



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	5
<b>1 Der Körper <math>\mathbb{C}</math> der komplexen Zahlen</b>	7
<b>2 Topologische Grundbegriffe</b>	9
<b>3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen</b>	13
<b>4 Konvergente und absolut konvergente Reihen</b>	17
<b>5 Stetige Funktionen</b>	21
<b>6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in <math>\mathbb{C}</math></b>	25
<b>7 Komplexe Differentialrechnung</b>	31
<b>8 Holomorphe Funktionen</b>	35
<b>9 Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie</b>	39
<b>10 Potenzreihen</b>	41
10.1 Konvergenzkriterien . . . . .	41
10.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen . . . . .	44
10.3 Holomorphie von Potenzreihen . . . . .	45
<b>11 Elementar-transzendente Funktionen</b>	49
11.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . . .	49
11.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln . . . . .	51
11.3 Logarithmusfunktion . . . . .	53
<b>12 Komplexe Integralrechnung</b>	55
12.1 Wegintegrale in $\mathbb{C}$ . . . . .	55
12.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale . . . . .	55
12.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen . . . . .	55



# 12

## Komplexe Integralrechnung

### 12.1 Wegintegrale in $\mathbb{C}$

Eine **Kurve**:  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}_{x,y}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , stetig differenzierbar.  
 $\gamma(a)$  heißt **Anfangspunkt**,  $\gamma(b)$  **Endpunkt**.

### 12.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale

#### Satz 12.2.1 Vertauschungssatz für Reihen

Sei  $\gamma$  ein Weg und  $\sum f_v$ ,  $f_v \in C(|\gamma|)$ , eine Funktionsreihe, die in  $|\gamma|$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Dann gilt:

$$\sum \int_{\gamma} f_v dz = \int_{\gamma} (\sum f_v) dz = \int_{\gamma} f dz$$

### 12.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen

#### Satz 12.3.1

Ist  $f$  stetig in  $D$ , so sind folgende Aussagen über eine Funktion  $F: D \rightarrow \mathbb{C}$  äquivalent:

- i)  $F$  ist holomorph in  $D$  und es gilt  $F' = f$ .
- ii) Für jeden Weg  $\gamma$  in  $D$  mit Anfangspunkt  $w$  und Endpunkt  $z$  gilt:

$$\int_{\gamma} f dz = F(z) - F(w)$$

**Beweis:**

$i) \Rightarrow ii)$ : Ist  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ,  $t \mapsto \zeta(t)$ , stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt = \int_a^b F'(\zeta(t)) \zeta'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F(\zeta(t))) dt = F(\zeta(b)) - F(\zeta(a)) = F(z) - F(w)$$

Ist nun  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  irgendein Weg, dann ist

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{\mu=1}^m \int_{\gamma_{\mu}} f dz = \sum_{\mu=1}^m F(b_{\mu}) - F(a_{\mu}) = F(b_m) - F(a_1) = F(z) - F(w)$$

$ii) \Rightarrow i)$ : Wir zeigen, dass für jeden Punkt  $c \in D$  gilt:  $F'(c) = f(c)$ . Es sei  $\bar{B} \subset D$  eine Kreisscheibe um  $c$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f dz \quad \forall z \in B$$

Setzt man

$$F_1(z) = \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} f d\zeta$$

für  $z \in B \setminus \{c\}$  und  $F_1(c) := f(c)$ , so folgt:

$$F(z) = F(c) + (z-c)F_1(z), \quad z \in B$$

Zeigen wir noch, dass  $F_1$  stetig in  $c$  ist, so folgt  $F'(c) = F_1(c) = f(c)$ . Für  $z \in B \setminus \{c\}$  gilt:

$$F_1(z) - F_1(c) = \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} (f(\zeta) - f(c)) d\zeta$$

Es folgt:

$$|F_1(z) - F_1(c)| \leq \frac{1}{|z-c|} |f - f(c)|_{[z,c]} |z-c| \leq |f - f(c)|_B \quad \forall z \in B$$

$f$  ist stetig, also folgt, dass  $F_1$  stetig in  $c$  ist.

□

Eine Funktion  $f \in C(D)$  heißt **integrabel**, wenn eine Stammfunktion von  $f$  existiert.

**Satz 12.3.2 Integrabilitätskriterium**

Folgende Aussagen über eine in  $D$  stetige Funktion  $f$  sind äquivalent:

- i)  $f$  ist integrabel in  $D$ .
- ii) Für jeden in  $D$  geschlossenen Weg  $\gamma$  gilt:

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

**Bemerkung**

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

ist eine Stammfunktion wenn i) gilt. Weil

$$0 = \int_{\gamma_z - \gamma'_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_z} f d\zeta - \int_{\gamma'_z} f d\zeta$$

also

$$\int_{\gamma_z} f d\zeta = \int_{\gamma'_z} f d\zeta \quad \forall \gamma_z, \gamma'_z$$

mit Anfangspunkt  $z$  und Endpunkt  $z$ , d.h.  $F(z)$  ist von der Wahl von  $\gamma_z$  unabhängig, d.h.  $F(z)$  ist korrekt definiert und man kann zeigen, dass  $F'(z) = f(z) \forall z \in D$ .

**Beweis:**

$ii) \Rightarrow i)$ : Da Wege stets in Zusammenhangskomponenten von  $D$  verlaufen, darf man annehmen, dass  $D$  ein Gebiet ist. Sei  $\gamma$  irgendein Weg in  $D$  von  $w$  nach  $z$ , Wege  $\gamma_z, \gamma_w$  in  $D$  von  $z_1$  nach  $w$  bzw.  $z$ . Dann ist  $\gamma_w + \gamma - \gamma_z$  ein geschlossener Weg, daher gilt

$$0 = \int_{\gamma_w + \gamma - \gamma_z} f d\zeta = \int_{\gamma_w} f d\zeta + \int_{\gamma} f d\zeta - \int_{\gamma_z} f d\zeta = F(w) + \int_{\gamma} f d\zeta - F(z)$$

Also erfüllt  $F$  die Eigenschaft vom letzten Satz.

$i) \Rightarrow ii)$ : Trivial, weil

$$\int_{\gamma} f d\zeta = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt}) = 0$$

□

**Definition 12.3.3**

$G \subset \mathbb{C}$  heißt **Sterngebiet** mit Zentrum  $c \in G$  genau dann, wenn  $\forall z \in G$  gilt:  $[c, z] \subset G$ .

**Definition 12.3.4**

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  drei Punkte. Die kompakte Menge

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1), s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\}$$

heißt das (**kompakte**) **Dreieck** mit Eckpunkten  $z_1, z_2, z_3$ .

Der geschlossene Streckenzug

$$\partial\Delta := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$$

heißt der **Rand** von  $\Delta$ .

**Satz 12.3.5**

Es sei  $G$  ein Sterngebiet mit Zentrum  $z_1$ . Es sei  $f \in C(G)$ , für den Rand  $\partial\Delta$  eines jeden Dreiecks  $\Delta \subset G$ , das  $z$  als Endpunkt hat, gelte:

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$$

Dann ist  $f$  integabel in  $G$ , die Funktion

$$F(z) := \int_{[z_1, z]} f d\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion zu  $f$  in  $G$ . Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $G$ .

**Beweis:** Sei  $G$  ein Sterngebiet. Dann ist  $[z_1, z] \subset G \forall z \in G$  und  $F$  wohldefiniert. Sei  $c \in G$  fixiert. Ist  $z$  nahe genug bei  $c$  gewählt, so liegt das Dreieck  $\Delta$  mit den Eckpunkten  $z_1, c, z$  in  $G$ . Nach Voraussetzung verschwindet das Integral von  $f$  längs  $\partial\Delta = [z_1, c] + [c, z] + [z, z_1]$ , so gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c, z]} f d\zeta$$

$z \in G$  nahe bei  $c$ . hieraus folgt wie im Beweis der Implikation ii)  $\Rightarrow$  i) des Satzes 1, dass  $F$  in  $c$  komplex differenzierbar ist und dass gilt:  $F'(c) = f(c)$ .  $\square$