

Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

# Einführung in die Funktionentheorie

*Beweis ist relativ einfach. Haben kein Platz, also machen wir Platz.*

Prof. Dr. N. V. Shcherbina

Bergische Universität Wuppertal  
2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	5
<b>1 Der Körper <math>\mathbb{C}</math> der komplexen Zahlen</b>	7
1.1 $\mathbb{R}$ - der Körper der reellen Zahlen . . . . .	7
1.2 Topologische Grundbegriffe . . . . .	8
1.3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen . . . . .	11
1.4 Konvergente und absolut konvergente Reihen . . . . .	14
1.5 Stetige Funktionen . . . . .	16
1.6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in $\mathbb{C}$ . . . . .	18
1.7 Komplexe Differentialrechnung . . . . .	23
1.8 Holomorphe Funktionen . . . . .	25
<b>2 Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie</b>	29
2.1 Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz . . . . .	29
2.2 Konvergenzkriterien . . . . .	31
2.3 Normalkonvergente Reihen . . . . .	32
<b>3 Potenzreihen</b>	35
3.1 Konvergenzkriterien . . . . .	35
3.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen . . . . .	38
3.3 Holomorphie von Potenzreihen . . . . .	39
3.3.1 Beispiele holomorpher Funktionen . . . . .	41
<b>4 Elementar-transzendente Funktionen</b>	43
4.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . . .	43
4.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln . . . . .	45
4.3 Logarithmusfunktion . . . . .	47
<b>5 Komplexe Integralrechnung</b>	49
5.1 Wegintegrale in $\mathbb{C}$ . . . . .	49
5.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale . . . . .	51
5.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen . . . . .	53
<b>6 Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung</b>	57
6.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete . . . . .	57
6.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben . . . . .	60
6.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen . . . . .	62

<b>7</b>	<b>Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen</b>	<b>67</b>
7.1	Identitätssatz . . . . .	67
7.2	Existenz singulärer Punkte . . . . .	69
7.3	Konvergenzsätze von Weierstraß . . . . .	72
7.4	Offenheitssatz und Maximumprinzip . . . . .	74
7.5	Allgemeine Version von Cauchys Satz . . . . .	78
<b>8</b>	<b>Isolierte Singularitäten</b>	<b>81</b>
8.1	Hebbare Singularitäten, Pole . . . . .	81
8.2	Entwicklung von Funktionen um Polstellen . . . . .	84
8.3	Wesentliche Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstrass . . . . .	85
<b>9</b>	<b>Laurentreihen und Fourierreihen</b>	<b>87</b>
9.1	Laurentdarstellung in Kreisringen . . . . .	88
9.2	Eigenschaften von Laurentreihen . . . . .	91
<b>10</b>	<b>Residuenkalkül</b>	<b>93</b>
10.1	Residuensatz . . . . .	93
10.2	Conformal mappings - Konforme Abbildungen . . . . .	99

# Vorwort

Hier kommt noch das Vorwort hin, wenn mir was einfällt. Solang müsst ihr hier mit 'ner zu 90% leeren Seite auskommen.



# 1

## Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

### 1.1 $\mathbb{R}$ - der Körper der reellen Zahlen

Im 2-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  der geordneten reellen Zahlenpaare  $z := (x, y)$  wird eine Multiplikation eingeführt vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Dadurch wird  $\mathbb{R}^2$ , zusammen mit der Vektorraumaddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

zu einem (kommutativen) Körper mit dem Element  $(1, 0)$  als Einselement; das Inverse von  $z = (x, y) \neq 0$  ist

$$z^{-1} := \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Dieser Körper heißt **der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen**.

Man definiert weiter  $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ . Offensichtlich gilt  $i^2 = -1$ , man nennt  $i$  die **imaginäre Einheit** von  $\mathbb{C}$ . Für jede Zahl  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  besteht die eindeutige Darstellung  $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$ , d.h.  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ , (wir identifizieren die reellen Zahlen  $x$  mit der komplexen Zahl  $(x, 0)$ ). Man setzt

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y$$

wobei  $z = x + iy$  und nennt  $x$  bzw.  $y$  **Realteil** bzw. **Imaginärteil von  $z$** . Die Zahl  $z$  heißt **reell** bzw. **rein imaginär**, wenn  $\operatorname{Im} z = 0$  bzw.  $\operatorname{Re} z = 0$ , letzteres bedeutet  $z = y$ .

Für  $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{C}$  ist

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(w, \bar{z}) = xu + yv$$

(für  $z = x + iy$  ist  $\bar{z} := x - iy$ ) das euklidische Skalarprodukt im reellen Vektorraum  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ .

Die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist die euklidische Länge von  $z$ , sie heißt der **absolute Betrag** von  $z$ . Es gilt:

i)  $|\bar{z}| = |z|$

- ii)  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- iii)  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  für  $z \neq 0$
- iv)  $\langle aw, az \rangle = |a|^2 \langle w, z \rangle, \langle \bar{w}, \bar{z} \rangle = \langle w, z \rangle \forall w, z, a \in \mathbb{C}$
- v)  $|\langle w, z \rangle| \leq |w||z| \forall w, z \in \mathbb{C}$  (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
- vi)  $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w, z \rangle \forall w, z \in \mathbb{C}$  (Cosinussatz)

Zwei Vektoren  $z, w$  heißen **orthogonal**, wenn  $\langle z, w \rangle = 0$ .

Fundamental für das Rechnen mit dem Absolutbetrag sind folgende Regeln:

- i)  $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- ii)  $|zw| = |z||w|$  (Produktregel)
- iii)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (Dreiecksungleichung)

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$-1 \leq \frac{\langle w, z \rangle}{|w||z|} \leq 1 \forall w, z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Es folgt:

$$\exists! \varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi \leq \pi : \cos \varphi = \frac{\langle w, z \rangle}{|z||w|}$$

Man nennt  $\varphi$  den Winkel zwischen  $w, z \in \mathbb{C}$ , in Zeichen  $\angle(w, z) = \varphi$ .

## 1.2 Topologische Grundbegriffe

### Definition 1.2.1

Ist  $X$  irgendeine Menge, so heißt eine Funktion  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ , eine **Metrik auf  $X$** , wenn  $\forall x, y, z \in X$  gilt:

- i)  $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$(X, d)$  heißt **metrischer Raum**.

Im Fall  $X = \mathbb{C}$  nennt man  $d(w, z) := |w - z| = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2}$  (die **euklidische Entfernung** der Punkte  $w, z$  in der Zahlenebene) die **euklidische Metrik** von  $\mathbb{C}$ .

In einem metrischen Raum  $X$  mit Metrik  $d$  heißt die Menge

$$B_r(c) := \{x \in X \mid d(x, c) < r\}$$



die offene Kugel vom Radius  $r > 0$  mit Mittelpunkt  $c \in X$ .  
Im Fall der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{C}$  heißen die Kugeln

$$B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$$

$r > 0$ , offene Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$ . Wir schreiben durchweg

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

### Definition 1.2.2

Eine Teilmenge  $U \subset X$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt **offen** (in  $X$ )  $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0$  so dass  $B_r(x) \subset U$  ( $\emptyset$  ist offene Menge per definitionem).

- i)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  offen
- ii)  $U_1, U_2, \dots, U_m$  offen  $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i$  offen

### Definition 1.2.3

Eine Menge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen** (in  $X$ )  $\Leftrightarrow X \setminus A$  offen.

- i)  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  abgeschlossene Mengen  $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$  abgeschlossen
- ii)  $A_1, A_2, \dots, A_m$  abgeschlossen  $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i$  abgeschlossen

### Definition 1.2.4

$A \subset X$  beliebig. Die **abgeschlossene Hülle**  $\bar{A}$  von  $A$  ist  $\bar{A} := \bigcap B$ , so dass  $B \supset A$ ,  $B$  abgeschlossen.

Eine Menge  $W \subset X$  heißt **Umgebung der Menge**  $M \subset X$ , wenn  $\exists V$  offen mit  $M \subset V \subset W$ .  
Sei  $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Eine Abbildung  $\{k, k+1, k+2, \dots\} \rightarrow X$ ,  $n \mapsto c_n$ , heißt **Folge** in  $X$ . Man schreibt kurz  $(c_n)$ , im Allgemeinen ist  $k = 0$ .

**Definition 1.2.5**

Eine Folge  $(c_n)$  heißt **konvergent** in  $X$ , wenn es einen Punkt  $c \in X$  gibt, so dass in jeder Umgebung von  $c$  fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder  $c_n$  liegen. Der Punkt  $c$  heißt ein **Limes der Folge**. In Zeichen:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

Eine Menge  $M \subset X$  ist genau dann abgeschlossen in  $X$ , wenn der Limes jeder konvergenten Folge  $(c_n)$ ,  $c_n \in M$ , stets zu  $M$  gehört.

**Definition 1.2.6**

Ein Punkt  $p \in X$  heißt **Häufungspunkt** einer Menge  $M \subset X : \Leftrightarrow \forall$  Umgebung  $U$  von  $p$  gilt:

$$U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

In jeder Umgebung eines Häufungspunktes  $p$  von  $M$  liegen unendlich viele Punkte von  $M$ ; es gibt stets eine Folge  $(c_n)$  in  $M \setminus \{p\}$  mit  $\lim c_n = p$ .

**Beispiel**

- i)  $X = \mathbb{R}$ ,  $M = \mathbb{Q}$ . Die Menge  $U$  aller Häufungspunkte?  $U = \mathbb{R}$ .
- ii)  $X = \mathbb{R}$ ,  $M = \mathbb{Z}$ .  $U = \emptyset$ .
- iii)  $X = \mathbb{R}$ ,  $M = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $U = \{0\}$ .  
//

**Definition 1.2.7**

Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt **dicht**, in  $X : \Leftrightarrow \forall$  offene  $U \subset X : U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$ .

**Beispiel**

$X = C[a, b]$ ,  $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ ,  $f, g \in X$ ,  $A = \mathcal{P}$  = alle Polynome auf  $[a, b]$ . //

**Satz 1.2.8 Äquivalenzsatz**

Folgende Aussagen über einen metrischen Raum  $X$  sind äquivalent:

- i) Jede offene Überdeckung  $U = \{U_j\}_{j \in J}$  von  $X$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (Heine-Borel-Eigenschaft)
- ii) Jede Folge  $(x_n)$  in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge. (Weierstraß-Bolzano-Eigenschaft)

**Definition 1.2.9**

Man nennt  $X$  **kompakt**, wenn die Bedingungen i) und ii) aus Satz 2.2 erfüllt sind. Eine Teilmenge  $K$  von  $X$  heißt **kompakt**, oder auch ein **Kompaktum** (in  $X$ ), wenn  $K$  mit der induzierten Metrik ein kompakter Raum ist.

- (\*) Jedes Kompaktum in  $X$  ist abgeschlossen in  $X$ . In einem kompakten Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.
- (\*\*) Jede offene Menge  $D$  in  $\mathbb{C}$  ist die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen von  $D$ .

## 1.3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen

Konvergiert die Folge  $c_n$  gegen  $c \in \mathbb{C}$ , so liegen in jeder Kreisscheibe  $B_\varepsilon(c)$ ,  $\varepsilon > 0$ , um  $c$  fast alle Folgenglieder  $c_n$ .

Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  ist die **Potenzfolge**  $z^n$  konvergent:  $\lim z^n = 0$ ; für alle  $|z| > 1$  ist die Folge  $z^n$  divergent.

**Definition 1.3.1**

Eine Folge  $c_n$  heißt **beschränkt**:  $\Leftrightarrow \exists M > 0$ , so dass  $|c_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

Wie im Reellen folgt: Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt. Sind  $c_n, d_n$  konvergente Folgen, so gelten die Limesregeln:

- i)  $\forall a, b \in \mathbb{C}$  ist  $ac_n + bd_n$  konvergent:

$$\lim(ac_n + bd_n) = a \lim c_n + b \lim d_n$$

( $\mathbb{C}$ -Linearität)

ii) Die Produktfolge  $c_n d_n$  ist konvergent:

$$\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$$

iii) Ist  $\lim d_n \neq 0$ , so gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $d_n \neq 0 \forall n \geq k$ ; die Quotientenfolge  $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n \geq k}$  konvergiert gegen  $\frac{\lim c_n}{\lim d_n}$ .

iv) Die Betragsfolge  $|c_n|$  reeller Zahlen ist konvergent:

$$\lim |c_n| = |\lim c_n|$$

v) Die Folge  $\bar{c}_n$  konvergiert gegen  $\bar{c}$ .

### Satz 1.3.2

Folgende Aussagen über eine Folge  $c_n$  sind äquivalent:

i)  $c_n$  ist konvergent.

ii) Die beiden reellen Folgen  $\operatorname{Re} c_n, \operatorname{Im} c_n$  sind konvergent. Im Fall der Konvergenz gilt:

$$\lim c_n = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

### Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$  Limesregeln i) und v) und  $\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2}(c_n + \bar{c}_n)$ ,  $\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2i}(c_n - \bar{c}_n)$ .

$ii) \Rightarrow i)$

$$\lim c_n = \lim(\operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n) = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

□

### Definition 1.3.3

Eine Folge  $c_n$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$ , so dass  $|c_n - c_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k$ .

**Satz 1.3.4 Konvergenzkriterium von Cauchy**

Folgende Aussagen über eine Folge  $(c_n)$  sind äquivalent:

- i)  $(c_n)$  ist konvergent.
- ii)  $(c_n)$  ist eine Cauchyfolge.

**Beweis:**

$i) \Rightarrow ii)$  Da  $(c_n)$  konvergent ist,  $\exists c$ , so dass  $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists k \in \mathbb{N} : |c_n - c| < \varepsilon \forall n \geq k$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$|c_n - c_m| \leq |c_n - c| + |c - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m \geq k$$

$ii) \Rightarrow i)$   $(c_n)$  ist eine Cauchyfolge. Es gilt:

$$|\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c_m| \leq |c_n - c_m|, \quad |\operatorname{Im} c_n - \operatorname{Im} c_m| \leq |c_n - c_m|$$

Also sind  $(\operatorname{Re} c_n)$  und  $(\operatorname{Im} c_n)$  reelle Cauchy-Folgen, also nach Analysis 1 konvergent. Somit ist auch  $c_n = \operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n$  konvergent.

□

**Satz 1.3.5**

Für  $K \subset \mathbb{C}$  ist  $K$  kompakt  $\Leftrightarrow K$  beschränkt und abgeschlossen.

**Satz 1.3.6 Bolzano-Weierstraß**

Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

## 1.4 Konvergente und absolut konvergente Reihen

### Definition 1.4.1

Ist  $(a_v)_{v \geq k}$  eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge  $(s_n)_{n \geq k}$ ,  $s_n := \sum_{v=k}^n a_v$ , der Partialsummen eine **(unendliche) Reihe** mit den **Gliedern**  $a_v$ . Man schreibt  $\sum_{v=k}^{\infty} a_v$ ,  $\sum_k^{\infty} a_v$ ,  $\sum_{v \geq k} a_v$  oder einfach  $\sum a_v$ .

Eine Reihe  $\sum a_v$  heißt **konvergent**, wenn die Partialsummenfolge  $(s_n)$  konvergiert, andernfalls heißt sie **divergent**. Im Konvergenzfall schreibt man suggestiv:

$$\sum a_v := \lim s_n$$

Wegen  $a_n = s_n - s_{n-1}$  gilt  $\lim a_n = 0$  für jede konvergente Reihe. Die Limesregeln i) und v) übertragen sich sofort auf Reihen:

$$\sum_{v \geq k} (a a_v + b b_v) = a \sum_{v \geq k} a_v + b \sum_{v \geq k} b_v$$

$$\overline{\sum_{v \geq k} a_v} = \sum_{v \geq k} \bar{a}_v$$

Speziell folgt: Die komplexe Reihe  $\sum_{v \geq k} a_v$  ist genau dann konvergent wenn die beiden reellen Reihen  $\sum_{v \geq k} \operatorname{Re} a_v$  und  $\sum_{v \geq k} \operatorname{Im} a_v$  konvergieren; also dann gilt:

$$\sum_{v \geq k} a_v = \sum_{v \geq k} \operatorname{Re} a_v + i \sum_{v \geq k} \operatorname{Im} a_v$$

### Satz 1.4.2 Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine Reihe  $\sum a_v$  konvergiert genau dann wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  so dass

$$\left| \sum_{m+1}^n a_v \right| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$

### Definition 1.4.3

Eine Reihe  $\sum a_v$  heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe  $\sum |a_v|$  nichtnegativer reeller Zahlen konvergiert.

#### Satz 1.4.4 Majorantenkriterium

Es sei  $\sum_{v \geq k} t_v$  eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern  $t_v \geq 0$ ; es sei  $(a_v)_{v \geq k}$  eine komplexe Zahlenfolge, so dass  $\forall v : |a_v| \leq t_v$ . Dann ist  $\sum_{v \geq k} a_v$  absolut konvergent.

**Beweis:**

$$\sum_{m+1}^n |a_v| \leq \sum_{m+1}^n t_v < \varepsilon$$

Also ist  $\sum |a_v|$  konvergent.  $\square$

Wegen  $\max(|\operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} a|) \leq |a| \leq |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|$  gilt (nach dem Majorantenkriterium):  $\sum a_v$  ist absolut konvergent  $\Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} a_v, \sum \operatorname{Im} a_v$  sind absolut konvergent.

#### Satz 1.4.5 Umordnungssatz

$\sum_{v \geq 0} a_v$  konvergiere absolut. Dann konvergiert jede 'Umordnung'<sup>2</sup> dieser Reihe.

**Beweis:**  $\sum_{v \geq 0}$  absolut konvergent  $\Rightarrow \sum_{v \geq 0} \operatorname{Re} a_v, \sum_{v \geq 0} \operatorname{Im} a_v$  absolut konvergent, i.e.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  so dass  $\sum_{m+1}^n |\operatorname{Re} a_v| < \varepsilon, \sum_{m+1}^n |\operatorname{Im} a_v| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$ .  $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Bijektion  $\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$  so dass  $\tau(n) \geq n_0 \forall n \geq N_0$ . Also:

$$\sum_{N_0+1}^N |\operatorname{Re} a_{\tau(v)}| < \varepsilon, \quad \sum_{N_0+1}^N |\operatorname{Im} a_{\tau(v)}| < \varepsilon$$

Diese Reihen sind konvergent nach Cauchy, somit auch absolut konvergent und die Behauptung folgt.  $\square$

Sind  $\sum_0^\infty a_\mu, \sum_0^\infty a_v$  zwei Reihen, so heißt jede Reihe  $\sum_0^\infty c_\lambda$ , wobei  $c_0, c_1, c_2, \dots$  genau einmal alle Produkte  $a_\mu b_v$  durchläuft, eine **Produktreihe** von  $\sum a_\mu$  und  $\sum b_v$ . Die wichtigste Produktreihe ist das **Cauchyprodukt**  $\sum p_\lambda$  mit  $p_\lambda := \sum_{\mu+v=\lambda} a_\mu b_v$ . Diese Bildung wird nahegelegt, wenn man Potenzreihen formal ausmultipliziert:

$$\left( \sum_0^\infty a_\mu x^\mu \right) \left( \sum_0^\infty b_v x^v \right) = \sum_0^\infty p_\lambda x^\lambda$$

<sup>1</sup> Cauchy-Kriterium

<sup>2</sup>  $\sum a_{\tau(v)}, \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Bijektion

### Satz 1.4.6 Reihenproduktsatz

Es seien  $\sum_0^\infty a_\mu, \sum_0^\infty b_\nu$  absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert jede Produktreihe  $\sum_0^\infty c_\lambda$  absolut. Es gilt stets:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

**Beweis:**  $\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$ , so dass  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_l$  unter den Produkten  $a_\mu b_\nu, 0 \leq \mu, \nu \leq m$ , vorkommen. Dann:

$$\sum_0^l |c_\lambda| \leq \left(\sum_0^m |a_\mu|\right)\left(\sum_0^m |b_\nu|\right) \leq \left(\sum_0^\infty |a_\mu|\right)\left(\sum_0^\infty |b_\nu|\right) < +\infty$$

Also ist  $\sum_0^\infty |c_\lambda|$  konvergent, also  $\sum_0^\infty c_\lambda$  absolut konvergent und somit unabhängig von Umordnungen. Insbesondere:

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_m)(b_0 + b_1 + \dots + b_m) = (c_0 + c_1 + \dots + c_{(m+1)^2-1})$$

Es folgt:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

□

## 1.5 Stetige Funktionen

$f: X \rightarrow Y$ ,  $f$  heißt **Funktion** oder **Abbildung**,  $X$  heißt **Argumentbereich** und  $Y$  **Wertebereich**. Man schreibt auch  $X \ni x \rightarrow f(x) \in Y$ .

### Definition 1.5.1

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **stetig im Punkt**  $a \in X$ , wenn das  $f$ -Urbild  $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$  einer jeden Umgebung  $V$  von  $f(a)$  in  $Y$  eine Umgebung von  $a$  in  $X$  ist.



**Definition 1.5.2**

Die Funktion  $f: X \rightarrow Y$  konvergiert bei Annäherung an  $a \in X$  gegen  $b \in Y$ , in Zeichen  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  oder  $f(x) \rightarrow b$  wenn  $x \rightarrow a$ , wenn es zu jeder Umgebung  $V$  von  $b$  in  $Y$  eine Umgebung  $U$  von  $a$  in  $X$  gibt mit  $f(U \setminus \{a\}) \subset V$ .

**Bemerkung**

$f$  ist stetig in  $a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Satz 1.5.3 Folgenkriterium**

Genau dann ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig in  $a$ , wenn  $\forall$  Folgen  $(x_n)$  von Punkten  $x_n \in X$  mit  $\lim x_n = a$  gilt:  $\lim f(x_n) = f(a)$ .

Zwei Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  werden zusammengesetzt zu  $g \circ f: X \rightarrow Z$ ,  $z \rightarrow (g \circ f)(x) := g(f(x))$ . Bei dieser Komposition von Abbildungen vererbt sich die Stetigkeit: Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig in  $a \in X$  und ist  $g: Y \rightarrow Z$  stetig in  $f(a) \in Y$ , so ist  $g \circ f: X \rightarrow Z$  stetig in  $a$ .

**Definition 1.5.4**

Eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt von  $X$  stetig ist.

**Satz 1.5.5 Stetigkeitskriterium**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i)  $f$  ist stetig.
- ii) Das Urbild  $f^{-1}(V)$  jeder in  $Y$  offenen Menge  $V$  ist offen in  $X$ .
- iii) Das Urbild  $f^{-1}(A)$  jeder in  $Y$  abgeschlossenen Menge  $A$  ist abgeschlossen in  $X$ .

**Satz 1.5.6**

Es sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig und  $K \subset X$  ein Kompaktum. Dann ist auch  $f(K) \subset Y$  ein Kompaktum.

**Beweis:** Sei  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  eine offene Überdeckung von  $f(K)$ . Sei  $W_\alpha := f^{-1}(U_\alpha) \forall \alpha \in A$ .  $f$  ist stetig, also ist für alle  $\alpha \in A$   $W_\alpha$  offen. Also ist  $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, existieren endlich viele  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , so dass  $K \subset \bigcup_{i=1}^m W_{\alpha_i}$ . Dann ist  $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$  eine endliche Überdeckung von  $f(K)$ . Somit ist  $f(K)$  nach Definition ein Kompaktum.  $\square$

In Satz 5.3 ist enthalten, dass reellwertige stetige Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Kompaktum  $K$  in  $X$  Maxima und Minima annehmen.

Komplexwertige Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: X \rightarrow \mathbb{C}$  lassen sich addieren und multiplizieren:  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  und  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ ,  $x \in X$ . Die zu  $f$  konjugierte Funktion  $\bar{f}$  wird durch  $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ ,  $x \in X$ , definiert.

Rechenregeln:  $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$ ,  $\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$ ,  $\bar{\bar{f}} = f$ . Realteil und Imaginärteil von  $f$  werden durch  $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$  und  $(\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$ ,  $x \in X$ , erklärt. Für  $u := \operatorname{Re} f$  und  $v := \operatorname{Im} f$  (reellwertige Funktionen) gilt:  $f = u + iv$ ,  $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ ,  $v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ ,  $f\bar{f} = u^2 + v^2$ .

Man hat:

- i)  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: X \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $a \in X \Rightarrow f+g, fg, \bar{f}$  stetig in  $a$ .
- ii)  $f = u + iv$  stetig in  $a \Leftrightarrow u, v$  stetig in  $a$ .
- iii)  $g$  nullstellenfrei in  $X$  (d.h.  $g(x) \neq 0 \forall x \in X$ ), dann heißt die Funktion  $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  die **Quotientenfunktion** von  $f$  und  $g$ . Sind  $f$  und  $g$  stetig in  $a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$  stetig in  $a$ .

## 1.6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in $\mathbb{C}$

**Definition 1.6.1**

Sei  $(X, d_x)$  ein metrische Raum,  $A \subset X$  eine Menge.  $A$  ist **zusammenhängend**  $\Leftrightarrow \nexists U_1, U_2$  offen in  $X$ , so dass:

- i)  $U_1 \cup U_2 \supset A$
- ii)  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- iii)  $U_1 \cap A \neq \emptyset, U_2 \cap A \neq \emptyset$

**Beispiel**

i)  $\mathbb{R} = X$ ,  $d_x(x, y) = |x - y|$ ,  $A = \mathbb{Q}$ :  $U_1 = (-\infty, \sqrt{2})$ ,  $U_2 = (\sqrt{2}, +\infty)$

ii)  $\mathbb{R} = X$ ,  $d_x(x, y) = |x - y|$ ,  $A = [0, 1]$ .

Seien  $U_1, U_2$  offene Mengen mit i)-iii),  $0 \in U_1$ ,  $1 \in U_2$ ,  $\frac{1}{2} \in U_1 \Rightarrow I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\frac{3}{4} \in U_2 \Rightarrow I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$   
 $\Rightarrow \exists! x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  (Intervallschachtelungsprinzip).  $x_0$  liegt also in  $U_1$  oder  $U_2$ .  $U_1$  ist offen,  
 also existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U_1$ , aber  $I_n \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  für  $n$  genügend  
 groß! Also ist  $A$  zusammenhängend.

//

**Bemerkung**

Sei  $(X, d_x)$  ein metrischer Raum,  $A, B \subset X$  zusammenhängend,  $A \cap B \neq \emptyset$ . Dann ist  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Definition 1.6.2**

Sei  $(X, d_x)$  ein metrischer Raum,  $A \subset X$  eine Teilmenge.  $\forall x_0 \in A$  definieren wir

$$K(x) := \left\{ \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \mid x_0 \in A_{\alpha}, A_{\alpha} \subset A \text{ zusammenhängend} \right\}$$

$K(x)$  heißt **Zusammenhangskomponente** des Punktes  $x$  von  $A$ .

**Bemerkung**

$K(x_0)$  ist zusammenhängend.

**Definition 1.6.3**

$(X, d_x)$  metrischer Raum,  $A \subset X$  eine Teilmenge.  $A$  ist **wegzusammenhängend**  $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in A \exists$  stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$  so dass  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$ .

**Bemerkung**

$A \subset X$  wegzusammenhängend  $\not\Rightarrow A$  zusammenhängend.

### Beispiel

$\mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1, A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}$  //

### Proposition 1.6.4

$A \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $d_{\mathbb{R}^2}(x, y) = \|x - y\|$ .  $A$  zusammenhängend  $\Rightarrow A$  wegzusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $x_0 \in A$  beliebig, aber fixiert.  $A(x_0) := \{y \in A \mid \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y\}$ .

- i)  $A(x_0)$  ist wegzusammenhängend.
- ii)  $A(x_0)$  ist offen, weil  $\forall y \in A(x_0) \subset A \exists \varepsilon > 0$  so dass  $B_\varepsilon(y)$ . Also ist die Kurve  $\gamma$  von  $x_0$  zu  $y$  + der Radius von  $y$  zu beliebigem Punkt von  $B_\varepsilon(y)$  auch eine stetige Kurve. Also ist auch  $B_\varepsilon(y) \subset A(x_0)$  und somit ist  $A(x_0)$  offen.
- iii)  $A(x_0)$  ist abgeschlossen in  $A$ . Sei  $y^* \in A$  und  $\exists y_n \in A(x_0), y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y^*$ . Da  $A$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(y^*) \subset A$ . Dann  $\exists n \in \mathbb{N}$  so dass  $y_n \in B_\varepsilon(y^*)$ . Also existiert ein  $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ , so dass  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_n$ . Dann ist diese Kurve + der Radius  $[y_n, y^*]$  eine Kurve die  $x_0$  mit  $y^*$  verbindet. Also  $y^* \in A(x_0)$ . Somit ist  $A(x_0)$  in  $A$  abgeschlossen.

Also sind  $A(x_0)$  und  $A \setminus A(x_0)$  offen  $\nsubseteq A \setminus A(x_0) = \emptyset \Rightarrow A(x_0) = A$ . Da  $A(x_0)$  wegzusammenhängend ist, ist somit auch  $A$  wegzusammenhängend.  $\square$

### Definition 1.6.5

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **lokal-konstant** genau dann wenn  $\forall x \in X \exists$  offene Umgebung  $U \subset X, x \in U$ , so dass  $f|_U = \text{konstant}$ .

Ist  $f$  lokal-konstant, dann ist  $f$  stetig.

### Satz 1.6.6

$X$  metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- i)  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  lokal-konstant  $\Rightarrow f$  konstant
- ii)  $A \subset X$  nicht leer, offen und abgeschlossen  $\Rightarrow A = X$
- iii)  $X$  zusammenhängend

**Beweis:**

- $i) \Rightarrow ii)$  Sei  $A \subset X$ ,  $A \neq \emptyset$ , offen und abgeschlossen.  $B := X \setminus A$  offen und abgeschlossen,  $A \cap B = \emptyset$ ,  
 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in B \end{cases}$ . Es folgt direkt dass  $f$  lokal-konstant, also insbesondere stetig ist. Also  
 ist  $f$  konstant, nämlich  $f = 1$ , denn  $A \neq \emptyset$ . Da  $A = f^{-1}(1) = X$ , ist  $A = X$ .
- $ii) \Rightarrow i)$  Sei  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  lokal-konstant. Fixiere  $c \in X$ .  $A := f^{-1}(f(c))$ . Da  $f$  lokal-konstant, ist  
 $A$  offen,  $c \in A \neq \emptyset$ . Da  $f$  stetig, ist  $A$  abgeschlossen. Also ist  $A = X$ . Insbesondere ist  
 $f(x) = f(c) \forall x \in X$ . Also ist  $f$  konstant.

□

**Satz 1.6.7**

$I \subset \mathbb{R}$  Intervall  $\Rightarrow I$  zusammenhängend.

**Definition 1.6.8**

- i)  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $\gamma$  heißt **Strecke** von  $z_0$  nach  $z_1$ ,  $\gamma = [z_0, z_1]$ .
- ii)  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$ , dann ist  $[z_0, z_1] = \text{Intervall}$ .
- iii) Seien  $\gamma_1: [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ . Der **Summenweg**  $\gamma_1 + \gamma_2$  von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ist  $\gamma: [a_1, b_2 - a_2 + b_1]$ ,  $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1] \end{cases}$ .
- iv)  $\gamma$  heißt **Polygon** oder **Streckenweg**, falls  $\gamma = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \dots + [z_{n-1}, z_n]$ .
- v) Polygon  $\gamma$  heißt **achsenparallel**, falls  $[z_j, z_{j+1}]$  parallel zur  $x$ -Achse oder  $y$ -Achse ist,  $j = 0, \dots, n-1$ , d.h.  $\operatorname{Re} z_j = \operatorname{Re} z_{j+1}$  oder  $\operatorname{Im} z_j = \operatorname{Im} z_{j+1}$ .
- vi)  $D \subset \mathbb{C}$  heißt **Bereich**, falls  $D$  offen und nicht leer ist.

**Satz 1.6.9**

Sei  $B \subset \mathbb{C}$  Bereich. Dann sind äquivalent:

- i)  $B$  ist zusammenhängend.
- ii)  $\forall p, q \in B \exists$  Polygon in  $B$ , das  $p$  und  $q$  verbindet.
- iii)  $B$  ist wegzusammenhängend.

**Beweis:**

ii)  $\Rightarrow$  iii) Jedes Polygon ist ein Weg.

iii)  $\Rightarrow$  i) Folgt aus Bemerkung oben.

i)  $\Rightarrow$  ii) Sei  $p \in B$  fest,  $z \in B$ .

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \exists \text{ Polygon von } p \text{ nach } z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige:  $f$  lokal konstant. Sei  $w \in B$ . Da  $B$  offen, gibt es eine Kreisscheibe  $\Delta \subset B$ ,  $\Delta \ni w$ . Ist  $z \in \Delta$ , so existiert ein Polygon von  $z$  nach  $w$  in  $\Delta$ . D.h.  $f(w) = 1 \Rightarrow f(z) = 1$  und  $f(w) = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \forall z \in \Delta$ . Also ist  $f$  lokal-konstant auf  $B$  und  $f$  somit konstant. Da  $f(p) = 1$  folgt  $f = 1$ .

□

**Definition 1.6.10**

$G \subset \mathbb{C}$  Bereich. Ist  $G$  (weg-)zusammenhängend, so heißt  $G$  Gebiet.

$G$  ab jetzt immer ein Gebiet, und  $D$  immer ein Bereich.

**Definition 1.6.11**

$p, q \in D$   $p \sim_D q \Leftrightarrow \exists$ Weg in  $D$  der  $p$  und  $q$  verbindet. Die Äquivalenzklasse  $[p]_D$  heißt Zusammenhangskomponente die  $p$  enthält.

$z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $d(z_0, z_1) = |z_0 - z_1|$  Abstand zwischen  $z_0$  und  $z_1$ .

$z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$  abgeschlossen,  $d(z_0, A) = \inf\{d(z_0, w) \mid w \in A\}$

$D \subset \mathbb{C}$  Bereich,  $c \in D$ ,  $\partial D = \bar{D} \setminus D$ . Randabstand  $d_c(D) = d(c, \partial D)$ .

Sonderfall:  $D = \mathbb{C}$ ,  $d_c(D) = +\infty$ .

$d = d_c(D)$  ist der maximale Radius, so dass  $B_d(c) \subset D$  enthalten ist.

**Beispiel**

$D = B_r(a)$ .  $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ . //

## 1.7 Komplexe Differentialrechnung

### Definition 1.7.1

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **komplex differenzierbar** in  $c \in D$ , wenn es eine in  $c$  stetige Funktion  $f_1: D \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so dass

$$f(z) = f(c) + (z - c)f_1(z) \quad \forall z \in D$$

( $\mathbb{C}$ -Linearisierung)

Die Funktion  $f_1$  ist dann eindeutig durch  $f$  bestimmt:

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \quad \forall z \in D \setminus \{c\}$$

(Differenzenquotient)

Wegen der Stetigkeit von  $f_1$  in  $c$  gilt, wenn man  $h = z - c$  setzt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f_1(c)$$

Die Zahl  $f_1(c) \in \mathbb{C}$  heißt die **Ableitung (nach  $z$ ) von  $f$  in  $c$** .

$f$  in  $c$  differenzierbar  $\Rightarrow f$  in  $c$  stetig.

Man beweist direkt:  $f$  in  $c$  komplex differenzierbar  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  so dass

$$|f(c+h) - f(c) - f'(c)h| \leq \varepsilon |h| \quad \forall h \in \mathbb{C}, |h| \leq \delta$$

Wir schreiben  $c = a + ib = (a, b)$ ,  $z = x + iy = (x, y)$ . Ist  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  komplex differenzierbar in  $c \in D$ , so gilt:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+ih) - f(c)}{ih}$$

Wählt man  $h$  reell, so folgt

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h, b) - u(a, b)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h, b) - v(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a, b+h) - u(a, b)}{ih} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a, b+h) - v(a, b)}{ih} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:  $\exists u_x(c), v_x(c), u_y(c), v_y(c)$  und

$$f'(c) = u_x(c) + iv_x(c) = v_y(c) - iu_y(c) \Rightarrow \begin{cases} u_x(c) = v_y(c) \\ v_x(c) = -u_y(c) \end{cases}$$

Dies ist die **Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung**. Sie ist eine notwendige Bedingung für komplexe Differenzierbarkeit.

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $c \in D$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .  $f$  ist in  $c$  reell differenzierbar genau dann, wenn eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $T$  existiert, so dass

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - T(h)|}{|h|}$$

$$T = \begin{pmatrix} u_x(c) & v_x(c) \\ u_y(c) & v_y(c) \end{pmatrix}$$

Sind  $u, v$  in  $D$  stetig differenzierbare reelle Funktionen, so ist die komplexe Funktion  $f = u + iv$  in jedem Punkt von  $D$  reell differenzierbar. Gilt zusätzlich  $u_x = v_y$  und  $u_y = -v_x$  überall in  $D$ , so ist  $f$  in jedem Punkt von  $D$  komplex differenzierbar.

**Beweis:** Sei  $c = a + ib = (a, b)$ ,  $h = \Delta x + i\Delta y = (\Delta x, \Delta y)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(a+\Delta x, b+\Delta y) + iv(a+\Delta x, b+\Delta y) - u(a, b) - iv(a, b)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{u_x(a, b)\Delta x + u_y(a, b)\Delta y + iv_x(a, b)\Delta x + iv_y(a, b)\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(u_x(a, b) + iv_x(a, b))\Delta x + i(v_y(a, b) + u_y(a, b))\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(u_x(a, b) + iv_x(a, b))(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= u_x(a, b) + iv_x(a, b) \end{aligned}$$

□

### Beispiel

$f(z) = 2yx + 3ixy^2$ . Für welche  $z \in \mathbb{C}$  ist  $f$  komplex differenzierbar?  $u(x, y) = 2yx$ ,  $v(x, y) = 3xy^2$ .

$$u_x = 2y = 6xy = v_y$$

$$v_x = 3y^2 = -2x = -u_y$$

Lösungen dieses LGS:  $(x = 0, y = 0)$ ,  $\left(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$  und  $\left(x = \frac{1}{3}, y = \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ . //

Laplace-Operator:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$



**Definition 1.7.2**

Sei  $\varphi \in C^2(G)$ ,  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann ist  $\varphi$  **harmonisch** in  $G$  genau dann, wenn  $\Delta\varphi \equiv 0$  in  $G$  ist.

**Satz 1.7.3**

Ist  $f = u + iv$  überall in  $D$  komplex differenzierbar und sind  $u$  und  $v$  zweimal reell stetig differenzierbar in  $D$ , so gilt:  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  und  $v_{xx} + v_{yy} = 0$  in  $D$ .

**Beweis:**  $u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}$ ,  $u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$ . Also:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Anderer Fall analog. □

## 1.8 Holomorphe Funktionen

**Definition 1.8.1**

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph** in  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $c \in D$  komplex differenzierbar ist.

Die Menge der holomorphen Funktionen in  $D$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{O}(D)$ .

**Summen- und Produktregel.**  $\forall f, g \in \mathcal{O}(D) \forall a, b \in \mathbb{C}$  ist  $af + bg \in \mathcal{O}(D)$  und  $fg \in \mathcal{O}(D)$  und  $(af + bg)' = af' + bg'$ ,  $(fg)' = f'g + fg'$ . Insbesondere  $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  und  $p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$ .

**Quotientenregel.**  $\forall f, g \in \mathcal{O}(D), \forall z \in D : g(z) \neq 0: \frac{f}{g} \in \mathcal{O}(D)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

**Kettenregel.**  $g \in \mathcal{O}(D), h \in \mathcal{O}(D'), g(D) \subset D': (h \circ g)(z) := h(g(z)) \in \mathcal{O}(D)$

$$(h \circ g)'(z) = h'(g(z))g'(z) \forall z \in D$$

**Proposition 1.8.2**

Folgende Aussagen über eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  sind äquivalent:

- i)  $f$  ist lokal-konstant in  $D$ .
- ii)  $f$  ist holomorph in  $D$  und es gilt  $f'(z) = 0 \forall z \in D$ .

**Beweis:**

i)  $\Rightarrow$  ii) Trivial.

ii)  $\Rightarrow$  i)  $0 = f'(z) = u_x + iv_x$ , also  $u_x = 0 = v_y$  und  $v_x = 0 = -u_y$ . Also sind alle partiellen Ableitungen identisch 0. Somit ist  $u \equiv c$ ,  $v \equiv c$  auf jeder Zusammenhangskomponente von  $D$ , also ist  $f$  lokal-konstant,

□

**Korollar 1.8.3**

$f \in \mathcal{O}(D)$ ,  $f(z) \in \mathbb{R} \forall z \in D$  oder  $f(z) \in i\mathbb{R} \forall z \in D$ . Dann ist  $f$  lokal-konstant.

**Beweis:** Sei  $f(z) \in \mathbb{R} \forall z \in D$ , d.h.  $f(z) = u(z) + iv(z)$  mit  $v(z) \equiv 0$  in  $D$ . Dann ist nach Cauchy-Riemann:  $u_x = v_y \equiv 0$  und  $u_y = -v_x \equiv 0$  in  $D$ . Also ist  $f$  lokal-konstant in  $D$ .

Anderer Fall analog.

□

**Korollar 1.8.4**

$f \in \mathcal{O}(D)$ ,  $|f(z)| = 1 \forall z \in D$ . Dann ist  $f$  lokal-konstant in  $D$ .

**Beweis:** Sei  $f(z) = u(z) + iv(z)$ ,  $|f(z)| = 1$ , also  $u^2 + v^2 \equiv 1$ . Dann ist  $uu_x + vv_x \equiv 0$  und  $uu_y + vv_y \equiv 0$ . Mit Cauchy-Riemann folgt dann:

$$u^2 u_x + uvv_x - uvv_x + v^2 u_x = (u^2 + v^2)u_x \equiv 0$$

Also:  $u_x \equiv 0 = v_y$ . Ebenfalls mit Cauchy-Riemann:

$$v^2 v_x + uvu_x + u^2 v_x - uvu_x = (u^2 + v^2)v_x \equiv 0$$

Also:  $v_x \equiv 0$ , und somit ist  $f$  lokal-konstant in  $D$ . □

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D$  offene Menge,  $f = u + iv$  ist in  $D$  reell differenzierbar. Wir definieren:

$$f_x := u_x + iv_x, \quad f_y := u_y + iv_y, \quad f_z := \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

Von hier bekommen wir direkt:

$$u_x = \frac{1}{2}(f_x + \bar{f}_x), \quad v_x = \frac{1}{2i}(f_x - \bar{f}_x), \quad u_y = \frac{1}{2}(f_y + \bar{f}_y), \quad v_y = \frac{1}{2i}(f_y - \bar{f}_y), \quad f_x = f_z + f_{\bar{z}}, \quad f_y = i(f_z - f_{\bar{z}})$$

**Satz 1.8.5**

Genau dann ist eine in  $D$  stetig reell differenzierbare Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $D$ , wenn  $\forall c \in D \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0$ . Allschon ist  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  die Ableitung  $f'$  von  $f$  in  $D$ .

**Beweis:**

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(f_x + if_y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) \equiv 0$$

Nach Cauchy-Riemann ist  $f$  dann holomorph. □



# 2

## Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie

### 2.1 Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz

#### Definition 2.1.1

Eine Funktionenfolge  $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt in  $A \subset \mathbb{C}$  **gleichmäßig konvergent** gegen  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so dass  $\forall n \geq n_0$  und  $\forall x \in X$  gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

#### Beispiel

i)  $f_n(x) = x^n$ ,  $A = [0, 1]$ .  $f(x) \equiv 0 \forall x \in A$ .  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  punktweise, aber nicht gleichmäßig.

ii)  $A = [0, 1]$ .

$$f_n(z) = \begin{cases} 2nx & f \in [0, 1/2n] \\ 2 - 2nx & f \in (1/2n, 1/n] \\ 0 & x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

$$f(x) \equiv 0 \forall x \in [0, 1].$$

//

#### Definition 2.1.2

Die **Supremumsnorm** für Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  und jede Menge  $A \subset X$  definiert man als:

$$|f|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

**Definition 2.1.3**

Eine Funktionenfolge  $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **lokal-gleichmäßig konvergent** in  $X$  genau dann, wenn  $\forall x \in X$  eine Umgebung  $U \subset X$  existiert, so dass  $f_n|_U$  gleichmäßig konvergiert.

**Bemerkung**

$f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  gleichmäßig konvergent  $\nRightarrow$  lokal gleichmäßige Konvergenz.

**Beispiel**

$f_n(z) = z^n: \Delta_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert nur lokal gleichmäßig. //

**Satz 2.1.4 Stetigkeitssatz**

Konvergiert die Folge  $f_n \in C(X)$  lokal-gleichmäßig in  $X$ , so ist die Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  ebenfalls stetig in  $X$ , d.h.  $f \in C(X)$ .

**Satz 2.1.5**

Konvergiert die Folge  $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  gleichmäßig in endlich vielen Teilmengen  $A_1, \dots, A_m$  von  $X$ , so konvergiert sie natürlich auch gleichmäßig in der Vereinigung. Hieraus folgt unmittelbar: Konvergiert die Folge  $f_n$  lokal-gleichmäßig in  $X$ , so konvergiert  $f_n$  gleichmäßig in jeder kompakten  $K \subset X$ .

**Beweis:**  $\forall x \in K \exists$  offene Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$ , so dass  $f_n|_U$  gleichmäßig konvergiert.  $K$  kompakt. Dann existieren  $U_1, \dots, U_m$  so dass  $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ ,  $f_n|_{U_i}$  konvergiert gleichmäßig  $\forall i = 1, \dots, m$ . Dann konvergiert  $f_n|_{U_1 \cup \dots \cup U_m}$  gleichmäßig und somit  $f_n|_K$ .  $\square$

**Definition 2.1.6**

Man nennt eine Folge bzw. eine Reihe **kompakt konvergent** in  $X$ , wenn sie in jeder kompakten Teilmenge von  $X$  gleichmäßig konvergiert.

## 2.2 Konvergenzkriterien

**Definition 2.2.1**

Eine Funktionenfolge  $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $A \subset X$  heißt **Cauchyfolge** (bzgl. der Supremumsnorm), wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|f_n - f_m|_A < \varepsilon \forall n, m \geq n_0$ .

**Satz 2.2.2 Cauchysches Konvergenzkriterium**

Folgende Aussagen über eine Folge  $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  und eine Teilmenge  $A \neq \emptyset$  von  $X$  sind äquivalent:

- i)  $f_n$  ist gleichmäßig konvergent in  $A$ .
- ii)  $f_n$  ist eine Cauchyfolge in  $A$ .

**Beweis:**

$ii) \Rightarrow i)$ : Aus  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m - f_n|_A$  folgt, dass  $\{f_n(x)\}$  eine Cauchyfolge  $\forall x \in A$  ist. Dann konvergiert  $f_n$  punktweise in  $A$ . Sei  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in A$ . Es gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \forall x \in A$$

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gibt es ein  $n_0$  so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0 \forall x \in A$$

Wählt man zu  $x \in A$  ein  $m = m(x) \geq n_0$  so dass

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n - f|_A \leq 2\varepsilon \forall n \geq n_0$$

$i) \Rightarrow ii)$ : Trivial.

□

**Satz 2.2.3 Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen**

Folgende Aussagen über eine unendliche Reihe  $\sum f_v$ ,  $f_v: X \rightarrow \mathbb{C}$ , sind äquivalent:

- i)  $\sum f_v$  ist gleichmäßig konvergent in  $A$ .
- ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  so dass  $|f_{m+1}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon \forall n > m \geq n_0 \forall x \in A$ .

**Satz 2.2.4 Majorantenkriterium von Weierstraß**

Es sei  $f_v: X \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktionenfolge. Es sei  $A \neq \emptyset$  eine Teilmenge von  $X$  und es gebe eine Folge reeller Zahlen  $M_v \geq 0$ , so dass gilt:

$$|f_v|_A \leq M_v, v \in \mathbb{N}, \sum M_v < \infty$$

Dann konvergiert die Reihe  $\sum f_v$  gleichmäßig in  $A$ .

**Beweis:**  $\forall n > m \forall x \in A$  gilt:

$$\left| \sum_{m+1}^n f_v(x) \right| \leq \sum_{m+1}^n |f_v(x)| \leq \sum_{m+1}^n M_v$$

Wegen  $\sum M_v < \infty$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so dass

$$\sum_{m+1}^n M_v < \varepsilon \forall n > m \geq n_0 \Rightarrow |f_{m+1} + \dots + f_n(x)| < \varepsilon \forall n > m \geq n_0 \forall x \in A$$

Daher ist  $\sum f_v$  nach dem Cauchyschen Kriterium gleichmäßig konvergent. □

## 2.3 Normalkonvergente Reihen

**Definition 2.3.1**

Eine Reihe  $\sum f_v$  von Funktion  $f_v: X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **normal konvergent** in  $X$ , wenn  $\forall x \in X$  eine Umgebung  $U$  existiert, so dass  $\sum |f_v|_U < \infty$ .



**Bemerkung**

- i)  $\sum f_v$  normal konvergent  $\Rightarrow \sum f_v$  lokal-gleichmäßig konvergent.
- ii) Ist  $f = \sum f_v$ ,  $f_v \in C(X)$ , normal konvergent in  $X$ , so ist  $f \in C(X)$ .

**Satz 2.3.2 Umordnungssatz**

Konvergiert  $\sum f_v$  in  $X$  normal gegen  $f$ , so konvergiert für jede Bijektion  $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  die umgeordnete Reihe  $\sum f_{\tau(v)}$  in  $X$  normal gegen  $f$ .

**Beweis:**  $\forall x \in X \exists$  eine Umgebung  $U \subset X$ , so dass  $\sum |f_v| < \infty$ . Nach dem Umordnungssatz für Reihen komplexer Zahlen gilt dann  $\sum |f_{\tau(v)}| < \infty$  für jede Bijektion  $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und es folgt  $f(x) = \sum f_{\tau(v)} \forall x \in X$ . Also ist  $\sum f_{\tau(v)}$  in  $X$  normal konvergent gegen  $f$ .  $\square$

**Satz 2.3.3 Reihenproduktsatz für normal konvergente Reihen**

Sind  $f = \sum f_\mu$  und  $g = \sum g_v$  normal konvergente Reihen in  $X$ , so konvergiert jede Produktreihe  $\sum h_\kappa$ , wobei  $h_0, h_1, \dots$  alle Produkte  $f_\mu g_v$  genau einmal durchlaufen, in  $X$  normal gegen  $fg$ . Wir schreiben  $fg = \sum f_\mu g_n u$ . Insbesondere gilt  $fg = \sum p_\lambda$  mit  $p_\lambda = \sum_{\mu+v=\lambda} f_\mu g_v$ .



# 3

## Potenzreihen

### 3.1 Konvergenzkriterien

#### Definition 3.1.1

Ist  $c \in \mathbb{C}$  fixiert, so heißt jede Funktionenreihe  $\sum_0^\infty a_\nu(z - c)^\nu$ ,  $a_\nu \in \mathbb{C}$ , eine (formale) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $c$  und Koeffizienten  $a_\nu$ .

Um bequem formulieren zu können, nehmen wir häufig  $c = 0$  an. Wir schreiben  $B_r$  anstelle von  $B_r(0)$ .

Man nennt eine Potenzreihe **konvergent**, wenn es noch einen weiteren Punkt  $z_1 \neq c$  gibt, wo sie konvergiert.

#### Lemma 3.1.2 Konvergenzlemma von Abel

Zur Potenzreihe  $\sum a_\nu(z - c)^\nu$  gebe es positive reelle Zahlen  $s, M$ , so dass stets gilt:

$$|a_\nu|s^\nu \leq M$$

Dann ist die Potenzreihe konvergent in der offenen Kreisscheibe  $B_s(c)$ .

**Beweis:** Sei  $c = 0$ . Sei  $r$  mit  $0 < r < s$  beliebig. Setzt man  $q := rs^{-1}$ , so gilt

$$|a_\nu z^\nu|_{B_r} = |a_\nu| r^\nu \leq M q^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Da  $\sum q^\nu < \infty$  wegen  $0 < q < 1$ , so folgt

$$\sum |a_\nu z^\nu|_{B_r} \leq M \sum q^\nu < \infty$$

Da dies für alle  $r < s$  gilt, folgt die normale Konvergenz in  $B_s$ . □

**Korollar 3.1.3**

Konvergiert die Reihe  $\sum a_\nu z^\nu$  in  $z_0 \neq 0$ , so ist  $\sum a_\nu z^\nu$  normal konvergent in der offenen Kreisscheibe  $B_{|z_0|}$ .

**Satz 3.1.4 Konvergenzsatz für Potenzreihen**

Es sei  $\sum a_\nu (z - c)^\nu$  eine Potenzreihe. Sei  $R$  das Supremum aller reellen Zahlen  $t \geq 0$ , so dass die Folge  $|a_\nu| t^\nu$  beschränkt ist. Dann gilt:

- i) In der Kreisscheibe  $B_R(c)$  ist die Reihe normal konvergent.
- ii) In jedem Punkt  $x \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(c)}$  ist die Reihe divergent.

**Beweis:** Sei  $c = 0$ . Es gilt  $0 \leq R < \infty$ . Im Fall  $R = 0$  ist nichts zu zeigen. Sei also  $R > 0$ . Für jedes  $s$ ,  $0 < s < R$ , ist die Folge  $|a_\nu| s^\nu$  beschränkt. Nach dem Konvergenzlemma konvergiert  $\sum a_\nu z^\nu$  mithin normal in  $B_s$ . Da  $s < R$  beliebig nah bei  $R$  wählbar ist, folgt die normale Konvergenz in  $B_R$ .

Für jedes  $w$  mit  $|w| > R$  ist die Folge  $|a_\nu| |w|^\nu$  unbeschränkt und die Reihe  $\sum a_\nu w^\nu$  notwendig divergent.  $\square$

**Bemerkung**

Die Grenzfunktion von  $\sum a_\nu (z - c)^\nu$  ist stetig in  $B_R(c)$ . Wir bezeichnen diese Funktion durchweg mit  $f$ .

Die durch den Konvergenzsatz eindeutig bestimmte Größe  $R$  mit  $0 \leq R \leq \infty$  heißt der **Konvergenzradius**, die Menge  $B_R(c)$  heißt die **Konvergenzkreisscheibe** der Potenzreihe.

**Definition 3.1.5**

Für eine Folge  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  reeller Zahlen ist

$$\limsup \alpha_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup(\alpha_N, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \dots)$$

**Satz 3.1.6 Formel von Cauchy-Hadamard**

Die Potenzreihe  $\sum a_\nu(z-c)^\nu$  hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$$

**Beweis:** Wir setzen  $L := (\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|})^{-1}$ . Es ist zu zeigen: Für jedes  $r$ ,  $0 < r < L$ , gilt  $r \leq R$  und für jedes  $s$ ,  $L < s < \infty$ , gilt  $s \geq R$ .

Sei zunächst  $0 < r < L$ , also  $r^{-1} > \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ . Nach Definition von  $\limsup$  gibt es ein  $\nu_0 \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < r^{-1} \forall \nu \geq \nu_0$$

Mithin ist die Folge  $|a_\nu| r^\nu$  beschränkt, d.h.  $r \leq R$ .

Sei nun  $L < s < \infty$ , also  $s^{-1} < \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ . Nach Definition von  $\limsup$  existiert eine unendliche Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$ , so dass für alle  $m \in M$  gilt:

$$s^{-1} < \sqrt[m]{|a_m|}$$

Das heißt  $|a_m| s^m > 1$ , also ist  $|a_\nu| s^\nu$  keine Nullfolge und somit  $s \geq R$ . □

**Satz 3.1.7 Quotientenkriterium**

Es sei  $\sum a_\nu(z-c)^\nu$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Es sei  $a_\nu \neq 0$  für alle  $\nu$ . Dann gilt:

$$\liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} \leq R \leq \limsup \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

Speziell:

$$R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

falls der Limes existiert.

**Beweis:** Setzt man

$$S := \liminf \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}, \quad T := \limsup \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$$

so genügt es zu zeigen: Für jedes  $s$ ,  $0 < s < S$ , gilt  $s \leq R$  und für jedes  $t$ ,  $T < t < \infty$ , gilt  $t \geq R$ .

Sei zunächst  $0 < s < S$ . Nach Definition von  $\liminf$  gibt es ein  $l \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:  $a_\nu \neq 0$  und  $|a_\nu a_{\nu+1}^{-1}| > s$ , d.h.  $|a_{\nu+1}| s < |a_\nu|$  für alle  $\nu \geq l$ . Setzt man  $A := |a_l| s^l$ , so folgt sofort  $|a_{l+m}| s^{l+m} \leq A$  für alle  $m \geq 0$  durch Induktion. Die Folge  $|a_\nu| s^\nu$  ist mithin beschränkt, d.h.  $s \leq R$ .

Sei nun  $T < t < \infty$ . Dann gibt es laut Definition von  $\limsup$  ein  $l \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:  $a_\nu \neq 0$

und  $|a_v a_{v+1}^{-1}| < t$ , d.h.  $|a_{v+1}|t > |a_v|$  für alle  $v \geq l$ . Setzt man  $B := |a_l|t^l$ , so folgt jetzt induktiv  $|a_{l+m}|t^{l+m} \geq B$  für alle  $m \geq 0$ . Da  $B \geq 0$ , so ist also  $|a_v|t^v$  keine Nullfolge, d.h.  $t \geq R$ .  $\square$

## 3.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen

### Exponentialreihe und trigonometrische Reihen, Eulersche Formel

Die **Exponentialreihe** definiert man als

$$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Ihr Konvergenzradius bestimmt sich nach dem Quotientenkriterium mit  $a_n u := \frac{1}{n!}$  zu

$$R = \lim \frac{|a_v|}{|a_{v+1}|} = \lim(v+1) = \infty$$

d.h. die Reihe konvergiert normal überall in  $\mathbb{C}$ .

Die **Cosinusreihe** und die **Sinusreihe**

$$\cos z = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v}}{(2v)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \sin z = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v+1}}{(2v+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

konvergieren ebenfalls überall in  $\mathbb{C}$ , denn  $\cos z$  und  $\sin z$  sind Teilreihen der konvergenten Reihe  $\exp z$ .

#### Satz 3.2.1 Eulersche Formel

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

**Beweis:**

$$\exp iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v)!} z^{2v} + i \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v+1)!} z^{2v+1} = \cos z + i \sin z$$

$\square$

$\cos z$  ist eine **gerade Funktion**,  $\sin z$  eine **ungerade Funktion**:

$$\cos(-z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v)!} (-z)^{2v} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v)!} z^{2v} = \cos z$$

Analog für  $\sin -z = -\sin z$ .

Weiter gilt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp iz + \exp -iz), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp iz - \exp -iz)$$

## Logarithmische Reihe und Arcustangens-Reihe

Die **Logarithmische Reihe** definiert man als

$$\lambda(z) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v} z^v = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$R = 1$ , da

$$\frac{|a_v|}{|a_{v+1}|} = \frac{v+1}{v} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 1$$

Die **Arcustangens-Reihe** definiert man als

$$a(z) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{2v-1} z^{2v-1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

## 3.3 Holomorphie von Potenzreihen

### Satz 3.3.1

Hat  $\sum a_v(z-c)^v$  den Konvergenzradius  $R$ , so haben auch die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration entstehenden Reihen  $\sum v a_v(z-c)^{v-1}$  und  $\sum \frac{1}{v+1} a_v(z-c)^{v+1}$  den Konvergenzradius  $R$ .

### Beweis:

i) Für den Konvergenzradius  $R'$  der differenzierten Reihe gilt:

$$R' = \sup\{t \geq 0 \mid v|a_v|t^{v-1} \text{ ist beschränkt}\}$$

Da mit  $v|a_v|t^{v-1}$  erst recht die Folge  $|a_v|t^v$  beschränkt ist, folgt  $R' \leq R$ . Um  $R \leq R'$  einzusehen, genügt es zu sehen, dass für jedes  $r > R$  gilt:  $r \leq R'$ . Man wähle zu  $r$  ein  $s$  mit  $r < s < R$ . Dann ist die Folge  $|a_v|s^v$  beschränkt. Es gilt:

$$v|a_v|r^{v-1} = (r^{-1}|a_v|s^v)vq^v$$

mit  $q := \frac{r}{s}$ . Da  $vq^v$  wegen  $0 < q < 1$  eine Nullfolge ist, so ist auch  $v|a_v|r^{v-1}$  eine Nullfolge. Es folgt  $r \leq R' \Rightarrow R' = R$ .

ii) Analog.

□

**Satz 3.3.2 Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation bei Potenzreihen**

Die Potenzreihe  $\sum a_\nu |z - c|^\nu$  habe den konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist ihre Grenzfunktion  $f$  in  $B_R(c)$  beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere holomorph in  $B_R(c)$ . Es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{\nu \geq k} (k!) \binom{\nu}{k} a_\nu (z - c)^{\nu-k}, \quad z \in B_R(c), n \in \mathbb{N}$$

Speziell:  $\frac{f^{(k)}}{k!} = a_k$  (Taylorsche Koeffizientenformeln).

**Beweis:** Es genügt, den Fall  $k = 1$  zu behandeln; hieraus der Allgemeinfall durch Iteration. Wir setzen  $B := B_R(c)$ . Zunächst ist auf Grund von obigem Satz klar, dass durch

$$g(z) := \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu (z - c)^{\nu-1}$$

eine Funktion  $g: B \rightarrow \mathbb{C}$  definiert wird. Unsere Behauptung ist:  $f' = g$ . Wir nehmen wieder  $c = 0$  an. Sei  $b \in B$  fixiert. Um  $f'(b) = g(b)$  zu zeigen, setzen wir:

$$q_\nu(z) := z^{\nu-1} + z^{\nu-2}b + z^{\nu-2}b^2 + \dots + b^{\nu-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \nu = 1, 2, \dots$$

Dann gilt stets:

$$z^\nu - b^\nu = (z - b)q_\nu(z)$$

und also

$$f(z) - f(b) = \sum_{\nu \geq 1} a_\nu (z^\nu - b^\nu) = (z - b) \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z), \quad z \in B$$

Sei nun  $f_1(z) := \sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$ . Dann folgt (beachte:  $q_\nu(b) = \nu b^{\nu-1}$ ):

$$f(z) - f(b) = (z - b)f_1(z), \quad z \in B$$

und

$$f_1(b) = \sum_{\nu \geq 1} \nu a_\nu b^{\nu-1} = g(b)$$

Es ist daher nur noch zu zeigen, dass  $f_1$  stetig in  $b$  ist. Dazu genügt es nachzuweisen, dass die Reihe  $\sum_{\nu \geq 1} a_\nu q_\nu(z)$  in  $B$  normal konvergiert. Das aber ist klar, denn für jede Kreisscheibe  $B_r$ ,  $|b| < r < R$ , gilt

$$|a_\nu q_\nu - \nu a_\nu b^{\nu-1}|_{B_r} \leq a_\nu \nu r^{\nu-1}$$

also

$$\sum_{\nu \geq 1} |a_\nu q_\nu|_{B_r} \leq \sum_{\nu \geq 1} \nu |a_\nu| r^{\nu-1} < \infty$$

nach Satz oben. □



### 3.3.1 Beispiele holomorpher Funktionen

i) Geometrische Reihe:

$$\sum_{v=0}^{\infty} z^v = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{v \geq k} \binom{v}{k} z^{v-k}, \quad z \in \mathbb{E}$$

ii) Exponentialfunktion:

$$\exp' z = \left( \sum_{v \geq 0} \frac{z^v}{v!} \right)' = \sum_{v \geq 1} \frac{z^{v-1}}{(v-1)!} = \exp z$$

iii) Cosinusfunktion:

$$\cos' z = \left( \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v z^{2v}}{(2v)!} \right)' = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v z^{2v-1}}{(2v-1)!} = -\sin z$$

iv) Sinusfunktion:

$$\sin' z = \cos z$$

v) Logarithmische Reihe:

$$\lambda(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \Rightarrow \lambda'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \frac{1}{1+z}$$

vi) Arcustangens-Reihe:

$$a(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \Rightarrow a'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$



# 4

## Elementar-transzendente Funktionen

### 4.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

**Satz 4.1.1**

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

i)  $\exp z \neq 0$

ii)  $(\exp z)^{-1} = \frac{1}{\exp z} = \exp -z$

**Beweis:**  $h(z) := \exp z \exp -z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

$$h'(z) = \exp z \exp -z + \exp z (-\exp -z) = 0$$

Also  $h' \equiv 0$  auf  $\mathbb{C}$ , also ist  $h$  konstant auf  $\mathbb{C}$  ( $h \equiv c \in \mathbb{C}$ ).

$$c = h(0) = \exp 0 \exp -0 = 1$$

Somit:

$$\exp z \exp -z = 1 \forall z \in \mathbb{C}$$

Hieraus folgt i) und ii) direkt. □

**Satz 4.1.2**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann sind äquivalent:

i)  $\exists a, b \in \mathbb{C}$ :

$$f(z) = a \exp bz \forall z \in G$$

ii)  $\exists b \in \mathbb{C}$ :

$$f' = bf \text{ auf } G$$

**Beweis:**

i)  $\Rightarrow$  ii): trivial

ii)  $\Rightarrow$  i): Sei

$$h(z) = f(z) \exp -bz$$

$$h'(z) = f'(z) \exp -bz - b \exp -bz f(z) = (bf(z) - bf(z)) \exp -bz = 0$$

Also  $h' \equiv 0$  auf  $G$ . Also existiert ein  $a \in \mathbb{C}$ , so dass  $h \equiv a$  auf  $G$ .

$$a = h(z) = f(z) \exp -bz \Leftrightarrow f(z) = a \exp bz$$

$$h(0) = f(0) \exp 0 = f(0) \Rightarrow f(z) = f(0) \exp bz$$

□

Spezialfall: Die einzige holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die  $f' = f$  und  $f(0) = 1$  erfüllt, ist die Exponentialfunktion.

**Satz 4.1.3 Additionstheorem für exp**

$$\exp(z + w) = \exp z \exp w \forall z, w \in \mathbb{C}$$

**Beweis:** Sei  $w \in \mathbb{C}$  fix,  $f(z) := \exp(z + w)$ .

$$f'(z) = \exp(z + w) = f(z)$$

Also:

$$f(z) = f(0) \exp z = \exp w \exp z$$

□

**Satz 4.1.4 Additionstheoreme für  $\sin$ ,  $\cos$** 

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

**Beweis:**

$$\exp(i(z+w)) = \exp iz \exp iw = (\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\cos z \sin w + \sin z \cos w)$$

Analog:

$$\exp(-i(z+w)) = \dots$$

Rest folgt aus vorigem Kapitel. □**Definition 4.1.5**

Eine Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $\omega$ -periodisch (oder periodisch), falls  $\exists \omega \in \mathbb{C}$  mit  $f(z) = f(z + \omega) \forall z \in \mathbb{C}$ .  $\omega$  heißt dann Periode von  $f$ .

**Beispiel** $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ :

$$\exp(z + 2\pi i k) = \exp z \exp 2\pi i k = \exp z (\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = \exp z$$

Also ist  $\exp$  periodisch mit Periode  $2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$  (im Unterschied zu  $e^x, x \in \mathbb{R}$ !). //**4.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln**

$$w = u + iv.$$

$$\tan \varphi = \frac{v}{u} \Leftrightarrow \arctan \frac{v}{u} = \varphi$$

und

$$r = |w| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Das heißt:

$$w = r \cdot e^{i\varphi} = r \exp i\varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

und

$$|w| = |r \exp i\varphi| = r |\exp i\varphi| = r \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = r$$

$w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ .

$$\varphi = \arg w = \begin{cases} \arctan \frac{v}{u} & v \geq 0, u > 0 \\ \pi - \arctan \frac{v}{u} & v \geq 0, u < 0 \\ \pi & v = 0, u < 0 \\ \pi + \arctan \frac{v}{u} & u, v < 0 \\ \frac{3}{2}\pi & v < 0, u = 0 \\ 2\pi - \arctan \frac{v}{u} & v < 0 < u \end{cases}$$

**Beispiel**

$$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}, \quad i = 1 \cdot e^{i \cdot \pi/2}, \quad -1 = e^{i \cdot \pi}, \quad -i = e^{3/2\pi i}, \quad 1 = e^{2\pi i}, \dots$$

//

Multiplikation:

$$z \cdot w = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}$$

Per Induktion kann man dann folgern:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n} \forall \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

#### Satz 4.2.1 Moivresche Formel

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos \varphi n + i \sin \varphi n$$

Problem: Löse  $z^n = 1, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$ . Wir wissen (Fundamentalsatz der Algebra): Die Gleichung hat höchstens  $n$  Lösungen, nämlich

$$\zeta_k := e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\zeta_k^n = \left( e^{\frac{2\pi i k}{n}} \right)^n = e^{2\pi i k} = 1$$

$\zeta_k$  heißen **n-te Einheitswurzeln**.

## 4.3 Logarithmusfunktion

**Definition 4.3.1**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion  $l: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Logarithmusfunktion**, falls  $\exp(l(z)) = z \forall z \in G$ .

**Bemerkung**

- i)  $l'(z) = \frac{1}{z}$
- ii)  $l$  hängt ab von  $G$ .
- iii)  $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-, l(z) = \ln|z| + i \arg z = \log z$





# 5

## Komplexe Integralrechnung

### 5.1 Wegintegrale in $\mathbb{C}$

Eine **Kurve**:  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}_{x,y}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , stetig differenzierbar.

$\gamma(a)$  heißt **Anfangspunkt**,  $\gamma(b)$  **Endpunkt**.

Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{C} \\ \vdots \\ \gamma_m: I_m \rightarrow \mathbb{C} \end{array} \right. \quad \text{Kurven, } \gamma_k(b_k) = \gamma_{k+1}(a_{k+1}), b_k = a_{k+1}$$

#### Satz 5.1.1 Integration längs Wegen

$|\gamma| = \gamma(I)$  sei der (kompakte) Träger des Weges  $\gamma$ . Sei  $f(z) = u(z) + iv(z) \in C(|\gamma|)$ . Ist  $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t): [a_i, b_i] = I_i \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar, so gilt  $f(\gamma(t))\gamma'(t) \in C(I)$  und

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &:= \int_{\gamma} f(z) dz \\ &:= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t) dt + i \int_a^b (u(\gamma(t))\beta'(t) + v(\gamma(t))\alpha'(t)) dt \end{aligned}$$

Für einen Weg  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  und  $f \in C(|\gamma|)$  gilt dann

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{\mu=1}^m \int_{\gamma_{\mu}} f dz$$

**Satz 5.1.2**

$\forall n \in \mathbb{Z} \forall B = B_r(c), r > 0$ , gilt

$$\int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

**Beweis:** Sei  $\zeta(t) = c + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  eine Parametrisierung. Dann ist  $\zeta'(t) = ire^{it}$  und es folgt:

$$\int_{\partial B} (\zeta' - c)^n d\zeta = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt$$

Da  $\frac{1}{n+1}e^{i(n+1)t}$  eine Stammfunktion von  $ie^{i(n+1)t}$ ,  $n \neq -1$ , ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.1.3 Unabhängigkeit von der Parametrisierung**

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi: \tilde{I} \rightarrow I$  bijektiv und stetig differenzierbar,  $\varphi' \neq 0$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei  $f \in C(|\gamma|)$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

**Beweis:** Kettenregel!  $\square$

## 5.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale

### Satz 5.2.1 Rechenregeln

$\forall f, g \in C(|\gamma|)$  gilt:

i)

$$\int_{\gamma} f + g dz = \int_{\gamma} f dz + \int_{\gamma} g dz$$

ii)

$$\int_{\gamma} c f dz = c \int_{\gamma} f dz \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

iii)

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz, f \in C(|\gamma_1| \cup |\gamma_2|)$$

**Beweis:** Folgt direkt aus der Definition. □

### Satz 5.2.2 Umkehrregel

$$\int_{-\gamma} f dz = - \int_{\gamma} f dz \quad \forall f \in C(|\gamma|)$$

### Satz 5.2.3 Transformationsregel

Es sei  $g: \tilde{D} \rightarrow D$  eine holomorphe Abbildung mit stetiger Ableitung  $g'$ , es sei  $\tilde{\gamma}$  ein Weg in  $\tilde{D}$  und  $\gamma := g \circ \tilde{\gamma}$  der Bildweg in  $D$ . Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(g(\zeta)) g'(\zeta) d\zeta \quad \forall f \in C(|\gamma|)$$

**Beweis:** Folgt direkt aus der Kettenregel! □

**Definition 5.2.4 Standardabschätzung**

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t).$

$$L(\gamma) := \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \text{Länge von } \gamma$$

**Satz 5.2.5 Standardabschätzung für Wegintegrale**

$\forall$  stückweise differenzierbare Wege  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$  und  $\forall f \in C(|\gamma|)$  gilt:

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \|f\|_{|\gamma|} L(\gamma), \|f\|_{|\gamma|} := \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

**Beweis:** Für eine Kurve ist

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \|f\|_{|\gamma|} \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Für einen Weg: Dreiecksungleichung! □

**Satz 5.2.6 Vertauschungssatz für Folgen**

Es sei  $\gamma$  ein Weg und  $f_n \in C(|\gamma|)$  eine Funktionenfolge die in  $|\gamma|$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Dann gilt:

$$\lim \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} \lim f_n dz = \int_{\gamma} f dz$$

**Beweis:**

$$\left| \int_{\gamma} f_n dz - \int_{\gamma} f dz \right| \leq \left| \int_{\gamma} (f_n - f) dz \right| \leq \|f_n - f\|_{|\gamma|} L(\gamma) \rightarrow 0$$

□

**Satz 5.2.7 Vertauschungssatz für Reihen**

Sei  $\gamma$  ein Weg und  $\sum f_v$ ,  $f_v \in C(|\gamma|)$ , eine Funktionsreihe, die in  $|\gamma|$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Dann gilt:

$$\sum \int_{\gamma} f_v dz = \int_{\gamma} (\sum f_v) dz = \int_{\gamma} f dz$$

## 5.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen

**Satz 5.3.1**

Ist  $f$  stetig in  $D$ , so sind folgende Aussagen über eine Funktion  $F: D \rightarrow \mathbb{C}$  äquivalent:

- i)  $F$  ist holomorph in  $D$  und es gilt  $F' = f$ .
- ii) Für jeden Weg  $\gamma$  in  $D$  mit Anfangspunkt  $w$  und Endpunkt  $z$  gilt:

$$\int_{\gamma} f dz = F(z) - F(w)$$

**Beweis:**

$i) \Rightarrow ii)$ : Ist  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ,  $t \mapsto \zeta(t)$ , stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt = \int_a^b F'(\zeta(t)) \zeta'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F(\zeta(t))) dt = F(\zeta(b)) - F(\zeta(a)) = F(z) - F(w)$$

Ist nun  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  irgendein Weg, dann ist

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{\mu=1}^m \int_{\gamma_{\mu}} f dz = \sum_{\mu=1}^m F(b_{\mu}) - F(a_{\mu}) = F(b_m) - F(a_1) = F(z) - F(w)$$

$ii) \Rightarrow i)$ : Wir zeigen, dass für jeden Punkt  $c \in D$  gilt:  $F'(c) = f(c)$ . Es sei  $\bar{B} \subset D$  eine Kreisscheibe um  $c$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c, z]} f dz \quad \forall z \in B$$

Setzt man

$$F_1(z) = \frac{1}{z - c} \int_{[c, z]} f d\zeta$$

für  $z \in B \setminus \{c\}$  und  $F_1(c) := f(c)$ , so folgt:

$$F(z) = F(c) + (z - c)F_1(z), \quad z \in B$$

Zeigen wir noch, dass  $F_1$  stetig in  $c$  ist, so folgt  $F'(c) = F_1(c) = f(c)$ . Für  $z \in B \setminus \{c\}$  gilt:

$$F_1(z) - F_1(c) = \frac{1}{z - c} \int_{[c, z]} (f(\zeta) - f(c)) d\zeta$$

Es folgt:

$$|F_1(z) - F_1(c)| \leq \frac{1}{|z - c|} |f - f(c)|_{[z, c]} |z - c| \leq |f - f(c)|_B \forall z \in B$$

$f$  ist stetig, also folgt, dass  $F_1$  stetig in  $c$  ist.

□

Eine Funktion  $f \in C(D)$  heißt **integabel**, wenn eine Stammfunktion von  $f$  existiert.

### Satz 5.3.2 Integrabilitätskriterium

Folgende Aussagen über eine in  $D$  stetige Funktion  $f$  sind äquivalent:

- i)  $f$  ist integabel in  $D$ .
- ii) Für jeden in  $D$  geschlossenen Weg  $\gamma$  gilt:

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

### Bemerkung

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

ist eine Stammfunktion wenn i) gilt. Weil

$$0 = \int_{\gamma_z - \gamma'_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_z} f d\zeta - \int_{\gamma'_z} f d\zeta$$

also

$$\int_{\gamma_z} f d\zeta = \int_{\gamma'_z} f d\zeta \forall \gamma_z, \gamma'_z$$

mit Anfangspunkt  $z$  und Endpunkt  $z$ , d.h.  $F(z)$  ist von der Wahl von  $\gamma_z$  unabhängig, d.h.  $F(z)$  ist korrekt definiert und man kann zeigen, dass  $F'(z) = f(z) \forall z \in D$ .

**Beweis:**

$ii) \Rightarrow i)$ : Da Wege stets in Zusammenhangskomponenten von  $D$  verlaufen, darf man annehmen, dass  $D$  ein Gebiet ist. Sei  $\gamma$  irgendein Weg in  $D$  von  $w$  nach  $z$ , Wege  $\gamma_z, \gamma_w$  in  $D$  von  $z_1$  nach  $w$  bzw.  $z$ . Dann ist  $\gamma_w + \gamma - \gamma_z$  ein geschlossener Weg, daher gilt

$$0 = \int_{\gamma_w + \gamma - \gamma_z} f d\zeta = \int_{\gamma_w} f d\zeta + \int_{\gamma} f d\zeta - \int_{\gamma_z} f d\zeta = F(w) + \int_{\gamma} f d\zeta - F(z)$$

Also erfüllt  $F$  die Eigenschaft vom letzten Satz.

$i) \Rightarrow ii)$ : Trivial, weil

$$\int_{\gamma} f d\zeta = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt}) = 0$$

□

**Definition 5.3.3**

$G \subset \mathbb{C}$  heißt **Sterngebiet** mit Zentrum  $c \in G$  genau dann, wenn  $\forall z \in G$  gilt:  $[c, z] \subset G$ .

**Definition 5.3.4**

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  drei Punkte. Die kompakte Menge

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1), s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\}$$

heißt das **(kompakte) Dreieck** mit Eckpunkten  $z_1, z_2, z_3$ .

Der geschlossene Streckenzug

$$\partial\Delta := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$$

heißt der **Rand** von  $\Delta$ .

**Satz 5.3.5**

Es sei  $G$  ein Sterngebiet mit Zentrum  $z_1$ . Es sei  $f \in C(G)$ , für den Rand  $\partial\Delta$  eines jeden Dreiecks  $\Delta \subset G$ , das  $z$  als Endpunkt hat, gelte:

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$$

Dann ist  $f$  integrabel in  $G$ , die Funktion

$$F(z) := \int_{[z_1, z]} f d\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion zu  $f$  in  $G$ . Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $G$ .

**Beweis:** Sei  $G$  ein Sterngebiet. Dann ist  $[z_1, z] \subset G \forall z \in G$  und  $F$  wohldefiniert. Sei  $c \in G$  fixiert. Ist  $z$  nahe genug bei  $c$  gewählt, so liegt das Dreieck  $\Delta$  mit den Eckpunkten  $z_1, c, z$  in  $G$ . Nach Voraussetzung verschwindet das Integral von  $f$  längs  $\partial\Delta = [z_1, c] + [c, z] + [z, z_1]$ , so gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c, z]} f d\zeta$$

$z \in G$  nahe bei  $c$ . hieraus folgt wie im Beweis der Implikation ii)  $\Rightarrow$  i) des Satzes 1, dass  $F$  in  $c$  komplex differenzierbar ist und dass gilt:  $F'(c) = f(c)$ .  $\square$



# 6

## Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung

### 6.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

#### Lemma 6.1.1 Integrallemma von Goursat

Es sei  $f$  holomorph im Bereich  $D$ . Dann gilt für den Rand  $\partial\Delta$  eines jeden Dreiecks  $\Delta \subset D$ :

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$$

**Beweis:** Sei  $\int_{\partial\Delta} f d\zeta \neq 0$  und sei

$$\alpha(\Delta) := \left| \int_{\partial\Delta} f d\zeta \right| \neq 0$$

Wir teilen  $\Delta$  in vier gleiche Dreiecke  $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$ . Dann

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^k} f d\zeta$$

Damit existiert ein  $k_1$ , so dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f d\zeta \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4}$$

Wir teilen  $\Delta_1^{k_1}$  in vier gleiche Dreiecke  $\Delta_2^{k_1,1}, \Delta_2^{k_1,2}, \Delta_2^{k_1,3}, \Delta_2^{k_1,4}$  und bekommen

$$\int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f d\zeta = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_2^{k_1,k}} f d\zeta$$

Damit existiert ein  $k_2$ , so dass

$$\left| \int_{\partial \Delta_2^{k_1, k_2}} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \Delta_1^k} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4^2} \alpha(\Delta)$$

Wir machen genau das gleiche für  $\Delta_2^{k_1, k_2}$  und bekommen  $\Delta_3^{k_1, k_2, k_3}, \dots, \Delta_m^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ , so dass

$$\left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4^m} \alpha(\Delta)$$

Es existiert genau ein

$$p = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_m^{k_1, \dots, k_m} \subset D$$

$f \in \mathcal{O}(D)$ , also:

$$f(\zeta) = f(p) + f'(p)(\zeta - p) + g(\zeta)(\zeta - p), \quad g \in C(D), g(p) = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta = \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f(p) d\zeta + \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f'(p)(\zeta - p) d\zeta + \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} g(\zeta)(\zeta - p) d\zeta$$

Für  $f(p)$  ist  $f(p)\zeta$  eine Stammfunktion, für  $f'(p)(\zeta - p)$  ist  $\frac{1}{2}f'(p)(\zeta - p)^2$  eine Stammfunktion, also folgt:

$$\left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta \right| = \left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} g(\zeta)(\zeta - p) d\zeta \right| \leq \sup_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} |g(\zeta)(\zeta - p)| \cdot \frac{l(\Delta)}{2^m} \leq \sup_{\zeta \in \partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Auf der anderen Seite:

$$\left| \int_{\partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} f d\zeta \right| \geq \frac{1}{4^m} \alpha(\Delta)$$

$$\frac{1}{4^m} \alpha(\Delta) \geq \sup_{\zeta \in \partial \Delta_m^{k_1, \dots, k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \nmid$$

□

**Satz 6.1.2 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete**

Es sei  $G$  ein Sterngebiet mit Zentrum  $c$ , es sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$ . Dann ist  $f$  integrierbar in  $G$ , die Funktion

$$F(z) := \int_{[c,z]} f d\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion von  $f$  in  $G$ . Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $G$ .

**Beweis:** Wegen  $f \in \mathcal{O}(G)$  folgt mit Goursat:

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0, \quad \Delta \subset G$$

Mit dem Integrabilitätskriterium für Sterngebiete folgt dann, dass

$$F(z) = \int_{[c,z]} f d\zeta$$

eine Stammfunktion von  $f$  ist. □

**Reeller Beweis des Integrallemmas von Goursat:** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Bereich,  $\Sigma \subset D$  mit glattem Rand  $\partial\Sigma$  und  $f \in \mathcal{O}(D)$ .

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} f d\zeta &= \int_{\partial\Sigma} (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \int_{\partial\Sigma} (u dx - v dy) + i \int_{\partial\Sigma} (v dx + u dy) \\ &= \iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + i \iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

## 6.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

### Lemma 6.2.1 Zentrierungslemma

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Bereich,  $\bar{B} \subset D$  eine Kreisscheibe,  $B_r(z) := \{\eta \mid |z - \zeta| = r\}$  und  $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z\})$ . Dann ist

$$\int_{\partial B} f d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} f d\zeta$$

**Beweis:** Sei  $l$  eine Gerade, so dass  $z \in l$ . Wir nehmen  $\Omega_1, \Omega_2$  wie auf dem Bild  $(:|)$ . Dann sind  $\omega_1 \subset \tilde{\Omega}_1$  und  $\Omega_2 \subset \tilde{\Omega}_2$  Sterngebiete. Dann:

$$\int_{\partial\Omega_1} f d\zeta = 0, \quad \int_{\partial\Omega_2} f d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} f d\zeta = 0$$

Es folgt:

$$\int_{\partial B} f d\zeta - \int_{\partial B_r(z)} f d\zeta = 0$$

Die Aussage folgt. □

### Korollar 6.2.2

Ist  $g$  beschränkt um  $z$ , so gilt:

$$\int_{\partial B} g d\zeta = 0$$

**Beweis:**  $\exists M > 0, \varepsilon > 0$ , so dass  $\forall$  Kreis  $S \subset B$  um  $z$  mit Radius  $t < s$  gilt:  $|g|_S \leq M$ . Mit dem Zentrierungslemma und der Standardabschätzung haben wir:

$$\left| \int_{\partial B} g d\zeta \right| = \left| \int_S g d\zeta \right| \leq |g|_S 2\pi t \leq M 2\pi t \forall t > 0$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

**Satz 6.2.3 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben**

Es sei  $f$  holomorph im Bereich  $D$ , es sei  $B := B_r(c)$ ,  $r > 0$ , eine Kreisscheibe, die nebst Rand  $\partial B$  in  $D$  liegt. Dann gilt  $\forall z \in B$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

**Beweis:** Sei  $z \in B$  fixiert. Die Funktion  $g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$  für  $\zeta \in D \setminus \{z\}$ ,  $g(z) := f'(z)$ , ist holomorph in  $D \setminus \{z\}$  und stetig in  $D$ . Dann folgt:

$$0 = \int_{\partial B} g d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z)$$

Die Behauptung folgt. □

**Korollar 6.2.4 Mittelwertgleichung**

Unter den Voraussetzungen von obigem Satz gilt:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta$$

**Beweis:**

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d(c + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta}) r i e^{i\theta}}{d} d\theta$$

Durch Kürzen erhält man die obige Formel. □

**Korollar 6.2.5 Mittelwertungleichung**

$$|f(c)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$$

## 6.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

### Definition 6.3.1

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt im Kreis  $B = B_r(c) \subset D$  in eine Potenzreihe  $\sum a_v(z-c)^v$  um  $c$  entwickelbar, wenn die Potenzreihe in  $B$  gegen  $f|_B$  konvergiert.

Aus der Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation für Potenzreihen folgt sofort:

### Satz 6.3.2

Ist  $f$  in  $B$  um  $c$  in eine Potenzreihe  $\sum a_v(z-c)^v$  entwickelbar, so ist  $f$  in  $B$  beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt:

$$a_v = \frac{f^{(v)}(c)}{v!} \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

Eine Potenzreihenentwicklung einer Funktion  $f$  um  $c$  ist also, unabhängig vom Radius  $r$  des Kreises  $B$ , eindeutig durch die Ableitungen von  $f$  in  $c$  bestimmt und hat immer die Form

$$f(z) = \sum \frac{f^{(v)}(c)}{v!} (z-c)^v$$

Diese Reihe heißt (wie im Reellen) die **Taylorreihe von  $f$  um  $c$** . Sie konvergiert in  $B$  normal.

Ist  $\gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $\mathbb{C}$ , so ordnen wir jeder stetigen Funktion  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

zu. Wir behaupten:

### Lemma 6.3.3 Entwicklungslemma

Die Funktion  $F$  ist in  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$  holomorph. Ist  $c \notin |\gamma|$  irgendein Punkt, so konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_0^{\infty} a_v(z-c)^v \quad \text{mit} \quad a_v := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{v+1}} d\zeta$$

in jeder Kreisscheibe um  $c$ , die  $|\gamma|$  nicht trifft, gegen  $F$ . Die Funktion  $F$  ist beliebig oft differenzierbar in  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ . Es gilt:

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

**Beweis:** Sei  $B = B_r(c)$  mit  $B \cap |\gamma| = \emptyset$ . Die in  $\mathbb{E}$  konvergente Reihe

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{v \geq k} \binom{v}{k} w^{v-k}$$

liefert (mit  $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} &= \sum_{v \geq k} \frac{1}{(\zeta-c)^{v+1}} (\zeta-c)^{v-k} \quad \forall z \in B, \zeta \in |\gamma|, k \in \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{((\zeta-c)-(z-c))^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)\right)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \sum_{v \geq k} \binom{v}{k} \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^{v-k} \end{aligned}$$

Mit  $g_v(\zeta)$ ,  $\zeta \in |\gamma|$ , folgt daher:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{v \geq k} k! \binom{v}{k} g_v(\zeta) (z-c)^{v-k} d\zeta$$

Da  $|\zeta-c| \geq r \forall \zeta \in |\gamma|$ , folgt  $|g_v|_{|\gamma|} \leq r^{-(v+1)} |f|_{|\gamma|}$  und also

$$\max_{\zeta \in |\gamma|} |g_v(\zeta)(z-c)^{v-k}| \leq \frac{1}{r^{k+1}} |f|_{|\gamma|} q^{v-k} \quad \text{mit} \quad q := \frac{|z-c|}{r}$$

Da  $0 \leq q < 1 \forall z \in B$  und da

$$\sum_{v \geq k} \binom{v}{k} q^{v-k} = \frac{1}{(1-q)^{v+1}}$$

konvergiert oben die rechts unter dem Integral stehende Reihe für feste  $z \in B$  in  $\zeta$  normal auf  $\gamma$ . Daher gilt nach dem Vertauschungssatz für Reihen:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{v \geq k} k! \binom{v}{k} a_v (z-c)^{v-k} \quad \text{mit} \quad a_v := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{v+1}} d\zeta$$

Damit ist gezeigt, dass die durch oben definierte Funktion  $F$  in der Kreisscheibe  $B$  durch die Potenzreihe  $\sum a_v (z-c)^v$  dargestellt wird ( $k=0$ ), wegen Eigenschaften von Potenzreihen folgt weiter, dass  $F$  in  $B$  komplex differenzierbar ist und dass gilt:

$$F^{(k)}(z) = \sum_{v \geq k} k! \binom{v}{k} a_v (z-c)^{v-k}, \quad z \in B, k \in \mathbb{N}$$

Da  $B$  irgendeine Kreisscheibe in  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ , so folgt (2) und insbesondere  $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus |\gamma|)$ . □

**Satz 6.3.4 Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor**

Es sei  $c \in D$ , und es sei  $B_d(c)$  die größte Kreisscheibe um  $c$  in  $D$ . Dann ist jede in  $D$  holomorphe Funktion  $f$  um  $c$  in eine Taylorreihe  $\sum a_\nu(z-c)^\nu$  entwickelbar, die in  $B_d(c)$  normal gegen  $f$  konvergiert. Die Taylorkoeffizienten  $a_\nu$  werden gegeben durch die Integrale

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{\nu+1}} d\zeta \quad (4)$$

wobei  $B := B_r(c)$  mit  $0 < r < d$ .

Insbesondere ist  $f$  beliebig oft komplex differenzierbar in  $D$ . In jeder Kreisscheibe in  $B$  gelten die Cauchyschen Integralformeln

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, z \in B, \forall k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

**Beweis:** Wegen  $f \in \mathcal{O}(D)$  gilt für jeden Kreis  $B = B_r(c)$ ,  $0 < r < d$ , die Cauchysche Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B$$

Nach dem Entwicklungslemma (mit  $F := f$ ,  $\gamma = \partial B$ ) hat  $f$  also in  $c$  eine in  $B_r(c)$  konvergente Taylorentwicklung mit den durch (4) gegebenen Taylorkoeffizienten. Jede Wahl von  $r < d$  führt zur gleichen Reihe. Insbesondere herrscht Konvergenz gegen  $f$  in  $B_d(c)$ . Die Identitäten (5) folgen ebenfalls direkt aus dem Entwicklungslemma.  $\square$

Für jede Menge  $A \subset D$  zeigt man die Äquivalenz folgender Aussagen:

- i) Jeder Punkt von  $A$  hat eine Umgebung  $U$ , so dass  $U \cap A$  endlich ist.
- ii)  $A$  ist abgeschlossen in  $D$ , und jeder Punkt  $p \in A$  ist ein isolierter Punkt von  $A$  (d.h. hat eine Umgebung  $U$  mit  $U \cap A = \{p\}$ ).
- iii) Für jedes Kompaktum  $K \subset D$  ist  $K \cap A$  endlich.

**Definition 6.3.5**

Mengen, die i)-iii) erfüllen heißen **lokal endlich in  $D$** .

Endliche Mengen sind lokal endlich.



**Definition 6.3.6**

Ist  $A \subset D$  abgeschlossen und  $f \in \mathcal{O}(D \setminus A)$ , so heißt  $f$  **stetig** bzw. **holomorph nach  $A$  fortsetzbar**, wenn es eine in  $D$  stetige bzw. holomorphe Funktion  $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so dass  $\tilde{f}|_{D \setminus A} = f|_{D \setminus A}$ .

**Satz 6.3.7 Riemannscher Fortsetzungssatz**

Ist  $f$  lokal endlich in  $D$ , so sind folgende Aussagen über eine in  $D \setminus A$  holomorphe Funktion äquivalent:

- i)  $f$  ist holomorph nach  $A$  fortsetzbar.
- ii)  $f$  ist stetig nach  $A$  fortsetzbar.
- iii)  $f$  ist in einer Umgebung  $U \subset D$  eines jeden Punktes  $c \in A$  beschränkt.
- iv)

$$\lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z) = 0 \quad \forall c \in A$$

**Beweis:** i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  iv) ist trivial. Wir zeigen iv)  $\Rightarrow$  i).

Wir nehmen  $C = 0$  an: Wir betrachten die Funktionen

$$g(z) = zf(z) \quad \forall z \in D \setminus \{0\}, \quad g(0) := 0, \quad h(z) := zg(z)$$

$g \in C(D)$  wegen iv). Dann folgt  $h(z) = h(0) + zg(z)$  ist im Nullpunkt komplex differenzierbar mit  $h'(0) = g(0) = 0$ . Aus  $h \in \mathcal{O}(D \setminus \{0\})$  folgt  $h \in \mathcal{O}(D)$  und mit dem Entwicklungslemma:

$$h(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Wegen  $h(0) = h'(0) = 0$  folgt

$$h(z) = z^2(a_2 + a_3z + a_4z^2 + \dots)$$

Da  $h(z) = z^2f(z)$  für  $z \in D \setminus \{0\}$  ist

$$\tilde{f}(z) = a_2 + a_3z + a_4z^2 + \dots$$

□



# 7

## Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen

### 7.1 Identitätssatz

Eine holomorphe Funktion wird lokal eindeutig durch ihre Taylorreihe dargestellt. Hierin ist bereits ein Identitätssatz enthalten, nämlich:

**Satz 7.1.1**

$f, g \in \mathcal{O}(D)$ ,  $\exists c \in D \exists U(c) \subset D$  so dass  $f|_U = g|_U$ . Dann gilt  $f|_{B_d(c)} = g|_{B_d(c)}$ , wobei  $d := d_c(D)$  der Randabstand von  $c$  in  $D$  ist.

**Beweis:** Klar durch die letzten Sätze.

□

Eine andere Version des Identitätssatzes folgt direkt aus der Integralformel:

**Satz 7.1.2**

$f, g \in \mathcal{O}(U(\bar{B}))$ ,  $f|_{\partial B} = g|_{\partial B}$ . Dann folgt  $f \equiv g$  eine Umgebung von  $\bar{B}$ .

**Satz 7.1.3 Identitätssatz**

Folgende Aussagen über zwei in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen  $f$  und  $g$  sind äquivalent:

- i)  $f = g$ .
- ii) Die 'Identitätsmenge'  $\{w \in G \mid f(w) = g(w)\}$  hat einen Häufungspunkt in  $G$ .
- iii)  $\exists c \in G$ , so dass  $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c) \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:**

$i) \Rightarrow ii)$ : Trivial.

$ii) \Rightarrow iii)$ : Wir setzen  $h := f - g$ . Die Nullstellenmenge  $M := \{w \in G \mid h(w) = 0\}$  hat nach Voraussetzungen einen Häufungspunkt in  $c \in G$ . Gäbe es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $h^{(m)}(c) \neq 0$ , so wählen wir  $m$  minimal. Dann gilt:  $h(z) = (z - c)^m h_m(z)$  mit  $h_m(z) = \sum_{\mu \geq m} \frac{h^{(\mu)}(c)}{\mu!} (z - c)^{\mu - m} \in \mathcal{O}(B)$  für jeden Kreis  $B \subset G$  um  $c$  nach dem Entwicklungssatz, wobei  $h_m(c) \neq 0$ . Aus Stetigkeitsgründen ist  $h_m$  dann in einer Umgebung  $U \subset B$  um  $c$  nullstellenfrei. Es folgt

$$M \cap (U \setminus \{c\}) = \emptyset$$

d.h.  $c$  wäre ein Häufungspunkt von  $M$ .  $\nmid$

$iii) \Rightarrow i)$ :

$$S_n := \{w \in G \mid f^{(n)}(w) = g^{(n)}(w)\}$$

$f^{(n)}$  und  $g^{(n)}$  sind stetig, also ist  $S_n$  abgeschlossen. Somit ist auch  $S := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$  abgeschlossen.  $c \in S$ , also  $S \neq \emptyset$ .  $h = f - g \in \mathcal{O}(G)$  und  $h^{(n)}(c) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Es existiert ein  $\varepsilon > 0$  so dass  $\overline{B(c, \varepsilon)} \subset G$  und  $h$  lässt sich auf  $B(c, \varepsilon)$  in eine Potenzreihe entwickeln die auf  $B(c, \varepsilon)$  kompakt konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

mit  $a_n = \frac{h^{(n)}(c)}{n!} = 0$ . Also ist auch die Potenzreihe  $\equiv 0$  auf  $B(c, \varepsilon)$  und damit auch  $h|_{B(c, \varepsilon)} \equiv 0$ . Dies gilt für alle  $c \in S$ , aber das heißt  $\forall c \in S \exists \varepsilon > 0 : B(c, \varepsilon) \subset S$ . Also ist  $S$  offen,  $G$  zusammenhängend und somit  $S = G$  und  $f = g$ .

□

**Korollar 7.1.4**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar. Dann gibt es maximal eine Möglichkeit,  $f$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  fortzusetzen.

Zum Beispiel:  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ .

## 7.2 Existenz singulärer Punkte

**Definition 7.2.1**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{O}(G)$ . Dann heißt  $w \in \partial G$  ein **singulärer Punkt** von  $f$ , wenn es keine Umgebung  $U$  von  $w$  in  $\mathbb{C}$  gibt mit  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$  und  $f|_{U \cap G} = \tilde{f}|_{U \cap G}$ .

**Beispiel**

$f(z) = \frac{1}{z}$  auf  $G = \mathbb{C}^*$ .  $w \in 0 \in \partial \mathbb{C}^*$ . Angenommen  $w$  wäre kein singulärer Punkt von  $f$ . Dann  $\exists \varepsilon > 0$  und  $\exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(B(0, \varepsilon))$  mit  $\tilde{f}|_{B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}} = \frac{1}{z}$ . Aber  $\frac{1}{z}$  hat keine holomorphe Fortsetzung in 0! Also ist 0 singulärer Punkt. //

**Satz 7.2.2 Existenz singulärer Punkte**

Auf dem Rand des Konvergenzkreises einer holomorphen Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$  liegt immer mindestens ein singulärer Punkt von  $f$ .

**Beweis:** Gegenannahme: Es gibt keinen singulären Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises von  $f$ . Sei  $\zeta > 0$  der Konvergenzradius von  $f$ .  $\forall w \in \partial B(c, \zeta) \exists$  offene Umgebung  $U_w$  von  $w$  in  $\mathbb{C}$  und  $\exists \tilde{f}_w \in \mathcal{O}(U_w)$  und  $\tilde{f}_w|_{U_w \cap B(c, \zeta)} = f|_{U_w \cap B(c, \zeta)}$ .  $\partial B(c, \zeta)$  ist kompakt, also existiert eine endliche Teilüberdeckung.  $w_1, \dots, w_m \in \partial B(c, \zeta)$  mit Umgebungen  $U_1, \dots, U_m$ . Wir definieren:

$$F: B(c, \zeta) \cup \bigcup_{j=1}^m U_j \rightarrow \mathbb{C}$$

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & z \in B(c, \zeta) \\ \tilde{f}_j(z) & z \in U_j \end{cases}$$

$F$  ist holomorph.

$\exists$  Kreisscheibe  $B(c, \zeta')$ ,  $\zeta' > \zeta$ , mit

$$B(c, \zeta') \subset B(c, \zeta) \cup \bigcup_{j=1}^m U_j$$

$F$  lässt sich um  $c$  in eine Potenzreihe entwickeln mit Konvergenzradius mindestens  $\zeta' > \zeta$ .  $B(c, \zeta)$  ist zusammenhängend und  $F|_{B(c, \zeta)} = f|_{B(c, \zeta)}$ , also sind nach dem Identitätssatz die Potenzreihen gleich. Dies ist ein Widerspruch zum Konvergenzradius  $\zeta$ .  $\square$

### Definition 7.2.3

Eine holomorphe Funktion, die auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert ist, heißt **ganze Funktion**.

### Satz 7.2.4 Satz von Liouville

Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.

**Beweis:** Cauchy-Integralformel:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial B(z, \rho)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dz$$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^2} \gamma'(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma(t))|}{\rho^2} \rho dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} |f(\gamma(t))| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} M dt \\ &= \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Also  $f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$ . Da  $\mathbb{C}$  zusammenhängend ist, ist  $f$  also konstant.  $\square$

**Satz 7.2.5 Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[z]$ , welches nicht konstant ist, hat mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:** Gegenannahme: Sei  $p \in \mathbb{C}[z]$  ohne Nullstelle in  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $f(z) := \frac{1}{p(z)}$  eine ganze Funktion (Quotientenregel).

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$$

Nach dem Wachstumslemma für Polynome  $p \neq \text{const.}$   $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0$  so dass  $|f(z)| < \varepsilon$  falls  $|z| > r$ .  $f$  ist stetig, also ist  $f$  auf  $\overline{B(0, r)}$  beschränkt durch  $M$ .  $f$  ist auf  $\mathbb{C}$  beschränkt durch  $\max\{M, \varepsilon\}$ . Nach dem Satz von Liouville ist dann  $f$  konstant und somit auch  $p = \frac{1}{f} \not\in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Korollar 7.2.6**

Jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[z]$  lässt sich in Linearfaktoren zerlegen.

## 7.3 Konvergenzsätze von Weierstraß

**Satz 7.3.1 Weierstraßscher Konvergenzsatz**

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen. Sei  $f_k$  eine Folge von holomorphen Funktionen auf  $D$  die in  $D$  kompakt gegen ein  $f$  konvergiert. Dann ist  $f$  auch holomorph in  $D$  und  $f_k^{(n)} \rightarrow f^{(n)}$  kompakt in  $D$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Analysis 2:  $f_k$  sind stetig auf jedem Kompaktum  $K \subset D$ ,  $f_k \xrightarrow{K} f$  gleichmäßig. Dann ist  $f$  stetig auf  $K$ . Jeder Punkt  $z \in D$  ist im Innern eines passenden Kompaktums enthalten, also  $f \in C(D)$ . Dann ist  $f$  auf kompakten Teilmengen von  $D$  integrierbar. Sei  $\Delta$  ein Dreieck in  $D$ .

$$\oint_{\partial\Delta} f(z)dz = \oint_{\partial\Delta} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z)dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Delta} f_k(z)dz$$

Vertauschungssatz bei gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta. Der Dreiecksweg ist kompakt und in  $D$  enthalten und  $\oint_{\partial\Delta} f_k(z)dz = 0$  nach dem Lemma von Goursat. Satz von Morera:  $f$  holomorph auf  $D$ .

Es reicht, dies für  $n = 1$  zu zeigen. Cauchy-Integralformel:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

$z \in D(a, \varepsilon) \subset D$ . Sei  $K \subset D$  ein Kompaktum. Nach Voraussetzung gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : k > k_0 \Rightarrow |f(z) - f_k(z)| < \varepsilon \forall z \in K$$

$$L = K_\delta = \{z \in \mathbb{C} | d(z, K) < \delta\}$$

Wir können so ein  $\delta > 0$  finden, dass  $L \subset D$  (Stetigkeit der Randabstandsfunktion).

Wir zeigen auf  $K$  die gleichmäßige Konvergenz von  $f'$ .  $K$  kompakt, also lässt es sich mit endlich



vielen Kreisscheiben  $D(a_j, \varepsilon)$ ,  $j = 1, \dots, q$ , überdecken.  $f$  nimmt auf  $L$  ein Maximum  $M$  an, da  $f$  stetig.

$$\begin{aligned} |f'_k(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a_j, \varepsilon)} \frac{f_k(w) - f(w)}{(w - z)^2} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B(a_j, \varepsilon)} \frac{|f_k(w) - f(w)|}{(w - z)^2} |dz| \\ &< \frac{1}{2\pi} \varepsilon \oint_{\partial B(a_j, \delta)} \frac{1}{(w - z)^2} dz \\ &= \frac{\varepsilon}{\delta} \forall z \in K \end{aligned}$$

$\delta$  fest. Also folgt die Behauptung. □

**Satz 7.3.2 Weierstraßscher Differentiationssatz für kompakt konvergente Reihen**

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  eine in  $D$  gegen  $f$  kompakt konvergente Reihe von in  $D$  holomorphen Funktionen. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  kompakt in  $D$  gegen  $f^{(k)}$ .

**Beweis:**

$$F_m := \sum_{n=1}^m f_n \in \mathcal{O}(D)$$

konvergiert in  $D$  kompakt gegen  $f$ . Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt  $f \in \mathcal{O}(D)$  und  $F_m^{(k)} = \sum_{n=1}^m f_n^{(k)}$  konvergiert auf  $D$  kompakt gegen  $f^{(k)}$ . □

## 7.4 Offenheitssatz und Maximumprinzip

### Definition 7.4.1

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, falls das Bild  $f(U)$  jeder in  $X$  offenen Menge  $U$  in  $Y$  offen ist.

### Lemma 7.4.2 Existenz von Nullstellen

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in \mathcal{O}(D)$ . Sei  $c \in D$  und  $B$  eine Kreisscheibe um  $c$  mit  $\bar{B} \subset D$ . Zudem gelte:

$$\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)|$$

Dann hat  $f$  eine Nullstelle in  $B$ .

**Beweis:** Gegenannahme:  $f$  hat keine Nullstelle in  $B$ . Wegen  $\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)| > 0$  hat  $f$  keine Nullstelle in  $\bar{B}$ .  $f$  ist stetig, also ist die Nullstellenmenge von  $f$  abgeschlossen. Es existiert also eine offene Umgebung  $U$  von  $\bar{B}$  in  $D$ , auf welcher  $f$  nullstellenfrei ist. Auf  $U$  definiert  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  eine holomorphe Funktion. Mittelwertungleichung für holomorphe Funktionen:

$$|f(c)|^{-1} = |g(c)| \leq \max_{z \in \partial B} |g(z)| = \max_{z \in \partial B} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \min_{z \in \partial B} |f(z)|^{-1} \not\leq$$

□

### Lemma 7.4.3

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $B$  eine Kreisscheibe um  $c$ , mit  $\bar{B} \subset D$ , sei  $f \in \mathcal{O}(D)$ . Es gelte:

$$0 < \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(c)| = 2\delta$$

Dann gilt:

$$f(B) \supset B_\delta(f(c))$$

**Beweis:** Für jedes  $b \in \mathbb{C}$  mit  $|b - f(c)| < \delta$  gilt:

$$|f(z) - b| \geq |f(z) - f(c)| - |b - f(c)| > \delta, \quad z \in \partial B$$

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - b| > |f(c) - b|$$

Mit obigem Lemma angewandt auf  $f(z) - b$  existiert ein  $\tilde{z} \in B$  mit  $f(\tilde{z}) = b$ .  $\square$

**Satz 7.4.4 Offenheitssatz**

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f$  holomorph auf  $D$  und nicht konstant. Dann ist die Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  offen.

**Beweis:** Sei  $c \in D$ . Ziel ist:  $\exists$  Kreisscheibe um  $f(c)$  in  $f(D)$ .  $f$  ist nicht konstant, also existiert  $B$  um  $c$  mit  $\bar{B} \subset D$  und  $f(c) \notin f(\partial B)$ . (Angenommen, für alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  würde gelten:  $f(c) \in f(\partial B_\varepsilon(c))$ . Dann gäbe es eine Folge von Punkten  $z_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(c)$  mit  $f(z_\varepsilon) = f(c)$ . Das bedeutet:  $c$  ist Häufungspunkt von  $z_\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) und  $f(c) = f(z_\varepsilon)$ . Nach dem Identitätssatz wäre dann  $f \equiv f(c)$ .)

$$2\delta := \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(c)| > 0$$

da  $f(c) \notin f(\partial B)$  und  $\partial B$  kompakt. Nach Lemma oben gilt dann:

$$f(B) \supset B_\delta(f(c))$$

Für jeden Punkt  $p \in f(D)$   $\exists c \in D$  mit  $f(c) = p$  und  $\exists$  Kreisscheibe  $B$  um  $c$  mit  $f(B) \supset B_\delta(f(c))$ , also enthält  $f(D)$  um jeden Punkt eine offene Kreisscheibe.  $\square$

**Satz 7.4.5 Satz von der Gebietstreue**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und sei  $f$  holomorph auf  $G$  und nicht konstant. Dann ist  $f(G) \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.

**Beweis:**  $f$  stetig.  $G$  zusammenhängend  $\Rightarrow f(G)$  zusammenhängend.  $f$  holomorph und nicht konstant  $\Rightarrow f(G)$  offen nach Offenheitssatz.  $\square$

**Satz 7.4.6 Maximumprinzip**

Eine holomorphe Funktion, die in einem Gebiet  $G$  ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt, ist konstant.

**Beweis:** Annahme:  $\exists c \in G$ ,  $\exists$  Umgebung  $U$  von  $c$  in  $G$  mit  $|f(z)| \leq |f(c)|$  für alle  $z \in U$ . Dann ist  $f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(c)|\}$ . Die Menge  $f(U)$  ist dann keine Umgebung von  $f(c)$  in  $\mathbb{C}$ . Dies ist ein Widerspruch zum Offenheitssatz.  $\square$

**Satz 7.4.7 Maximumprinzip für beschränkte Gebiete**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein beschränktes Gebiet und sei  $f$  holomorph auf  $G$  und stetig auf  $\bar{G}$ . Dann nimmt  $|f|$  ihr Maximum auf  $\partial G$  an.

**Beweis:**  $f$  stetig,  $\bar{G}$  kompakt  $\Rightarrow |f|$  nimmt Maximum auf  $\bar{G}$  an. O.B.d.A.  $f$  nicht konstant. Mit dem Maximumprinzip folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 7.4.8 Minimumprinzip**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein beschränktes Gebiet,  $f$  sei holomorph auf  $G$  und stetig auf  $\bar{G}$ . Dann hat  $f$  Nullstellen in  $G$  oder  $|f|$  nimmt das Minimum auf  $\partial G$  an.

**Beweis:** O.B.d.A.  $f$  hat keine Nullstellen in  $G$ .  $\frac{1}{f} =: g \in \mathcal{O}(G)$ . Nach dem Maximumprinzip nimmt  $|g|$  in  $G$  kein lokales Maximum an (oder  $g$  konstant). Das bedeutet, dass  $|f|$  kein lokales Minimum in  $G$  annimmt.  $\square$

**Satz 7.4.9 Schwarzsches Lemma**

Sei  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  die Einheitskreisscheibe. Für jede holomorphe Funktion  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $f(0) = 0$  gilt:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$$

$$|f'(0)| \leq 1$$

Falls es einen Punkt  $c \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  mit  $|f(c)| = |c|$  oder falls  $|f'(0)| = 1$ , dann ist  $f$  eine Drehung um 0,  $f(z) = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| = 1$ .

**Beweis:**  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  konvergiert kompakt in  $\mathbb{D}$  und  $a_0 = 0$ .

$$f(z) = z \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}}_{=: g(z)}$$

und  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  ist holomorph auf  $\mathbb{D}$ .  
Sei  $1 > r > 0$ .

$$r \max_{|z|=r} |g(z)| \leq 1$$

da  $|f(z)| < 1 \forall z \in \mathbb{D}$ . Maximumprinzip anwenden auf  $g$  auf der Kreisscheibe  $r\mathbb{D}$ :

$$\max_{r\mathbb{D}} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Mit  $r \rightarrow 1$  folgt:

$$|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$$

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0)$$

und  $|g(0)| \leq 1$ , also  $|f'(0)| \leq 1$ .

Falls  $|f'(0)| = 1$ , dann ist  $|g(0)| = 1$ . Also nimmt  $g$  das Maximum in  $\mathbb{D}$  an. Nach dem Maximumprinzip ist dann  $g \equiv a \in \mathbb{C}$  const. Also:

$$a = \frac{f(z)}{z} \Rightarrow az = f(z), \quad |a| = 1$$

Falls  $\exists c \in \mathbb{D}$ ,  $c \neq 0$  mit  $|f(c)| = |c|$ , dann bedeutet dies

$$|cg(c)| = c \Rightarrow |g(c)| = 1$$

Maximumprinzip anwenden:  $g \equiv a \in \mathbb{C}$  konstant mit  $|a| = 1$ . Analog wie oben. □

## 7.5 Allgemeine Version von Cauchys Satz

### Definition 7.5.1

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Wir sagen, dass  $G$  **einfach zusammenhängend** ist, wenn es für jede Abbildung  $\varphi: [0, 1] \rightarrow G$  mit  $\varphi(0) = \varphi(1)$ ,  $\varphi$  stetig, eine stetige Abbildung  $\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  gibt, so dass

- i)  $\Phi(t, 0) = \varphi(t) \forall t \in [0, 1]$
- ii)  $\Phi(0, s) = \Phi(1, s) \forall s \in [0, 1]$
- iii)  $\Phi(t, 1) \equiv \text{const.}$

### Beispiel

i)  $G = \Delta_1(0)$ .  $\exists \Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G: \Phi(t, s) = (1 - s)\varphi(t)$ .

ii)  $G = A := \Delta_1(0) \setminus \bar{\Delta}_{1/2}(0)$ .  $\varphi = \frac{3}{4}e^{2\pi i t}$ .  $\nexists \Phi$ .

//

### Definition 7.5.2

$G \subset \hat{\mathbb{C}}$  ein Gebiet,  $G$  einfach zusammenhängend genau dann, wenn  $\partial G$  eine zusammenhängende Menge ist.

### Satz 7.5.3 Weierstraß

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $f \in C(K)$ . Dann existieren Polynome  $\{P_n(x)\}_{n=1}^\infty$  mit

$$P_n(x) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

so dass

$$\|f(x) - P_n(x)\|_K \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Bemerkung**

Satz von Weierstraß  $\Rightarrow$  wir können  $\varphi, \Phi$  in der Definition  $C^\infty$  nehmen.

**Satz 7.5.4**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend,  $f \in \mathcal{O}(G)$ ,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ ,  $\gamma \in C^1[0, 1]$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Beweis:**  $G$  einfach zusammenhängend, also  $\exists \Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  so dass obige Definitionen wahr sind.  $\forall p \in \Phi(Q) \exists B_{r_p}(p) \subset G$ .  $\{B_{r_p}(Q)\}_{p \in \Phi(Q)}$  ist eine offene Überdeckung von  $\Phi(Q)$ . Da  $\Phi$  stetig ist, ist  $\Phi(Q)$  ein Kompaktum. Also existiert eine endliche Teilüberdeckung  $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  von  $\Phi(Q)$ . Wir teilen  $Q$  und bekommen  $Q_{i,j} := [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ ,  $n$  genügend groß,  $1 \leq i, j \leq n-1$ . Wenn  $n$  genügend groß ist, dann  $\forall i, j \exists 1 \leq q \leq n$  so dass  $\Phi(Q_{i,j}) \subset B_q$ .  $B_q$  ist ein Sterngebiet und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(\partial Q_{i,j})} f(z) dz &= 0 \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Phi(\partial Q_{i,j})} &= 0 \end{aligned}$$

Und somit:

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \underbrace{\int_{\Phi(1,s)} f(z) dz - \int_{\Phi(0,s)} f(z) dz}_{=0} - \underbrace{\int_{\Phi(t,1)} f(z) dz}_{=0} = 0$$

□

**Satz 7.5.5 Allgemeine Version von Cauchys Satz**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $\partial G$  sei stückweise  $C^1$ -glatt.  $f \in \mathcal{O}(G)$ . Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in G$$

**Beweis:** Seien  $C_1, C_2, \dots, C_m$  Zusammenhangskomponenten von  $\partial G$ , so dass  $C_1 = \partial\Omega_1, C_2 = \partial\Omega_2, \dots$ , wobei  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  beschränkte Komponenten von  $\mathbb{C} \setminus \tilde{G}$  sind und  $C_0 = \partial\Omega_0$  eine unbeschränkte Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \tilde{G}$  ist. Sei  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1} \subset G$ ,  $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $\gamma_i$  hat Anfangspunkt

auf  $C_{i-1}$ , Endpunkt auf  $C_i$  für  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\gamma_{m+1}$  hat Anfangspunkt in  $C_m$  und Endpunkt in  $\partial B_\varepsilon(z)$ . Sei

$$G^* := G \setminus \overline{B_\varepsilon(z)} \cup \bigcup_{i=1}^{m+1} \gamma_i$$

einfach zusammenhängend. Aus  $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \in \mathcal{O}(\bar{G}^*)$  folgt dann:

$$\int_{\partial G^*} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz + \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz - \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz = 0$$

□

### Satz 7.5.6 Cauchysche Ungleichungen

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet.  $\partial G$  sei stückweise  $C^1$ -glatt,  $f \in \mathcal{O}(\bar{G})$ . Dann gilt:

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{|f|_{\partial G}}{(d(z, \partial G))^{k+1}} \cdot \ell_1(\partial G) \forall z \in G \forall k \in \mathbb{N}$$

wobei  $d(z, \partial G) := \int_{w \in \partial G} |z-w|$  und  $\ell_1(\partial G)$  die Länge von  $\partial G$  ist.

**Beweis:**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \Rightarrow f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta$$

Es folgt:

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{|f|_{\partial G}}{d(z, \partial G)^{k+1}} \ell_1(\partial G)$$

□



# 8

## Isolierte Singularitäten

### Definition 8.0.1

Ist  $f$  holomorph in einem Bereich  $D$  mit Ausnahme eines Punktes  $c \in D$ , so heißt der Punkt  $c$  eine **isolierte Singularität** von  $f$ .

## 8.1 Hebbare Singularitäten, Pole

### Definition 8.1.1

Eine isolierte Singularität  $c$  einer holomorphen Funktion  $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$  heißt **hebbbar**, wenn  $f$  holomorph nach  $c$  fortsetzbar ist.

### Beispiel

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  für  $z \neq 0$ .

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) =: g(z)$$

$g(z) = \frac{\sin z}{z}$ , d.h.  $g(z)$  ist eine holomorphe Fortsetzung von  $\frac{\sin z}{z}$  auf ganz  $\mathbb{C}$ . Also ist 0 eine hebbare Singularität von  $\frac{\sin z}{z}$ . //

### Satz 8.1.2 Hebbbarkeitssatz

Der Punkt  $c$  ist genau dann eine hebbare Singularität von  $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{0\})$ , wenn es eine Umgebung  $U \subset D$  von  $c$  gibt, so dass  $f$  in  $U \setminus \{c\}$  beschränkt ist.

**Beweis:** Folgt direkt aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz, □

### Definition 8.1.3

Sei  $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$ . Ist  $(z - c)^n f(z)$  beschränkt für eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  in einer Umgebung von  $c$  und für  $n \neq 0$  nicht beschränkt, so heißt  $c$  ein **Pol von  $f$** . Dann heißt die Zahl

$$m := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (z - c)^k f(z) \text{ beschränkt um } c\} \geq 1$$

die **Ordnung des Pols  $c$  von  $f$** .

### Beispiel

$$D = \Delta \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \Rightarrow 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots = z^2 \underbrace{\left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)}_{=: g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

Also  $f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{g(z)}$ . Die Ordnung des Pols 0 von  $f(z)$  ist also  $= 2$ . //

### Satz 8.1.4

Folgende Aussagen über  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$  und  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ , sind äquivalent:

- i)  $f$  hat in  $c$  einen Pol der Ordnung  $m$ .
- ii) Es gibt eine Funktion  $g \in \mathcal{O}(D)$  mit  $g(z) \neq 0$  so dass gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^m} \quad \forall z \in D \setminus c$$

- iii) Es gibt eine Umgebung  $U \subset D$  von  $c$  und ein  $h \in \mathcal{O}(U)$ ,  $h(z) \neq 0 \forall z \in U$ ,  $h(z)$  hat eine Nullstelle der Ordnung  $m$  in  $c$ , so dass  $f = \frac{1}{h}$  in  $U \setminus c$ .

- iv)  $\exists U \subset D$  Umgebung von  $c$ ,  $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$ , so dass  $\forall z \in U \setminus c$  gilt:

$$M|z - c|^{-m} \leq |f(z)| \leq \tilde{M}|z - c|^{-m}$$

**Beweis:**

$i) \Rightarrow ii)$ :  $(z - c)^m f(z)$  ist in  $U \setminus c$  beschränkt für eine Umgebung  $U$  von  $c$ . Dann  $\exists g \in \mathcal{O}(U)$  so dass  $(z - c)^m f(z) = g(z) \forall z \in U \setminus c$ . Wir haben  $g(c) \neq 0$ , weil  $m$  die Ordnung von  $f$  ist. Also gilt  $f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^m}$ .

$ii) \Rightarrow iii)$ :  $g(c) \neq 0 : \exists U \subset D$  Umgebung von  $c$ , so dass  $g(z) \neq 0 \forall z \in U$ . Dann ist  $\tilde{h}(z) := \frac{1}{g(z)} \in \mathcal{O}(U)$  und  $h(z) := (z - c)^m \tilde{h}(z) \in \mathcal{O}(U)$ ,  $\tilde{h}(c) \neq 0$  und

$$f = \frac{g(z)}{(z - c)^m} = \frac{1}{(z - c)^m \frac{1}{g(z)}} = \frac{1}{h(z)}$$

$h$  hat eine Nullstelle der Ordnung in  $c$ .

$iii) \Rightarrow iv)$ :  $f = \frac{1}{h}$ , wobei  $h(z) = (z - c)^m \tilde{h}(z)$ ,  $\tilde{h}(c) \neq 0$ . Da  $\tilde{h} \in \mathcal{O}(U)$ , folgt  $\tilde{h} \in C(U)$  und  $\exists U' \subset U$  eine Umgebung von  $c$ ,  $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$  so dass

$$M \leq |\tilde{h}(z)| \leq \tilde{M} \forall z \in U'$$

Dann ist

$$\frac{1}{\tilde{M}} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} \right| \leq \frac{1}{M}$$

Und somit:

$$\frac{1}{\tilde{M}} |z - c|^{-m} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} |z - c|^{-m} \right| = |f(z)| \leq \frac{1}{M} |z - c|^{-m}$$

$iv) \Rightarrow i)$ : Aus iv) folgt  $|f(z)(z - c)^m| \leq \tilde{M} \forall z \in U \setminus c$ .  $z = c$  ist ein Pol von  $f$ . Sei  $k < m$ .

$$|f(z)(z - c)^m| \geq M |z - c|^{-m} |z - c|^k = M |z - c|^{k-m} \rightarrow \infty$$

D.h.  $m$  ist die Ordnung von  $f$  in  $c$ .

□

**Korollar 8.1.5**

Die Funktion  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$  hat genau dann einen Pol in  $c$ , wenn gilt:

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$$

**Beweis:** Trivial. 'Hinrichtung' folgt aus iv), 'Rückrichtung' folgt aus iii) mit  $h = \frac{1}{f}$ .

□

## 8.2 Entwicklung von Funktionen um Polstellen

### Satz 8.2.1

Es sei  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$  und es sei  $c$  ein Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f$ . Dann gibt es  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$  mit  $b_m \neq 0$  und  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$  so dass:

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-c)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-c)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{z-c} + \tilde{f}(z), z \in D \setminus c \quad (*)$$

Die Zahlen  $b_1, \dots, b_m$  und die Funktion  $\tilde{f}$  sind eindeutig durch  $f$  bestimmt. Umgekehrt, hat jede Funktion  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ , für die (\*) gilt, in  $c$  einen Pol der Ordnung  $m$ .

**Beweis:**  $f$  hat einen Pol in  $c$   $m$ -ter Ordnung, also  $f(z) = \frac{1}{(z-c)^m} g(z)$  mit  $g(z) \in \mathcal{O}(D)$ ,  $g(c) \neq 0$ . Es gilt:

$$g(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots$$

Also:

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-c)^m} + \frac{a_1}{(z-c)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-c} + \underbrace{a_m + a_{m+1}(z-c) + \dots}_{=:\tilde{f}(z)}$$

Die umgekehrte Richtung ist trivial. □

## 8.3 Wesentliche Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstrass

### Definition 8.3.1

Eine isolierte Singularität  $c$  von  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$  heißt **wesentlich**, wenn  $c$  keine hebbare Singularität und kein Pol von  $f$  ist.

### Satz 8.3.2 Casorati-Weierstrass

Folgende Aussagen über eine in  $D \setminus c$  holomorphe Funktion  $f$  sind äquivalent:

- i) Der Punkt  $c$  ist eine wesentliche Singularität von  $f$ .
- ii) Für jede Umgebung  $U \subset D$  von  $c$  liegt das Bild  $f(U \setminus c)$  dicht in  $\mathbb{C}$ .
- iii) Es gibt eine Folge  $z_n$  in  $D \setminus c$  mit  $\lim z_n = c$ , so dass die Bildfolge  $f(z_n)$  keinen Limes in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  hat.

### Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$ : Indirekt. Wir nehmen an, es gäbe eine Umgebung  $U \subset D$  von  $c$ , so dass  $f(U \setminus c)$  nicht dicht in  $\mathbb{C}$  liegt. Dann gibt es eine Kreisscheibe  $B_r(a)$ ,  $r > 0$ , mit  $f(U \setminus c) \cap B_r(a) = \emptyset$ , d.h.  $|f(z) - a| \geq r \forall z \in U \setminus c$ . Die Funktion  $g(z) := (f(z) - a)^{-1}$  für  $z \in U \setminus c$  ist holomorph in  $U \setminus c$  und hat, da sie durch  $r^{-1}$  beschränkt ist, eine hebbare Singularität in  $c$ . Dann hat  $f(z) = a + g(z)^{-1}$  im Fall  $\lim_{z \rightarrow c} g(z) \neq 0$  eine hebbare Singularität und im Fall  $\lim_{z \rightarrow c} g(z) = 0$  einen Pol in  $c$ , also keine wesentliche Singularität.  $\nmid$

$ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$ : Klar nach Definition.

□



# 9

## Laurentreihen und Fourierreihen

$$A = A_{r,s}(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r < |z - c| < s \leq \infty\}$$

ist ein **Kreisring** um  $c$  mit innerem Radius  $r$  und äusserem Radius  $s$ .  $A = A^+ \cap A^-$  mit  $A^+ := B_s(c)$ ,  $A^- := \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(c)$ .

### Satz 9.0.1

Es sei  $f \in \mathcal{O}(A_{r,s}(c))$ . Dann gilt:

$$\int_{S_\rho} f d\zeta = \int_{S_\sigma} f d\zeta \forall \rho, \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } r < \rho \leq \sigma < s, S_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$$

**Beweis:** Sei  $\gamma := S_\sigma - I - S_\rho + I$ . Dann ist  $\gamma \sim 0$ , d.h.  $B_\sigma(c) \setminus (\overline{B_\rho(c)} \cup I)$  ist einfach zusammenhängend. Also:

$$\int_\gamma f d\zeta = 0$$

und

$$\int_{S_\rho} f d\zeta - \int_I f d\zeta - \int_{S_\rho} f d\zeta + \int_I f d\zeta = 0$$

□

### Satz 9.0.2 Cauchscher Integralsatz für Kreisringe

$f \in \mathcal{O}(D)$ ,  $A = A^+ \cap A^-$  ein Kreisring um  $c \in D$  so dass  $\bar{A} \subset D$ . Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \forall z \in A$$

**Beweis:** Folgt direkt aus der allgemeinen Version des Cauchyschen Satzes. □

## 9.1 Laurentdarstellung in Kreisringen

### Definition 9.1.1

Ist  $h$  eine komplexe Funktion in einem unbeschränkten Bereich  $W$ , so schreiben wir  $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = b$ , wenn es zu jeder Umgebung  $V$  von  $b \in \mathbb{C}$  ein  $R > 0$  gibt, so dass  $h(z) \in V \forall z \in W$  mit  $|z| \leq R$

### Satz 9.1.2

Es sei  $f \in \mathcal{O}(\bar{A})$ ,  $A = A^+ \cap A^-$  ein Kreisring um  $c$  mit Radien  $r, s$ . Dann existieren  $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$  und  $f^- \in \mathcal{O}(A^-)$  so dass gilt:  $f = f^+ + f^-$  in  $A$  und  $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$ . Die Funktionen  $f^+$  und  $f^-$  sind hierdurch eindeutig bestimmt. Für jedes  $\rho \in [r, s]$  gilt:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B_\rho(c)$$

$$f^-(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(c)}$$

**Beweis:**

*Existenz:* Die Funktion

$$f_\rho^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B_\rho(c)$$

ist holomorph in  $B_\rho(c)$ . Für  $\sigma \in (\rho, s)$  gilt:  $f_\rho^+ = f_\sigma^+|_{B_\rho(c)}$  nach dem Integralsatz. Es gibt also eine Funktion  $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$  die in  $B_\rho(c)$  mit  $f_\rho^+$  übereinstimmt. Ebenso ist

$$f^-(z) := f_\sigma^-(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in A^-, r < \sigma < \min\{s, |z - c|\}$$

holomorph in  $A^-$ . Die Integralformel, angewendet auf alle Kreisringe  $A'$  um  $c$  mit  $\bar{A}' \subset A$ , liefert in  $A$  die Darstellung  $f = f^+ + f^-$ . Die Standardabschätzung für Integrale gilt für  $z \in A^-$ :

$$|f^-(z)| \leq \sigma \max_{\zeta \in S_\sigma} |f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}| \leq \frac{\sigma}{|z - c| - \sigma} |f|_{S_\sigma}$$

also  $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$ .



**Eindeutigkeit:** Es seien  $g^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ ,  $g^- \in \mathcal{O}(A^-)$  weitere Funktionen mit  $f = g^+ + g^-$  in  $A$  und  $\lim_{z \rightarrow \infty} g^-(z) = 0$ . Dann gilt:

$$f^+ - g^+ = g^- - f^-$$

auf  $A$ . Daher wird durch  $h := f^+ - g^+$  auf  $A^+$  und  $h := g^- - f^-$  auf  $A^-$  eine ganze Funktion  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$  definiert.  $h$  ist beschränkt auf  $\mathbb{C}$  und mit Liouville ist  $h(z) \equiv \text{const.}$  Wegen dem Limes ist  $h(z) \equiv 0$ , also  $g^+ \equiv f^+$  und  $g^- \equiv f^-$ .

□

Man nennt die Darstellung von  $f$  als Summe  $f^+ + f^-$  die **Laurentdarstellung von  $f$  in  $A$** . Die Funktion  $f^-$  heißt der **Hauptteil**, und  $f^+$  **Nebenteil** von  $f$ .

### Definition 9.1.3

Reihen der Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$$

heißen **Laurentreihen um  $c$** . Die Reihen

$$\sum_{-\infty}^{-1} a_v(z-c)^v = \sum_1^{\infty} a_{-v}(z-c)^{-v} \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^{\infty} a_v(z-c)^v$$

heißen **Hauptteil** bzw. **Nebenteil**.

**Satz 9.1.4 Entwicklungssatz von Laurent**

Jede im Kreisring  $A$  um  $c$  mit den Radien  $r$  und  $s$  holomorphe Funktion  $f$  ist in  $A$  eindeutig in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$$

entwickelbar, die in  $A$  normal gegen  $f$  konvergiert. Es gilt:

$$a_v := \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{v+1}} d\zeta \quad (*)$$

für  $r < \rho < s$ ,  $v \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Sei  $f = f^+ + f^-$  die Laurentdarstellung von  $f$  in  $A = A^+ \cap A^-$ . Dann hat der Nebenteil  $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$  von  $f$  nach dem Satz von Cauchy-Taylor in  $A^+ = B_s(c)$  eine Taylorentwicklung.

$$f^+(z) = \sum_0^{\infty} a_v(z-c)^v$$

Doch auch der Hauptteil  $f^- \in \mathcal{O}(A^-)$  von  $f$  gestattet eine einfache Reihenentwicklung in  $A^- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > r\}$ : Da die Abbildung  $B_{r^{-1}}(0) \setminus 0 \rightarrow A^-$ ,  $w \mapsto z := c + w^{-1}$  biholomorph ist mit  $z \mapsto w = (z-c)^{-1}$  als Umkehrabbildung, gilt  $g(w) := f^-(c + w^{-1}) \in \mathcal{O}(B_{r^{-1}}(0) \setminus 0)$ . Wir wissen, dass  $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$ , also  $\lim_{w \rightarrow 0} g(w) = 0$ . Mit dem Riemannschen Fortsetzungssatz folgt dann  $g \in \mathcal{O}(B_{r^{-1}}(0))$ . Also ist

$$g(w) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v w^v$$

und

$$f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-c)^{-n}$$

Wir setzen  $a_v = b_{-v}$  für  $v = -1, -2, \dots$  und bekommen

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v(z-c)^v + \sum_{-\infty}^{-1} a_v(z-c)^v = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$$

Diese Reihe konvergiert normal in  $A$ .

$$(z-c)^{-n-1} f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_{v+n+1}(z-c)^v + \sum_{v=0}^{\infty} a_{v+n+1}(z-c)^v$$

$$\begin{aligned}
 \int_{S_\rho} (z-c)^{-n-1} f(z) dz &= \int_{S_\rho} \left( \sum_{v=-\infty}^{-1} a_{v+n+1} (z-c)^v + \sum_{v=0}^{\infty} a_{v+n+1} (z-c)^v \right) dz \\
 &= \sum_{v=-\infty}^{-1} a_{v+n+1} \int_{S_\rho} (z-c)^v dz + \sum_{v=0}^{\infty} \int_{S_\rho} a_{v+n+1} (z-c)^v dz \\
 &= 2\pi i a_n
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt (\*)

□

## 9.2 Eigenschaften von Laurentreihen

### Satz 9.2.1 Identitätssatz

Sind  $\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v (z-c)^v$  und  $\sum_{v=-\infty}^{\infty} b_v (z-c)^v$  Laurentreihen, die beide auf einer Kreislinie  $S_\rho$ ,  $\rho > 0$ , um  $c$  gleichmäßig konvergieren gegen dieselbe Grenzfunktion  $f$ , so gilt:

$$a_v = b_v = \frac{1}{2\pi\rho^v} \int_0^{2\pi} f(c + \rho e^{i\varphi}) e^{-iv\varphi} d\varphi, v \in \mathbb{Z}$$

**Beweis:** Folgt direkt aus (\*).

□

### Satz 9.2.2 Gutzmersche Formel und Cauchysche Ungleichungen

Konvergiert die Laurentreihe  $\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v (z-c)^v$  auf der Kreislinie  $S_\rho$  um  $c$  gleichmäßig gegen  $f: S_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ , so gilt die Gutzmersche Formel:

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} |a_v|^2 \rho^{2v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + \rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq M(\rho)^2 \quad (*)$$

mit  $M(\rho) := |f|_{S_\rho}$ , insbesondere bestehen die Cauchyschen Ungleichungen

$$|a_v| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^v} \forall v \in \mathbb{Z} \quad (**)$$

**Beweis:** Wegen

$$\overline{f(c + \rho e^{i\varphi})} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \bar{a}_v \rho^v e^{-iv\varphi}$$

folgt direkt:

$$|f(c + \rho e^{i\varphi})|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_\nu \rho^\nu f(c + \rho e^{i\varphi}) e^{-i\nu\varphi}$$

Dies konvergiert normal auf  $[0, 2\pi]$ , also:

$$\int_0^{2\pi} |f(c + \rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_\nu \rho^\nu \int_0^{2\pi} f(c + \rho e^{i\varphi}) e^{-i\nu\varphi} d\varphi = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_\nu|^2 \rho^{2\nu}$$

Der Rest von (\*) folgt mit der Standardabschätzung. (\*\*) ist trivial. □

### **Satz 9.2.3 Klassifizierung isolierter Singularitäten**

Es sei  $c \in D$  eine isolierte Singularität von  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$  und es sei  $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu (z - c)^\nu$  die Laurententwicklung von  $f$  um  $c$ . Dann ist  $c$

- i) eine hebbare Singularität  $\Leftrightarrow a_\nu = 0 \forall \nu < 0$ .
- ii) ein Pol der Ordnung  $m \geq 1 \Leftrightarrow a_\nu = 0 \forall \nu < -m$  und  $a_{-m} \neq 0$ .
- iii) eine wesentliche Singularität  $\Leftrightarrow a_\nu \neq 0$  für unendlich viele  $\nu < 0$ .

# 10

## Residuenkalkül

### 10.1 Residuensatz

#### Definition 10.1.1

Ist  $f$  holomorph in  $D \setminus c$  und ist  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$  die Laurententwicklung von  $f$  in einer punktierten Kreisscheibe  $B^*$  um  $c$ , so gilt

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_S f(\zeta) d\zeta$$

für jede Kreislinie  $S \subset B^*$  um  $c$ . Diese Zahl heißt das **Residuum** von  $f$  im Punkt  $c$ . Wir schreiben  $\text{res}_c f = a_{-1}$ .

#### Satz 10.1.2

Das Residuum von  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$  in  $c$  ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl  $a$ , so dass  $f(z) - a(z-c)^{-1}$  in einer in  $c$  punktierten Umgebung von  $c$  eine Stammfunktion hat.

**Beweis:** Ist  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_v(z-c)^v$  die Laurentreihe von  $f$  in  $B^* = B_r(c) \setminus c$ , so hat die Funktion

$$F := \sum_{v \neq -1} \frac{1}{v+1} a_v(z-c)^{v+1} \in \mathcal{P}(B^*)$$

die Ableitung  $F' = f - a_{-1}(z-c)^{-1}$ . In einer in  $c$  punktierten Umgebung von  $c$  ist daher  $H$  genau dann Stammfunktion von  $f - a(z-c)^{-1}$ , wenn dort gilt

$$(F-H)' = (a - a_{-1})(z-c)^{-1}$$

Da  $(z-c)^{-1}$  keine Stammfunktion um  $c$  hat, so existiert  $H$  mit  $H := F + \text{const.}$  genau dann, wenn  $a = a_{-1}$ .  $\square$

**Satz 10.1.3 Rechenregeln für Residuen**i)  $\mathbb{C}$ -Linearität:

$$\operatorname{res}_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{res}_a f + \mu \operatorname{res}_a g \quad \forall f, g \in \mathcal{O}(D \setminus c) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

ii) Ist  $c$  ein einfacher Pol von  $f$ , so gilt:

$$\operatorname{res}_c f = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z)$$

ii') Es seien  $g$  und  $h$  holomorph in einer Umgebung von  $c$ , wobei  $g(c) \neq 0$ ,  $h(c) = 0$  und  $h'(c) \neq 0$ . Dann hat  $f := \frac{g}{h}$  in  $c$  einen einfachen Pol und es gilt:

$$\operatorname{res}_c f = \frac{g(c)}{h'(c)}$$

iii) Hat  $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$  in  $c$  einen Pol höchstens  $m$ -ter Ordnung und ist  $g$  die holomorphe Fortsetzung von  $(z - c)^m f(z)$  nach  $c$ , so gilt:

$$\operatorname{res}_c f = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c)$$

**Beweis:**ii)  $f$  hat einfachen Pol  $\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z)$ ,  $g \in \mathcal{O}(D)$ .

$$\lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) = \lim_{z \rightarrow c} (a_{-1} + (z - c)g(z)) = a_{-1} = \operatorname{res}_c f$$

ii') Da  $h$  um  $c$  die Taylorentwicklung  $h(z) = h(c) + h'(c)(z - c) + \dots$  besitzt, so folgt

$$\lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(c)}{h'(c)} \neq 0$$

Mithin ist  $c$  ein einfacher Pol von  $f$  mit dem Residuum  $\frac{g(c)}{h'(c)}$ .iii)  $f$  hat in  $c$  einen Pol der Ordnung  $m$ , also ist

$$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z - c)^m} + \frac{b_{-(m-1)}}{(z - c)^{m-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{z - c} + h(z)$$

$$(z - c)^m f(z) = b_{-m} + b_{-(m-1)}(z - c) + \dots + b_{-1}(z - c)^{m-1} + b_0(z - c)^m + \dots$$

$$\frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c) = \frac{1}{(m-1)!} (m-1)! b_{-1} = b_{-1} = \operatorname{res}_c f$$

□

**Beispiel**

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\sin z)} \in \mathcal{O}(B_1(0) \setminus 0)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right)}_{=:g(z)}$$

$$\Rightarrow \sin(\sin z) = \sin z - \frac{\sin^3 z}{3!} + \frac{\sin^5 z}{5!} - \dots = zg(z) - \frac{z^3 g^3(z)}{3!} + \frac{z^5 g^5(z)}{5!} - \dots = z \underbrace{(g(z) - \dots)}_{=:G(z)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\sin z)} = \frac{1}{zG(z)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{zG(z)} = 1$$

//

**Satz 10.1.4 Residuensatz**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet mit  $\partial D$  stückweise  $C^1$ -glatt. Seien  $c_1, c_2, \dots, c_m$  endlich viele Punkte in  $D$ . Sei  $f \in \mathcal{O}(\bar{D} \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_m\})$ . Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{i=1}^m \operatorname{res}_{c_i} f$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  klein genug. Dann nehmen wir

$$D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(c_i)$$

Dann ist  $f \in \mathcal{O}(\bar{D}_\varepsilon)$ . Dann:

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\partial D} f(z) dz - \underbrace{\sum_{i=1}^m \int_{\partial B_\varepsilon(c_i)} f(z) dz}_{=2\pi i \operatorname{res}_{c_i} f} = 0$$

Durch Umstellen folgt die Behauptung. □

**Satz 10.1.5 Anzahlformel für Null- und Polstellen**

Sei  $D$  ein Gebiet mit  $\partial D$  stückweise  $C^1$ -glatt. Seien  $c_1, c_2, \dots, c_m$  endlich viele Punkte in  $D$ . Sei  $f \in \mathcal{O}(\bar{D} \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_m\})$ ,  $f$  hat nur Polstellen in  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Sei  $f \neq 0$  auf  $\partial D$ . Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

wobei  $N$  die Anzahl von Nullstellen (berechnet mit Multiplizität) und  $P$  die Anzahl der Polstellen (berechnet mit Ordnung) ist.

**Beweis:** Seien  $a_1, a_2, \dots, a_p$  die Nullstellen von  $f$ . Dann ist  $\frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{O}(\bar{D} \setminus \{a_1, \dots, a_p\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_m\})$ . Nach dem Residuensatz ist dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^p \operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} + \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{c_j} \frac{f'}{f}$$

Sei  $a_i$  eine Nullstelle von  $f$  mit Multiplizität  $k_i$ . Das heißt

$$f(z) = (z - a_i)^{k_i} g(z), g(z) \in \mathcal{O}(U(a_i)), g(a_i) \neq 0 \forall z \in U(a_i)$$

Dann ist

$$f'(z) = k_i(z - a_i)^{k_i-1} g(z) + (z - a_i)^{k_i} g'(z)$$

Also:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_i(z - a_i)^{k_i-1} g(z) + (z - a_i)^{k_i} g'(z)}{(z - a_i)^{k_i} g(z)} = \frac{k_i}{z - a_i} + \frac{g'(z)}{g(z)} \in \mathcal{O}(U(a_i))$$

Es folgt:

$$\operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} = k_i$$

Sei nun  $c_j$  eine Polstelle von  $f$  der Ordnung  $l_j$ . Das heißt

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - c_j)^{l_j}}, g(c_j) \neq 0, g \in \mathcal{O}(U(c_j))$$

Dann:

$$f'(z) = -l_j(z - c_j)^{-l_j-1} g(z) + (z - c_j)^{-l_j} g'(z)$$

Also:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(-l_j(z - c_j)^{-l_j-1} + (z - c_j)^{-l_j} g'(z)) (z - c_j)^{l_j}}{g(z)} = -\frac{l_j}{z - c_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Es folgt:

$$\operatorname{res}_{c_j} \frac{f'}{f} = l_j$$

□



**Satz 10.1.6 Satz von Rouché**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $\partial D$  stückweise  $C^1$ -glatt. Seien  $f, g \in \mathcal{O}(\bar{D})$ . Sei

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \partial D \quad (**)$$

Dann ist  $N_D(f) = N_D(g)$ .

**Beweis:** Sei  $h = \frac{f}{g}$  eine in  $D$  holomorphe Funktion mit endlich vielen Nullstellen und endlich vielen Polstellen und  $|h(z) - 1| < 1 \quad \forall z \in U(\partial D) =: U$ . Dann ist

$$h(U) \subset B_1(1) \subset \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

Dann ist  $\log h$  wohldefiniert in  $U$ , und dort eine Stammfunktion von  $\frac{h'}{h}$ . Da  $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$  und da  $f$  und  $g$  wegen  $(**)$  nullstellenfrei auf  $\partial D$  sind, folgt:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = N_D(f) - N_D(g)$$

□

**Beispiel**

i)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &=: \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2}}_{I(R)} \\ 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{1+z^2} &= \int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^2} = I(R) + \underbrace{\int_0^\pi \frac{d(Re^{i\theta})}{1+(Re^{i\theta})^2}}_{J(R)} \\ |J(R)| &\leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{1+z^2} &= I(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+z^2} &= \frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-i} = \frac{az - ia + bz + ib}{z^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow a=-b \\ i(b-a)=1 \Rightarrow 2bi=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \end{cases} \\ \operatorname{res}_i \frac{1}{1+z^2} &= -\frac{i}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$1+z^4=0 \Leftrightarrow z^4=-1=e^{i\pi} \Leftrightarrow z_k=e^{\frac{i(\pi+k2\pi)}{4}}, k=0,1,2,3$$

$$\frac{1}{1+z^4}=\frac{a}{z-e^{\frac{i\pi}{4}}}+\frac{b}{z-e^{\frac{3\pi i}{4}}}+\frac{d}{z-e^{\frac{5\pi i}{4}}}+\frac{e}{z-e^{\frac{7\pi i}{4}}} \quad (*)$$

$$\operatorname{res}_{e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}}=\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}$$

Analog wie oben. Schlussendlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}=\frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\dots=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

iii) Sei  $D=\{1<|z|<2\}$ ,  $f(z)=z^5+2z^2+6z-1$ .  $N_D(f)=?$ .  $N_{B_2(0)}(f)=N_{B_2(0)}(z^5)$  weil für  $|z|\leq 2$ :

$$|2z^2+6z-1|<|2z^2|+|6z|+1\leq 2\cdot 4+6\cdot 2+1=21$$

$$|z^5|=32>21$$

Also ist  $N_{B_2(0)}=5$ .  $N_{B_1(0)}(f)=N_{B_1(0)}(6z)=1$  weil für  $|z|=1$ :

$$|6z|=6>4=|z|^5+|2z^2|+1\geq |z^5+2z^2-1|$$

Also:

$$N_D(f)=N_{B_2(0)}(f)-N_{B_1(0)}(f)=5-1=4$$

//

**Definition 10.1.7**

Ein geschlossener Weg  $\gamma$  heißt **einfach geschlossen**, wenn  $\operatorname{Int}\gamma \neq \emptyset$  und  $\operatorname{ind}_{\gamma}(z)=1 \forall z \in \operatorname{Int}\gamma$ . Dabei benutzen wir die Notationen

$$\operatorname{ind}_{\gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\in\mathbb{Z}, z\notin\gamma, \quad \operatorname{Int}\gamma=\{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma \mid \operatorname{ind}_{\gamma}(z)\neq 0\}$$

**Satz 10.1.8 Residuensatz**

Es sei  $\gamma$  ein nullhomologer Weg in einem Bereich  $D$  und es sei  $A$  eine endliche Menge in  $D$ , so dass kein Punkt von  $A$  auf  $\gamma$  liegt. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\zeta) d\zeta = \sum_{c \in \text{Int} \gamma} \text{ind}_{\gamma}(c) \text{res}_c h \quad (*)$$

für jede in  $D \setminus A$  holomorphe Funktion  $h$ .

## 10.2 Conformal mappings - Konforme Abbildungen

**Definition 10.2.1**

$f: D \rightarrow G$  heißt **konform**, wenn  $f$  bijektiv und holomorph ist.

**Definition 10.2.2**

$f: D \rightarrow G$  konform genau dann, wenn  $f$  bijektiv und  $\forall z_0 \in D \forall \gamma_1, \gamma_2$  glatte Kurven in  $D$ , so dass  $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ , ist  $\angle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0} = \angle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))_{f(z_0)}$ .

**Satz 10.2.3 Abbildungssatz von Riemann**

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend,  $D \neq \mathbb{C}$ . Dann existiert  $f: D \rightarrow B_1(0)$  biholomorph.