

Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

# Einführung in die Funktionentheorie

*Beweis ist relativ einfach. Haben kein Platz, also machen wir Platz.*

Prof. Dr. N. V. Shcherbina

Bergische Universität Wuppertal  
2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	5
<b>1 Der Körper <math>\mathbb{C}</math> der komplexen Zahlen</b>	7
<b>2 Topologische Grundbegriffe</b>	9
<b>3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen</b>	13
<b>4 Konvergente und absolut konvergente Reihen</b>	17



# Vorwort

Hier kommt noch das Vorwort hin, wenn mir was einfällt. Solang müsst ihr hier mit 'ner zu 90% leeren Seite auskommen.



# 1

## Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

### $\mathbb{R}$ - der Körper der reellen Zahlen

Im 2-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  der geordneten reellen Zahlenpaare  $z := (x, y)$  wird eine Multiplikation eingeführt vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Dadurch wird  $\mathbb{R}^2$ , zusammen mit der Vektorraumaddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

zu einem (kommutativen) Körper mit dem Element  $(1, 0)$  als Einselement; das Inverse von  $z = (x, y) \neq 0$  ist

$$z^{-1} := \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Dieser Körper heißt **der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen**.

Man definiert weiter  $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ . Offensichtlich gilt  $i^2 = -1$ , man nennt  $i$  die **imaginäre Einheit** von  $\mathbb{C}$ . Für jede Zahl  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  besteht die eindeutige Darstellung  $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$ , d.h.  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ , (wir identifizieren die reellen Zahlen  $x$  mit der komplexen Zahl  $(x, 0)$ ). Man setzt

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y$$

wobei  $z = x + iy$  und nennt  $x$  bzw.  $y$  **Realteil** bzw. **Imaginärteil von  $z$** . Die Zahl  $z$  heißt **reell** bzw. **rein imaginär**, wenn  $\operatorname{Im} z = 0$  bzw.  $\operatorname{Re} z = 0$ , letzteres bedeutet  $z = y$ .

### Skalarprodukt und absoluter Betrag

Für  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv \in \mathbb{C}$  ist

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(w, \bar{z}) = xu + yv$$

(für  $z = x + iy$  ist  $\bar{z} := x - iy$ ) das euklidische Skalarprodukt im reellen Vektorraum  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ .  
Die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist die euklidische Länge von  $z$ , sie heißt der **Absolutbetrag** von  $z$ . Es gilt:

- i)  $|\bar{z}| = |z|$
- ii)  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- iii)  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  für  $z \neq 0$
- iv)  $\langle aw, az \rangle = |a|^2 \langle w, z \rangle, \langle \bar{w}, \bar{z} \rangle = \langle w, z \rangle \forall w, z, a \in \mathbb{C}$
- v)  $|\langle w, z \rangle| \leq |w||z| \forall w, z \in \mathbb{C}$  (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
- vi)  $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w, z \rangle \forall w, z \in \mathbb{C}$  (Cosinussatz)

Zwei Vektoren  $z, w$  heißen **orthogonal**, wenn  $\langle z, w \rangle = 0$ .

Fundamental für das Rechnen mit dem Absolutbetrag sind folgende Regeln:

- i)  $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- ii)  $|zw| = |z||w|$  (Produktregel)
- iii)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (Dreiecksungleichung)

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$-1 \leq \frac{\langle w, z \rangle}{|w||z|} \leq 1 \forall w, z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Es folgt:

$$\exists! \varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi \leq \pi : \cos \varphi = \frac{\langle w, z \rangle}{|z||w|}$$

Man nennt  $\varphi$  den Winkel zwischen  $w, z \in \mathbb{C}$ , in Zeichen  $\angle(w, z) = \varphi$ .



# 2

## Topologische Grundbegriffe

### Definition 2.1

Ist  $X$  irgendeine Menge, so heißt eine Funktion  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto d(x, y)$ , eine **Metrik** auf  $X$ , wenn  $\forall x, y, z \in X$  gilt:

- i)  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$(X, d)$  heißt **metrischer Raum**.

Im Fall  $X = \mathbb{C}$  nennt man  $d(w, z) := |w - z| = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2}$  (die **euklidische Entfernung** der Punkte  $w, z$  in der Zahlenebene) die **euklidische Metrik** von  $\mathbb{C}$ .

In einem metrischen Raum  $X$  mit Metrik  $d$  heißt die Menge

$$B_r(c) := \{x \in X \mid d(x, c) < r\}$$

die **offene Kugel vom Radius  $r > 0$  mit Mittelpunkt  $c \in X$** .

Im Fall der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{C}$  heißen die Kugeln

$$B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$$

$r > 0$ , **offene Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$** . Wir schreiben durchweg

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

### Definition 2.2

Eine Teilmenge  $U \subset X$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt **offen** (in  $X$ )  $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0$  so dass  $B_r(x) \subset U$  ( $\emptyset$  ist offene Menge per definitionem).

- i)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  offen
- ii)  $U_1, U_2, \dots, U_m$  offen  $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i$  offen

### Definition 2.3

Eine Menge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen** (in  $X$ )  $\Leftrightarrow X \setminus A$  offen.

- i)  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  abgeschlossene Mengen  $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$  abgeschlossen
- ii)  $A_1, A_2, \dots, A_m$  abgeschlossen  $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i$  abgeschlossen

### Definition 2.4

$A \subset X$  beliebig. Die **abgeschlossene Hülle**  $\bar{A}$  von  $A$  ist  $\bar{A} := \bigcap B$ , so dass  $B \supset A$ ,  $B$  abgeschlossen.

Eine Menge  $W \subset X$  heißt **Umgebung der Menge**  $M \subset X$ , wenn  $\exists V$  offen mit  $M \subset V \subset W$ .  
Sei  $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Eine Abbildung  $\{k, k+1, k+2, \dots\} \rightarrow X$ ,  $n \mapsto c_n$ , heißt **Folge** in  $X$ . Man schreibt kurz  $(c_n)$ , im Allgemeinen ist  $k = 0$ .

### Definition 2.5

Eine Folge  $(c_n)$  heißt **konvergent** in  $X$ , wenn es einen Punkt  $c \in X$  gibt, so dass in jeder Umgebung von  $c$  fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder  $c_n$  liegen. Der Punkt  $c$  heißt ein **Limes der Folge**. In Zeichen:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

Eine Menge  $M \subset X$  ist genau dann abgeschlossen in  $X$ , wenn der Limes jeder konvergenten Folge  $(c_n)$ ,  $c_n \in M$ , stets zu  $M$  gehört.

### Definition 2.6

Ein Punkt  $p \in X$  heißt **Häufungspunkt** einer Menge  $M \subset X$   $\Leftrightarrow \forall$  Umgebung  $U$  von  $p$  gilt:

$$U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

In jeder Umgebung eines Häufungspunktes  $p$  von  $M$  liegen unendlich viele Punkte von  $M$ ; es gibt stets eine Folge  $(c_n)$  in  $M \setminus \{p\}$  mit  $\lim c_n = p$ .

**Beispiel**

- i)  $X = \mathbb{R}, M = \mathbb{Q}$ . Die Menge  $U$  aller Häufungspunkte?  $U = \mathbb{R}$ .
  - ii)  $X = \mathbb{R}, M = \mathbb{Z}$ .  $U = \emptyset$ .
  - iii)  $X = \mathbb{R}, M = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, U = \{0\}$ .
- //

**Definition 2.7**

Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt **dicht**, in  $X : \Leftrightarrow \forall \text{offene } U \subset X : U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$ .

**Beispiel**

$X = C[a, b], d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|, f, g \in X, A = \mathcal{P} = \text{alle Polynome auf } [a, b]. //$

**Satz 2.8 Äquivalenzsatz**

Folgende Aussagen über einen metrischen Raum  $X$  sind äquivalent:

- i) Jede offene Überdeckung  $U = \{U_j\}_{j \in J}$  von  $X$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (Heine-Borel-Eigenschaft)
- ii) Jede Folge  $(x_n)$  in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge. (Weierstraß-Bolzano-Eigenschaft)

**Definition 2.9**

Man nennt  $X$  **kompakt**, wenn die Bedingungen i) und ii) aus Satz 2.8 erfüllt sind. Eine Teilmenge  $K$  von  $X$  heißt **kompakt**, oder auch ein **Kompaktum** (in  $X$ ), wenn  $K$  mit der induzierten Metrik ein kompakter Raum ist.

- (\*) Jedes Kompaktum in  $X$  ist abgeschlossen in  $X$ . In einem kompakten Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.
- (\*\*) Jede offene Menge  $D$  in  $\mathbb{C}$  ist die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen von  $D$ .



# 3

## Konvergente Folgen komplexer Zahlen

### Rechenregeln

Konvergiert die Folge  $c_n$  gegen  $c \in \mathbb{C}$ , so liegen in jeder Kreisscheibe  $B_\varepsilon(c)$ ,  $\varepsilon > 0$ , um  $c$  fast alle Folgenglieder  $c_n$ .

Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  ist die **Potenzfolge**  $z^n$  konvergent:  $\lim z^n = 0$ ; für alle  $|z| > 1$  ist die Folge  $z^n$  divergent.

#### Definition 3.1

Eine Folge  $c_n$  heißt **beschränkt**:  $\Leftrightarrow \exists M > 0$ , so dass  $|c_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

Wie im Reellen folgt: Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt. Sind  $c_n, d_n$  konvergente Folgen, so gelten die Limesregeln:

- i)  $\forall a, b \in \mathbb{C}$  ist  $ac_n + bd_n$  konvergent:

$$\lim(ac_n + bd_n) = a \lim c_n + b \lim d_n$$

( $\mathbb{C}$ -Linearität)

- ii) Die Produktfolge  $c_n d_n$  ist konvergent:

$$\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$$

- iii) Ist  $\lim d_n \neq 0$ , so gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $d_n \neq 0 \forall n \geq k$ ; die Quotientenfolge  $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n \geq k}$  konvergiert gegen  $\frac{\lim c_n}{\lim d_n}$ .

- iv) Die Betragsfolge  $|c_n|$  reeller Zahlen ist konvergent:

$$\lim |c_n| = |\lim c_n|$$

- v) Die Folge  $\bar{c}_n$  konvergiert gegen  $\bar{c}$ .

#### Satz 3.2

Folgende Aussagen über eine Folge  $c_n$  sind äquivalent:

- i)  $c_n$  ist konvergent.
- ii) Die beiden reellen Folgen  $\operatorname{Re} c_n$ ,  $\operatorname{Im} c_n$  sind konvergent. Im Fall der Konvergenz gilt:

$$\lim c_n = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

#### Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$  Limesregeln i) und v) und  $\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2}(c_n + \bar{c}_n)$ ,  $\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2i}(c_n - \bar{c}_n)$ .

$ii) \Rightarrow i)$

$$\lim c_n = \lim(\operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n) = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

□

#### Definition 3.3

Eine Folge  $c_n$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$ , so dass  $|c_n - c_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k$ .

#### Satz 3.4 Konvergenzkriterium von Cauchy

Folgende Aussagen über eine Folge  $(c_n)$  sind äquivalent:

- i)  $(c_n)$  ist konvergent.
- ii)  $(c_n)$  ist eine Cauchyfolge.

#### Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$  Da  $(c_n)$  konvergent ist,  $\exists c$ , so dass  $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists k \in \mathbb{N} : |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq k$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$|c_n - c_m| \leq |c_n - c| + |c - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m \geq k$$

$ii) \Rightarrow i)$   $(c_n)$  ist eine Cauchyfolge. Es gilt:

$$|\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c_m| \leq |c_n - c_m|, \quad |\operatorname{Im} c_n - \operatorname{Im} c_m| \leq |c_n - c_m|$$

Also sind  $(\operatorname{Re} c_n)$  und  $(\operatorname{Im} c_n)$  reelle Cauchy-Folgen, also nach Analysis 1 konvergent. Somit ist auch  $c_n = \operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n$  konvergent.

□

**Satz 3.5**

Für  $K \subset \mathbb{C}$  ist  $K$  kompakt  $\Leftrightarrow K$  beschränkt und abgeschlossen.

**Satz 3.6 Bolzano-Weierstraß**

Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.





# 4

## Konvergente und absolut konvergente Reihen

### Definition 4.1

Ist  $(a_\nu)_{\nu \geq k}$  eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge  $(s_n)_{n \geq k}$ ,  $s_n := \sum_{\nu=k}^n a_\nu$ , der Partialsummen eine (unendliche) Reihe mit den Gliedern  $a_\nu$ . Man schreibt  $\sum_{\nu=k}^\infty a_\nu$ ,  $\sum_k^\infty a_\nu$ ,  $\sum_{\nu \geq k}$  oder einfach  $\sum a_\nu$ .

Eine Reihe  $\sum a_\nu$  heißt **konvergent**, wenn die Partialsummenfolge  $(s_n)$  konvergiert, andernfalls heißt sie **divergent**. Im Konvergenzfall schreibt man suggestiv:

$$\sum a_\nu := \lim s_n$$