Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Einführung in die Funktionentheorie

Beweis ist relativ einfach. Haben kein Platz, also machen wir Platz.
Prof. Dr. N. V. Shcherbina

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Hier kommt noch das Vorwort hin, wenn mir was einfällt. Solang müsst ihr hier mit 'ner zu 90% leeren Seite auskommen.

1

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

1.1 $\mathbb{R}$ - der Körper der reellen Zahlen

Im 2−dimensionalen $\mathbb{R}$−Vektorraum $\mathbb{R}^2$ der geordneten reellen Zahlenpaare $z := (x, y)$ wird eine Multiplikation eingeführt vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1, x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Dadurch wird $\mathbb{R}^2$, zusammen mit der Vektorraumaddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

zu einem (kommutativen) Körper mit dem Element $(1,0)$ als Einselement; das Inverse von $z = (x, y) \neq 0$ ist

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Dieser Körper heißt der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
Man definiert weiter $i := (0,1) \in \mathbb{C}$. Offensichtlich gilt $i^2 = -1$, man nennt i die imaginäre Einheit von $\mathbb{C}$. Für jede Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ besteht die eindeutige Darstellung $(x, y) = (x,0)+(0,1)(y,0)$, d.h. $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, (wir identifizieren die reellen Zahlen x mit der komplexen Zahl $(x,0)$). Man setzt

$$\mathrm{Re}\, z := x, \quad \mathrm{Im}\, z := y$$

wobei $z = x + iy$ und nennt x bzw. y Realteil bzw. Imaginärteil von z. Die Zahl z heißt reell bzw. rein imaginär, wenn $\mathrm{Im}\, z = 0$ bzw. $\mathrm{Re}\, z = 0$, letzteres bedeutet $z = y$.
Für $z = x + iy$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$ ist

$$\langle z, w \rangle := \mathrm{Re}(w, \bar{z}) = xu + yv$$

(für $z = x + iy$ ist $\bar{z} := x - iy$) das euklidische Skalarprodukt im reellen Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
Die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist die euklidische Länge von z, sie heißt der absolute Betrag von z. Es gilt:

i) $|\bar{z}| = |z|$

ii) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

iii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$

iv) $\langle aw, az\rangle = |a|^2 \langle w, z\rangle$, $\langle \bar{w}, \bar{z}\rangle = \langle w, z\rangle \forall w, z, a \in \mathbb{C}$

v) $|\langle w, z\rangle| \leq |w||z| \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

vi) $|w+z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w, z\rangle \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cosinussatz)

Zwei Vektoren z, w heißen orthogonal, wenn $\langle z, w\rangle = 0$.
Fundamental für das Rechnen mit dem Absolutbetrag sind folgende Regeln:

i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ii) $|zw| = |z||w|$ (Produktregel)

iii) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$-1 \leq \frac{\langle w, z\rangle}{|w||z|} \leq 1 \forall w, z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Es folgt:

$$\exists! \varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi \leq \pi : \cos\varphi = \frac{\langle w, z\rangle}{|z||w|}$$

Man nennt φ den Winkel zwischen $w, z \in \mathbb{C}$, in Zeichen $\measuredangle(w, z) = \varphi$.

1.2 Topologische Grundbegriffe

Definition 1.2.1
Ist X irgendeine Menge, so heißt eine Funktion $d: X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$, eine Metrik auf X, wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt:

i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(X, d) heißt metrischer Raum.

Im Fall $X = \mathbb{C}$ nennt man $d(w, z) := |w - z| = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}$ (die euklidische Entfernung der Punkte w, z in der Zahlebene) die euklidische Metrik von $\mathbb{C}$.
In einem metrischen Raum X mit Metrik d heißt die Menge

$$B_r(c) := \{x \in X \mid d(x, c) < r\}$$

die offene Kugel vom Radius $r > 0$ mit Mittelpunkt $c \in X$.
Im Fall der euklidischen Metrik auf $\mathbb{C}$ heißen die Kugeln

$$B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$$

$r > 0$, offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. Wir schreiben durchweg

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in C \mid |z| < 1\}$$

Definition 1.2.2
Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes X heißt offen (in X)$\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0$ so dass $B_r(x) \subset U$ ($\emptyset$ ist offene Menge per definitionem).

i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ offen

ii) $U_1, U_2, \ldots, U_m$ offen$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i$ offen

Definition 1.2.3
Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen (in X)$\Leftrightarrow X \setminus A$ offen.

i) $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ abgeschlossene Mengen$\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha$ abgeschlossen

ii) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ abgeschlossen$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i$ abgeschlossen

Definition 1.2.4
$A \subset X$ beliebig. Die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ von A ist $\bar{A} := \bigcap B$, so dass $B \supset A$, B abgeschlossen.

Eine Menge $W \subset X$ heißt Umgebung der Menge $M \subset X$, wenn $\exists V$ offen mit $M \subset V \subset W$.
Sei $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Eine Abbildung $\{k, k+1, k+2, \ldots\} \to X$, $n \mapsto c_n$, heißt Folge in X. Man schreibt kurz (c_n), im Allgemeinen ist $k = 0$.

Definition 1.2.5
Eine Folge (c_n) heißt konvergent in X, wenn es einen Punkt $c \in X$ gibt, so dass in jeder Umgebung von c fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder c_n liegen. Der Punkt c heißt ein Limes der Folge. In Zeichen:

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Nicht konvergente Folgen heißen divergent.

Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn der Limes jeder konvergenten Folge (c_n), $c_n \in M$, stets zu M gehört.

Definition 1.2.6
Ein Punkt $p \in X$ heißt Häufungspunkt einer Menge $M \subset X$:⇔ ∀Umgebung U von p gilt:

$$U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

In jeder Umgebung eines Häufungspunktes p von M liegen unendlich viele Punkte von M; es gibt stets eine Folge (c_n) in $M \setminus \{p\}$ mit $\lim c_n = p$.

Beispiel

i) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$. Die Menge U aller Häufungspunkte? $U = \mathbb{R}$.

ii) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Z}$. $U = \emptyset$.

iii) $X = \mathbb{R}$, $M = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $U = \{0\}$.

//

Definition 1.2.7
Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt dicht, in X :⇔ ∀offene $U \subset X : U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$.

Beispiel
$X = C[a,b]$, $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$, $f,g \in X$, $A = \mathscr{P} =$ alle Polynome auf $[a,b]$. //

Satz 1.2.8 **Äquivalenzsatz**
Folgende Aussagen über einen metrischen Raum X sind äquivalent:

i) Jede offene Überdeckung $U = \{U_j\}_{j \in J}$ von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (Heine-Borel-Eigenschaft)

ii) Jede Folge (x_n) in X besitzt eine konvergente Teilfolge. (Weierstraß-Bolzano-Eigenschaft)

Definition 1.2.9
Man nennt X kompakt, wenn die Bedingungen i) und ii) aus **??** erfüllt sind. Eine Teilmenge K von X heißt kompakt, oder auch ein Kompaktum (in X), wenn K mit der induzierten Metrik ein kompakter Raum ist.

($*$) Jedes Kompaktum in X ist abgeschlossen in X. In einem kompakten Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.

($**$) Jede offene Menge D in $\mathbb{C}$ ist die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen von D.

1.3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen

Konvergiert die Folge c_n gegen $c \in \mathbb{C}$, so liegen in jeder Kreisscheibe $B_\varepsilon(c)$, $\varepsilon > 0$, um c fast alle Folgenglieder c_n.
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Potenzfolge z^n konvergent: $\lim z^n = 0$; für alle $|z| > 1$ ist die Folge z^n divergent.

Definition 1.3.1
Eine Folge c_n heißt beschränkt:$\Leftrightarrow \exists M > 0$, so dass $|c_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Wie im Reellen folgt: Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt. Sind c_n, d_n konvergente Folgen, so gelten die Limesregeln:

i) $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ist $ac_n + bd_n$ konvergent:

$$\lim(ac_n + bd_n) = a \lim c_n + b \lim d_n$$

($\mathbb{C}-$Linearität)

ii) Die Produktfolge $c_n d_n$ ist konvergent:

$$\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$$

iii) Ist $\lim d_n \neq 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $d_n \neq 0 \forall n \geq k$; die Quotientenfolge $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n \geq k}$ konvergiert gegen $\frac{\lim c_n}{\lim d_n}$.

iv) Die Betragsfolge $|c_n|$ reeller Zahlen ist konvergent:

$$\lim |c_n| = |\lim c_n|$$

v) Die Folge $\bar{c}_n$ konvergiert gegen $\bar{c}$.

Satz 1.3.2
Folgende Aussagen über eine Folge c_n sind äquivalent:

i) c_n ist konvergent.

ii) Die beiden reellen Folgen $\operatorname{Re} c_n$, $\operatorname{Im} c_n$ sind konvergent. Im Fall der Konvergenz gilt:
$$\lim c_n = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

Beweis:

i)⇒ii) Limesregeln i) und v) und $\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2}(c_n + \bar{c}_n)$, $\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2i}(c_n - \bar{c}_n)$.

ii)⇒i)
$$\lim c_n = \lim(\operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n) = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

□

Definition 1.3.3
Eine Folge c_n heißt Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, so dass $|c_n - c_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k$.

Satz 1.3.4 **Konvergenzkriterium von Cauchy**
Folgende Aussagen über eine Folge (c_n sind äquivalent:

i) (c_n) ist konvergent.

ii) (c_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis:

i)⇒ii) Da (c_n) konvergent ist, $\exists c$, so dass $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists k \in \mathbb{N} : |c_n - c| < \varepsilon \forall n \geq k$. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$|c_n - c_m| \leq |c_n - c| + |c - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m \geq k$$

ii)⇒i) (c_n) ist eine Cauchyfolge. Es gilt:

$$|\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c_m| \leq |c_n - c_m|, \quad |\operatorname{Im} c_n - \operatorname{Im} c_m| \leq |c_n - c_m|$$

Also sind $(\operatorname{Re} c_n)$ und $(\operatorname{Im} c_n)$ reelle Cauchy-Folgen, also nach Analysis 1 konvergent. Somit ist auch $c_n = \operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n$ konvergent.

□

Satz 1.3.5
Für $K \subset \mathbb{C}$ ist K kompakt⇔ K beschränkt und abgeschlossen.

Satz 1.3.6 **Bolzano-Weierstraß**
Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

1.4 Konvergente und absolut konvergente Reihen

Definition 1.4.1
Ist $(a_\nu)_{\nu\geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge $(s_n)_{n\geq k}$, $s_n := \sum_{\nu=k}^n a_\nu$, der Partialsummen eine (unendliche) Reihe mit den Gliedern a_ν. Man schreibt $\sum_{\nu=k}^\infty a_\nu$, $\sum_k^\infty a_\nu$, $\sum_{\nu\geq k}$ oder einfach $\sum a_\nu$.
Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt konvergent, wenn die Partialsummenfolge (s_n) konvergiert, andernfalls heißt sie divergent. Im Konvergenzfall schreibt man suggestiv:

$$\sum a_\nu := \lim s_n$$

Wegen $a_n = s_n - s_{n-1}$ gilt $\lim a_n = 0$ für jede konvergente Reihe.
Die Limesregeln i) und v) übertragen sich sofort auf Reihen:

$$\sum_{\nu\geq k}(aa_\nu + bb_\nu) = a\sum_{\nu\geq k} a_\nu + b\sum_{\nu\geq k} b_\nu$$

$$\overline{\sum_{\nu\geq k} a_\nu} = \sum_{\nu\geq k} \bar{a}_\nu$$

Speziell folgt: Die komplexe Reihe $\sum_{\nu\geq k} a_\nu$ ist genau dann konvergent wenn die beiden reellen Reihen $\sum_{\nu\geq k} \operatorname{Re} a_\nu$ und $\sum_{\nu\geq k} \operatorname{Im} a_\nu$ konvergieren; also dann gilt:

$$\sum_{\nu\geq k} a_\nu = \sum_{\nu\geq k} \operatorname{Re} a_\nu + \sum_{\nu\geq k} \operatorname{Im} a_\nu$$

Satz 1.4.2 **Konvergenzkriterium von Cauchy**
Eine Reihe $\sum a_\nu$ konvergiert genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left|\sum_{m+1}^n a_\nu\right| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$$

Definition 1.4.3
Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum |a_\nu|$ nichtnegativer reeller Zahlen konvergiert.

Satz 1.4.4 **Majorantenkriterium**
Es sei $\sum_{\nu \geq k} t_\nu$ eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern $t_\nu \geq 0$; es sei $(a_\nu)_{\nu \geq k}$ eine komplexe Zahlenfolge, so dass $\forall \nu : |a_\nu| \leq t_\nu$. Dann ist $\sum_{\nu \geq k} a_\nu$ absolut konvergent.

Beweis:
$$\sum_{m+1}^{n} |a_\nu| \leq \sum_{m+1}^{n} t_\nu <^{1} \varepsilon$$
Also ist $\sum |a_\nu|$ konvergent. □

Wegen $\max(|\mathrm{Re}\, a|, |\mathrm{Im}\, a|) \leq |a| \leq |\mathrm{Re}\, a| + |\mathrm{Im}\, a|$ gilt (nach dem Majorantenkriterium): $\sum a_\nu$ ist absolut konvergent$\Leftrightarrow \sum \mathrm{Re}\, a_\nu$, $\sum \mathrm{Im}\, a_\nu$ sind absolut konvergent.

Satz 1.4.5 **Umordnungssatz**
$\sum_{\nu \geq 0} a_\nu$ konvergiere absolut. Dann konvergiert jede 'Umordnung'[2] dieser Reihe.

Beweis: $\sum_{\nu \geq 0}$ absolut konvergent$\Rightarrow \sum_{\nu \geq 0} \mathrm{Re}\, a_\nu$, $\sum_{\nu \geq 0} \mathrm{Im}\, a_\nu$ absolut konvergent, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\sum_{m+1}^{n} |\mathrm{Re}\, a_\nu| < \varepsilon$, $\sum_{m+1}^{n} |\mathrm{Im}\, a_\nu| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$. $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion$\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\tau(n) \geq n_0 \forall n \geq N_0$. Also:
$$\sum_{N_0+1}^{N} |\mathrm{Re}\, a_{\tau(\nu)}| < \varepsilon, \qquad \sum_{N_0+1}^{N} |\mathrm{Im}\, a_{\tau(\nu)}| < \varepsilon$$
Diese Reihen sind konvergent nach Cauchy, somit auch absolut konvergent und die Behauptung folgt. □

Sind $\sum_0^\infty a_\mu$, $\sum_0^\infty a_\nu$ zwei Reihen, so heißt jede Reihe $\sum_0^\infty c_\lambda$, wobei $c_0, c_1, c_2, \ldots$ genau einmal alle Produkte $a_\mu b_\nu$ durchläuft, eine Produktreihe von $\sum a_\mu$ und $\sum b_\nu$. Die wichtigste Produktreihe ist das Cauchyprodukt $\sum p_\lambda$ mit $p_\lambda := \sum_{\mu+\nu=\lambda} a_\mu b_\nu$. Diese Bildung wird nahegelegt, wenn man Potenzreihen formal ausmultipliziert:
$$\left(\sum_0^\infty a_\mu x^\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu x^\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda x^\lambda$$

1 Cauchy-Kriterium
2 $\sum a_{\tau(\nu)}$, $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion

Satz 1.4.6 **Reihenproduktsatz**
Es seien $\sum_0^\infty a_\mu$, $\sum_0^\infty b_\nu$ absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert jede Produktreihe $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut. Es gilt stets:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

Beweis: $\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$, so dass $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_l$ unter den Produkten $a_\mu b_\nu$, $0 \geq \mu, \nu \geq m$, vorkommen. Dann:

$$\sum_0^l |c_\lambda| \leq \left(\sum_0^m |a_\mu|\right)\left(\sum_0^m |b_\nu|\right) \leq \left(\sum_0^\infty |a_\mu|\right)\left(\sum_0^\infty |b_\nu|\right) < +\infty$$

Also ist $\sum_0^\infty |c_\lambda|$ konvergent, also $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut konvergent und somit unabhängig von Umordnungen. Insbesondere:

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_m)(b_0 + b_1 + \ldots + b_m) = (c_0 + c_1 + \ldots + c_{(m+1)^2-1})$$

Es folgt:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

□

1.5 Stetige Funktionen

$f : X \to Y$, f heißt Funktion oder Abbildung, X heißt Argumentbereich und Y Wertebereich. Man schreibt auch $X \ni x \to f(x) \in Y$.

Definition 1.5.1
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $a \in X$, wenn das f−Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ einer jeden Umgebung V von $f(a)$ in Y eine Umgebung von a in X ist.

Definition 1.5.2
Die Funktion $f: X \to Y$ konvergiert bei Annäherung an $a \in X$ gegen $b \in Y$, in Zeichen $\lim_{x\to a} f(x) = b$ oder $f(x) \to b$ wenn $x \to a$, wenn es zu jeder Umgebung V von b in Y eine Umgebung U von a in X gibt mit $f(U \setminus \{a\}) \subset V$.

Bemerkung
f ist stetig in $a \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Satz 1.5.3 **Folgenkriterium**
Genau dann ist $f: X \to Y$ stetig in a, wenn $\forall$Folgen (x_n) von Punkten $x_n \in X$ mit $\lim x_n = a$ gilt: $\lim f(x_n) = f(a)$.

Zwei Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ werden zusammengesetzt zu $g \circ f: X \to Z$, $z \to (g \circ f)(x) := g(f(x))$. Bei dieser Komposition von Abbildungen vererbt sich die Stetigkeit: Ist $f: X \to Y$ stetig in $a \in X$ und ist $g: Y \to Z$ stetig in $f(a) \in Y$, so ist $g \circ f: X \to Z$ stetig in a.

Definition 1.5.4
Eine Funktion $f: X \to Y$ heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Satz 1.5.5 **Stetigkeitskriterium**
Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) f ist stetig.

ii) Das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder in Y offenen Menge V ist offen in X.

iii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder in Y abgeschlossenen Menge A ist abgeschlossen in X.

Satz 1.5.6
Es sei $f: X \to Y$ stetig und $K \subset X$ ein Kompaktum. Dann ist auch $f(K) \subset Y$ ein Kompaktum.

Beweis: Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Sei $W_\alpha := f^{-1}(U_\alpha) \forall \alpha \in A$. f ist stetig, also ist für alle $\alpha \in A$ W_α offen. Also ist $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren endlich viele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^m W_{\alpha_i}$. Dann ist $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ eine endliche Überdeckung von $f(K)$. Somit ist $f(K)$ nach Definition ein Kompaktum. □

In Satz 5.5 ist enthalten, dass reellwertige stetige Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$ auf jedem Kompaktum K in X Maxima und Minima annehmen.
Komplexwertige Funktionen $f: X \to \mathbb{C}$ und $g: X \to \mathbb{C}$ lassen sich addieren und multiplizieren: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $x \in X$. Die zu f konjugierte Funktion $\bar{f}$ wird durch $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$, $x \in X$, definiert.
Rechenregeln: $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$, $\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$, $\bar{\bar{f}} = f$. Realteil und Imaginärteil von f werden durch $(\mathrm{Re} f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ und $(\mathrm{Im} f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$, $x \in X$, erklÃ¤rt. Für $u := \mathrm{Re} f$ und $v := \mathrm{Im} f$ (reellwertige Funktionen) gilt: $f = u + iv$, $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$, $f\bar{f} = u^2 + v^2$.
Man hat:

i) $f: X \to \mathbb{C}$, $g: X \to \mathbb{C}$ stetig in $a \in X \Rightarrow f+g, fg, \bar{f}$ stetig in a.

ii) $f = u + iv$ stetig in $a \Leftrightarrow u, v$ stetig in a.

iii) g nullstellenfrei in X (d.h. $g(x) \neq 0 \forall x \in X$), dann heißt die Funktion $x \to \frac{f(x)}{g(x)}$ die Quoiiententenfunktion von f und g. Sind f und g stetig in $a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in a.

1.6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in $\mathbb{C}$

Definition 1.6.1
Sei (X, d_x) ein metrische Raum, $A \subset X$ eine Menge. A ist zusammenhängend$\Leftrightarrow \nexists U_1, U_2$ offen in X, so dass:

i) $U_1 \cup U_2 \supset A$

ii) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

iii) $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$

Beispiel

i) $\mathbb{R} = X$, $d_x(x,y) = |x-y|$, $A = \mathbb{Q}$: $U_1 = (-\infty, \sqrt{2})$, $U_2 = (\sqrt{2}, +\infty)$

ii) $\mathbb{R} = X$, $d_x(x,y) = |x-y|$, $A = [0,1]$.
Seien U_1, U_2 offene Mengen mit i)-iii), $0 \in U_1$, $1 \in U_2$, $\frac{1}{2} \in U_1 \Rightarrow I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\frac{3}{4} \in U_2 \Rightarrow I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ $\Rightarrow \exists! x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ (Intervallschachtelungsprinzip). x_0 liegt also in U_1 oder U_2. U_1 ist offen, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U_1$, aber $I_n \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ für n genügend groß $\lightning$ Also ist A zusammenhängend.

//

Bemerkung
Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $A, B \subset X$ zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.

Definition 1.6.2
Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. $\forall x_0 \in A$ definieren wir

$$K(x) := \left\{ \bigcup_{\alpha} A_\alpha \mid x_0 \in A_\alpha, A_\alpha \subset A \text{ zusammehängend} \right\}$$

$K(x)$ heißt Zusammenhangskomponente des Punktes x von A.

Bemerkung
$K(x_0)$ ist zusammenhängend.

Definition 1.6.3
(X, d_x) metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. A ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\forall x_0, x_1 \in A \exists$stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to A$ so dass $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Bemerkung
$A \subset X$ wegzusammenhängend $\not\Leftarrow\Rightarrow$ A zusammenhängend.

Beispiel
$\mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x \le 1$, $A = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right), 0 < x \le 1\right\}$ //

Proposition 1.6.4
$A \subset \mathbb{R}^2$ offen, $d_{\mathbb{R}^2}(x,y) = \|x-y\|$. A zusammenhängend$\Rightarrow A$ wegzusammenhängend.

Beweis: Sei $x_0 \in A$ beliebig, aber fixiert. $A(x_0) := \{y \in A \mid \exists \gamma\colon [0,1] \to A, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$.

i) $A(x_0)$ ist wegzusammenhängend.

ii) $A(x_0)$ ist offen, weil $\forall y \in A(x_0) \subset A \exists \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(y)$. Also ist die Kurve γ von x_0 zu y+der Radius von y zu beliebigem Punkt von $B_\varepsilon(y)$ auch eine stetige Kurve. Also ist auch $B_\varepsilon(y) \subset A(x_0)$ und somit ist $A(x_0)$ offen.

iii) $A(x_0)$ ist abgeschlossen in A. Sei $y* \in A$ und $\exists y_n \in A(x_0)$, $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y^*$. Da A offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(y^*) \subset A$. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $y_n \in B_\varepsilon(y^*)$. Also existiert ein $\gamma\colon [0,1] \to A$, so dass $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$, Dann ist diese Kurve+der Radius $[y_n, y^*]$ eine Kurve die x_0 mit y^* verbindet. Also $y^* \in A(x_0)$. Somit ist $A(x_0)$ in A abgeschlossen.

Also sind $A(x_0)$ und $A \setminus A(x_0)$ offen$\lightning$ $A \setminus A(x_0) = \emptyset \Rightarrow A(x_0) = A$. Da $A(x_0)$ wegzusammenhängend ist, ist somit auch A wegzusammenhängend. $\square$

Definition 1.6.5
$f : X \to \mathbb{C}$ heißt lokal-konstant genau dann wenn $\forall x \in X \exists$ offene Umgebung $U \subset X$, $x \in U$, so dass $f|_U$ =konstant.

Ist f lokal-konstant, dann ist f stetig.

Satz 1.6.6
X metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

i) $f : X \to \mathbb{C}$ lokal-konstant$\Rightarrow f$ konstant

ii) $A \subset X$ nicht leer, offen und abgeschlossen$\Rightarrow A = X$

iii) X zusammenhängend

Beweis:

i)⇒ii) Sei $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, offen und abgeschlossen. $B := X \setminus A$ offen und abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in B \end{cases}$. Es folgt direkt dass f lokal-konstant, also insbesondere stetig ist. Also ist f konstant, nämlich $f = 1$, denn $A \neq \emptyset$. Da $A = f^{-1}(1) = X$, ist $A = X$.

ii)⇒i) Sei $f: X \to \mathbb{C}$ lokal-konstant. Fixiere $c \in X$. $A := f^{-1}(f(c))$. Da f lokal-konstant, ist A offen, $c \in A \neq \emptyset$. Da f stetig, ist A abgeschlossen. Also ist $A = X$. Insbesondere ist $f(x) = f(x) \forall x \in X$. Also ist f konstant.

□

Satz 1.6.7
$I \subset \mathbb{R}$ Intervall$\Rightarrow I$ zusammenhängend.

Definition 1.6.8

i) $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $t \in [0,1]$. γ heißt Strecke von z_0 nach z_1, $\gamma = [z_0, z_1]$.

ii) $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$, dann ist $[z_0, z_1]$ =Intervall.

iii) Seien $\gamma_1 : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Der Summenweg $\gamma_1 + \gamma_2$ von γ_1 und γ_2 ist $\gamma : [a_1, b_2 - a_2 + b_1]$, $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1] \end{cases}$.

iv) γ heißt Polygon oder Streckenzug, falls $\gamma = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \ldots + [z_{n-1}, z_n]$.

v) Polygon γ heißt achsenparallel, falls $[z_j, z_{j+1}]$ parallel zur $x-$Achse oder $y-$Achse ist, $j = 0, \ldots, n-1$, d.h. $\mathrm{Re} = z_j = \mathrm{Re}\, z_{j+1}$ oder $\mathrm{Im}\, z_j = \mathrm{Im}\, z_{j+1}$.

vi) $D \subset \mathbb{C}$ heißt Bereich, falls D offen und nicht leer ist.

Satz 1.6.9
Sei $B \subset \mathbb{C}$ Bereich. Dann sind äquivalent:

i) B ist zusammenhängend.

ii) $\forall p, q \in B \exists$Polygon in B, das p und q verbindet.

iii) B ist wegzusammenhängend.

Beweis:

ii)⇒iii) Jedes Polygon ist ein Weg.

iii)⇒i) Folgt aus Bemerkung oben.

i)⇒ii) Sei $p \in B$ fest, $z \in B$.

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \exists \text{Polygon von } p \text{ nach } b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige: f lokal konstant. Sei $w \in B$. Da B offen, gibt es eine Kreisscheibe $\triangle \subset B$, $\triangle \ni w$. Ist $z \in \triangle$, so existiert ein Polygon von z nach w in $\triangle$. D.h. $f(w) = 1 \Rightarrow f(z) = 1$ und $f(w) = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \forall z \in \triangle$. Also ist f lokal-konstant auf B und f somit konstant. Da $f(p) = 1$ folgt $f = 1$.

□

Definition 1.6.10
$G \subset \mathbb{C}$ Bereich. Ist G (weg-)zusammenhängend, so heißt G Gebiet.

G ab jetzt immer ein Gebiet, und D immer ein Bereich.

Definition 1.6.11
$p, q \in D$ $p \sim_D q \Leftrightarrow \exists$Weg in D der p und q verbindet. Die Äquivalenzklasse $[p]_D$ heißt Zusammenhangskomponente die p enthält.

$z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $d(z_0, z_1) = |z_0 - z_1|$ Abstand zwischen z_0 und z_1.
$z_0 \in \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, $d(z_0, A) = \inf\{d(z_0, w) \mid w \in A\}$
$D \subset \mathbb{C}$ Bereich, $c \in D$, $\partial D = \bar{D} \setminus D$. Randabstand $d_c(D) = d(c, \partial D)$.
Sonderfall: $D = \mathbb{C}$, $d_c(D) = +\infty$.
$d = d_c(D)$ ist der maximale Radius, so dass $B_d(c) \subset D$ enthalten ist.

Beispiel
$D = B_r(a)$. $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$. //

1.7 Komplexe Differentialrechnung

Definition 1.7.1
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $c \in D$, wenn es eine in c stetige Funktion $f_1: D \to \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(z) = f(c) + (z-c)f_1(z) \forall z \in D$$

($\mathbb{C}$−Linearisierung)
Die Funktion f_1 ist dann eindeutig durch f bestimmt:

$$f_1(z) = \frac{f(z)-f(c)}{z-c} \forall z \in D \setminus \{c\}$$

(Differenzenquotient)

Wegen der Stetigkeit von f_1 in c gilt, wenn man $h = z - c$ setzt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f_1(c)$$

Die Zahl $f_1(c) \in \mathbb{C}$ heißt die Ableitung (nach z) von f in c.
$f \in c$ differenzierbar$\Rightarrow f$ in c stetig.
Man beweist direkt: f in c komplex differenzierbar$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass

$$|f(c+h) - f(c) - f'(c)h| \leq \varepsilon |h| \forall h \in \mathbb{C}, |h| \leq \delta$$

Wir schreiben $c = a + ib = (a,b)$, $z = x + iy = (x,y)$. Ist $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex differenzierbar in $c \in D$, so gilt:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{f(c+ih)-f(c)}{ih}$$

Wählt man h reell, so folgt

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h,b)-u(a,b)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h,b)-v(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(a,b+h)-u(a,b)}{ih} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(a,b+h)-v(a,b)}{ih} \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\exists u_x(c), v_x(c), u_y(c), v_y(c)$ und

$$f'(c) = u_x(c) + iv_x(c) = v_y(c) - iu_y(c) \Rightarrow \begin{cases} u_x(c) = v_y(c) \\ v_x(c) = -u_y(c) \end{cases}$$

Dies ist die Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung. Sie ist eine notwendige Bedingung für komplexe Differenzierbarkeit.

$f : X \to \mathbb{C}$, $c \in D$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. f ist in c reell differenzierbar genau dann, wenn eine $\mathbb{R}$−lineare Abbildung T existiert, so dass

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - T(h)|}{|h|}$$

$$T = \begin{pmatrix} u_x(c) & v_x(c) \\ u_y(c) & v_y(v) \end{pmatrix}$$

Sind u, v in D stetig differenzierbare reelle Funktionen, so ist die komplexe Funktion $f = u + iv$ in jedem Punkt von D reell differenzierbar. Gilt zusätzlich $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ überall in D, so ist f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar.

Beweis: Sei $c = a + ib = (a,b)$, $h = \Delta x + i\Delta y = (\Delta x, \Delta y)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u(a+\Delta x, b+\Delta y) + iv(a+\Delta x, b+\Delta y) - u(a,b) - iv(a,b)}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u_x(a,b)\Delta x + u_y(a,b)\Delta y + iv_x(a,b)\Delta x + iv_y(a,b)\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(u_x(a,b) + iv_x(a,b))\Delta x + i(iv_x(a,b) + u_x(a,b))\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(u_x(a,b) + iv_x(a,b)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= u_x(a,b) + iv_x(a,b)
\end{aligned}$$

□

Beispiel
$f(z) = 2yx + 3ixy^2$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? $u(x,y) = 2yx$, $v(x,y) = 3xy^2$.

$$\begin{aligned}
u_x &= 2y = 6xy = v_y \\
v_x &= 3y^2 = -2x = -u_y
\end{aligned}$$

Lösungen dieses LGS: $(x = 0, y = 0)$, $\left(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ und $\left(x = \frac{1}{3}, y = \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. //

Laplace-Operator:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

Definition 1.7.2
Sei $\varphi \in C^2(G)$, $G \in \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist φ harmonisch in G genau dann, wenn $\Delta\varphi \equiv 0$ in G ist.

Satz 1.7.3
Ist $f = u + iv$ überall in D komplex differenzierbar und sind u und v zweimal reell stetig differenzierbar in D, so gilt: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = 0$ in D.

Beweis: $u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}$, $u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$. Also:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Anderer Fall analog. □

1.8 Holomorphe Funktionen

Definition 1.8.1
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in D, wenn f in jedem Punkt $c \in D$ komplex differenzierbar ist.
Die Menge der holomorphen Funktionen in D bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(D)$.

Summen- und Produktregel. $\forall f, g \in \mathcal{O}(D) \forall a, b \in \mathbb{C}$ ist $af + bg \in \mathcal{O}(D)$ und $fg \in \mathcal{O}(D)$ und $(af + bg)' = af' + bg'$, $(fg)' = f'g + fg'$. Insbesondere $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$.

Quotientenregel. $\forall f, g \in \mathcal{O}(D), \forall z \in D : g(z) \neq 0$: $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(D)$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettenregel. $g \in \mathcal{O}(D), h \in \mathcal{O}(D'), g(D) \subset D'$: $(h \circ g)(z) := h(g(z)) \in \mathcal{O}(D)$

$$(h \circ g)'(z) = h'(g(z))g'(z) \forall z \in D$$

Proposition 1.8.2
Folgende Aussagen über eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

i) f ist lokal-konstant in D.

ii) f ist holomorph in D und es gilt $f'(z) = 0 \forall z \in D$.

Beweis:

i)⇒ii) Trivial.

ii)⇒i) $0 = f'(z) = u_x + iv_x$, also $u_x = 0 = v_y$ und $v_x = 0 = -u_y$. Also sind alle partiellen Ableitungen identisch 0. Somit ist $u \equiv c$, $v \equiv c$ auf jeder Zusammenhangskomponente von D, also ist f lokal-konstant,

□

Korollar 1.8.3
$f \in \mathscr{O}(D), f(z) \in \mathbb{R} \forall z \in D$ oder $f(z) \in i\mathbb{R} \forall z \in D$. Dann ist f lokal-konstant.

Beweis: Sei $f(z) \in \mathbb{R} \forall z \in D$, d.h. $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit $v(z) \equiv 0$ in D. Dann ist nach Cauchy-Riemann: $u_x = v_y \equiv 0$ und $u_y = -v_x \equiv 0$ in D. Also ist f lokal-konstant in D.
Anderer Fall analog. □

Korollar 1.8.4
$f \in \mathscr{O}(D), |f(z)| = 1 \forall z \in D$. Dann ist f lokal-konstant in D.

Beweis: Sei $f(z) = u(z) + iv(z)$, $|f(z) = 1$, also $u^2 + v^2 \equiv 1$. Dann ist $uu_x + vv_x \equiv 0$ und $uu_y + vv_y \equiv 0$. Mit Cauchy-Riemann folgt dann:

$$u^2 u_x + uvv_x - uvv_x + v^2 u_x = (u^2 + v^2) u_x \equiv 0$$

Also: $u_x \equiv 0 = v_y$. Ebenfalls mit Cauchy-Riemann:

$$v^2 v_x + uvu_x + u^2 v_x - uvu_x = (u^2 + v^2) v_x \equiv 0$$

Also: $v_x \equiv 0$, und somit ist f lokal-konstant in D. □

$f : D \to \mathbb{C}$, D offene Menge, $f = u + iv$ ist in D reell differenzierbar. Wir definieren:

$$f_x := u_x + iv_x, \quad f_y := u_y + v_y \quad f_z := \frac{1}{2}(f_x - if_z), \quad f_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

Von hier bekommen wir direkt:

$$u_x = \frac{1}{2}(f_x + \bar{f}_x), \quad v_x = \frac{1}{2i}(f_x - \bar{f}_x), \quad u_y = \frac{1}{2}(f_y + \bar{f}_y), \quad v_y = \frac{1}{2i}(f_y - \bar{f}_y), \quad f_x = f_z + f_{\bar{z}}, \quad f_y = i(f_z - f_{\bar{z}})$$

Satz 1.8.5
Genau dann ist eine in D stetig reell differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D, wenn $\forall c \in D$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0$. Allschon ist $\frac{\partial f}{\partial z}$ die Ableitung f' von f in D.

Beweis:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(f_x + if_y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) \equiv 0$$

Nach Cauchy-Riemann ist f dann holomorph. □

2

Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie

2.1 Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz

Definition 2.1.1
Eine Funktionenfolge $f_n : X \to \mathbb{C}$ heißt in $A \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergent gegen $f : A \to \mathbb{C}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0$ und $\forall x \in X$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Beispiel i) $f_n(x) = x^n$, $A = [0,1)$. $f(x) \equiv 0 \forall x \in A$. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

ii) $A = [0,1]$.

$$f_n(z) = \begin{cases} 2nx & f \in [0, 1/2n] \\ 2 - 2nx & f \in (1/2n, 1/n] \\ 0 & x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

$f(x) \equiv 0 \forall x \in [0,1]$.

//

3 Potenzreihen

3.1 Konvergenzkriterien

Definition 3.1.1
Ist $c \in \mathbb{C}$ fixiert, so heißt jede Funktionenreihe $\sum_0^\infty a_\nu (z-c)^\nu$, $a_\nu \in \mathbb{C}$, eine (formale) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt c und Koeffizienten $a\nu$.

Um bequem formulieren zu können, nehmen wir häufig $c = 0$ an. Wir schreiben B_r anstelle von $B_r(0)$.
Man nennt eine Potenzreihe konvergent, wenn es noch einen weiteren Punkt $z_1 \neq c$ gibt, wo sie konvergiert.

Lemma 3.1.2 **Konvergenzlemma von Abel**
Zur Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ gebe es positive reelle Zahlen s, M, so dass stets gilt:

$$|a_\nu| s^\nu \leq M$$

Dann ist die Potenzreihe konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_s(c)$.

Beweis: Sei $c = 0$. Sei r mit $0 < r < s$ beliebig. Setzt man $q := rs^{-1}$, so gilt

$$|a_\nu z^\nu|_{B_r} = |a_\nu| r^\nu \leq M q^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Da $\sum q^\nu < \infty$ wegen $0 < q < 1$, so folgt

$$\sum |a_\nu z^\nu|_{B_r} \leq M \sum q^\nu < \infty$$

Da dies für alle $r < s$ gilt, folgt die normale Konvergenz in B_s. □

Korollar 3.1.3
Konvergiert die Reihe $\sum a_\nu z^\nu$ in $z_0 \neq 0$, so ist $\sum a_\nu z^\nu$ normal konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_{|z_0|}$.

Satz 3.1.4 **Konvergenzsatz für Potenzreihen**
Es sei $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ eine Potenzreihe. Sei R das Supremum aller reellen Zahlen $t \geq 0$, so dass die Folge $|a_\nu| t^\nu$ beschränkt ist. Dann gilt:

i) In der Kreisscheibe $B_R(c)$ ist die Reihe normal konvergent.

ii) In jedem Punkt $x \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(c)}$ ist die Reihe divergent.

Beweis: Sei $c = 0$. Es gilt $0 \leq R < \infty$. Im Fall $R = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $R > 0$. Für jedes s, $0 < s < R$, ist die Folge $|a_\nu| s^\nu$ beschränkt. Nach dem Konvergenzlemma konvergiert $\sum a_\nu z^\nu$ mithin normal in B_s. Da $s < R$ beliebig nah bei R wählbar ist, folgt die normale Konvergenz in B_R.
Für jedes w mit $|w| > R$ ist die Folge $|a_\nu||w|^\nu$ unbeschränkt und die Reihe $\sum a_\nu w^\nu$ notwendig divergent. □

Bemerkung
Die Grenzfunktion von $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ ist stetig in $B_R(c)$. Wir bezeichnen diese Funktion durchweg mit f.
Die durch den Konvergenzsatz eindeutig bestimmte Größe R mit $0 \leq R \leq \infty$ heißt der Konvergenzradius, die Menge $B_R(c)$ heißt die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe.

Definition 3.1.5
Für eine Folge $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ reeller Zahlen ist

$$\limsup \alpha_n := \lim_{N\to\infty} \sup(\alpha_N, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots)$$

Satz 3.1.6 **Formel von Cauchy-Hadamard**
Die Potenzreihe $\sum a_\nu(z-c)^\nu$ hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$$

Beweis: Wir setzen $L := (\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|})^{-1}$. Es ist zu zeigen: Für jedes r, $0 < r < L$, gilt $r \le R$ und für jedes s, $L < s < \infty$, gilt $s \ge R$.
Sei zunächst $0 < r < L$, also $r^{-1} > \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Nach Definition von lim sup gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < r^{-1} \forall \nu \ge \nu_0$$

Mithin ist die Folge $|a_\nu| r^\nu$ beschränkt, d.h. $r \le R$.
Sei nun $L < s < \infty$, also $s^{-1} < \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Nach Definition von lim sup existiert eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass für alle $m \in M$ gilt:

$$s^{-1} < \sqrt[m]{|a_m|}$$

Das heißt $|a_m| s^m > 1$, also ist $|a_\nu| s^\nu$ keine Nullfolge und somit $s \ge R$. □

Satz 3.1.7 **Quotientenkriterium**
Es sei $\sum a_\nu(z-c)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Es sei $a_\nu \neq 0$ für alle ν. Dann gilt:

$$\liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} \le R \le \limsup \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

Speziell:

$$R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

falls der Limes existiert.

Beweis: Setzt man

$$S := \liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}, \quad T := \liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

so genügt es zu zeigen: Für jedes s, $0 < s < S$, gilt $s \le R$ und für jedes t, $T < t < \infty$, gilt $t \ge R$.
Sei zunächst $0 < s < S$. Nach Definition von lim inf gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $a_\nu \neq 0$ und $|a_\nu a_{\nu+1}^{-1}| > s$, d.h. $|a_{\nu+1}| s < |a_\nu|$ für alle $\nu \ge l$. Setzt man $A := |a_l| s^l$, so folgt sofort $|a_{l+m}| s^{l+m} \le A$ für alle $m \ge 0$ durch Induktion. Die Folge $|a_\nu| s^\nu$ ist mithin beschränkt, d.h. $s \le R$.
Sei nun $T < t < \infty$. Dann gibt es laut Definition von lim sup ein $l \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $a_\nu \neq 0$

und $|a_\nu a_{\nu+1}^{-1}| < t$, d.h. $|a_{\nu+1}|t > |a_\nu|$ für alle $\nu \geq l$. Setzt man $B := |a_l|t^l$, so folgt jetzt induktiv $|a_{l+m}|t^{l+m} \geq B$ für alle $m \geq 0$. Da $B \geq 0$, so ist also $|a_\nu|t^\nu$ keine Nullfolge, d.h. $t \geq R$. □

3.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen

Exponentialreihe und trigonometrische Reihen, Eulersche Formel

Die Exponentialreihe definiert man als

$$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Ihr Konvergenzradius bestimmt sich nach dem Quotientenkriterium mit $a_n u := \frac{1}{\nu!}$ zu

$$R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} = \lim(\nu+1) = \infty$$

d.h. die Reihe konvergiert normal überall in $\mathbb{C}$.
Die Cosinusreihe und die Sinusreihe

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \quad \sin z = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

konvergieren ebenfalls überall in $\mathbb{C}$, denn $\cos z$ und $\sin z$ sind Teilreihen der konvergenten Reihe $\exp z$.

Satz 3.2.1 **Eulersche Formel**

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \forall z \in \mathbb{C}$$

Beweis:

$$\exp iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu} + i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \cos z + i \sin z$$

□

$\cos z$ ist eine gerade Funktion, $\sin z$ eine ungerade Funktion:

$$\cos(-z) = \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}(-z)^{2\nu} = \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu} = \cos z$$

Analog für $\sin -z = -\sin z$.
Weiter gilt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp iz + \exp -iz), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp iz - \exp -iz)$$

Logarithmische Reihe und Arcustangens-Reihe

Die Logarithmische Reihe definiert man als

$$\lambda(z) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} z^\nu = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

$R = 1$, da

$$\frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} = \frac{\nu+1}{\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} 1$$

Die Arcustangens-Reihe definiert man als

$$a(z) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} z^{2\nu-1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots$$

3.3 Holomorphie von Potenzreihen

Satz 3.3.1
Hat $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ den Konvergenzradius R, so haben auch die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration entstehenden Reihen $\sum \nu a_\nu (z-c)^{\nu-1}$ und $\sum \frac{1}{\nu+1} a_\nu (z-c)^{\nu+1}$ den Konvergenzradius R.

Beweis:

i) Für den Konvergenzradius R' der differenzierten Reihe gilt:

$$R' = \sup\{t \geq 0 \mid \nu |a_\nu| t^{\nu-1} \text{ ist beschränkt}\}$$

Da mit $\nu|a_\nu|t^{\nu-1}$ erst recht die Folge $|a_\nu|t^\nu$ beschränkt ist, folgt $R' \leq R$. Um $R \leq R'$ einzusehen, genügt es zu sehen, dass für jedes $r > R$ gilt: $r \leq R'$. Man wähle zu r ein s mit $r < s < R$. Dann ist die Folge $|a_\nu|s^\nu$ beschränkt. Es gilt:

$$\nu |a_\nu| r^{\nu-1} = (r^{-1}|a_\nu|s^\nu)\nu q^\nu$$

mit $q := \frac{r}{s}$. Da νq^ν wegen $0 < q < 1$ eine Nullfolge ist, so ist auch $\nu|a_\nu|r^{\nu-1}$ eine Nullfolge. Es folgt $r \leq R' \Rightarrow R' = R$.

ii) Analog.

□

Satz 3.3.2 **Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation bei Potenzreihen**
Die Potenzreihe $\sum a_\nu |z-c|^\nu$ habe den konvergenzradius $R > 0$. Dann ist ihre Grenzfunktion f in $B_R(c)$ beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere holomorph in $B_R(c)$. Es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{\nu \geq k} (k!) \binom{\nu}{k} a_\nu (z-c)^{\nu-k}, \quad z \in B_R(c), n \in \mathbb{N}$$

Speziell: $\frac{f^{(k)}}{k!} = a_k$ (Taylorsche koeffizientenformeln).

Beweis: Es genügt, den Fall $k = 1$ zu behandeln; hieraus der Allgemeinfall durch Iteration. Wir setzen $B := B_R(c)$. Zunächst ist auf Grund von obigem Satz klar, dass durch

$$g(z) := \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu (z-c)^{\nu-1}$$

eine Funktion $g : B \to \mathbb{C}$ definiert wird. Unsere Behauptung ist: $f' = g$. Wir nehmen wieder $c = 0$ an. Sei $b \in B$ fixiert. Um $f'(b) = g(b)$ zu zeigen, setzen wir:

$$q_\nu(z) := z^{\nu-1} + z^{\nu-2} b + z^{\nu-2} b^2 + \ldots + b^{\nu-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \nu = 1, 2, \ldots$$

Dann gilt stets:

$$z^\nu - b^\nu = (z-b) q_\nu(z)$$

und also

$$f(z) - f(b) = \sum_{\nu \geq 1} a_\nu (z^\nu - b^\nu) = (z-b) \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z), \quad z \in B$$

Sei nun $f_1(z) := \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$. Dann folgt (beachte: $q_\nu(b) = \nu b^{\nu-1}$):

$$f(z) = f(b) = (z-b) f_1(z), \quad z \in B$$

und

$$f_1(b) = \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu b^{\nu-1} = g(b)$$

Es ist daher nur noch zu zeigen, dass f_1 stetig in b ist. Dazu genügt es nachzuweisen, dass die Reihe $\sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$ in B normal konvergiert. Das aber ist klar, denn für jede kreisscheibe B_r, $|b|| < r < R$, gilt

$$|a_\nu q - \nu|_{B_r} \leq a_\nu \nu r^{\nu-1}$$

also

$$\sum_{\nu \geq 1} |a_\nu q_\nu|_{B_r} \leq \sum_{\nu \geq 1} \nu |a_\nu| r^{\nu-1} < \infty$$

nach Satz oben. □

3.3.1 Beispiele holomorpher Funktionen

i) Geometrische Reihe:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} z^{\nu-k}, \quad z \in \mathbb{E}$$

ii) Exponentialfunktion:

$$\exp' z = \left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \right)' = \sum_{\nu \geq 1} \frac{z^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = \exp z$$

iii) Cosinusfunktion:

$$\cos' z = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu}}{(2\nu)!} \right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} = -\sin z$$

iv) Sinusfunktion:

$$\sin' z = \cos z$$

v) Logarithmische Reihe:

$$\lambda(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \Rightarrow \lambda'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \frac{1}{1+z}$$

vi) Arcustangens-Reihe:

$$a(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots \Rightarrow a'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

4

Elementar-transzendente Funktionen

4.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Satz 4.1.1
Sei $z \in \mathbb{C}$.

i) $\exp z \neq 0$

ii) $(\exp z)^{-1} = \frac{1}{\exp z} = \exp -z$

Beweis: $h(z) := \exp z \exp -z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph.

$$h'(z) = \exp z \exp -z + \exp z(-\exp -z) = 0$$

Also $h' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$, also ist h konstant auf $\mathbb{C}$ ($h \equiv c \in \mathbb{C}$).

$$c = h(0) = \exp 0 \exp -0 = 1$$

Somit:

$$\exp z \exp -z = 1 \forall z \in \mathbb{C}$$

Hieraus folgt i) und ii) direkt. □

Satz 4.1.2
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

i) $\exists a, b \in \mathbb{C}$:
$$f(z) = a \exp bz \forall z \in G$$

ii) $\exists b \in \mathbb{C}$:
$$f' = bf \text{ auf } G$$

Beweis:

i)⇒ii): trivial

ii)⇒i): Sei
$$h(z) = f(z) \exp -bz$$
$$h'(z) = f'(z) \exp -bz - b \exp -bz f(z) = (bf(z) - bf(z)) \exp -bz = 0$$
Also $h' \equiv 0$ auf G. Also existiert ein $a \in \mathbb{C}$, so dass $h \equiv a$ auf G.
$$a = h(z) = f(z) \exp -bz \Leftrightarrow f(z) = a \exp bz$$
$$h(0) = f(0) \exp 0 = f(0) \Rightarrow f(z) = f(0) \exp bz$$

□

Spezialfall: Die einzige holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $f' = f$ und $f(0) = 1$ erfüllt, ist die Exponentialfunktion.

Satz 4.1.3 **Additionstheorem für** exp
$$\exp(z + w) = \exp z \exp w \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Beweis: Sei $w \in \mathbb{C}$ fix, $f(z) := \exp(z + w)$.
$$f'(z) = \exp(z + w) = f(z)$$
Also:
$$f(z) = f(0) \exp z = \exp w \exp z$$

□

Satz 4.1.4 **Additionstheoreme für** sin, cos

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$
$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

Beweis:

$\exp(i(z+w)) = \exp iz \exp iw = (\cos z + i\sin z)(\cos w + i \sin w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\cos z \sin w + \sin z \cos w)$

Analog:

$$\exp(-i(z+w)) = \ldots$$

Rest folgt aus vorigem Kapitel. □

Definition 4.1.5
Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\omega-$periodisch (oder periodisch), falls $\exists \omega \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z+\omega) \forall z \in \mathbb{C}$. ω heißt dann Periode von f.

Beispiel
$z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(z+2\pi ik) = \exp z \exp 2\pi ik = \exp z(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = \exp z$$

Also ist exp periodisch mit Periode $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$ (im Unterschied zu e^x, $x \in \mathbb{R}$!). //

4.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln

$w = u + iv$.

$$\tan\varphi = \frac{v}{u} \Leftrightarrow \arctan\frac{v}{u} = \varphi$$

und

$$r = |w| = \sqrt{u^2+v^2}$$

Das heißt:

$$w = r \cdot e^{i\varphi} = r\exp i\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und

$$|w| = |r \exp i\varphi| = r|\exp i\varphi| = r\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = r$$

$w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$.

$$\varphi = \arg w = \begin{cases} \arctan\frac{v}{u} & v \geq 0, u > 0 \\ \pi - \arctan\frac{v}{u} & v \geq 0, u < 0 \\ \pi & v = 0, u < 0 \\ \pi + \arctan\frac{v}{u} & u, v < 0 \\ \frac{3}{2}\pi & v < 0, u = 0 \\ 2\pi - \arctan\frac{v}{u} & v < 0 < u \end{cases}$$

Beispiel

$$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}, \quad i = 1 \cdot e^{i \cdot \pi/2}, \quad -1 = e^{i \cdot \pi}, \quad -i = e^{3/2 \pi i}, \quad 1 = e^{2\pi i}, \ldots$$

//

Multiplikation:

$$z \cdot w = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}$$

Per Induktion kann man dann folgern:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n} \forall \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

Satz 4.2.1 **Moivresche Formel**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos\varphi n + i\sin\varphi n$$

Problem: Löse $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Wir wissen (Fundamentalsatz der Algebra): Die Gleichung hat höchstens n Lösungen, nämlich

$$\zeta_k := e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$\zeta_k^n = \left(e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right)^n = e^{2\pi i k} = 1$$

ζ_k heißen n-te Einheitswurzeln.

4.3 Logarithmusfunktion

Definition 4.3.1
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ heißt Logarithmusfunktion, falls $\exp(l(z)) = z \forall z \in G$.

Bemerkung

i) $l'(z) = \frac{1}{z}$

ii) l hängt ab von G.

iii) $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, $l(z) = \ln|z| + i \arg z = \log z$

5 Komplexe Integralrechnung

5.1 Wegintegrale in $\mathbb{C}$

Eine Kurve: $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2_{x,y}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, stetig differenzierbar.
$\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt, $\gamma(b)$ Endpunkt.

5.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale

Satz 5.2.1 **Vertauschungssatz für Reihen**
Sei γ ein Weg und $\sum f_\nu$, $f_\nu \in C(|\gamma|)$, eine Funktionsreihe, die in $|\gamma|$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

$$\sum \int_\gamma f_\nu \mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\sum f_\nu\right) \mathrm{d}z = \int_\gamma f \,\mathrm{d}z$$

5.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen

Satz 5.3.1
Ist f stetig in D, so sind folgende Aussagen über eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ äquivalent:

i) F ist holomorph in D und es gilt $F' = f$.

ii) Für jeden Weg γ in D mit Anfangspunkt w und Endpunkt z gilt:

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = F(z) - F(w)$$

Beweis:

i)⇒ii): Ist $\gamma\colon [a,b]\to D$, $t\mapsto \zeta(t)$, stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\zeta(t))\zeta'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\zeta(t))\zeta'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(\zeta(t)))\mathrm{d}t = F(\zeta(b)) - F(\zeta(a)) = F(z) - F(w)$$

Ist nun $\gamma = \gamma_1 + .. + \gamma_m$ irgendein Weg, dann ist

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{\mu=1}^m \int_{\gamma_\mu} f\,\mathrm{d}z = \sum_{\mu=1}^m F(b_\mu) - F(a_\mu) = F(b_m) - F(a_i) = F(z) - F(w)$$

ii)⇒i): Wir zeigen, dass für jeden Punkt $c \in D$ gilt: $F'(c) = f(c)$. Es sei $\bar{B} \subset D$ eine Kreisscheibe um c. Nach Voraussetzung gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f\,\mathrm{d}z \forall z \in B$$

Setzt man

$$F_1(z) = \frac{1}{z-c}\int_{[c,z]} f\,\mathrm{d}\zeta$$

für $z \in B \setminus \{c\}$ und $F_1(c) := f(c)$, so folgt:

$$F(z) = F(c) + (z-c)F_1(z), \quad z \in B$$

Zeigen wir noch, dass F_1 stetig in c ist, so folgt $F'(c) = F_1(c) = f(c)$. Für $z \in B \setminus \{c\}$ gilt:

$$F_1(z) - F_1(c) = \frac{1}{z-c}\int_{[c,z]} (f(\zeta) - f(c))\mathrm{d}\zeta$$

Es folgt:

$$|F_1(z) - F_1(c)| \le \frac{1}{|z-c|}|f - f(c)|_{[z,c]}|z-c| \le |f - f(c)|_B \forall z \in B$$

f ist stetig, also folgt, dass F_1 stetig in c ist.

□

Eine Funktion $f \in C(D)$ heißt integrabel, wenn eine Stammfunktion von f existiert.

Satz 5.3.2 **Integrabilitätskriterium**
Folgende Aussagen über eine in D stetige Funktion f sind äquivalent:

i) f ist integrabel in D.

ii) Für jeden in D geschlossenen Weg γ gilt:

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = 0$$

Bemerkung

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

ist eine Stammfunktion wenn i) gilt. Weil

$$0 = \int_{\gamma_z - \gamma'_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma'_z} f\,\mathrm{d}\zeta$$

also

$$\int_{\gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma'_z} f\,\mathrm{d}\zeta \forall \gamma_z, \gamma'_z$$

mit Anfangspunkt z und Endpunkt z, d.h. $F(z)$ ist von der Wahl von γ_z unabhängig, d.h. $F(z)$ ist korrekt definiert und man kann zeigen, dass $F'(z) = f(z) \forall z \in D$.

Beweis:

ii)⇒i): Da Wege stets in Zusammenhangskomponenten von D verlaufen, darf man annehmen, dass D ein Gebiet ist. Sei γ irgendein Weg in D von w nach z, Wege γ_z, γ_w in D von z_1 nach w bzw. z. Dann ist $\gamma_w + \gamma - \gamma_z$ ein geschlossener Weg, daher gilt

$$0 = \int_{\gamma_w + \gamma - \gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_w} f\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta = F(w) + \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}\zeta - F(z)$$

Also erfüllt F die Eigenschaft vom letzten Satz.

i)⇒ii): Trivial, weil

$$\int_{\gamma} f\,\mathrm{d}\zeta = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt}) = 0$$

□

Definition 5.3.3
$G \subset \mathbb{C}$ heißt Sterngebiet mit Zentrum $c \in G$ genau dann, wenn $\forall z \in G$ gilt: $[c, z] \subset G$.

Definition 5.3.4
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei Punkte. Die kompakte Menge

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1), s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\}$$

heißt das (kompakte) Dreieck mit Eckpunkten z_1, z_2, z_3.
Der geschlossene Streckenzug

$$\partial\Delta := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$$

heißt der Rand von Δ.

Satz 5.3.5
Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum z_1. Es sei $f \in C(G)$, für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset G$, das z als Endpunkt hat, gelte:

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Dann ist f integrabel in G, die Funktion

$$F(z) := \int_{[z_1, z]} f \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion zu f in G. Speziell gilt:

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Beweis: Sei G ein Sterngebiet. Dann ist $[z_1, z] \subset G \forall z \in G$ und F wohldefiniert. Sei $c \in G$ fixiert. Ist z nahe genug bei c gewählt, so liegt das Dreieck Δ mit den Eckpunkten z_1, c, z in G. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral von f längs $\partial\Delta = [z_1, c] + [c, z] + [z, z_1]$, so gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\zeta$$

$z \in G$ nahe bei c. hieraus folgt wie im Beweis der Implikation ii)⇒i) des Satzes 1, dass F in c komplex differenzierbar ist und dass gilt: $F'(c) = f(c)$. □

6
Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung

6.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

Lemma 6.1.1 **Integrallemma von Goursat**
Es sei f holomorph im Bereich D. Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset D$:

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Beweis: Sei $\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta \neq 0$ und sei

$$\alpha(\Delta) := \left| \int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta \right| \neq 0$$

Wir teilen Δ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Dann

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f \,\mathrm{d}\zeta$$

Damit existiert ein k_1, so dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f \,\mathrm{d}\zeta \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4}$$

Wir teilen $\Delta_1^{k_1}$ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_2^{k_1,1}, \Delta_2^{k_1,2}, \Delta_2^{k_1,3}, \Delta_2^{k_1,4}$ und bekommen

$$\int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f \,\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_2^{k_1,k}} f \,\mathrm{d}\zeta$$

Damit existiert ein k_2, so dass

$$\left|\int_{\partial\Delta_2^{k_1,k_2}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_1^{k}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^2}\alpha(\Delta)$$

Wir machen genau das gleiche für $\Delta_2^{k_!,k_2}$ und bekommen $\Delta_3^{k_1,k_2,k_3},\dots,\Delta_m^{k_1,k_2,\dots,k_m}$, so dass

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^m}\alpha(\Delta)$$

Es existiert genau ein

$$p = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_m^{k_1,..,k_m} \subset D$$

$f \in \mathcal{O}(D)$, also:

$$f(\zeta) = f(p) + f'(p)(\zeta - p) + g(\zeta)(\zeta - p), \quad g \in C(D), g(p) = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f(p)\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f'(p)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} g(\zeta)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta$$

Für $f(p)$ ist $f(p)\zeta$ eine Stammfunktion, für $f'(p)(\zeta - p)$ ist $\frac{1}{2}f'(p)(\zeta - p)^2$ eine Stammfunktion, also folgt:

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} g(\zeta)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta\right| \leq \sup_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} |g(\zeta)(\zeta-p)| \cdot \frac{l(\Delta)}{2^m} \leq \sup_{\zeta\in\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

Auf der anderen Seite:

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^m}\alpha(\Delta)$$

$$\frac{1}{4^m}\alpha(\Delta) \geq \sup_{\zeta\in\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \lightning$$

$\square$

Satz 6.1.2 **Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete**
Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum c, es sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph in G. Dann ist f integrabel in G, die Funktion

$$F(z) := \int_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion von f in G. Speziell gilt:

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Beweis: Wegen $f \in \mathcal{O}(G)$ folgt mit Goursat:

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta = 0, \quad \Delta \subset G$$

Mit dem Integrabilitätskriterium für Sterngebiete folgt dann, dass

$$F(z) = \int_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\zeta$$

eine Stammfunktion von f ist. □

Reeller Beweis des Integrallemmas von Goursat: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\Sigma \subset D$ mit glattem Rand $\partial\Sigma$ und $f \in \mathcal{O}(D)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} f \,\mathrm{d}\zeta &= \int_{\partial\Sigma} (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\partial\Sigma} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i \int_{\partial\Sigma} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \\
&= \iint_\Sigma -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + i \iint_\Sigma -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

6.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

Lemma 6.2.1 **Zentrierungslemma**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\bar{B} \subset D$ eine Kreisscheibe, $B_r(z) := \{\eta \mid |z-\zeta| = r\}$ und $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z\})$. Dann ist

$$\int_{\partial B} f \, \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B_r(z)} f \, \mathrm{d}\zeta$$

Beweis: Sei l eine Gerade, so dass $z \in l$. Wir nehmen Ω_1, Ω_2 wie auf dem Bild (:|). Dann sind $\omega_1 \subset \tilde{\Omega}_1$ und $\Omega_2 \subset \tilde{\Omega}_2$ Sterngebiete. Dann:

$$\int_{\partial\Omega_1} f \, \mathrm{d}\zeta = 0, \quad \int_{\partial\Omega_2} f \, \mathrm{d}\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Es folgt:

$$\int_{\partial B} f \, \mathrm{d}\zeta - \int_{\partial B_r(z)} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Die Aussage folgt. □

Korollar 6.2.2
Ist g beschränkt um z, so gilt:

$$\int_{\partial B} g \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Beweis: $\exists M > 0, \varepsilon > 0$, so dass $\forall$Kreis $S \subset B$ um z mit Radius $t < s$ gilt: $|g|_S \leq M$. Mit dem Zentrierungslemma und der Standardabschätzung haben wir:

$$\left| \int_{\partial B} g \mathrm{d}\zeta \right| = \left| \int_{S} g \mathrm{d}\zeta \right| \leq |g|_S 2\pi t \leq M 2\pi t \forall t > 0$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 6.2.3 **Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben**
Es sei f holomorph im Bereich D, es sei $B := B_r(c)$, $r > 0$, eine Kreisscheibe, die nebst Rand ∂B in D liegt. Dann gilt $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Beweis: Sei $z \in B$ fixiert. Die Funktion $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ für $\zeta \in D \setminus \{z\}$, $g(z) := f'(z)$, ist holomorph in $D \setminus \{z\}$ und stetig in D. Dann folgt:

$$0 = \int_{\partial B} g \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - 2\pi i f(z)$$

Die Behauptung folgt. □

Korollar 6.2.4 **Mittelwertgleichung**
Unter den Voraussetzungen von obigem Satz gilt:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Beweis:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \mathrm{d}(c + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \epsilon_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta}) r i e^{i\theta} r e^{i\theta}}{\mathrm{d}} \theta$$

Durch Kürzen erhält man die obige Formel. □

Korollar 6.2.5 **Mittelwertungleichung**

$$|f(c)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$$

6.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

Definition 6.3.1
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt im Kreis $B = B_r(c) \subset D$ in eine Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ um c entwickelbar, wenn die Potenzreihe in B gegen $f|_B$ konvergiert.

Aus der Vertauschbarkeit von Differentation und Summation für Potenzreihen folgt sofort:

Satz 6.3.2
Ist f in B um c in eine Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ entwickelbar, so ist f in B beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt:

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!} \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Eine Potenzreihenentwicklung einer Funktion f um c ist also, unabhängig vom Radius r des Kreises B, eindeutig durch die Ableitungen von f in c bestimmt und hat immer die Form

$$f(z) = \sum \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu}(z-c)^\nu$$

Diese Reihe heißt (wie im Reellen) die Taylorreihe von f um c. Sie konvergiert in B normal.

Ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$, so ordnen wir jeder stetigen Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

zu. Wir behaupten:

Lemma 6.3.3 **Entwicklungslemma**
Die Funktion F ist in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ holomorph. Ist $c \notin |\gamma|$ irgendein Punkt, so konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty a_\nu (z-c)^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\nu+1}} \mathrm{d}\zeta$$

in jeder Kreisscheibe um c, die $|\gamma|$ nicht trifft, gegen F. Die Funktion F ist beliebig oft differenzierbar in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Es gilt:

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \forall k \in \mathbb{N}$$

Beweis: Sei $B = B_r(c)$ mit $B \cap |\gamma| = \emptyset$. Die in $\mathbb{E}$ konvergente Reihe

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} w^{\nu-k}$$

liefert (mit $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} &= \sum_{\nu \geq k} \frac{1}{(\zeta-c)^{\nu+1}} (\zeta-c)^{\nu-k} \forall z \in B, \zeta \in |\gamma|, k \in \mathbb{N} \\
&= \frac{1}{((\zeta-c)-(z-c))^{k+1}} \\
&= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \frac{1}{\left(1-\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)\right)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^{\nu-k}
\end{aligned}$$

Mit $g_\nu(\zeta)$, $\zeta \in |\gamma|$, folgt daher:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{\nu \geq k} k! \binom{\nu}{k} g_\nu(\zeta)(z-c)^{\nu-k} \mathrm{d}\zeta$$

Da $|\zeta - c| \geq r \forall \zeta \in |\gamma|$, folgt $|g_\nu|_{|\gamma|} \leq r^{-(\nu+1)} |f|_{|\gamma|}$ und also

$$\max_{\zeta \in |\gamma|} |g_\nu(\zeta)(z-c)^{\nu-k}| \leq \frac{1}{r^{k+1}} |f|_{|\gamma|} q^{\nu-k} \quad \text{mit} \quad q := \frac{|z-c|}{r}$$

Da $0 \leq q < 1 \forall z \in B$ und da

$$\sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} q^{\nu-k} = \frac{1}{(1-q)^{\nu+1}}$$

konvergiert oben die rechts unter dem Integral stehende Reihe für feste $z \in B$ in ζ normal auf γ. Daher gilt nach dem Vertauschungssatz für Reihen:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta = \sum_{\nu \geq k} k! \binom{\nu}{k} a_\nu (z-c)^{\nu-k} \quad \text{mit} \quad a_\nu := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} \mathrm{d}\zeta$$

Damit ist gezeigt, dass die durch oben definierte Funktion F in der Kreisscheibe B durch die Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ dargestellt wird ($k = 0$), wegen Eigenschafteen von Potenzreihen folgt weiter, dass F in B komplex differenzierbar ist und dass gilt:

$$F^{(k)}(z) = \sum_{\nu \geq k} k! \binom{\nu}{k} a_\nu (z-c)^{\nu-k}, \quad z \in B, k \in \mathbb{N}$$

Da B irgendeine Kreisscheibe in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, so folgt (2) und insbesondere $F \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus |\gamma|)$. $\square$

Satz 6.3.4 **Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor**
Es sei $c \in D$, und es sei $B_d(c)$ die größte Kreisscheibe um c in D. Dann ist jede in D holomorphe Funktion f um c in eine Taylorreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ entwickelbar, die in $B_d(c)$ normal gegen f konvergiert. Die Taylorkoeffizienten a_ν werden gegeben durch die Integrale

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{\nu+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (4)$$

wobei $B := B_r(c)$ mit $0 < r < d$.

Insbesondere ist f beliebig oft komplex differenzierbar in D. In jeder Kreisscheibe in B gelten die Cauchyschen Integralformeln

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta, z \in B, \forall k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Beweis: Wegen $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt für jeden Kreis $B = B_r(c)$, $0 < r < d$, die Cauchysche Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, z \in B$$

Nach dem Entwicklungslemma (mit $F := f$, $\gamma = \partial B$) hat f also in c eine in $B_r(c)$ konvergente Taylorentwicklung mit den durch (4) gegebenen Taylorkoeffizienten. jede Wahl von $r < d$ führt zur gleichen Reihe. Insbesondere herrscht Konvergenz gegen f in $B_d(c)$. Die Identitäten (5) folgen ebenfalls direkt aus dem Entwicklungslemma. □

Für jede Menge $A \subset D$ zeigt man die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) Jeder Punkt von A hat eine Umgebung U, so dass $U \cap A$ endlich ist.

ii) A ist abgeschlossen in D, und jeder Punkt $p \in A$ ist ein isolierter Punkt von A (d.h. hat eine Umgebung U mit $U \cap A = \{p\}$).

iii) Für jedes Kompaktum $K \subset D$ ist $K \cap A$ endlich.

Definition 6.3.5
Mengen, die i)-iii) erfüllen heißen lokal endlich in D.

Endliche Mengen sind lokal endlich.

Definition 6.3.6
Ist $A \subset D$ abgeschlossen und $f \in \mathcal{O}(D \setminus A)$, so heißt f stetig bzw. holomorph nach A fortsetzbar, wenn es eine in D stetige bzw. holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $\tilde{f}|_{D\setminus A} = f|_{D\setminus A}$.

Satz 6.3.7 **Riemannscher Fortsetzungssatz**
Ist f lokal endlich in D, so sind folgende Aussagen über eine in $D \setminus A$ holomorphe Funktion äquivalent:

i) f ist holomorph nach A fortsetzbar.

ii) f ist stetig nach A fortsetzbar.

iii) f ist in einer Umgebung $U \subset D$ eines jeden Punktes $c \in A$ beschränkt.

iv)
$$\lim_{z\to c}(z-c)f(z) = 0 \forall c \in A$$

Beweis: i)⇒ii)⇒iii)⇒iv) ist trivial. Wir zeigen iv)⇒i).
Wir nehmen $C = 0$ an: Wir betrachten die Funktionen

$$g(z) = zf(z) \forall z \in D \setminus \{0\}, \quad g(0) := 0, \quad h(z) := zg(z)$$

$g \in C(D)$ wegen iv). Dann folgt $h(z) = h(0) + zg(z)$ ist im Nullpunkt komplex differenzierbar mit $h'(0) = g(0) = 0$. Aus $h \in \mathcal{O}(D \setminus \{0\})$ folgt $h \in \mathcal{O}(D)$ und mit dem Entwicklungslemma:

$$h(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

Wegen $h(0) = h'(0) = 0$ folgt
$$h(z) = z^2(a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + \ldots)$$

Da $h(z) = z^2 f(z)$ für $z \in D \setminus \{0\}$ ist

$$\tilde{f}(z) = a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + \ldots$$

□

7
Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen

7.1 Identitätssatz

Eine holomorphe Funktion wird lokal eindeutig durch ihre Taylorreihe dargestellt. Hierein ist bereits ein Identitätssatz enthalten, nämlich:

Satz 7.1.1
$f, g \in \mathcal{O}(D)$, $\exists c \in D \exists U(c) \subset D$ so dass $f|_U = g|_U$. Dann gilt $f|_{B_d(c)} = g|B_d(c)$, wobei $d := d_c(D)$ der Randabstand von c in D ist.

Beweis: Klar durch die letzten Sätze. □

Eine andere Version des Identitätssatzes folgt direkt aus der Integralformel:

Satz 7.1.2
$f, g \in \mathcal{O}(U(\bar{B}))$, $f|_{\partial B} = g|_{\partial B}$. Dann folgt $f \underset{\bar{B}}{\equiv} g$ eine Umgebung von $\bar{B}$.

Satz 7.1.3 **Identitätssatz**
Folgende Aussagen über zwei in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen f und g sind äquivalent:

i) $f = g$.

ii) Die 'Identitätsmenge' $\{w \in G \mid f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G.

iii) $\exists c \in G$, so dass $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c) \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

i)⇒ii): Trivial.

ii)⇒iii): Wir setzen $h := f - g$. Die Nullstellenmenge $M := \{w \in G \mid h(w) = 0\}$ hat nach Voraussetzungen einen Häufungspunkt in $c \in G$. Gäbe es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $h^{(m)}(c) \neq 0$, so wählen wir m minimal. Dann gilt: $h(z) = (z-c)^m h_m(z)$ mit $h_m(z) = \sum_{\mu \geq m} \frac{h^{(\mu)}(c)}{\mu!}(z-c)^{\mu - m} \in \mathcal{O}(B)$ für jeden Kreis $B \subset G$ um c nach dem Entwicklungssatz, wobei $h_m(c) \neq 0$.

iii)⇒i):

$$S_n := \{w \in G \mid f^{(n)}(w) = g^{(n)}(w)\}$$

$f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ sind stetig, also ist S_n abgeschlossen. Somit ist auch $S := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ abgeschlossen. $c \in S$, also $S \neq \emptyset$. $h = f - g \in \mathcal{O}(G)$ und $h^{(n)}(c) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $\overline{B(c,\varepsilon)} \subset G$ und h lässt sich auf $B(c,\varepsilon)$ in eine Potenzreihe entwickeln die auf $B(c,\varepsilon)$ kompakt konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

mit $a_n = \frac{h^{(n)}(c)}{n!} = 0$. Also ist auch die Potenzreihe $\equiv 0$ auf $B(c,\varepsilon)$ und damit auch $h|_{b(c,\varepsilon)} \equiv 0$. Dies gilt für alle $c \in S$, aber das heißt $\forall c \in S \exists \varepsilon > 0 : B(c,\varepsilon) \subset S$. Also ist S offen, G zusammenhängend und somit $S = G$ und $f = g$.

□

Korollar 7.1.4
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differnzierbar. Dann gibt es maximal eine Möglichkeit, f holomorph auf $\mathbb{C}$ fortzusetzen.

Zum Beispiel: sin, cos, exp.

7.2 Existenz singulärer Punkte

Definition 7.2.1
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann heißt $w \in \partial G$ ein singulärer Punkt von f, wenn es keine Umgebung U von w in $\mathbb{C}$ gibt mit $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $f|_{U \cap G} = \tilde{f}|_{U \cap G}$.

Beispiel
$f(z) = \frac{1}{z}$ auf $G = \mathbb{C}^*$. $w \in 0 \in \partial\mathbb{C}^*$. Angenommen w wäre kein singulärer Punkt von f. Dann $\exists \varepsilon > 0$ und $\exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(B(0,\varepsilon))$ mit $\tilde{f}|_{B(0,\varepsilon)\setminus\{0\}} = \frac{1}{z}$. Aber $\frac{1}{z}$ hat keine holomorphe Fortsetzung in 0! Also ist 0 singulärer Punkt. //

Satz 7.2.2 Existenz singulärer Punkte
Auf dem Rand des Konvergenzkreises einer holomorphen Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$ liegt immer mindestens ein singulärer Punkt von f.

Beweis: Gegenannahme: Es gibt keinen singulären Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises von f. Sei $\zeta > 0$ der Konvergenzradius von f. $\forall w \in \partial B(c,\zeta) \exists$offene Umgebung U_w von w in $\mathbb{C}$ und $\exists \tilde{f}_w \in \mathcal{O}(U_w)$ und $\tilde{f}_w|_{U \cap B(c,\zeta)} = f|_{U \cap B(c,\zeta)}$. $\partial B(c,\zeta)$ ist kompakt, also existiert eine endliche Teilüberdeckung. $w_1,\dots,w_m \in \partial B(c,\zeta)$ mit Umgebungen $U_1,\dots,U_m$. Wir definieren:

$$F : B(c,\zeta) \cup \bigcup_{j=1}^{m} U_j \to \mathbb{C}$$

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & z \in B(c,\zeta) \\ \tilde{f}_j(z) & z \in U_j \end{cases}$$

F ist holomorph.
$\exists$Kreisscheibe $B(c,\zeta')$, $\zeta' > \zeta$, mit

$$B(c,\zeta') \subset B(c,\zeta) \cup \bigcup_{j=1}^{m} U_j$$

F lässt sich um c in eine Potenzreihe entwickeln mit Konvergenzradius mindestens $\zeta' > \zeta$. $B(c,\zeta)$ ist zusammenhängend und $F|_{B(c,\zeta)} = f|_{B(c,\zeta)}$, also sind nach dem Identitätssatz die Potenzreihen gleich. Dies ist ein Widerspruch zum Konvergenzradius ζ. $\square$

Definition 7.2.3
Eine holomorphe Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist, heißt ganze Funktion.

Satz 7.2.4 **Satz von Liouville**
Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis: Cauchy-Integralformel:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial B(z,\rho)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} \mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^2} \gamma'(t) \right| \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma(t))|}{\rho^2} \rho \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} |f(\gamma(t))| \mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} M \mathrm{d}t \\
&= \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \to \infty} 0
\end{aligned}$$

Also $f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, ist f also konstant. □

Satz 7.2.5 **Fundamentalsatz der Algebra**
Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, welches nicht konstant ist, hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: Gegenannahme: Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ohne Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ eine ganze Funktion (Quotientenregel).

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0$$

Nach dem Wachstumslemma für Polynome $p \not\equiv$const. $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0$ so dass $|f(z)| < \varepsilon$ falls $|z| > r$. f ist stetig, also ist f auf $\overline{B(0,r)}$ beschränkt durch M. f ist auf $\mathbb{C}$ beschränkt durch $\max\{M, \varepsilon\}$. Nach dem Satz von Liouville ist dann f konstant und somit auch $p = \frac{1}{f}$ ↯. □

Korollar 7.2.6
Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ lässt sich in Linearfaktoren zerlegen.

7.3 Konvergenzsätze von Weierstraß

Satz 7.3.1 **Weierstraßscher Konvergenzsatz**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei f_k eine Folge von holomorphen Funktionen auf D die in D kompakt gegen ein f konvergiert. Dann ist f auch holomorph in D und $f_k^{(n)} \to f^{(n)}$ kompakt in D $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Analysis 2: f_k sind stetig auf jedem Kompaktum $K \subset D$, $f_k \underset{K}{\rightrightarrows} f$ gleichmäßig. Dann ist f stetig auf K. Jeder Punkt $z \in D$ ist im Innern eines passenden Kompaktums enthalten, also $f \in C(D)$. Dann ist f auf kompakten Teilmengen von D integrierbar. Sei Δ ein Dreieck in D.

$$\oint_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\partial\Delta} \lim_{k\to\infty} f_k(z)\mathrm{d}z = \lim_{k\to\infty} \oint_{\partial\Delta} f_k(z)\mathrm{d}z$$

Vertauschungssatz bei gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta. Der Dreiecksweg ist kompakt und in D enthalten und $\oint_{\partial\Delta} f_k(z)\mathrm{d}z = 0$ nach dem Lemma von Goursat. Satz von Morera: f holomorph auf D.
Es reicht, dies für $n = 1$ zu zeigen. Cauchy-Integralformel:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w$$

$z \in D(a,\varepsilon) \Subset D$. Sei $K \subset D$ ein Kompaktum. Nach Voraussetzung gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : k > k_0 \Rightarrow |f(z) - f_k(z)| < \varepsilon \forall z \in K$$

$$L = K_\delta = \{z \in \mathbb{C} | d(z,K) < \delta\}$$

Wir können so ein $\delta > 0$ finden, dass $L \subset D$ (Stetigkeit der Randabstandsfunktion).
Wir zeigen auf K die gleichmäßige Konvergenz von f'. K kompakt, also lässt es sich mit endlich

vielen Kreisscheiben $D(a_j,\varepsilon)$, $j=1,\dots,q$, überdecken. f nimmt auf L ein Maximum M an, da f stetig.

$$\begin{aligned}|f_k'(z)-f'(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(a_j,\varepsilon)}\frac{f_k(w)-f(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}z\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial B(a_j,\varepsilon)}\frac{|f_k(w)-f(w)|}{(w-z)^2}|\mathrm{d}z| \\ &< \frac{1}{2\pi}\varepsilon\oint_{\partial B(a_j,\delta)}\frac{1}{(w-z)^2}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\varepsilon}{\delta}\forall z\in K\end{aligned}$$

δ fest. Also folgt die Behauptung. □

Satz 7.3.2 Weierstraßscher Differentiationssatz für kompakt konvergente Reihen
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine in D gegen f kompakt konvergente Reihe von in D holomorphen Funktionen. Für jedes $k\in\mathbb{N}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ kompakt in D gegen $f^{(k)}$.

Beweis:

$$F_m := \sum_{n=1}^{m} f_n \in \mathcal{O}(D)$$

konvergiert in D kompakt gegen f. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt $f\in\mathcal{O}(D)$ und $F_m^{(k)} = \sum_{n=1}^{m} f_n^{(k)}$ konvergiert auf D kompakt gegen $f^{(k)}$. □

7.4 Offenheitssatz und Maximumprinzip

Definition 7.4.1
Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt offen, falls das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U in Y offen ist.

Lemma 7.4.2 **Existenz von Nullstellen**
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{O}(D)$. Sei $c \in D$ und B eine Kreisscheibe um c mit $\bar{B} \subset D$. Zudem gelte:

$$\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)|$$

Dann hat f eine Nullstelle in B.

Beweis: Gegenannahme: f hat keine Nullstelle in B. Wegen $\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)| > 0$ hat f keine Nullstelle in $\bar{B}$. f ist stetig, also ist die Nullstellenmenge von f abgeschlossen. Es existiert also eine offene Umgebung U von $\bar{B}$ in D, auf welcher f nullstellenfrei ist.
Auf U definiert $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ eine holomorphe Funktion. Mittelwertungleichunug für holomorphe Funktionen:

$$|f(c)|^{-1} = |g(c)| \leq \max_{z \in \partial B} |f(z)| = \max_{z \in \partial B} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \min_{z \in \partial B} |f(z)|^{-1} \lightning$$

□

Lemma 7.4.3
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, B eine Kreisscheibe um c, mit $\bar{B} \subset D$, sei $f \in \mathscr{O}(D)$. Es gelte:

$$0 < \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(c)| = 2\delta$$

Dann gilt:

$$f(B) \supset B_\delta(f(c))$$

Beweis: Für jedes $b \in \mathbb{C}$ mit $|b - f(z)| < \delta$ gilt:

$$|f(z) - b| \geq |f(z) - f(c)| - |b - f(c)| > \delta, \quad z \in \partial B$$

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - b| > |f(c) - b|$$

Mit obigem Lemma angewandt auf $f(z)-b$ existiert ein $\tilde{z}\in B$ mit $f(\tilde{z})=b$. □

Satz 7.4.4 **Offenheitssatz**
Sei $D\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph auf D und nicht konstant. Dann ist die Abbildung $f:D\to\mathbb{C}$ offen.

Beweis: Sei $c\in D$. Ziel ist: $\exists$Kreisscheibe um $f(c)$ in $f(D)$. f ist nicht konstant, also existiert B um c mit $\bar{B}\subset D$ und $f(c)\notin f(\partial B)$. (Angenommen, für alle $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ würde gelten: $f(c)\in f(\partial B_\varepsilon(c))$. Dann gäbe es eine Folge von Punkten $z_\varepsilon\in\partial B_\varepsilon(c)$ mit $f(z_\varepsilon)=f(c)$. Das bedeutet: c ist Häufungspunkt von z_ε $(\varepsilon\to 0)$ und $f(c)=f(z_\varepsilon)$.. Nach dem Identitätssatz wäre dann f const.$\equiv f(c)$↯)

$$2\delta:=\min_{z\in\partial B}|f(z)-f(c)|>0$$

da $f(c)\notin f(\partial B)$ und ∂B kompakt. Nach Lemma oben gilt dann:

$$f(B)\supset B_\delta(f(c))$$

Für jeden Punkt $p\in f(D)\exists c\in D$ mit $f(c)=p$ und $\exists$Kreisscheibe B um c mit $f(B)\supset B_\delta(f(c))$, also enthält $f(D)$ um jeden Punkt eine offene Kreisscheibe. □

Satz 7.4.5 **Satz von der Gebietstreue**
Sei $G\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet und sei f holomorph auf G und nicht konstant. Dann ist $f(G)\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet.

Beweis: f stetig. G zusammenhängend$\Rightarrow f(G)$ zusammenhängend. f holomorph und nicht konstant$\Rightarrow f(G)$ offen nach Offenheitssatz. □

Satz 7.4.6 **Maximumprinzip**
Eine holomorphe Funktion, die in einem Gebiet G ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt, ist konstant.

Beweis: Annahme: $\exists c \in G$, $\exists$Umgebung U von c in G mit $|f(z) \leq |f(c)|$ für alle $z \in U$. Dann ist $f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(c)|\}$. Die Menge $f(U)$ ist dann keine Umgebung von $f(c)$ in $\mathbb{C}$. Dies ist ein Widerspruch zum Offenheitssatz. □

Satz 7.4.7 **Maximumprinzip für beschränkte Gebiete**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und sei f holomorph auf G und stetig auf $\bar{G}$. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf ∂G an.

Beweis: f stetig, $\bar{G}$ kompakt$\Rightarrow |f|$ nimmt Maximum auf $\bar{G}$ an. O.B.d.A. f nicht konstant. Mit dem Maximumprinzip folgt die Behauptung. □

Satz 7.4.8 **Minimumprinzip**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, f sei holomorph auf G und stetig auf $\bar{G}$. Dann hat f Nullstellen in G oder $|f|$ nimmt das Minimum auf ∂G an.

Beweis: O.B.d.A. f hat keine Nullstellen in G. $\frac{1}{f} =: g \in \mathcal{O}(G)$. Nach dem Maximumprinzip nimmt $|g|$ in G kein lokales Maximum an (oder g konstant). Das bedeutet, dass $|f|$ kein lokales Minimum in G annimmt. □

Satz 7.4.9 **Schwarzsches Lemma**
Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Für jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ gilt:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$$

$$|f'(0)| \leq 1$$

Falls es einen Punkt $c \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(c)| = |c|$ oder falls $|f'(0)| = 1$, dann ist f eine Drehung um 0, $f(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Beweis: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert kompakt in $\mathbb{D}$ und $a_0 = 0$.

$$f(z) = z \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}}_{=:g(z)}$$

und $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{D}$.
Sei $1 > r > 0$.

$$r \max_{|z|=r} |g(z)| \leq 1$$

da $|f(z)| < 1 \forall z \in \mathbb{D}$. Maximumprinzip anwenden auf g auf der Kreisscheibe $r\mathbb{D}$:

$$\max_{\overline{r\mathbb{D}}} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Mit $r \to 1$ folgt:

$$|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$$

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} g(z) = g(0)$$

und $|g(0)| \leq 1$, also $|f'(0)| \leq 1$.
Falls $|f'(0)| = 1$, dann ist $|g(0)| = 1$. Also nimmt g das Maximum in $\mathbb{D}$ an. Nach dem Maximumprinzip ist dann $g \equiv a \in \mathbb{C}$ const. Also:

$$a = \frac{f(z)}{z} \Rightarrow az = f(z), \quad |a| = 1$$

Falls $\exists c \in \mathbb{D}$, $c \neq 0$ mit $|f(c)| = |c|$, dann bedeutet dies

$$|cg(c)| = c \Rightarrow |g(c)| = 1$$

Maximumprinzip anwenden: $g \equiv a \in \mathbb{C}$ konstant mit $|a| = 1$. Analog wie oben. $\square$

7.5 Allgemeine Version von Cauchys Satz

Definition 7.5.1
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir sagen, dass G einfach zusammenhängend ist, wenn es für jede Abbildung $\varphi\colon [0,1] \to G$ mit $\varphi(0) = \varphi(1)$, φ stetig, eine stetige Abbildung $\Phi\colon [0,1] \times [0,1] \to G$ gibt, so dass

i) $\Phi(t,0) = \varphi(t) \forall t \in [0,1]$

ii) $\Phi(0,s) = \Phi(1,s) \forall s \in [0,1]$

iii) $\Phi(t,1) \equiv$const.

Beispiel

i) $G = \Delta_1(0)$. $\exists \Phi\colon [0,1] \times [0,1] \to G\colon \Phi(t,s) = (1-s)\varphi(t)$.

ii) $G = A := \Delta_1(0) \setminus \bar{\Delta}_{1/2}(0)$. $\varphi = \frac{3}{4}e^{2\pi i t}$. $\nexists \Phi$.

//

Definition 7.5.2
$G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, G einfach zusammenhängend genau dann, wenn ∂G eine zusammenhängende Menge ist.

Satz 7.5.3 **Weierstraß**
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f \in C(K)$. Dann existieren Polynome $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$P_n(x) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

so dass

$$\|f(x) - P_n(x)\|_K \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Bemerkung
Satz von Weierstraß⇒wir können φ, Φ in der Definition C^∞ nehmen.

Satz 7.5.4
Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(G)$, $\gamma\colon [0,1] \to G$, $\gamma \in C^[0,1]$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Beweis: G einfach zusammenhängend, also $\exists \Phi\colon [0,1] \times [0,1] =: Q \to G$ so dass obige Definitionen wahr sind. $\forall p \in \Phi(Q) \exists B_{r_p}(p) \subset G$. $\{B_{r_p}(Q)\}_{p \in \Phi(Q)}$ ist eine offene Überdeckung von $\Phi(Q)$. Da Φ stetig ist, ist $\Phi(Q)$ ein Kompaktum. Also existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ von $\Phi(Q)$. Wir teilen Q und bekommen $Q_{i,j} := \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, n genügend groß, $1 \le i, j \le n-1$. Wenn n genügend groß ist, dann $\forall i, j \exists 1 \le q \le n$ so dass $\Phi(Q_{i,j}) \subset B_q$. B_q ist ein Sterngebiet und es gilt:

$$\int_{\Phi(\partial Q_{i,j})} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Phi(\partial Q_{i,j})} = 0$$

Und somit:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\Phi(1,s)} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\Phi(0,s)} f(z)\mathrm{d}z}_{=0} - \underbrace{\int_{\Phi(t,1)} f(z)\mathrm{d}z}_{=0} = 0$$

□

Satz 7.5.5 **Allgemeine Version von Cauchys Satz**
Sei $G \Subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, ∂G sei stückweise C^1−glatt. $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \forall z \in G$$

Beweis: Seien $C_1, C_2, \ldots, C_m$ Zusammenhangskomponenten von ∂G, so dass $C_1 = \partial\Omega_1$, $C_2 = \partial\Omega_2, \ldots$, wobei $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ beschränkte Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ sind und $C_0 = \partial\Omega_0$ eine unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ ist. Sei $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m, \gamma_{m+1} \subset G$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, γ_i hat Anfangsunkt auf C_{i-1}, Endpunkt auf C_i für $i = 1,2,\dots,m$, γ_{m+1} hat Anfangspunkt in C_m und Endpunkt in $\partial B_\varepsilon(z)$. Sei

$$G^* := G \setminus \overline{B_\varepsilon(z)} \cup \bigcup_{i=1}^{m+1} \gamma_i$$

einfach zusammenhängend. Aus $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \in \mathscr{O}(\bar{G}^*)$ folgt dann:

$$\int_{\partial G^*} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}z = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}z - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}z = 0$$

□

Satz 7.5.6 **Cauchysche Ungleichungen**
Sei $G \Subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. ∂G sei stückweise C^1−glatt, $f \in \mathscr{O}(\bar{G})$. Dann gilt:

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{|f|_{\partial G}}{(d(z, \partial G))^{k+1}} \cdot \ell_1(\partial G) \forall z \in G \forall k \in \mathbb{N}$$

wobei $d(z, \partial G) := \int_{w \in \partial G} |z - w|$ und $\ell_1(\partial G)$ die Länge von ∂G ist.

Beweis:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \Rightarrow f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$

Es folgt:

$$|f^{(k)}(z) \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{|f|_{\partial G}}{d(z, \partial G)^{k+1}} \ell_1(\partial G)$$

□

8
Isolierte Singularitäten

Definition 8.0.1
Ist f holomorph in einem Bereich D mit Ausnahme eines Punktes $c \in D$, so heißt der Punkt c eine isolierte Singularität voin f.

8.1 Hebbare Singularitäten, Pole

Definition 8.1.1
Eine isolierte Singularität c einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$ heißt hebbar, wenn f holomorph nach c fortsetzbar ist.

Beispiel
$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ für $z \neq 0$.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right) =: g(z)$$

$g(z) = \frac{\sin z}{z}$, d.h. $g(z)$ ist eine holomorphe Fortsetzung von $\frac{\sin z}{z}$ auf ganz $\mathbb{C}$. Also ist 0 eine hebbare Singularität von $\frac{\sin z}{z}$. //

Satz 8.1.2 **Hebbarkeitssatz**
Der Punkt c ist genau dann eine hebbare Singularität von $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{0\})$, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von c gibt, so dass f in $U \setminus \{c\}$ beschränkt ist.

Beweis: Folgt direkt aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz, □

Definition 8.1.3
Sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$. Ist $(z-c)^n f(z)$ beschränkt für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ in einer Umgebung von c und für $n \neq 0$ nicht beschränkt, so heißt c ein Pol von f. Dann heißt die Zahl

$$m := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (z-c)^k f(z) \text{ beschräkt um } c\} \geq 1$$

die Ordnung des Pols c von f.

Beispiel
$D = \Delta \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \Rightarrow 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots = z^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots\right)}_{=:g(z)\in\mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

Also $f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{g(z)}$. Die Ordnung des Pols 0 von $f(z)$ ist also $= 2$. //

Satz 8.1.4
Folgende Aussagen über $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, sind äquivalent:

i) f hat in c einen Pol der Ordnung m.

ii) Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $g(z) \neq 0$ so dass gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m} \forall z \in D \setminus c$$

iii) Es gibt eine Umgebung $U \subset D$ von c und ein $h \in \mathcal{O}(U)$, $h(z) \neq 0 \forall z \in U$, $h(z)$ hat eine Nullstelle der Ordnung m in c, so dass $f = \frac{1}{h}$ in $U \setminus c$.

iv) $\exists U \subset D$ Umgebung von c, $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$, so dass $\forall z \in U \setminus c$ gilt:

$$M|z-c|^{-m} \leq |f(z)| \leq \tilde{M}|z-c|^{-m}$$

Beweis:

i)⇒ii): $(z-c)^m f(z)$ ist in $U \setminus c$ beschränkt für eine Umgebung U von c. Dann $\exists g \in \mathcal{O}(U)$ so dass $(z-c)^m f(z) = g(z) \forall z \in U \setminus c$. Wir haben $g(c) \neq 0$, weil m die Ordnung von f ist. Also gilt $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$.

ii)⇒iii): $g(c) \neq 0 : \exists U \subset D$ Umgebung von c, so dass $g(z) \neq 0 \forall z \in U$. Dann ist $\tilde{h}(z) := \frac{1}{g(z)} \in \mathcal{O}(U)$ und $h(z) := (z-c)^m \tilde{h}(z) \in \mathcal{O}(U)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$ und

$$f = \frac{g(z)}{(z-c)^m} = \frac{1}{(z-c)^m \frac{1}{g(z)}} = \frac{1}{h(z)}$$

h hat eine Nullstelle der Ordnung in c.

iii)⇒iv): $f = \frac{1}{h}$, wobei $h(z) = (z-c)^m \tilde{h}(z)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$. Da $\tilde{h} \in \mathcal{O}(U)$, folgt $\tilde{h} \in C(U)$ und $\exists U' \subset U$ eine Umgebung von c, $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$ so dass

$$M \leq |\tilde{h}(z)| \leq \tilde{M} \forall z \in U'$$

Dann ist

$$\frac{1}{\tilde{M}} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} \right| \leq \frac{1}{M}$$

Und somit:

$$\frac{1}{\tilde{M}} |z-c|^{-m} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} |z-c|^{-m} \right| = |f(z)| \leq \frac{1}{M} |z-c|^{-m}$$

iv)⇒i): Aus iv) folgt $|f(z)(z-c)^m| \leq \tilde{M} \forall z \in U \setminus c$. $z = c$ ist ein Pol von f. Sei $k < m$.

$$|f(z)(z-c)^m| \geq M|z-c|^{-m}|z-c|^k = M|z-c|^{k-m} \to \infty$$

D.h. m ist die Ordnung von f in c.

□

Korollar 8.1.5
Die Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ hat genau dann einen Pol in c, wenn gilt:

$$\lim_{z \to c} f(z) = \infty$$

Beweis: Trivial. 'Hinrichtung' folgt aus iv), 'Rückrichtung' folgt aus iii) mit $h = \frac{1}{f}$. □

8.2 Entwicklung von Funktionen um Polstellen

Satz 8.2.1
Es sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und es sei c ein Pol $m-$ter Ordnung von f. Dann gibt es $b_1, ..., b_m \in \mathbb{C}$ mit $b_m \neq 0$ und $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ so dass:

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-c)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-c)^{m-1}} + ... + \frac{b_1}{z-c} + \tilde{f}(z), z \in D \setminus c \qquad (*)$$

Die Zahlen $b_1, ..., b_m$ und die Funktion $\tilde{f}$ sind eindeutig durch f bestimmt.
Umgekehrt, hat jede Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$, für die $(*)$ gilt, in c einen Pol der Ordnung m.

Beweis: f hat einen Pol in c $m-$ter Ordnung, also $f(z) = \frac{1}{(z-c)^m} g(z)$ mit $g(z) \in \mathcal{O}(D)$, $g(c) \neq 0$.
Es gilt:

$$g(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + ...$$

Also:

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-c)^m} + \frac{a_1}{(z-c)^{m-1}} + ... + \frac{a_{m-1}}{z-c} + \underbrace{a_m + a_{m+1}(z-c) + ...}_{=:\tilde{f}(z)}$$

Die umgekehrte Richtung ist trivial. $\square$

8.3 Wesentliche Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstrass

Definition 8.3.1
Eine isolierte Singularität c von $f \in \mathscr{O}(D \setminus c)$ heißt wesentlich, wenn c keine hebbare Singularität und kein Pol von f ist.

Satz 8.3.2 **Casorati-Weierstrass**
Folgende Aussagen über eine in $D \setminus c$ holomorphe Funktion f sind äquivalent:

i) Der Punkt c ist eine wesentliche Singularität von f.

ii) Für jede Umgebung $U \subset D$ von c liegt das Bild $f(U \setminus c)$ dicht in $\mathbb{C}$.

iii) Es gibt eine Folge z_n in $D \setminus c$ mit $\lim z_n = c$, so dass die Bildfolge $f(z_n)$ keinen Limes in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hat.

Beweis:

i)⇒ii): Indirekt. Wir nehmen an, es gäbe eine Umgebung $U \subset D$ von c, so dass $f(U \setminus c)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Dann gibt es eine Kreisscheibe $B_r(a)$, $r > 0$, mit $f(U \setminus c) \cap B_r(a) = \emptyset$, d.h. $|f(z) - a| \geq r \forall z \in U \setminus c$. Die Funktion $g(z) := (f(z) - a)^{-1}$ für $z \in U \setminus c$ ist holomorph in $U \setminus c$ und hat, da sie durch r^{-1} beschränkt ist, eine hebbare Singularität in c. Dann hat $f(z) = a + g(z)^{-1}$ im Fall $\lim_{z \to c} g(z) \neq 0$ eine hebbare Singularität und im Fall $\lim_{z \to c} g(z) = 0$ einen Pol in c, also keine wesentliche Singularität. ↯

ii)⇒iii)⇒i): Klar nach Definition.

□

9
Laurentreihen und Fourierreihen

$$A = A_{r,s}(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le r < |z-c| < s \le \infty\}$$

ist ein Kreisring um c mit innerem Radius r und äusserem Radius s. $A = A^+ \cap A^-$ mit $A^+ := B_s(c)$, $A^- := \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(c)$.

Satz 9.0.1
Es sei $f \in \mathscr{O}(A_{r,s}(c))$. Dann gilt:

$$\int_{S_\rho} f \, \mathrm{d}\zeta = \int_{S_\sigma} f \, \mathrm{d}\zeta \forall \rho, \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } r < \rho \le \sigma < s, S_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$$

Beweis: Sei $\gamma := S_\sigma - I - S_\rho + I$. Dann ist $\gamma \sim 0$, d.h. $B_\sigma(c) \setminus (\overline{B_\rho(c)} \cup I)$ ist einfach zusammenhängend. Also:

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

und

$$\int_{S_\rho} f \, \mathrm{d}\zeta - \int_I f \, \mathrm{d}\zeta - \int_{S_\rho} f \, \mathrm{d}\zeta + \int_I f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

□

Satz 9.0.2 **Cauchscher Integralsatz für Kreisringe**
$f \in \mathscr{O}(D)$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um $c \in D$ so dass $\bar{A} \subset D$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \forall z \in A$$

Beweis: Folgt direkt aus der allgemeinen Version des Cauchyschen Satzes. □

9.1 Laurentdarstellung in Kreisringen

Definition 9.1.1
Ist h eine komplexe Funktion in einem unbeschränkten Bereich W, so schreiben wir $\lim_{z\to\infty} h(z) = b$, wenn es zu jeder Umgebung V von $b \in \mathbb{C}$ ein $R > 0$ gibt, so dass $h(z) \in V \forall z \in W$ mit $|z| \leq R$

Satz 9.1.2
Es sei $f \in \mathcal{O}(\bar{A})$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um c mit Radien r,s. Dann existieren $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ und $f^- \in \mathcal{O}(A^-)$ so dass gilt: $f = f^+ + f^-$ in A und $\lim_{z\to\infty} f^-(z) = 0$. Die Funktionen f^+ und f^- sind hierdurch eindeutig bestimmt. Für jedes $\rho \in [r,s]$ gilt:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, z \in B_\rho(c)$$

$$f^-(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(c)}$$

Beweis:

Existenz: Die Funktion

$$f_\rho^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, z \in B\rho(c)$$

ist holomorph in $B_\rho(c)$. Für $\sigma \in (\rho, s)$ gilt: $f_\rho^+ = f_\sigma^+|_{B_\rho(c)}$ nach dem Integralsatz. Es gibt also eine Funktion $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ die in $B_\rho(c)$ mit f^+ übereinstimmt. Ebenso ist

$$f^-(z) := f_\sigma^-(z) := \frac{-1}{2\pi i}\int_{S_\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, z \in A^-, r < \sigma < \min\{s, |z - c|\}$$

holomorph in A^-. Die Integralformel, angewendet auf alle Kreisringe A' um c mit $\bar{A}' \subset A$, liefert in A die Darstellung $f = f^+ + f^-$. Die Standardabschätzung für Integrale gilt für $z \in A^-$:

$$|f^-(z)| \leq \sigma \max_{\zeta \in S_\sigma} |f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}| \leq \frac{\sigma}{|z - c| - \sigma}|f|_{S_\sigma}$$

also $\lim_{z\to\infty} f^-(z) = 0$.

Eindeutigkeit: Es seien $g^+ \in \mathcal{O}(A^+)$, $g^- \in \mathcal{O}(A^-)$ weitere Funktionen mit $f = g^+ + g^-$ in A und $\lim_{z\to\infty} g^-(z) = 0$. Dann gilt:

$$f^+ - g^+ = g^- - f^-$$

auf A. Daher wird durch $h := f^+ - g^+$ auf A^+ und $h := g^- - f^-$ auf A^- eine ganze Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ definiert. h ist beschränkt auf $\mathbb{C}$ und mit Liouville ist $h(z) \equiv$const. Wegen dem Limes ist $h(z) \equiv 0$, also $g^+ \equiv f^+$ und $g^- \equiv f^-$.

$\square$