihe** definiert man als

$$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Ihr Konvergenzradius bestimmt sich nach dem Quotientenkriterium mit $a_n u := \frac{1}{n!}$ zu

$$R = \lim \frac{|a_v|}{|a_{v+1}|} = \lim(v+1) = \infty$$

d.h. die Reihe konvergiert normal überall in \mathbb{C} .

Die **Cosinusreihe** und die **Sinusreihe**

$$\cos z = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v}}{(2v)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \sin z = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v+1}}{(2v+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

konvergieren ebenfalls überall in \mathbb{C} , denn $\cos z$ und $\sin z$ sind Teilreihen der konvergenten Reihe $\exp z$.

Satz 3.2.1 Eulersche Formel

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Beweis:

$$\exp iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v)!} z^{2v} + i \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v+1)!} z^{2v+1} = \cos z + i \sin z$$

\square

$\cos z$ ist eine **gerade Funktion**, $\sin z$ eine **ungerade Funktion**:

$$\cos(-z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v)!} (-z)^{2v} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v)!} z^{2v} = \cos z$$

Analog für $\sin -z = -\sin z$.

Weiter gilt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp iz + \exp -iz), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp iz - \exp -iz)$$

Logarithmische Reihe und Arcustangens-Reihe

Die **Logarithmische Reihe** definiert man als

$$\lambda(z) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v} z^v = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$R = 1$, da

$$\frac{|a_v|}{|a_{v+1}|} = \frac{v+1}{v} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 1$$

Die **Arcustangens-Reihe** definiert man als

$$a(z) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{2v-1} z^{2v-1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

3.3 Holomorphie von Potenzreihen

Satz 3.3.1

Hat $\sum a_v(z-c)^v$ den Konvergenzradius R , so haben auch die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration entstehenden Reihen $\sum v a_v(z-c)^{v-1}$ und $\sum \frac{1}{v+1} a_v(z-c)^{v+1}$ den Konvergenzradius R .

Beweis:

i) Für den Konvergenzradius R' der differenzierten Reihe gilt:

$$R' = \sup\{t \geq 0 \mid v|a_v|t^{v-1} \text{ ist beschränkt}\}$$

Da mit $v|a_v|t^{v-1}$ erst recht die Folge $|a_v|t^v$ beschränkt ist, folgt $R' \leq R$. Um $R \leq R'$ einzusehen, genügt es zu sehen, dass für jedes $r > R$ gilt: $r \leq R'$. Man wähle zu r ein s mit $r < s < R$. Dann ist die Folge $|a_v|s^v$ beschränkt. Es gilt:

$$v|a_v|r^{v-1} = (r^{-1}|a_v|s^v)vq^v$$

mit $q := \frac{r}{s}$. Da vq^v wegen $0 < q < 1$ eine Nullfolge ist, so ist auch $v|a_v|r^{v-1}$ eine Nullfolge. Es folgt $r \leq R' \Rightarrow R' = R$.

ii) Analog.

□

Satz 3.3.2 Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation bei Potenzreihen

Die Potenzreihe $\sum a_\nu |z - c|^\nu$ habe den konvergenzradius $R > 0$. Dann ist ihre Grenzfunktion f in $B_R(c)$ beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere holomorph in $B_R(c)$. Es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{\nu \geq k} (k!) \binom{\nu}{k} a_\nu (z - c)^{\nu-k}, \quad z \in B_R(c), n \in \mathbb{N}$$

Speziell: $\frac{f^{(k)}}{k!} = a_k$ (Taylorsche Koeffizientenformeln).

Beweis: Es genügt, den Fall $k = 1$ zu behandeln; hieraus der Allgemeinfall durch Iteration. Wir setzen $B := B_R(c)$. Zunächst ist auf Grund von obigem Satz klar, dass durch

$$g(z) := \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu (z - c)^{\nu-1}$$

eine Funktion $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird. Unsere Behauptung ist: $f' = g$. Wir nehmen wieder $c = 0$ an. Sei $b \in B$ fixiert. Um $f'(b) = g(b)$ zu zeigen, setzen wir:

$$q_\nu(z) := z^{\nu-1} + z^{\nu-2}b + z^{\nu-2}b^2 + \dots + b^{\nu-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \nu = 1, 2, \dots$$

Dann gilt stets:

$$z^\nu - b^\nu = (z - b)q_\nu(z)$$

und also

$$f(z) - f(b) = \sum_{\nu \geq 1} a_\nu (z^\nu - b^\nu) = (z - b) \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z), \quad z \in B$$

Sei nun $f_1(z) := \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$. Dann folgt (beachte: $q_\nu(b) = \nu b^{\nu-1}$):

$$f(z) - f(b) = (z - b)f_1(z), \quad z \in B$$

und

$$f_1(b) = \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu b^{\nu-1} = g(b)$$

Es ist daher nur noch zu zeigen, dass f_1 stetig in b ist. Dazu genügt es nachzuweisen, dass die Reihe $\sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$ in B normal konvergiert. Das aber ist klar, denn für jede Kreisscheibe B_r , $|b| < r < R$, gilt

$$|a_\nu q_\nu - \nu a_\nu b^{\nu-1}|_{B_r} \leq a_\nu \nu r^{\nu-1}$$

also

$$\sum_{\nu \geq 1} |a_\nu q_\nu|_{B_r} \leq \sum_{\nu \geq 1} \nu |a_\nu| r^{\nu-1} < \infty$$

nach Satz oben. □

3.3.1 Beispiele holomorpher Funktionen

i) Geometrische Reihe:

$$\sum_{v=0}^{\infty} z^v = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{v \geq k} \binom{v}{k} z^{v-k}, \quad z \in \mathbb{E}$$

ii) Exponentialfunktion:

$$\exp' z = \left(\sum_{v \geq 0} \frac{z^v}{v!} \right)' = \sum_{v \geq 1} \frac{z^{v-1}}{(v-1)!} = \exp z$$

iii) Cosinusfunktion:

$$\cos' z = \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v z^{2v}}{(2v)!} \right)' = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v z^{2v-1}}{(2v-1)!} = -\sin z$$

iv) Sinusfunktion:

$$\sin' z = \cos z$$

v) Logarithmische Reihe:

$$\lambda(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \Rightarrow \lambda'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \frac{1}{1+z}$$

vi) Arcustangens-Reihe:

$$a(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \Rightarrow a'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

4

Elementar-transzendente Funktionen

4.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Satz 4.1.1

Sei $z \in \mathbb{C}$.

i) $\exp z \neq 0$

ii) $(\exp z)^{-1} = \frac{1}{\exp z} = \exp -z$

Beweis: $h(z) := \exp z \exp -z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$$h'(z) = \exp z \exp -z + \exp z (-\exp -z) = 0$$

Also $h' \equiv 0$ auf \mathbb{C} , also ist h konstant auf \mathbb{C} ($h \equiv c \in \mathbb{C}$).

$$c = h(0) = \exp 0 \exp -0 = 1$$

Somit:

$$\exp z \exp -z = 1 \forall z \in \mathbb{C}$$

Hieraus folgt i) und ii) direkt. □

Satz 4.1.2

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

i) $\exists a, b \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = a \exp bz \forall z \in G$$

ii) $\exists b \in \mathbb{C}$:

$$f' = bf \text{ auf } G$$

Beweis:

i) \Rightarrow ii): trivial

ii) \Rightarrow i): Sei

$$h(z) = f(z) \exp -bz$$

$$h'(z) = f'(z) \exp -bz - b \exp -bz f(z) = (bf(z) - bf(z)) \exp -bz = 0$$

Also $h' \equiv 0$ auf G . Also existiert ein $a \in \mathbb{C}$, so dass $h \equiv a$ auf G .

$$a = h(z) = f(z) \exp -bz \Leftrightarrow f(z) = a \exp bz$$

$$h(0) = f(0) \exp 0 = f(0) \Rightarrow f(z) = f(0) \exp bz$$

□

Spezialfall: Die einzige holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die $f' = f$ und $f(0) = 1$ erfüllt, ist die Exponentialfunktion.

Satz 4.1.3 Additionstheorem für exp

$$\exp(z + w) = \exp z \exp w \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Beweis: Sei $w \in \mathbb{C}$ fix, $f(z) := \exp(z + w)$.

$$f'(z) = \exp(z + w) = f(z)$$

Also:

$$f(z) = f(0) \exp z = \exp w \exp z$$

□

Satz 4.1.4 Additionstheoreme für sin, cos

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

Beweis:

$$\exp(i(z+w)) = \exp iz \exp iw = (\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\cos z \sin w + \sin z \cos w)$$

Analog:

$$\exp(-i(z+w)) = \dots$$

Rest folgt aus vorigem Kapitel. □**Definition 4.1.5**

Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ω -periodisch (oder periodisch), falls $\exists \omega \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z + \omega) \forall z \in \mathbb{C}$. ω heißt dann Periode von f .

Beispiel $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(z + 2\pi i k) = \exp z \exp 2\pi i k = \exp z (\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = \exp z$$

Also ist \exp periodisch mit Periode $2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$ (im Unterschied zu $e^x, x \in \mathbb{R}$!). //**4.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln**

$$w = u + iv.$$

$$\tan \varphi = \frac{v}{u} \Leftrightarrow \arctan \frac{v}{u} = \varphi$$

und

$$r = |w| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Das heißt:

$$w = r \cdot e^{i\varphi} = r \exp i\varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

und

$$|w| = |r \exp i\varphi| = r |\exp i\varphi| = r \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = r$$

$w \in \mathbb{C}, w \neq 0$.

$$\varphi = \arg w = \begin{cases} \arctan \frac{v}{u} & v \geq 0, u > 0 \\ \pi - \arctan \frac{v}{u} & v \geq 0, u < 0 \\ \pi & v = 0, u < 0 \\ \pi + \arctan \frac{v}{u} & u, v < 0 \\ \frac{3}{2}\pi & v < 0, u = 0 \\ 2\pi - \arctan \frac{v}{u} & v < 0 < u \end{cases}$$

Beispiel

$$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}, \quad i = 1 \cdot e^{i \cdot \pi/2}, \quad -1 = e^{i \cdot \pi}, \quad -i = e^{3/2\pi i}, \quad 1 = e^{2\pi i}, \dots$$

//

Multiplikation:

$$z \cdot w = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}$$

Per Induktion kann man dann folgern:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n} \forall \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

Satz 4.2.1 Moivresche Formel

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos \varphi n + i \sin \varphi n$$

Problem: Löse $z^n = 1, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$. Wir wissen (Fundamentalsatz der Algebra): Die Gleichung hat höchstens n Lösungen, nämlich

$$\zeta_k := e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\zeta_k^n = \left(e^{\frac{2\pi i k}{n}} \right)^n = e^{2\pi i k} = 1$$

ζ_k heißen **n-te Einheitswurzeln**.

4.3 Logarithmusfunktion

Definition 4.3.1

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $l: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Logarithmusfunktion**, falls $\exp(l(z)) = z \forall z \in G$.

Bemerkung

- i) $l'(z) = \frac{1}{z}$
- ii) l hängt ab von G .
- iii) $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-, l(z) = \ln|z| + i \arg z = \log z$

5

Komplexe Integralrechnung

5.1 Wegintegrale in \mathbb{C}

Eine **Kurve**: $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}_{x,y}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, stetig differenzierbar.
 $\gamma(a)$ heißt **Anfangspunkt**, $\gamma(b)$ **Endpunkt**.

5.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale

Satz 5.2.1 Vertauschungssatz für Reihen

Sei γ ein Weg und $\sum f_v$, $f_v \in C(|\gamma|)$, eine Funktionsreihe, die in $|\gamma|$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

$$\sum \int_{\gamma} f_v dz = \int_{\gamma} (\sum f_v) dz = \int_{\gamma} f dz$$

5.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen

Satz 5.3.1

Ist f stetig in D , so sind folgende Aussagen über eine Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ äquivalent:

- i) F ist holomorph in D und es gilt $F' = f$.
- ii) Für jeden Weg γ in D mit Anfangspunkt w und Endpunkt z gilt:

$$\int_{\gamma} f dz = F(z) - F(w)$$

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$: Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow D$, $t \mapsto \zeta(t)$, stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt = \int_a^b F'(\zeta(t)) \zeta'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F(\zeta(t))) dt = F(\zeta(b)) - F(\zeta(a)) = F(z) - F(w)$$

Ist nun $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$ irgendein Weg, dann ist

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{\mu=1}^m \int_{\gamma_{\mu}} f dz = \sum_{\mu=1}^m F(b_{\mu}) - F(a_{\mu}) = F(b_m) - F(a_1) = F(z) - F(w)$$

$ii) \Rightarrow i)$: Wir zeigen, dass für jeden Punkt $c \in D$ gilt: $F'(c) = f(c)$. Es sei $\bar{B} \subset D$ eine Kreisscheibe um c . Nach Voraussetzung gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f dz \quad \forall z \in B$$

Setzt man

$$F_1(z) = \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} f d\zeta$$

für $z \in B \setminus \{c\}$ und $F_1(c) := f(c)$, so folgt:

$$F(z) = F(c) + (z-c)F_1(z), \quad z \in B$$

Zeigen wir noch, dass F_1 stetig in c ist, so folgt $F'(c) = F_1(c) = f(c)$. Für $z \in B \setminus \{c\}$ gilt:

$$F_1(z) - F_1(c) = \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} (f(\zeta) - f(c)) d\zeta$$

Es folgt:

$$|F_1(z) - F_1(c)| \leq \frac{1}{|z-c|} |f - f(c)|_{[z,c]} |z-c| \leq |f - f(c)|_B \quad \forall z \in B$$

f ist stetig, also folgt, dass F_1 stetig in c ist.

□

Eine Funktion $f \in C(D)$ heißt **integrabel**, wenn eine Stammfunktion von f existiert.

Satz 5.3.2 Integrabilitätskriterium

Folgende Aussagen über eine in D stetige Funktion f sind äquivalent:

- i) f ist integrabel in D .
- ii) Für jeden in D geschlossenen Weg γ gilt:

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

Bemerkung

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

ist eine Stammfunktion wenn i) gilt. Weil

$$0 = \int_{\gamma_z - \gamma'_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_z} f d\zeta - \int_{\gamma'_z} f d\zeta$$

also

$$\int_{\gamma_z} f d\zeta = \int_{\gamma'_z} f d\zeta \quad \forall \gamma_z, \gamma'_z$$

mit Anfangspunkt z und Endpunkt z , d.h. $F(z)$ ist von der Wahl von γ_z unabhängig, d.h. $F(z)$ ist korrekt definiert und man kann zeigen, dass $F'(z) = f(z) \forall z \in D$.

Beweis:

$ii) \Rightarrow i)$: Da Wege stets in Zusammenhangskomponenten von D verlaufen, darf man annehmen, dass D ein Gebiet ist. Sei γ irgendein Weg in D von w nach z , Wege γ_z, γ_w in D von z_1 nach w bzw. z . Dann ist $\gamma_w + \gamma - \gamma_z$ ein geschlossener Weg, daher gilt

$$0 = \int_{\gamma_w + \gamma - \gamma_z} f d\zeta = \int_{\gamma_w} f d\zeta + \int_{\gamma} f d\zeta - \int_{\gamma_z} f d\zeta = F(w) + \int_{\gamma} f d\zeta - F(z)$$

Also erfüllt F die Eigenschaft vom letzten Satz.

$i) \Rightarrow ii)$: Trivial, weil

$$\int_{\gamma} f d\zeta = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt}) = 0$$

□

Definition 5.3.3

$G \subset \mathbb{C}$ heißt **Sterngebiet** mit Zentrum $c \in G$ genau dann, wenn $\forall z \in G$ gilt: $[c, z] \subset G$.

Definition 5.3.4

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei Punkte. Die kompakte Menge

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1), s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\}$$

heißt das (**kompakte**) **Dreieck** mit Eckpunkten z_1, z_2, z_3 .

Der geschlossene Streckenzug

$$\partial\Delta := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$$

heißt der **Rand** von Δ .

Satz 5.3.5

Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum z_1 . Es sei $f \in C(G)$, für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset G$, das z_1 als Endpunkt hat, gelte:

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$$

Dann ist f integabel in G , die Funktion

$$F(z) := \int_{[z_1, z]} f d\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion zu f in G . Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G .

Beweis: Sei G ein Sterngebiet. Dann ist $[z_1, z] \subset G \forall z \in G$ und F wohldefiniert. Sei $c \in G$ fixiert. Ist z nahe genug bei c gewählt, so liegt das Dreieck Δ mit den Eckpunkten z_1, c, z in G . Nach Voraussetzung verschwindet das Integral von f längs $\partial\Delta = [z_1, c] + [c, z] + [z, z_1]$, so gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c, z]} f d\zeta$$

$z \in G$ nahe bei c . hieraus folgt wie im Beweis der Implikation ii) \Rightarrow i) des Satzes 1, dass F in c komplex differenzierbar ist und dass gilt: $F'(c) = f(c)$. \square

6

Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung

6.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

Lemma 6.1.1 Integrallemma von Goursat

Es sei f holomorph im Bereich D . Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset D$:

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$$

Beweis: Sei $\int_{\partial\Delta} f d\zeta \neq 0$ und sei

$$\alpha(\Delta) := \left| \int_{\partial\Delta} f d\zeta \right| \neq 0$$

Wir teilen Δ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Dann

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^k} f d\zeta$$

Damit existiert ein k_1 , so dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f d\zeta \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4}$$

Wir teilen $\Delta_1^{k_1}$ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_2^{k_1,1}, \Delta_2^{k_1,2}, \Delta_2^{k_1,3}, \Delta_2^{k_1,4}$ und bekommen

$$\int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f d\zeta = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_2^{k_1,k}} f d\zeta$$

Damit existiert ein k_2 , so dass

$$\left| \int_{\partial \Delta_2^{k_1, k_2}} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \Delta_1^k} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4^2} \alpha(\Delta)$$

Wir machen genau das gleiche für $\Delta_2^{k_1, k_2}$ und bekommen $\Delta_3^{k_1, k_2, k_3}, \dots, \Delta_m^{k_1, k_2, \dots, k_m}$, so dass

$$\left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4^m} \alpha(\Delta)$$

Es existiert genau ein

$$p = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_m^{k_1, \dots, k_m} \subset D$$

$f \in \mathcal{O}(D)$, also:

$$f(\zeta) = f(p) + f'(p)(\zeta - p) + g(\zeta)(\zeta - p), \quad g \in C(D), g(p) = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta = \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f(p) d\zeta + \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f'(p)(\zeta - p) d\zeta + \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} g(\zeta)(\zeta - p) d\zeta$$

Für $f(p)$ ist $f(p)\zeta$ eine Stammfunktion, für $f'(p)(\zeta - p)$ ist $\frac{1}{2}f'(p)(\zeta - p)^2$ eine Stammfunktion, also folgt:

$$\left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta \right| = \left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} g(\zeta)(\zeta - p) d\zeta \right| \leq \sup_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} |g(\zeta)(\zeta - p)| \cdot \frac{l(\Delta)}{2^m} \leq \sup_{\zeta \in \partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Auf der anderen Seite:

$$\left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4^m} \alpha(\Delta)$$

$$\frac{1}{4^m} \alpha(\Delta) \geq \sup_{\zeta \in \partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \nmid$$

□

Satz 6.1.2 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum c , es sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in G . Dann ist f integrierbar in G , die Funktion

$$F(z) := \int_{[c,z]} f d\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion von f in G . Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G .

Beweis: Wegen $f \in \mathcal{O}(G)$ folgt mit Goursat:

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0, \quad \Delta \subset G$$

Mit dem Integrabilitätskriterium für Sterngebiete folgt dann, dass

$$F(z) = \int_{[c,z]} f d\zeta$$

eine Stammfunktion von f ist. □

Reeller Beweis des Integrallemmas von Goursat: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\Sigma \subset D$ mit glattem Rand $\partial\Sigma$ und $f \in \mathcal{O}(D)$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} f d\zeta &= \int_{\partial\Sigma} (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \int_{\partial\Sigma} (u dx - v dy) + i \int_{\partial\Sigma} (v dx + u dy) \\ &= \iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + i \iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

6.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

Lemma 6.2.1 Zentrierungslemma

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\bar{B} \subset D$ eine Kreisscheibe, $B_r(z) := \{\eta \mid |z - \zeta| = r\}$ und $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z\})$. Dann ist

$$\int_{\partial B} f d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} f d\zeta$$

Beweis: Sei l eine Gerade, so dass $z \in l$. Wir nehmen Ω_1, Ω_2 wie auf dem Bild ($:|$). Dann sind $\omega_1 \subset \tilde{\Omega}_1$ und $\Omega_2 \subset \tilde{\Omega}_2$ Sterngebiete. Dann:

$$\int_{\partial\Omega_1} f d\zeta = 0, \quad \int_{\partial\Omega_2} f d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} f d\zeta = 0$$

Es folgt:

$$\int_{\partial B} f d\zeta - \int_{\partial B_r(z)} f d\zeta = 0$$

Die Aussage folgt. □

Korollar 6.2.2

Ist g beschränkt um z , so gilt:

$$\int_{\partial B} g d\zeta = 0$$

Beweis: $\exists M > 0, \varepsilon > 0$, so dass \forall Kreis $S \subset B$ um z mit Radius $t < \varepsilon$ gilt: $|g|_S \leq M$. Mit dem Zentrierungslemma und der Standardabschätzung haben wir:

$$\left| \int_{\partial B} g d\zeta \right| = \left| \int_S g d\zeta \right| \leq |g|_S 2\pi t \leq M 2\pi t \forall t > 0$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 6.2.3 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

Es sei f holomorph im Bereich D , es sei $B := B_r(c)$, $r > 0$, eine Kreisscheibe, die nebst Rand ∂B in D liegt. Dann gilt $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis: Sei $z \in B$ fixiert. Die Funktion $g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ für $\zeta \in D \setminus \{z\}$, $g(z) := f'(z)$, ist holomorph in $D \setminus \{z\}$ und stetig in D . Dann folgt:

$$0 = \int_{\partial B} g d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z)$$

Die Behauptung folgt. □

Korollar 6.2.4 Mittelwertgleichung

Unter den Voraussetzungen von obigem Satz gilt:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta$$

Beweis:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d(c + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta}) r i e^{i\theta}}{d} d\theta$$

Durch Kürzen erhält man die obige Formel. □

Korollar 6.2.5 Mittelwertungleichung

$$|f(c)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$$

6.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

Definition 6.3.1

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt im Kreis $B = B_r(c) \subset D$ in eine Potenzreihe $\sum a_v(z-c)^v$ um c entwickelbar, wenn die Potenzreihe in B gegen $f|_B$ konvergiert.

Aus der Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation für Potenzreihen folgt sofort:

Satz 6.3.2

Ist f in B um c in eine Potenzreihe $\sum a_v(z-c)^v$ entwickelbar, so ist f in B beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt:

$$a_v = \frac{f^{(v)}(c)}{v!} \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

Eine Potenzreihenentwicklung einer Funktion f um c ist also, unabhängig vom Radius r des Kreises B , eindeutig durch die Ableitungen von f in c bestimmt und hat immer die Form

$$f(z) = \sum \frac{f^{(v)}(c)}{v!} (z-c)^v$$

Diese Reihe heißt (wie im Reellen) die **Taylorreihe von f um c** . Sie konvergiert in B normal.

Ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in \mathbb{C} , so ordnen wir jeder stetigen Funktion $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

zu. Wir behaupten:

Lemma 6.3.3 Entwicklungslemma

Die Funktion F ist in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ holomorph. Ist $c \notin |\gamma|$ irgendein Punkt, so konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_0^{\infty} a_v(z-c)^v \quad \text{mit} \quad a_v := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{v+1}} d\zeta$$

in jeder Kreisscheibe um c , die $|\gamma|$ nicht trifft, gegen F . Die Funktion F ist beliebig oft differenzierbar in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Es gilt:

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Beweis: Sei $B = B_r(c)$ mit $B \cap |\gamma| = \emptyset$. Die in \mathbb{E} konvergente Reihe

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{v \geq k} \binom{v}{k} w^{v-k}$$

liefert (mit $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} &= \sum_{v \geq k} \frac{1}{(\zeta-c)^{v+1}} (\zeta-c)^{v-k} \forall z \in B, \zeta \in |\gamma|, k \in \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{((\zeta-c)-(z-c))^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)\right)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \sum_{v \geq k} \binom{v}{k} \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^{v-k} \end{aligned}$$

Mit $g_v(\zeta)$, $\zeta \in |\gamma|$, folgt daher:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{v \geq k} k! \binom{v}{k} g_v(\zeta) (z-c)^{v-k} d\zeta$$

Da $|\zeta-c| \geq r \forall \zeta \in |\gamma|$, folgt $|g_v|_{|\gamma|} \leq r^{-(v+1)} |f|_{|\gamma|}$ und also

$$\max_{\zeta \in |\gamma|} |g_v(\zeta)(z-c)^{v-k}| \leq \frac{1}{r^{k+1}} |f|_{|\gamma|} q^{v-k} \quad \text{mit} \quad q := \frac{|z-c|}{r}$$

Da $0 \leq q < 1 \forall z \in B$ und da

$$\sum_{v \geq k} \binom{v}{k} q^{v-k} = \frac{1}{(1-q)^{v+1}}$$

konvergiert oben die rechts unter dem Integral stehende Reihe für feste $z \in B$ in ζ normal auf γ . Daher gilt nach dem Vertauschungssatz für Reihen:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{v \geq k} k! \binom{v}{k} a_v (z-c)^{v-k} \quad \text{mit} \quad a_v := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{v+1}} d\zeta$$

Damit ist gezeigt, dass die durch oben definierte Funktion F in der Kreisscheibe B durch die Potenzreihe $\sum a_v (z-c)^v$ dargestellt wird ($k=0$), wegen Eigenschaften von Potenzreihen folgt weiter, dass F in B komplex differenzierbar ist und dass gilt:

$$F^{(k)}(z) = \sum_{v \geq k} k! \binom{v}{k} a_v (z-c)^{v-k}, \quad z \in B, k \in \mathbb{N}$$

Da B irgendeine Kreisscheibe in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, so folgt (2) und insbesondere $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus |\gamma|)$. □

Satz 6.3.4 Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor

Es sei $c \in D$, und es sei $B_d(c)$ die größte Kreisscheibe um c in D . Dann ist jede in D holomorphe Funktion f um c in eine Taylorreihe $\sum a_\nu(z-c)^\nu$ entwickelbar, die in $B_d(c)$ normal gegen f konvergiert. Die Taylorkoeffizienten a_ν werden gegeben durch die Integrale

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{\nu+1}} d\zeta \quad (4)$$

wobei $B := B_r(c)$ mit $0 < r < d$.

Insbesondere ist f beliebig oft komplex differenzierbar in D . In jeder Kreisscheibe in B gelten die Cauchyschen Integralformeln

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, z \in B, \forall k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Beweis: Wegen $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt für jeden Kreis $B = B_r(c)$, $0 < r < d$, die Cauchysche Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B$$

Nach dem Entwicklungslemma (mit $F := f$, $\gamma = \partial B$) hat f also in c eine in $B_r(c)$ konvergente Taylorentwicklung mit den durch (4) gegebenen Taylorkoeffizienten. Jede Wahl von $r < d$ führt zur gleichen Reihe. Insbesondere herrscht Konvergenz gegen f in $B_d(c)$. Die Identitäten (5) folgen ebenfalls direkt aus dem Entwicklungslemma. \square

Für jede Menge $A \subset D$ zeigt man die Äquivalenz folgender Aussagen:

- i) Jeder Punkt von A hat eine Umgebung U , so dass $U \cap A$ endlich ist.
- ii) A ist abgeschlossen in D , und jeder Punkt $p \in A$ ist ein isolierter Punkt von A (d.h. hat eine Umgebung U mit $U \cap A = \{p\}$).
- iii) Für jedes Kompaktum $K \subset D$ ist $K \cap A$ endlich.

Definition 6.3.5

Mengen, die i)-iii) erfüllen heißen **lokal endlich in D** .

Endliche Mengen sind lokal endlich.

Definition 6.3.6

Ist $A \subset D$ abgeschlossen und $f \in \mathcal{O}(D \setminus A)$, so heißt f **stetig** bzw. **holomorph nach A fortsetzbar**, wenn es eine in D stetige bzw. holomorphe Funktion $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass $\tilde{f}|_{D \setminus A} = f|_{D \setminus A}$.

Satz 6.3.7 Riemannscher Fortsetzungssatz

Ist f lokal endlich in D , so sind folgende Aussagen über eine in $D \setminus A$ holomorphe Funktion äquivalent:

- i) f ist holomorph nach A fortsetzbar.
- ii) f ist stetig nach A fortsetzbar.
- iii) f ist in einer Umgebung $U \subset D$ eines jeden Punktes $c \in A$ beschränkt.
- iv)

$$\lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z) = 0 \forall c \in A$$

Beweis: i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) ist trivial. Wir zeigen iv) \Rightarrow i).

Wir nehmen $C = 0$ an: Wir betrachten die Funktionen

$$g(z) = zf(z) \forall z \in D \setminus \{0\}, \quad g(0) := 0, \quad h(z) := zg(z)$$

$g \in C(D)$ wegen iv). Dann folgt $h(z) = h(0) + zg(z)$ ist im Nullpunkt komplex differenzierbar mit $h'(0) = g(0) = 0$. Aus $h \in \mathcal{O}(D \setminus \{0\})$ folgt $h \in \mathcal{O}(D)$ und mit dem Entwicklungslemma:

$$h(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Wegen $h(0) = h'(0) = 0$ folgt

$$h(z) = z^2(a_2 + a_3z + a_4z^2 + \dots)$$

Da $h(z) = z^2f(z)$ für $z \in D \setminus \{0\}$ ist

$$\tilde{f}(z) = a_2 + a_3z + a_4z^2 + \dots$$

□

7

Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen

7.1 Identitätssatz

Eine holomorphe Funktion wird lokal eindeutig durch ihre Taylorreihe dargestellt. Hierin ist bereits ein Identitätssatz enthalten, nämlich:

Satz 7.1.1

$f, g \in \mathcal{O}(D)$, $\exists c \in D \exists U(c) \subset D$ so dass $f|_U = g|_U$. Dann gilt $f|_{B_d(c)} = g|_{B_d(c)}$, wobei $d := d_c(D)$ der Randabstand von c in D ist.

Beweis: Klar durch die letzten Sätze.

□

Eine andere Version des Identitätssatzes folgt direkt aus der Integralformel:

Satz 7.1.2

$f, g \in \mathcal{O}(U(\bar{B}))$, $f|_{\partial B} = g|_{\partial B}$. Dann folgt $f \equiv g$ eine Umgebung von \bar{B} .

Satz 7.1.3 Identitätssatz

Folgende Aussagen über zwei in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen f und g sind äquivalent:

- i) $f = g$.
- ii) Die 'Identitätsmenge' $\{w \in G \mid f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G .
- iii) $\exists c \in G$, so dass $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c) \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$: Trivial.

$ii) \Rightarrow iii)$: Wir setzen $h := f - g$. Die Nullstellenmenge $M := \{w \in G \mid h(w) = 0\}$ hat nach Voraussetzungen einen Häufungspunkt in $c \in G$. Gäbe es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $h^{(m)}(c) \neq 0$, so wählen wir m minimal. Dann gilt: $h(z) = (z - c)^m h_m(z)$ mit $h_m(z) = \sum_{\mu \geq m} \frac{h^{(\mu)}(c)}{\mu!} (z - c)^{\mu - m} \in \mathcal{O}(B)$ für jeden Kreis $B \subset G$ um c nach dem Entwicklungssatz, wobei $h_m(c) \neq 0$.

$iii) \Rightarrow i)$:

$$S_n := \{w \in G \mid f^{(n)}(w) = g^{(n)}(w)\}$$

$f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ sind stetig, also ist S_n abgeschlossen. Somit ist auch $S := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ abgeschlossen. $c \in S$, also $S \neq \emptyset$. $h = f - g \in \mathcal{O}(G)$ und $h^{(n)}(c) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $\overline{B(c, \varepsilon)} \subset G$ und h lässt sich auf $B(c, \varepsilon)$ in eine Potenzreihe entwickeln die auf $B(c, \varepsilon)$ kompakt konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

mit $a_n = \frac{h^{(n)}(c)}{n!} = 0$. Also ist auch die Potenzreihe $\equiv 0$ auf $B(c, \varepsilon)$ und damit auch $h|_{B(c, \varepsilon)} \equiv 0$. Dies gilt für alle $c \in S$, aber das heißt $\forall c \in S \exists \varepsilon > 0 : B(c, \varepsilon) \subset S$. Also ist S offen, G zusammenhängend und somit $S = G$ und $f = g$.

□

Korollar 7.1.4

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ diffenzierbar. Dann gibt es maximal eine Möglichkeit, f holomorph auf \mathbb{C} fortzusetzen.

Zum Beispiel: \sin, \cos, \exp .

7.2 Existenz singulärer Punkte

Definition 7.2.1

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann heißt $w \in \partial G$ ein **singulärer Punkt** von f , wenn es keine Umgebung U von w in \mathbb{C} gibt mit $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $f|_{U \cap G} = \tilde{f}|_{U \cap G}$.

Beispiel

$f(z) = \frac{1}{z}$ auf $G = \mathbb{C}^*$. $w \in 0 \in \partial \mathbb{C}^*$. Angenommen w wäre kein singulärer Punkt von f . Dann $\exists \varepsilon > 0$ und $\exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(B(0, \varepsilon))$ mit $\tilde{f}|_{B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}} = \frac{1}{z}$. Aber $\frac{1}{z}$ hat keine holomorphe Fortsetzung in 0! Also ist 0 singulärer Punkt. //

Satz 7.2.2 Existenz singulärer Punkte

Auf dem Rand des Konvergenzkreises einer holomorphen Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ liegt immer mindestens ein singulärer Punkt von f .

Beweis: Gegenannahme: Es gibt keinen singulären Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises von f . Sei $\zeta > 0$ der Konvergenzradius von f . $\forall w \in \partial B(c, \zeta) \exists$ offene Umgebung U_w von w in \mathbb{C} und $\exists \tilde{f}_w \in \mathcal{O}(U_w)$ und $\tilde{f}_w|_{U_w \cap B(c, \zeta)} = f|_{U_w \cap B(c, \zeta)}$. $\partial B(c, \zeta)$ ist kompakt, also existiert eine endliche Teilüberdeckung. $w_1, \dots, w_m \in \partial B(c, \zeta)$ mit Umgebungen U_1, \dots, U_m . Wir definieren:

$$F: B(c, \zeta) \cup \bigcup_{j=1}^m U_j \rightarrow \mathbb{C}$$

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & z \in B(c, \zeta) \\ \tilde{f}_j(z) & z \in U_j \end{cases}$$

F ist holomorph.

\exists Kreisscheibe $B(c, \zeta')$, $\zeta' > \zeta$, mit

$$B(c, \zeta') \subset B(c, \zeta) \cup \bigcup_{j=1}^m U_j$$

F lässt sich um c in eine Potenzreihe entwickeln mit Konvergenzradius mindestens $\zeta' > \zeta$. $B(c, \zeta)$ ist zusammenhängend und $F|_{B(c, \zeta)} = f|_{B(c, \zeta)}$, also sind nach dem Identitätssatz die Potenzreihen gleich. Dies ist ein Widerspruch zum Konvergenzradius ζ . \square

Definition 7.2.3

Eine holomorphe Funktion, die auf ganz \mathbb{C} definiert ist, heißt **ganze Funktion**.

Satz 7.2.4 Satz von Liouville

Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis: Cauchy-Integralformel:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial B(z, \rho)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dz \\ |f'(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^2} \gamma'(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma(t))|}{\rho^2} \rho dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} |f(\gamma(t))| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} M dt \\ &= \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Also $f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Da \mathbb{C} zusammenhängend ist, ist f also konstant. \square

Satz 7.2.5 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, welches nicht konstant ist, hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis: Gegenannahme: Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ohne Nullstelle in \mathbb{C} . Dann ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ eine ganze Funktion (Quotientenregel).

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$$

Nach dem Wachstumslemma für Polynome $p \not\equiv \text{const.}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0$ so dass $|f(z)| < \varepsilon$ falls $|z| > r$. f ist stetig, also ist f auf $\overline{B(0, r)}$ beschränkt durch M . f ist auf \mathbb{C} beschränkt durch $\max\{M, \varepsilon\}$. Nach dem Satz von Liouville ist dann f konstant und somit auch $p = \frac{1}{f} \not\equiv \text{const.}$ \square

Korollar 7.2.6

Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ lässt sich in Linearfaktoren zerlegen.

7.3 Konvergenzsätze von Weierstraß

Satz 7.3.1 Weierstraßscher Konvergenzsatz

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei f_k eine Folge von holomorphen Funktionen auf D die in D kompakt gegen ein f konvergiert. Dann ist f auch holomorph in D und $f_k^{(n)} \rightarrow f^{(n)}$ kompakt in D $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Analysis 2: f_k sind stetig auf jedem Kompaktum $K \subset D$, $f_k \xrightarrow{K} f$ gleichmäßig. Dann ist f stetig auf K . Jeder Punkt $z \in D$ ist im Innern eines passenden Kompaktums enthalten, also $f \in C(D)$. Dann ist f auf kompakten Teilmengen von D integrierbar. Sei Δ ein Dreieck in D .

$$\oint_{\partial\Delta} f(z)dz = \oint_{\partial\Delta} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z)dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Delta} f_k(z)dz$$

Vertauschungssatz bei gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta. Der Dreiecksweg ist kompakt und in D enthalten und $\oint_{\partial\Delta} f_k(z)dz = 0$ nach dem Lemma von Goursat. Satz von Morera: f holomorph auf D .

Es reicht, dies für $n = 1$ zu zeigen. Cauchy-Integralformel:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

$z \in D(a, \varepsilon) \Subset D$. Sei $K \subset D$ ein Kompaktum. Nach Voraussetzung gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : k > k_0 \Rightarrow |f(z) - f_k(z)| < \varepsilon \forall z \in K$$

$$L = K_\delta = \{z \in \mathbb{C} | d(z, K) < \delta\}$$

Wir können so ein $\delta > 0$ finden, dass $L \subset D$ (Stetigkeit der Randabstandsfunktion).

Wir zeigen auf K die gleichmäßige Konvergenz von f' . K kompakt, also lässt es sich mit endlich

vielen Kreisscheiben $D(a_j, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, q$, überdecken. f nimmt auf L ein Maximum M an, da f stetig.

$$\begin{aligned} |f'_k(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a_j, \varepsilon)} \frac{f_k(w) - f(w)}{(w - z)^2} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B(a_j, \varepsilon)} \frac{|f_k(w) - f(w)|}{(w - z)^2} |dz| \\ &< \frac{1}{2\pi} \varepsilon \oint_{\partial B(a_j, \delta)} \frac{1}{(w - z)^2} dz \\ &= \frac{\varepsilon}{\delta} \forall z \in K \end{aligned}$$

δ fest. Also folgt die Behauptung. □

Satz 7.3.2 Weierstraßscher Differentiationssatz für kompakt konvergente Reihen

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine in D gegen f kompakt konvergente Reihe von in D holomorphen Funktionen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ kompakt in D gegen $f^{(k)}$.

Beweis:

$$F_m := \sum_{n=1}^m f_n \in \mathcal{O}(D)$$

konvergiert in D kompakt gegen f . Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt $f \in \mathcal{O}(D)$ und $F_m^{(k)} = \sum_{n=1}^m f_n^{(k)}$ konvergiert auf D kompakt gegen $f^{(k)}$. □

7.4 Offenheitssatz und Maximumprinzip

Definition 7.4.1

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, falls das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U in Y offen ist.

Lemma 7.4.2 Existenz von Nullstellen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$. Sei $c \in D$ und B eine Kreisscheibe um c mit $\bar{B} \subset D$. Zudem gelte:

$$\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)|$$

Dann hat f eine Nullstelle in B .

Beweis: Gegenannahme: f hat keine Nullstelle in B . Wegen $\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)| > 0$ hat f keine Nullstelle in \bar{B} . f ist stetig, also ist die Nullstellenmenge von f abgeschlossen. Es existiert also eine offene Umgebung U von \bar{B} in D , auf welcher f nullstellenfrei ist. Auf U definiert $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ eine holomorphe Funktion. Mittelwertungleichung für holomorphe Funktionen:

$$|f(c)|^{-1} = |g(c)| \leq \max_{z \in \partial B} |g(z)| = \max_{z \in \partial B} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \min_{z \in \partial B} |f(z)|^{-1} \nless$$

□

Lemma 7.4.3

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, B eine Kreisscheibe um c , mit $\bar{B} \subset D$, sei $f \in \mathcal{O}(D)$. Es gelte:

$$0 < \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(c)| = 2\delta$$

Dann gilt:

$$f(B) \supset B_\delta(f(c))$$

Beweis: Für jedes $b \in \mathbb{C}$ mit $|b - f(c)| < \delta$ gilt:

$$|f(z) - b| \geq |f(z) - f(c)| - |b - f(c)| > \delta, \quad z \in \partial B$$

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - b| > |f(c) - b|$$

Mit obigem Lemma angewandt auf $f(z) - b$ existiert ein $\tilde{z} \in B$ mit $f(\tilde{z}) = b$. □

Satz 7.4.4 Offenheitssatz

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph auf D und nicht konstant. Dann ist die Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ offen.

Beweis: Sei $c \in D$. Ziel ist: \exists Kreisscheibe um $f(c)$ in $f(D)$. f ist nicht konstant, also existiert B um c mit $\bar{B} \subset D$ und $f(c) \notin f(\partial B)$. (Angenommen, für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ würde gelten: $f(c) \in f(\partial B_\varepsilon(c))$). Dann gäbe es eine Folge von Punkten $z_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(c)$ mit $f(z_\varepsilon) = f(c)$. Das bedeutet: c ist Häufungspunkt von z_ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) und $f(c) = f(z_\varepsilon)$. Nach dem Identitätssatz wäre dann $f \text{ const.} \equiv f(c)$. \nmid)

$$2\delta := \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(c)| > 0$$

da $f(c) \notin f(\partial B)$ und ∂B kompakt. Nach Lemma oben gilt dann:

$$f(B) \supset B_\delta(f(c))$$

Für jeden Punkt $p \in f(D) \exists c \in D$ mit $f(c) = p$ und \exists Kreisscheibe B um c mit $f(B) \supset B_\delta(f(c))$, also enthält $f(D)$ um jeden Punkt eine offene Kreisscheibe. □

Satz 7.4.5 Satz von der Gebietstreue

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei f holomorph auf G und nicht konstant. Dann ist $f(G) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Beweis: f stetig. G zusammenhängend $\Rightarrow f(G)$ zusammenhängend. f holomorph und nicht konstant $\Rightarrow f(G)$ offen nach Offenheitssatz. □

Satz 7.4.6 Maximumprinzip

Eine holomorphe Funktion, die in einem Gebiet G ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt, ist konstant.

Beweis: Annahme: $\exists c \in G$, \exists Umgebung U von c in G mit $|f(z)| \leq |f(c)|$ für alle $z \in U$. Dann ist $f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(c)|\}$. Die Menge $f(U)$ ist dann keine Umgebung von $f(c)$ in \mathbb{C} . Dies ist ein Widerspruch zum Offenheitssatz. \square

Satz 7.4.7 Maximumprinzip für beschränkte Gebiete

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und sei f holomorph auf G und stetig auf \bar{G} . Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf ∂G an.

Beweis: f stetig, \bar{G} kompakt $\Rightarrow |f|$ nimmt Maximum auf \bar{G} an. O.B.d.A. f nicht konstant. Mit dem Maximumprinzip folgt die Behauptung. \square

Satz 7.4.8 Minimumprinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, f sei holomorph auf G und stetig auf \bar{G} . Dann hat f Nullstellen in G oder $|f|$ nimmt das Minimum auf ∂G an.

Beweis: O.B.d.A. f hat keine Nullstellen in G . $\frac{1}{f} =: g \in \mathcal{O}(G)$. Nach dem Maximumprinzip nimmt $|g|$ in G kein lokales Maximum an (oder g konstant). Das bedeutet, dass $|f|$ kein lokales Minimum in G annimmt. \square

Satz 7.4.9 Schwarzches Lemma

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Für jede holomorphe Funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ gilt:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$$

$$|f'(0)| \leq 1$$

Falls es einen Punkt $c \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(c)| = |c|$ oder falls $|f'(0)| = 1$, dann ist f eine Drehung um 0, $f(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Beweis: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert kompakt in \mathbb{D} und $a_0 = 0$.

$$f(z) = z \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}}_{=:g(z)}$$

und $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ ist holomorph auf \mathbb{D} .
Sei $1 > r > 0$.

$$r \max_{|z|=r} |g(z)| \leq 1$$

da $|f(z)| < 1 \forall z \in \mathbb{D}$. Maximumprinzip anwenden auf g auf der Kreisscheibe $r\mathbb{D}$:

$$\max_{\overline{r\mathbb{D}}} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Mit $r \rightarrow 1$ folgt:

$$|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$$

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0)$$

und $|g(0)| \leq 1$, also $|f'(0)| \leq 1$.

Falls $|f'(0)| = 1$, dann ist $|g(0)| = 1$. Also nimmt g das Maximum in \mathbb{D} an. Nach dem Maximumprinzip ist dann $g \equiv a \in \mathbb{C}$ const. Also:

$$a = \frac{f(z)}{z} \Rightarrow az = f(z), \quad |a| = 1$$

Falls $\exists c \in \mathbb{D}$, $c \neq 0$ mit $|f(c)| = |c|$, dann bedeutet dies

$$|cg(c)| = c \Rightarrow |g(c)| = 1$$

Maximumprinzip anwenden: $g \equiv a \in \mathbb{C}$ konstant mit $|a| = 1$. Analog wie oben. □

7.5 Allgemeine Version von Cauchys Satz

Definition 7.5.1

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir sagen, dass G **einfach zusammenhängend** ist, wenn es für jede Abbildung $\varphi: [0, 1] \rightarrow G$ mit $\varphi(0) = \varphi(1)$, φ stetig, eine stetige Abbildung $\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ gibt, so dass

- i) $\Phi(t, 0) = \varphi(t) \forall t \in [0, 1]$
- ii) $\Phi(0, s) = \Phi(1, s) \forall s \in [0, 1]$
- iii) $\Phi(t, 1) \equiv \text{const.}$

Beispiel

i) $G = \Delta_1(0)$. $\exists \Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$: $\Phi(t, s) = (1 - s)\varphi(t)$.

ii) $G = A := \Delta_1(0) \setminus \bar{\Delta}_{1/2}(0)$. $\varphi = \frac{3}{4}e^{2\pi i t}$. $\nexists \Phi$.
//

Definition 7.5.2

$G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, G einfach zusammenhängend genau dann, wenn ∂G eine zusammenhängende Menge ist.

Satz 7.5.3 Weierstraß

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f \in C(K)$. Dann existieren Polynome $\{P_n(x)\}_{n=1}^\infty$ mit

$$P_n(x) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

so dass

$$\|f(x) - P_n(x)\|_K \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Bemerkung

Satz von Weierstraß \Rightarrow wir können φ, Φ in der Definition C^∞ nehmen.

Satz 7.5.4

Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(G)$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$, $\gamma \in C^1[0, 1]$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Beweis: G einfach zusammenhängend, also $\exists \Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ so dass obige Definitionen wahr sind. $\forall p \in \Phi(Q) \exists B_{r_p}(p) \subset G$. $\{B_{r_p}(Q)\}_{p \in \Phi(Q)}$ ist eine offene Überdeckung von $\Phi(Q)$. Da Φ stetig ist, ist $\Phi(Q)$ ein Kompaktum. Also existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ von $\Phi(Q)$. Wir teilen Q und bekommen $Q_{i,j} := [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, n genügend groß, $1 \leq i, j \leq n-1$. Wenn n genügend groß ist, dann $\forall i, j \exists 1 \leq q \leq n$ so dass $\Phi(Q_{i,j}) \subset B_q$. B_q ist ein Sterngebiet und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(\partial Q_{i,j})} f(z) dz &= 0 \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Phi(\partial Q_{i,j})} &= 0 \end{aligned}$$

Und somit:

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \underbrace{\int_{\Phi(1,s)} f(z) dz - \int_{\Phi(0,s)} f(z) dz}_{=0} - \underbrace{\int_{\Phi(t,1)} f(z) dz}_{=0} = 0$$

□

Satz 7.5.5 Allgemeine Version von Cauchys Satz

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, ∂G sei stückweise C^1 -glatt. $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in G$$

Beweis: Seien C_1, C_2, \dots, C_m Zusammenhangskomponenten von ∂G , so dass $C_1 = \partial\Omega_1$, $C_2 = \partial\Omega_2, \dots$, wobei $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ beschränkte Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ sind und $C_0 = \partial\Omega_0$ eine unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ ist. Sei $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1} \subset G$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, γ_i hat Anfangspunkt

auf C_{i-1} , Endpunkt auf C_i für $i = 1, 2, \dots, m$, γ_{m+1} hat Anfangspunkt in C_m und Endpunkt in $\partial B_\varepsilon(z)$. Sei

$$G^* := G \setminus \overline{B_\varepsilon(z)} \cup \bigcup_{i=1}^{m+1} \gamma_i$$

einfach zusammenhängend. Aus $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \in \mathcal{O}(\tilde{G}^*)$ folgt dann:

$$\int_{\partial G^*} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz + \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz - \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz = 0$$

□

Satz 7.5.6 Cauchysche Ungleichungen

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. ∂G sei stückweise C^1 -glatt, $f \in \mathcal{O}(\tilde{G})$. Dann gilt:

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{|f|_{\partial G}}{d(z, \partial G)^{k+1}} \cdot \ell_1(\partial G) \forall z \in G \forall k \in \mathbb{N}$$

wobei $d(z, \partial G) := \inf_{w \in \partial G} |z - w|$ und $\ell_1(\partial G)$ die Länge von ∂G ist.

Beweis:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \Rightarrow f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta$$

Es folgt:

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{|f|_{\partial G}}{d(z, \partial G)^{k+1}} \ell_1(\partial G)$$

□

8

Isolierte Singularitäten

Definition 8.0.1

Ist f holomorph in einem Bereich D mit Ausnahme eines Punktes $c \in D$, so heißt der Punkt c eine **isolierte Singularität** von f .

8.1 Hebbare Singularitäten, Pole

Definition 8.1.1

Eine isolierte Singularität c einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$ heißt **hebbbar**, wenn f holomorph nach c fortsetzbar ist.

Beispiel

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ für $z \neq 0$.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) =: g(z)$$

$g(z) = \frac{\sin z}{z}$, d.h. $g(z)$ ist eine holomorphe Fortsetzung von $\frac{\sin z}{z}$ auf ganz \mathbb{C} . Also ist 0 eine hebbare Singularität von $\frac{\sin z}{z}$. //

Satz 8.1.2 Hebbbarkeitssatz

Der Punkt c ist genau dann eine hebbare Singularität von $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{0\})$, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von c gibt, so dass f in $U \setminus \{c\}$ beschränkt ist.

Beweis: Folgt direkt aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz, □

Definition 8.1.3

Sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$. Ist $(z - c)^n f(z)$ beschränkt für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ in einer Umgebung von c und für $n \neq 0$ nicht beschränkt, so heißt c ein **Pol von f** . Dann heißt die Zahl

$$m := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (z - c)^k f(z) \text{ beschränkt um } c\} \geq 1$$

die **Ordnung des Pols c von f** .

Beispiel

$$D = \Delta \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \Rightarrow 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots = z^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)}_{=: g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

Also $f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{g(z)}$. Die Ordnung des Pols 0 von $f(z)$ ist also $= 2$. //

Satz 8.1.4

Folgende Aussagen über $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, sind äquivalent:

- i) f hat in c einen Pol der Ordnung m .
- ii) Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $g(z) \neq 0$ so dass gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^m} \quad \forall z \in D \setminus c$$

- iii) Es gibt eine Umgebung $U \subset D$ von c und ein $h \in \mathcal{O}(U)$, $h(z) \neq 0 \forall z \in U$, $h(z)$ hat eine Nullstelle der Ordnung m in c , so dass $f = \frac{1}{h}$ in $U \setminus c$.

- iv) $\exists U \subset D$ Umgebung von c , $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$, so dass $\forall z \in U \setminus c$ gilt:

$$M|z - c|^{-m} \leq |f(z)| \leq \tilde{M}|z - c|^{-m}$$

Beweis:

i) \Rightarrow ii): $(z - c)^m f(z)$ ist in $U \setminus c$ beschränkt für eine Umgebung U von c . Dann $\exists g \in \mathcal{O}(U)$ so dass $(z - c)^m f(z) = g(z) \forall z \in U \setminus c$. Wir haben $g(c) \neq 0$, weil m die Ordnung von f ist. Also gilt $f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^m}$.

ii) \Rightarrow iii): $g(c) \neq 0 : \exists U \subset D$ Umgebung von c , so dass $g(z) \neq 0 \forall z \in U$. Dann ist $\tilde{h}(z) := \frac{1}{g(z)} \in \mathcal{O}(U)$ und $h(z) := (z - c)^m \tilde{h}(z) \in \mathcal{O}(U)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$ und

$$f = \frac{g(z)}{(z - c)^m} = \frac{1}{(z - c)^m \frac{1}{g(z)}} = \frac{1}{h(z)}$$

h hat eine Nullstelle der Ordnung in c .

iii) \Rightarrow iv): $f = \frac{1}{h}$, wobei $h(z) = (z - c)^m \tilde{h}(z)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$. Da $\tilde{h} \in \mathcal{O}(U)$, folgt $\tilde{h} \in C(U)$ und $\exists U' \subset U$ eine Umgebung von c , $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$ so dass

$$M \leq |\tilde{h}(z)| \leq \tilde{M} \forall z \in U'$$

Dann ist

$$\frac{1}{\tilde{M}} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} \right| \leq \frac{1}{M}$$

Und somit:

$$\frac{1}{\tilde{M}} |z - c|^{-m} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} |z - c|^{-m} \right| = |f(z)| \leq \frac{1}{M} |z - c|^{-m}$$

iv) \Rightarrow i): Aus iv) folgt $|f(z)(z - c)^m| \leq \tilde{M} \forall z \in U \setminus c$. $z = c$ ist ein Pol von f . Sei $k < m$.

$$|f(z)(z - c)^m| \geq M |z - c|^{-m} |z - c|^k = M |z - c|^{k-m} \rightarrow \infty$$

D.h. m ist die Ordnung von f in c .

□

Korollar 8.1.5

Die Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ hat genau dann einen Pol in c , wenn gilt:

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$$

Beweis: Trivial. 'Hinrichtung' folgt aus iv), 'Rückrichtung' folgt aus iii) mit $h = \frac{1}{f}$.

□

8.2 Entwicklung von Funktionen um Polstellen

Satz 8.2.1

Es sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und es sei c ein Pol m -ter Ordnung von f . Dann gibt es $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ mit $b_m \neq 0$ und $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ so dass:

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-c)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-c)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{z-c} + \tilde{f}(z), z \in D \setminus c \quad (*)$$

Die Zahlen b_1, \dots, b_m und die Funktion \tilde{f} sind eindeutig durch f bestimmt. Umgekehrt, hat jede Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$, für die (*) gilt, in c einen Pol der Ordnung m .

Beweis: f hat einen Pol in c m -ter Ordnung, also $f(z) = \frac{1}{(z-c)^m} g(z)$ mit $g(z) \in \mathcal{O}(D)$, $g(c) \neq 0$. Es gilt:

$$g(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots$$

Also:

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-c)^m} + \frac{a_1}{(z-c)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-c} + \underbrace{a_m + a_{m+1}(z-c) + \dots}_{=:\tilde{f}(z)}$$

Die umgekehrte Richtung ist trivial. □

8.3 Wesentliche Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstrass

Definition 8.3.1

Eine isolierte Singularität c von $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ heißt **wesentlich**, wenn c keine hebbare Singularität und kein Pol von f ist.

Satz 8.3.2 Casorati-Weierstrass

Folgende Aussagen über eine in $D \setminus c$ holomorphe Funktion f sind äquivalent:

- i) Der Punkt c ist eine wesentliche Singularität von f .
- ii) Für jede Umgebung $U \subset D$ von c liegt das Bild $f(U \setminus c)$ dicht in \mathbb{C} .
- iii) Es gibt eine Folge z_n in $D \setminus c$ mit $\lim z_n = c$, so dass die Bildfolge $f(z_n)$ keinen Limes in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hat.

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$: Indirekt. Wir nehmen an, es gäbe eine Umgebung $U \subset D$ von c , so dass $f(U \setminus c)$ nicht dicht in \mathbb{C} liegt. Dann gibt es eine Kreisscheibe $B_r(a)$, $r > 0$, mit $f(U \setminus c) \cap B_r(a) = \emptyset$, d.h. $|f(z) - a| \geq r \forall z \in U \setminus c$. Die Funktion $g(z) := (f(z) - a)^{-1}$ für $z \in U \setminus c$ ist holomorph in $U \setminus c$ und hat, da sie durch r^{-1} beschränkt ist, eine hebbare Singularität in c . Dann hat $f(z) = a + g(z)^{-1}$ im Fall $\lim_{z \rightarrow c} g(z) \neq 0$ eine hebbare Singularität und im Fall $\lim_{z \rightarrow c} g(z) = 0$ einen Pol in c , also keine wesentliche Singularität. \nmid

$ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$: Klar nach Definition.

□

9

Laurentreihen und Fourierreihen

$$A = A_{r,s}(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r < |z - c| < s \leq \infty\}$$

ist ein **Kreisring** um c mit innerem Radius r und äusserem Radius s . $A = A^+ \cap A^-$ mit $A^+ := B_s(c)$, $A^- := \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(c)$.

Satz 9.0.1

Es sei $f \in \mathcal{O}(A_{r,s}(c))$. Dann gilt:

$$\int_{S_\rho} f d\zeta = \int_{S_\sigma} f d\zeta \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } r < \rho \leq \sigma < s, S_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$$

Beweis: Sei $\gamma := S_\sigma - I - S_\rho + I$. Dann ist $\gamma \sim 0$, d.h. $B_\sigma(c) \setminus (\overline{B_\rho(c)} \cup I)$ ist einfach zusammenhängend. Also:

$$\int_\gamma f d\zeta = 0$$

und

$$\int_{S_\rho} f d\zeta - \int_I f d\zeta - \int_{S_\rho} f d\zeta + \int_I f d\zeta = 0$$

□

Satz 9.0.2 Cauchscher Integralsatz für Kreisringe

$f \in \mathcal{O}(D)$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um $c \in D$ so dass $\bar{A} \subset D$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in A$$

Beweis: Folgt direkt aus der allgemeinen Version des Cauchyschen Satzes. □

9.1 Laurentdarstellung in Kreisringen

Definition 9.1.1

Ist h eine komplexe Funktion in einem unbeschränkten Bereich W , so schreiben wir $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = b$, wenn es zu jeder Umgebung V von $b \in \mathbb{C}$ ein $R > 0$ gibt, so dass $h(z) \in V \forall z \in W$ mit $|z| \leq R$

Satz 9.1.2

Es sei $f \in \mathcal{O}(\bar{A})$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um c mit Radien r, s . Dann existieren $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ und $f^- \in \mathcal{O}(A^-)$ so dass gilt: $f = f^+ + f^-$ in A und $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$. Die Funktionen f^+ und f^- sind hierdurch eindeutig bestimmt. Für jedes $\rho \in [r, s]$ gilt:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B_\rho(c)$$

$$f^-(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(c)}$$

Beweis:

Existenz: Die Funktion

$$f_\rho^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B_\rho(c)$$

ist holomorph in $B_\rho(c)$. Für $\sigma \in (\rho, s)$ gilt: $f_\rho^+ = f_\sigma^+|_{B_\rho(c)}$ nach dem Integralsatz. Es gibt also eine Funktion $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ die in $B_\rho(c)$ mit f_ρ^+ übereinstimmt. Ebenso ist

$$f^-(z) := f_\sigma^-(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in A^-, r < \sigma < \min\{s, |z - c|\}$$

holomorph in A^- . Die Integralformel, angewendet auf alle Kreisringe A' um c mit $\bar{A}' \subset A$, liefert in A die Darstellung $f = f^+ + f^-$. Die Standardabschätzung für Integrale gilt für $z \in A^-$:

$$|f^-(z)| \leq \sigma \max_{\zeta \in S_\sigma} |f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}| \leq \frac{\sigma}{|z - c| - \sigma} |f|_{S_\sigma}$$

also $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$.

Eindeutigkeit: Es seien $g^+ \in \mathcal{O}(A^+)$, $g^- \in \mathcal{O}(A^-)$ weitere Funktionen mit $f = g^+ + g^-$ in A und $\lim_{z \rightarrow \infty} g^-(z) = 0$. Dann gilt:

$$f^+ - g^+ = g^- - f^-$$

auf A . Daher wird durch $h := f^+ - g^+$ auf A^+ und $h := g^- - f^-$ auf A^- eine ganze Funktion $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$ definiert. h ist beschränkt auf \mathbb{C} und mit Liouville ist $h(z) \equiv \text{const.}$ Wegen dem Limes ist $h(z) \equiv 0$, also $g^+ \equiv f^+$ und $g^- \equiv f^-$.

□

Man nennt die Darstellung von f als Summe $f^+ + f^-$ die **Laurentdarstellung von f in A** . Die Funktion f^- heißt der **Hauptteil**, und f^+ **Nebenteil** von f .

Definition 9.1.3

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$$

heißen **Laurentreihen um c** . Die Reihen

$$\sum_{-\infty}^{-1} a_v(z-c)^v = \sum_1^{\infty} a_{-v}(z-c)^{-v} \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^{\infty} a_v(z-c)^v$$

heißen **Hauptteil** bzw. **Nebenteil**.

Reihen der Form

Satz 9.1.4 Entwicklungssatz von Laurent

Jede im Kreisring A um c mit den Radien r und s holomorphe Funktion f ist in A eindeutig in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$$

entwickelbar, die in A normal gegen f konvergiert. Es gilt:

$$a_v := \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{v+1}} d\zeta \quad (*)$$

für $r < \rho < s$, $v \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $f = f^+ + f^-$ die Laurentdarstellung von f in $A = A^+ \cap A^-$. Dann hat der Nebenteil $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ von f nach dem Satz von Cauchy-Taylor in $A^+ = B_s(c)$ eine Taylorentwicklung.

$$f^+(z) = \sum_0^{\infty} a_v(z-c)^v$$

Doch auch der Hauptteil $f^- \in \mathcal{O}(A^-)$ von f gestattet eine einfache Reihenentwicklung in $A^- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > r\}$: Da die Abbildung $B_{r^{-1}}(0) \setminus 0 \rightarrow A^-$, $w \mapsto z := c + w^{-1}$ biholomorph ist mit $z \mapsto w = (z-c)^{-1}$ als Umkehrabbildung, gilt $g(w) := f^-(c + w^{-1}) \in \mathcal{O}(B_{r^{-1}}(0) \setminus 0)$. Wir wissen, dass $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$, also $\lim_{w \rightarrow 0} g(w) = 0$. Mit dem Riemannschen Fortsetzungssatz folgt dann $g \in \mathcal{O}(B_{r^{-1}}(0))$. Also ist

$$g(w) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v w^v$$

und

$$f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-c)^{-n}$$

Wir setzen $a_v = b_{-v}$ für $v = -1, -2, \dots$ und bekommen

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v(z-c)^v + \sum_{-\infty}^{-1} a_v(z-c)^v = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$$

Diese Reihe konvergiert normal in A .

$$(z-c)^{-n-1} f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_{v+n+1}(z-c)^v + \sum_{v=0}^{\infty} a_{v+n+1}(z-c)^v$$

$$\begin{aligned}
 \int_{S_\rho} (z-c)^{-n-1} f(z) dz &= \int_{S_\rho} \left(\sum_{v=-\infty}^{-1} a_{v+n+1} (z-c)^v + \sum_{v=0}^{\infty} a_{v+n+1} (z-c)^v \right) dz \\
 &= \sum_{v=-\infty}^{-1} a_{v+n+1} \int_{S_\rho} (z-c)^v dz + \sum_{v=0}^{\infty} \int_{S_\rho} a_{v+n+1} (z-c)^v dz \\
 &= 2\pi i a_n
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt (*) □

9.2 Eigenschaften von Laurentreihen

Satz 9.2.1 Identitätssatz

Sind $\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v (z-c)^v$ und $\sum_{v=-\infty}^{\infty} b_v (z-c)^v$ Laurentreihen, die beide auf einer Kreislinie S_ρ , $\rho > 0$, um c gleichmäßig konvergieren gegen dieselbe Grenzfunktion f , so gilt:

$$a_v = b_v = \frac{1}{2\pi\rho^v} \int_0^{2\pi} f(c + \rho e^{i\varphi}) e^{-iv\varphi} d\varphi, v \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Folgt direkt aus (*). □

Satz 9.2.2 Gutzmersche Formel und Cauchysche Ungleichungen

Konvergiert die Laurentreihe $\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v (z-c)^v$ auf der Kreislinie S_ρ um c gleichmäßig gegen $f: S_\rho \rightarrow \mathbb{C}$, so gilt die Gutzmersche Formel:

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} |a_v|^2 \rho^{2v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + \rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq M(\rho)^2 \quad (*)$$

mit $M(\rho) := |f|_{S_\rho}$, insbesondere bestehen die Cauchyschen Ungleichungen

$$|a_v| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^v} \forall v \in \mathbb{Z} \quad (**)$$

Beweis: Wegen

$$\overline{f(c + \rho e^{i\varphi})} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \bar{a}_v \rho^v e^{-iv\varphi}$$

folgt direkt:

$$|f(c + \rho e^{i\varphi})|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_\nu \rho^\nu f(c + \rho e^{i\varphi}) e^{-i\nu\varphi}$$

Dies konvergiert normal auf $[0, 2\pi]$, also:

$$\int_0^{2\pi} |f(c + \rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_\nu \rho^\nu \int_0^{2\pi} f(c + \rho e^{i\varphi}) e^{-i\nu\varphi} d\varphi = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_\nu|^2 \rho^{2\nu}$$

Der Rest von (*) folgt mit der Standardabschätzung. (**) ist trivial. □

Satz 9.2.3 Klassifizierung isolierter Singularitäten

Es sei $c \in D$ eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und es sei $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu (z - c)^\nu$ die Laurententwicklung von f um c . Dann ist c

- i) eine hebbare Singularität $\Leftrightarrow a_\nu = 0 \forall \nu < 0$.
- ii) ein Pol der Ordnung $m \geq 1 \Leftrightarrow a_\nu = 0 \forall \nu < -m$ und $a_{-m} \neq 0$.
- iii) eine wesentliche Singularität $\Leftrightarrow a_\nu \neq 0$ für unendlich viele $\nu < 0$.

10

Residuenkalkül

10.1 Residuensatz

Definition 10.1.1

Ist f holomorph in $D \setminus c$ und ist $\sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$ die Laurententwicklung von f in einer punktierten Kreisscheibe B^* um c , so gilt

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_S f(\zeta) d\zeta$$

für jede Kreislinie $S \subset B^*$ um c . Diese Zahl heißt das **Residuum** von f im Punkt c . Wir schreiben $\text{res}_c f = a_{-1}$.

Satz 10.1.2

Das Residuum von $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ in c ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl a , so dass $f(z) - a(z-c)^{-1}$ in einer in c punktierten Umgebung von c eine Stammfunktion hat.

Beweis: Ist $\sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$ die Laurentreihe von f in $B^* = B_r(c) \setminus c$, so hat die Funktion

$$F := \sum_{v \neq -1} \frac{1}{v+1} a_v(z-c)^{v+1} \in \mathcal{P}(B^*)$$

die Ableitung $F' = f - a_{-1}(z-c)^{-1}$. In einer in c punktierten Umgebung von c ist daher H genau dann Stammfunktion von $f - a(z-c)^{-1}$, wenn dort gilt

$$(F-H)' = (a - a_{-1})(z-c)^{-1}$$

Da $(z-c)^{-1}$ keine Stammfunktion um c hat, so existiert H mit $H := F + \text{const.}$ genau dann, wenn $a = a_{-1}$. \square

Satz 10.1.3 Rechenregeln für Residueni) \mathbb{C} -Linearität:

$$\operatorname{res}_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{res}_a f + \mu \operatorname{res}_a g \quad \forall f, g \in \mathcal{O}(D \setminus c) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

ii) Ist c ein einfacher Pol von f , so gilt:

$$\operatorname{res}_c f = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z)$$

ii') Es seien g und h holomorph in einer Umgebung von c , wobei $g(c) \neq 0$, $h(c) = 0$ und $h'(c) \neq 0$. Dann hat $f := \frac{g}{h}$ in c einen einfachen Pol und es gilt:

$$\operatorname{res}_c f = \frac{g(c)}{h'(c)}$$

iii) Hat $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ in c einen Pol höchstens m -ter Ordnung und ist g die holomorphe Fortsetzung von $(z - c)^m f(z)$ nach c , so gilt:

$$\operatorname{res}_c f = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c)$$

Beweis:ii) f hat einfachen Pol $\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z)$, $g \in \mathcal{O}(D)$.

$$\lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) = \lim_{z \rightarrow c} (a_{-1} + (z - c)g(z)) = a_{-1} = \operatorname{res}_c f$$

ii') Da h um c die Taylorentwicklung $h(z) = h(c) + h'(c)(z - c) + \dots$ besitzt, so folgt

$$\lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(c)}{h'(c)} \neq 0$$

Mithin ist c ein einfacher Pol von f mit dem Residuum $\frac{g(c)}{h'(c)}$.iii) f hat in c einen Pol der Ordnung m , also ist

$$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z-c)^m} + \frac{b_{-(m-1)}}{(z-c)^{m-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-c} + h(z)$$

$$(z-c)^m f(z) = b_{-m} + b_{-(m-1)}(z-c) + \dots + b_{-1}(z-c)^{m-1} + b_0(z-c)^m + \dots$$

$$\frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c) = \frac{1}{(m-1)!} (m-1)! b_{-1} = b_{-1} = \operatorname{res}_c f$$

□

Beispiel

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\sin z)} \in \mathcal{O}(B_1(0) \setminus 0)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right)}_{=:g(z)}$$

$$\Rightarrow \sin(\sin z) = \sin z - \frac{\sin^3 z}{3!} + \frac{\sin^5 z}{5!} - \dots = zg(z) - \frac{z^3 g^3(z)}{3!} + \frac{z^5 g^5(z)}{5!} - \dots = z \underbrace{(g(z) - \dots)}_{=:G(z)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\sin z)} = \frac{1}{zG(z)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{zG(z)} = 1$$

//

Satz 10.1.4 Residuensatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit ∂D stückweise C^1 -glatt. Seien c_1, c_2, \dots, c_m endlich viele Punkte in D . Sei $f \in \mathcal{O}(\bar{D} \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_m\})$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{i=1}^m \operatorname{res}_{c_i} f$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ klein genug. Dann nehmen wir

$$D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(c_i)$$

Dann ist $f \in \mathcal{O}(\bar{D}_\varepsilon)$. Dann:

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\partial D} f(z) dz - \underbrace{\sum_{i=1}^m \int_{\partial B_\varepsilon(c_i)} f(z) dz}_{=2\pi i \operatorname{res}_{c_i} f} = 0$$

Durch Umstellen folgt die Behauptung. □

Satz 10.1.5 Anzahlformel für Null- und Polstellen

Sei D ein Gebiet mit ∂D stückweise C^1 -glatt. Seien c_1, c_2, \dots, c_m endlich viele Punkte in D . Sei $f \in \mathcal{O}(\bar{D} \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_m\})$, f hat nur Polstellen in c_1, c_2, \dots, c_m . Sei $f \neq 0$ auf ∂D . Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

wobei N die Anzahl von Nullstellen (berechnet mit Multiplizität) und P die Anzahl der Polstellen (berechnet mit Ordnung) ist.

Beweis: Seien a_1, a_2, \dots, a_p die Nullstellen von f . Dann ist $\frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{O}(\bar{D} \setminus \{a_1, \dots, a_p\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_m\})$. Nach dem Residuensatz ist dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^p \operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} + \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{c_j} \frac{f'}{f}$$

Sei a_i eine Nullstelle von f mit Multiplizität k_i . Das heißt

$$f(z) = (z - a_i)^{k_i} g(z), g(z) \in \mathcal{O}(U(a_i)), g(a_i) \neq 0 \forall z \in U(a_i)$$

Dann ist

$$f'(z) = k_i(z - a_i)^{k_i-1} g(z) + (z - a_i)^{k_i} g'(z)$$

Also:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_i(z - a_i)^{k_i-1} g(z) + (z - a_i)^{k_i} g'(z)}{(z - a_i)^{k_i} g(z)} = \frac{k_i}{z - a_i} + \frac{g'(z)}{g(z)} \in \mathcal{O}(U(a_i))$$

Es folgt:

$$\operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} = k_i$$

Sei nun c_j eine Polstelle von f der Ordnung l_j . Das heißt

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - c_j)^{l_j}}, g(c_j) \neq 0, g \in \mathcal{O}(U(c_j))$$

Dann:

$$f'(z) = -l_j(z - c_j)^{-l_j-1} g(z) + (z - c_j)^{-l_j} g'(z)$$

Also:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(-l_j(z - c_j)^{-l_j-1} + (z - c_j)^{-l_j} g'(z)) (z - c_j)^{l_j}}{g(z)} = -\frac{l_j}{z - c_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Es folgt:

$$\operatorname{res}_{c_j} \frac{f'}{f} = l_j$$

□

Satz 10.1.6 Satz von Rouché

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, ∂D stückweise C^1 -glatt. Seien $f, g \in \mathcal{O}(\bar{D})$. Sei

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \partial D \quad (**)$$

Dann ist $N_D(f) = N_D(g)$.

Beweis: Sei $h = \frac{f}{g}$ eine in D holomorphe Funktion mit endlich vielen Nullstellen und endlich vielen Polstellen und $|h(z) - 1| < 1 \quad \forall z \in U(\partial D) =: U$. Dann ist

$$h(U) \subset B_1(1) \subset \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

Dann ist $\log h$ wohldefiniert in U , und dort eine Stammfunktion von $\frac{h'}{h}$. Da $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$ und da f und g wegen $(**)$ nullstellenfrei auf ∂D sind, folgt:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = N_D(f) - N_D(g)$$

□

Beispiel

i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =: \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2}}_{I(R)}$$

$$2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{1+z^2} = \int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^2} = I(R) + \underbrace{\int_0^\pi \frac{d(Re^{i\theta})}{1+(Re^{i\theta})^2}}_{J(R)}$$

$$|J(R)| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Also:

$$2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{1+z^2} = I(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-i} = \frac{az - ia + bz + ib}{z^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \Rightarrow a = -b \\ i(b - a) = 1 \Rightarrow 2bi = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{res}_i \frac{1}{1+z^2} = -\frac{i}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) = \pi$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$1+z^4=0 \Leftrightarrow z^4=-1=e^{i\pi} \Leftrightarrow z_k=e^{\frac{i(\pi+k2\pi)}{4}}, k=0,1,2,3$$

$$\frac{1}{1+z^4}=\frac{a}{z-e^{\frac{i\pi}{4}}}+\frac{b}{z-e^{\frac{3\pi i}{4}}}+\frac{d}{z-e^{\frac{5\pi i}{4}}}+\frac{e}{z-e^{\frac{7\pi i}{4}}} \quad (*)$$

$$\operatorname{res}_{e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}}=\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}$$

Analog wie oben. Schlussendlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}=\frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\dots=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

iii) Sei $D=\{1<|z|<2\}$, $f(z)=z^5+2z^2+6z-1$. $N_D(f)=?$. $N_{B_2(0)}(f)=N_{B_2(0)}(z^5)$ weil für $|z|\leq 2$:

$$|2z^2+6z-1|<|2z^2|+|6z|+1\leq 2\cdot 4+6\cdot 2+1=21$$

$$|z^5|=32>21$$

Also ist $N_{B_2(0)}=5$. $N_{B_1(0)}(f)=N_{B_1(0)}(6z)=1$ weil für $|z|=1$:

$$|6z|=6>4=|z|^5+|2z^2|+1\geq |z^5+2z^2-1|$$

Also:

$$N_D(f)=N_{B_2(0)}(f)-N_{B_1(0)}(f)=5-1=4$$

//

Definition 10.1.7

Ein geschlossener Weg γ heißt **einfach geschlossen**, wenn $\operatorname{Int}\gamma \neq \emptyset$ und $\operatorname{ind}_{\gamma}(z)=1 \forall z \in \operatorname{Int}\gamma$. Dabei benutzen wir die Notationen

$$\operatorname{ind}_{\gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\in\mathbb{Z}, z\notin\gamma, \quad \operatorname{Int}\gamma=\{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma \mid \operatorname{ind}_{\gamma}(z)\neq 0\}$$

Satz 10.1.8 Residuensatz

Es sei γ ein nullhomologer Weg in einem Bereich D und es sei A eine endliche Menge in D , so dass kein Punkt von A auf γ liegt. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\zeta) d\zeta = \sum_{c \in \text{Int} \gamma} \text{ind}_{\gamma}(c) \text{res}_c h \quad (*)$$

für jede in $D \setminus A$ holomorphe Funktion h .

10.2 Conformal mappings - Konforme Abbildungen

Definition 10.2.1

$f: D \rightarrow G$ heißt **konform**, wenn f bijektiv und holomorph ist.

Definition 10.2.2

$f: D \rightarrow G$ konform genau dann, wenn f bijektiv und $\forall z_0 \in D \forall \gamma_1, \gamma_2$ glatte Kurven in D , so dass $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$, ist $\angle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0} = \angle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))_{f(z_0)}$.

Satz 10.2.3 Abbildungssatz von Riemann

Sei $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $D \neq \mathbb{C}$. Dann existiert $f: D \rightarrow B_1(0)$ biholomorph.