

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	7
2 Topologische Grundbegriffe	9
3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen	13
4 Konvergente und absolut konvergente Reihen	17
5 Stetige Funktionen	21
6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in \mathbb{C}	25
7 Komplexe Differentialrechnung	31
8 Holomorphe Funktionen	35
9 Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie	39
10 Potenzreihen	41
10.1 Konvergenzkriterien	41
10.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen	44
10.3 Holomorphie von Potenzreihen	45
11 Elementar-transzendente Funktionen	49
11.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	49
11.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln	51
11.3 Logarithmusfunktion	53
12 Komplexe Integralrechnung	55
12.1 Wegintegrale in \mathbb{C}	55
12.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale	55
12.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen	55
13 Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung	59
13.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	59
13.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	62
13.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen	64

14 Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen	69
14.1 Identitätssatz	69
14.2 Existenz singulärer Punkte	71
14.3 Konvergenzsätze von Weierstraß	73
14.4 Offenheitssatz und Maximumprinzip	75
14.5 Allgemeine Version von Cauchys Satz	79
15 Isolierte Singularitäten	83
15.1 Hebbare Singularitäten, Pole	83
15.2 Entwicklung von Funktionen um Polstellen	86

15

Isolierte Singularitäten

Definition 15.0.1

Ist f holomorph in einem Bereich D mit Ausnahme eines Punktes $c \in D$, so heißt der Punkt c eine **isolierte Singularität** von f .

15.1 Hebbare Singularitäten, Pole

Definition 15.1.1

Eine isolierte Singularität c einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$ heißt **hebbbar**, wenn f holomorph nach c fortsetzbar ist.

Beispiel

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ für $z \neq 0$.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) =: g(z)$$

$g(z) = \frac{\sin z}{z}$, d.h. $g(z)$ ist eine holomorphe Fortsetzung von $\frac{\sin z}{z}$ auf ganz \mathbb{C} . Also ist 0 eine hebbare Singularität von $\frac{\sin z}{z}$. //

Satz 15.1.2 Hebbbarkeitssatz

Der Punkt c ist genau dann eine hebbare Singularität von $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{0\})$, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von c gibt, so dass f in $U \setminus \{c\}$ beschränkt ist.

Beweis: Folgt direkt aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz, □

Definition 15.1.3

Sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$. Ist $(z - c)^n f(z)$ beschränkt für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ in einer Umgebung von c und für $n \neq 0$ nicht beschränkt, so heißt c ein **Pol von f** . Dann heißt die Zahl

$$m := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (z - c)^k f(z) \text{ beschränkt um } c\} \geq 1$$

die **Ordnung des Pols c von f** .

Beispiel

$$D = \Delta \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \Rightarrow 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots = z^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)}_{=: g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

Also $f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{g(z)}$. Die Ordnung des Pols 0 von $f(z)$ ist also = 2. //

Satz 15.1.4

Folgende Aussagen über $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, sind äquivalent:

- i) f hat in c einen Pol der Ordnung m .
- ii) Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $g(z) \neq 0$ so dass gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^m} \quad \forall z \in D \setminus c$$

- iii) Es gibt eine Umgebung $U \subset D$ von c und ein $h \in \mathcal{O}(U)$, $h(z) \neq 0 \forall z \in U$, $h(z)$ hat eine Nullstelle der Ordnung m in c , so dass $f = \frac{1}{h}$ in $U \setminus c$.

- iv) $\exists U \subset D$ Umgebung von c , $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$, so dass $\forall z \in U \setminus c$ gilt:

$$M|z - c|^{-m} \leq |f(z)| \leq \tilde{M}|z - c|^{-m}$$

Beweis:

i) \Rightarrow ii): $(z - c)^m f(z)$ ist in $U \setminus c$ beschränkt für eine Umgebung U von c . Dann $\exists g \in \mathcal{O}(U)$ so dass $(z - c)^m f(z) = g(z) \forall z \in U \setminus c$. Wir haben $g(c) \neq 0$, weil m die Ordnung von f ist. Also gilt $f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^m}$.

ii) \Rightarrow iii): $g(c) \neq 0 : \exists U \subset D$ Umgebung von c , so dass $g(z) \neq 0 \forall z \in U$. Dann ist $\tilde{h}(z) := \frac{1}{g(z)} \in \mathcal{O}(U)$ und $h(z) := (z - c)^m \tilde{h}(z) \in \mathcal{O}(U)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$ und

$$f = \frac{g(z)}{(z - c)^m} = \frac{1}{(z - c)^m \frac{1}{g(z)}} = \frac{1}{h(z)}$$

h hat eine Nullstelle der Ordnung in c .

iii) \Rightarrow iv): $f = \frac{1}{h}$, wobei $h(z) = (z - c)^m \tilde{h}(z)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$. Da $\tilde{h} \in \mathcal{O}(U)$, folgt $\tilde{h} \in C(U)$ und $\exists U' \subset U$ eine Umgebung von c , $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$ so dass

$$M \leq |\tilde{h}(z)| \leq \tilde{M} \forall z \in U'$$

Dann ist

$$\frac{1}{\tilde{M}} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} \right| \leq \frac{1}{M}$$

Und somit:

$$\frac{1}{\tilde{M}} |z - c|^{-m} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} |z - c|^{-m} \right| = |f(z)| \leq \frac{1}{M} |z - c|^{-m}$$

iv) \Rightarrow i): Aus iv) folgt $|f(z)(z - c)^m| \leq \tilde{M} \forall z \in U \setminus c$. $z = c$ ist ein Pol von f . Sei $k < m$.

$$|f(z)(z - c)^m| \geq M |z - c|^{-m} |z - c|^k = M |z - c|^{k-m} \rightarrow \infty$$

D.h. m ist die Ordnung von f in c .

□

Korollar 15.1.5

Die Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ hat genau dann einen Pol in c , wenn gilt:

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$$

Beweis: Trivial. 'Hinrichtung' folgt aus iv), 'Rückrichtung' folgt aus iii) mit $h = \frac{1}{f}$.

□

15.2 Entwicklung von Funktionen um Polstellen

Satz 15.2.1

Es sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und es sei c ein Pol m -ter Ordnung von f . Dann gibt es $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ mit $b_m \neq 0$ und $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ so dass:

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-c)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-c)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{z-c} + \tilde{f}(z), z \in D \setminus c \quad (*)$$

Die Zahlen b_1, \dots, b_m und die Funktion \tilde{f} sind eindeutig durch f bestimmt. Umgekehrt, hat jede Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$, für die (*) gilt, in c einen Pol der Ordnung m .

Beweis: f hat einen Pol in c m -ter Ordnung, also $f(z) = \frac{1}{(z-c)^m} g(z)$ mit $g(z) \in \mathcal{O}(D)$, $g(c) \neq 0$. Es gilt:

$$g(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots$$

Also:

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-c)^m} + \frac{a_1}{(z-c)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-c} + \underbrace{a_m + a_{m+1}(z-c) + \dots}_{=:\tilde{f}(z)}$$

Die umgekehrte Richtung ist trivial. □