Inhaltsverzeichnis

10
Potenzreihen

10.1 Konvergenzkriterien

Definition 10.1.1
Ist $c \in \mathbb{C}$ fixiert, so heißt jede Funktionenreihe $\sum_0^\infty a_\nu (z-c)^\nu$, $a_\nu \in \mathbb{C}$, eine (formale) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt c und Koeffizienten $a\nu$.

Um bequem formulieren zu können, nehmen wir häufig $c = 0$ an. Wir schreiben B_r anstelle von $B_r(0)$.
Man nennt eine Potenzreihe konvergent, wenn es noch einen weiteren Punkt $z_1 \neq c$ gibt, wo sie konvergiert.

Lemma 10.1.2 **Konvergenzlemma von Abel**
Zur Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ gebe es positive reelle Zahlen s, M, so dass stets gilt:

$$|a_\nu| s^\nu \leq M$$

Dann ist die Potenzreihe konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_s(c)$.

Beweis: Sei $c = 0$. Sei r mit $0 < r < s$ beliebig. Setzt man $q := rs^{-1}$, so gilt

$$|a_\nu z^\nu|_{B_r} = |a_\nu| r^\nu \leq M q^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Da $\sum q^\nu < \infty$ wegen $0 < q < 1$, so folgt

$$\sum |a_\nu z^\nu|_{B_r} \leq M \sum q^\nu < \infty$$

Da dies für alle $r < s$ gilt, folgt die normale Konvergenz in B_s. □

Korollar 10.1.3
Konvergiert die Reihe $\sum a_\nu z^\nu$ in $z_0 \neq 0$, so ist $\sum a_\nu z^\nu$ normal konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_{|z_0|}$.

Satz 10.1.4 **Konvergenzsatz für Potenzreihen**
Es sei $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ eine Potenzreihe. Sei R das Supremum aller reellen Zahlen $t \geq 0$, so dass die Folge $|a_\nu| t^\nu$ beschränkt ist. Dann gilt:

i) In der Kreisscheibe $B_R(c)$ ist die Reihe normal konvergent.

ii) In jedem Punkt $x \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(c)}$ ist die Reihe divergent.

Beweis: Sei $c = 0$. Es gilt $0 \leq R < \infty$. Im Fall $R = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $R > 0$. Für jedes s, $0 < s < R$, ist die Folge $|a_\nu| s^\nu$ beschränkt. Nach dem Konvergenzlemma konvergiert $\sum a_\nu z^\nu$ mithin normal in B_s. Da $s < R$ beliebig nah bei R wählbar ist, folgt die normale Konvergenz in B_R.
Für jedes w mit $|w| > R$ ist die Folge $|a_\nu||w|^\nu$ unbeschränkt und die Reihe $\sum a_\nu w^\nu$ notwendig divergent. □

Bemerkung
Die Grenzfunktion von $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ ist stetig in $B_R(c)$. Wir bezeichnen diese Funktion durchweg mit f.
Die durch den Konvergenzsatz eindeutig bestimmte Größe R mit $0 \leq R \leq \infty$ heißt der Konvergenzradius, die Menge $B_R(c)$ heißt die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe.

Definition 10.1.5
Für eine Folge $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ reeller Zahlen ist

$$\limsup \alpha_n := \lim_{N\to\infty} \sup(\alpha_N, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots)$$

Satz 10.1.6 **Formel von Cauchy-Hadamard**
Die Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$$

Beweis: Wir setzen $L := (\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|})^{-1}$. Es ist zu zeigen: Für jedes r, $0 < r < L$, gilt $r \le R$ und für jedes s, $L < s < \infty$, gilt $s \ge R$.
Sei zunächst $0 < r < L$, also $r^{-1} > \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Nach Definition von $\limsup$ gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < r^{-1} \forall \nu \ge \nu_0$$

Mithin ist die Folge $|a_\nu| r^\nu$ beschränkt, d.h. $r \le R$.
Sei nun $L < s < \infty$, also $s^{-1} < \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Nach Definition von $\limsup$ existiert eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass für alle $m \in M$ gilt:

$$s^{-1} < \sqrt[m]{|a_m|}$$

Das heißt $|a_m| s^m > 1$, also ist $|a_\nu| s^\nu$ keine Nullfolge und somit $s \ge R$. □

Satz 10.1.7 **Quotientenkriterium**
Es sei $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Es sei $a_\nu \neq 0$ für alle ν. Dann gilt:

$$\liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} \le R \le \limsup \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

Speziell:

$$R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

falls der Limes existiert.

Beweis: Setzt man

$$S := \liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}, \quad T := \liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

so genügt es zu zeigen: Für jedes s, $0 < s < S$, gilt $s \le R$ und für jedes t, $T < t < \infty$, gilt $t \ge R$.
Sei zunächst $0 < s < S$. Nach Definition von $\liminf$ gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $a_\nu \neq 0$ und $|a_\nu a_{\nu+1}^{-1}| > s$, d.h. $|a_{\nu+1}| s < |a_\nu|$ für alle $\nu \ge l$. Setzt man $A := |a_l| s^l$, so folgt sofort $|a_{l+m}| s^{l+m} \le A$ für alle $m \ge 0$ durch Induktion. Die Folge $|a_\nu| s^\nu$ ist mithin beschränkt, d.h. $s \le R$.
Sei nun $T < t < \infty$. Dann gibt es laut Definition von $\limsup$ ein $l \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $a_\nu \neq 0$

und $|a_\nu a_{\nu+1}^{-1}| < t$, d.h. $|a_{\nu+1}|t > |a_\nu|$ für alle $\nu \geq l$. Setzt man $B := |a_l|t^l$, so folgt jetzt induktiv $|a_{l+m}|t^{l+m} \geq B$ für alle $m \geq 0$. Da $B \geq 0$, so ist also $|a_\nu|t^\nu$ keine Nullfolge, d.h. $t \geq R$. □

10.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen

Exponentialreihe und trigonometrische Reihen, Eulersche Formel

Die Exponentialreihe definiert man als

$$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Ihr Konvergenzradius bestimmt sich nach dem Quotientenkriterium mit $a_n u := \frac{1}{\nu!}$ zu

$$R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} = \lim(\nu+1) = \infty$$

d.h. die Reihe konvergiert normal überall in $\mathbb{C}$.
Die Cosinusreihe und die Sinusreihe

$$\cos z = \sum_0^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \sin z = \sum_0^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

konvergieren ebenfalls überall in $\mathbb{C}$, denn $\cos z$ und $\sin z$ sind Teilreihen der konvergenten Reihe $\exp z$.

Satz 10.2.1 **Eulersche Formel**

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \forall z \in \mathbb{C}$$

Beweis:

$$\exp iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu} + i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \cos z + i \sin z$$

□

$\cos z$ ist eine gerade Funktion, $\sin z$ eine ungerade Funktion:

$$\cos(-z) = \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} (-z)^{2\nu} = \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu} = \cos z$$

Analog für $\sin -z = -\sin z$.
Weiter gilt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp iz + \exp -iz), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp iz - \exp -iz)$$

Logarithmische Reihe und Arcustangens-Reihe

Die Logarithmische Reihe definiert man als

$$\lambda(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} z^{\nu} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$R = 1$, da

$$\frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} = \frac{\nu+1}{\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} 1$$

Die Arcustangens-Reihe definiert man als

$$a(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} z^{2\nu-1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

10.3 Holomorphie von Potenzreihen

Formale gliedweise Differentiation und Integration

Satz 10.3.1
Hat $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ den Konvergenzradius R, so haben auch die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration entstehenden Reihen $\sum \nu a_\nu (z-c)^{\nu-1}$ und $\sum \frac{1}{\nu+1} a_\nu (z-c)^{\nu+1}$ den Konvergenzradius R.

Beweis:

i) Für den Konvergenzradius R' der differenzierten Reihe gilt:

$$R' = \sup\{t \geq 0 \mid \nu |a_\nu| t^{\nu-1} \text{ ist beschränkt}\}$$

Da mit $\nu|a_\nu|t^{\nu-1}$ erst recht die Folge $|a_\nu|t^\nu$ beschränkt ist, folgt $R' \leq R$. Um $R \leq R'$ einzusehen, genügt es zu sehen, dass für jedes $r > R$ gilt: $r \leq R'$. Man wähle zu r ein s mit $r < s < R$. Dann ist die Folge $|a_\nu|s^\nu$ beschränkt. Es gilt:

$$\nu|a_\nu|r^{\nu-1} = (r^{-1}|a_\nu|s^\nu)\nu q^\nu$$

mit $q := \frac{r}{s}$. Da νq^ν wegen $0 < q < 1$ eine Nullfolge ist, so ist auch $\nu|a_\nu|r^{\nu-1}$ eine Nullfolge. Es folgt $r \leq R' \Rightarrow R' = R$.

ii) Analog.

□

Holomorphie von Potenzreihen, Vertauschungssatz

Satz 10.3.2 **Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation bei Potenzreihen**
Die Potenzreihe $\sum a_\nu |z-c|^\nu$ habe den konvergenzradius $R > 0$. Dann ist ihre Grenzfunktion f in $B_R(c)$ beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere holomorph in $B_R(c)$. Es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{\nu \geq k} (k!) \binom{\nu}{k} a_\nu (z-c)^{\nu-k}, \quad z \in B_R(c), n \in \mathbb{N}$$

Speziell: $\frac{f^{(k)}}{k!} = a_k$ (Taylorsche koeffizientenformeln).

Beweis: Es genügt, den Fall $k = 1$ zu behandeln; hieraus der Allgemeinfall durch Iteration. Wir setzen $B := B_R(c)$. Zunächst ist auf Grund von obigem Satz klar, dass durch

$$g(z) := \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu (z-c)^{\nu-1}$$

eine Funktion $g : B \to \mathbb{C}$ definiert wird. Unsere Behauptung ist: $f' = g$. Wir nehmen wieder $c = 0$ an. Sei $b \in B$ fixiert. Um $f'(b) = g(b)$ zu zeigen, setzen wir:

$$q_\nu(z) := z^{\nu-1} + z^{\nu-2} b + z^{\nu-2} b^2 + \dots + b^{\nu-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \nu = 1, 2, \dots$$

Dann gilt stets:

$$z^\nu - b^\nu = (z-b) q_\nu(z)$$

und also

$$f(z) - f(b) = \sum_{\nu \geq 1} a_\nu (z^\nu - b^\nu) = (z-b) \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z), \quad z \in B$$

Sei nun $f_1(z) := \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$. Dann folgt (beachte: $q_\nu(b) = \nu b^{\nu-1}$):

$$f(z) = f(b) = (z-b) f_1(z), \quad z \in B$$

und

$$f_1(b) = \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu b^{\nu-1} = g(b)$$

Es ist daher nur noch zu zeigen, dass f_1 stetig in b ist. Dazu genügt es nachzuweisen, dass die Reihe $\sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$ in B normal konvergiert. Das aber ist klar, denn für jede kreisscheibe B_r, $|b|| < r < R$, gilt

$$|a_\nu q - \nu|_{B_r} \leq a_\nu \nu r^{\nu-1}$$

also

$$\sum_{\nu \geq 1} |a_\nu q_\nu|_{B_r} \leq \sum_{\nu \geq 1} \nu |a_\nu| r^{\nu-1} < \infty$$

nach Satz oben. □

Beispiele holomorpher Funktionen

i) Geometrische Reihe:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} z^{\nu-k}, \quad z \in \mathbb{E}$$

ii) Exponentialfunktion:

$$\exp' z = \left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \right)' = \sum_{\nu \geq 1} \frac{z^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = \exp z$$

iii) Cosinusfunktion:

$$\cos' z = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu}}{(2\nu)!} \right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} = -\sin z$$

iv) Sinusfunktion:

$$\sin' z = \cos z$$

v) Logarithmische Reihe:

$$\lambda(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \Rightarrow \lambda'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \frac{1}{1+z}$$

vi) Arcustangens-Reihe:

$$a(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots \Rightarrow a'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$