

Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Einführung in die Funktionentheorie

Beweis ist relativ einfach. Haben kein Platz, also machen wir Platz.

Prof. Dr. N. V. Shcherbina

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	7
2 Topologische Grundbegriffe	9
3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen	13
4 Konvergente und absolut konvergente Reihen	17
5 Stetige Funktionen	21
6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in \mathbb{C}	25

Vorwort

Hier kommt noch das Vorwort hin, wenn mir was einfällt. Solang müsst ihr hier mit 'ner zu 90% leeren Seite auskommen.

1

Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen

\mathbb{R} - der Körper der reellen Zahlen

Im 2-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2 der geordneten reellen Zahlenpaare $z := (x, y)$ wird eine Multiplikation eingeführt vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Dadurch wird \mathbb{R}^2 , zusammen mit der Vektorraumaddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

zu einem (kommutativen) Körper mit dem Element $(1, 0)$ als Einselement; das Inverse von $z = (x, y) \neq 0$ ist

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Dieser Körper heißt **der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen**.

Man definiert weiter $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$. Offensichtlich gilt $i^2 = -1$, man nennt i die **imaginäre Einheit** von \mathbb{C} . Für jede Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ besteht die eindeutige Darstellung $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, d.h. $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, (wir identifizieren die reellen Zahlen x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$). Man setzt

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y$$

wobei $z = x + iy$ und nennt x bzw. y **Realteil** bzw. **Imaginärteil von z** . Die Zahl z heißt **reell** bzw. **rein imaginär**, wenn $\operatorname{Im} z = 0$ bzw. $\operatorname{Re} z = 0$, letzteres bedeutet $z = y$.

Skalarprodukt und absoluter Betrag

Für $z = x + iy$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$ ist

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(w, \bar{z}) = xu + yv$$

(für $z = x + iy$ ist $\bar{z} := x - iy$) das euklidische Skalarprodukt im reellen Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist die euklidische Länge von z , sie heißt der **absolute Betrag** von z . Es gilt:

- i) $|\bar{z}| = |z|$
- ii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- iii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$
- iv) $\langle aw, az \rangle = |a|^2 \langle w, z \rangle, \langle \bar{w}, \bar{z} \rangle = \langle w, z \rangle \forall w, z, a \in \mathbb{C}$
- v) $|\langle w, z \rangle| \leq |w||z| \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
- vi) $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w, z \rangle \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cosinussatz)

Zwei Vektoren z, w heißen **orthogonal**, wenn $\langle z, w \rangle = 0$.

Fundamental für das Rechnen mit dem Absolutbetrag sind folgende Regeln:

- i) $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- ii) $|zw| = |z||w|$ (Produktregel)
- iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$-1 \leq \frac{\langle w, z \rangle}{|w||z|} \leq 1 \forall w, z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Es folgt:

$$\exists! \varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi \leq \pi : \cos \varphi = \frac{\langle w, z \rangle}{|z||w|}$$

Man nennt φ den Winkel zwischen $w, z \in \mathbb{C}$, in Zeichen $\angle(w, z) = \varphi$.

2

Topologische Grundbegriffe

Definition 2.1

Ist X irgendeine Menge, so heißt eine Funktion $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$, eine **Metrik** auf X , wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt:

- i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(X, d) heißt **metrischer Raum**.

Im Fall $X = \mathbb{C}$ nennt man $d(w, z) := |w - z| = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2}$ (die **euklidische Entfernung** der Punkte w, z in der Zahlenebene) die **euklidische Metrik** von \mathbb{C} .

In einem metrischen Raum X mit Metrik d heißt die Menge

$$B_r(c) := \{x \in X \mid d(x, c) < r\}$$

die **offene Kugel** vom **Radius** $r > 0$ mit **Mittelpunkt** $c \in X$.

Im Fall der euklidischen Metrik auf \mathbb{C} heißen die Kugeln

$$B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$$

$r > 0$, **offene Kreisscheibe** in \mathbb{C} . Wir schreiben durchweg

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

Definition 2.2

Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes X heißt **offen** (in X) $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0$ so dass $B_r(x) \subset U$ (\emptyset ist offene Menge per definitionem).

- i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ offen
- ii) U_1, U_2, \dots, U_m offen $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i$ offen

Definition 2.3

Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** (in X) $\Leftrightarrow X \setminus A$ offen.

- i) $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ abgeschlossene Mengen $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ abgeschlossen
- ii) A_1, A_2, \dots, A_m abgeschlossen $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i$ abgeschlossen

Definition 2.4

$A \subset X$ beliebig. Die **abgeschlossene Hülle** \bar{A} von A ist $\bar{A} := \bigcap B$, so dass $B \supset A$, B abgeschlossen.

Eine Menge $W \subset X$ heißt **Umgebung der Menge** $M \subset X$, wenn $\exists V$ offen mit $M \subset V \subset W$.

Sei $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$. Eine Abbildung $\{k, k+1, k+2, \dots\} \rightarrow X$, $n \mapsto c_n$, heißt **Folge** in X . Man schreibt kurz (c_n) , im Allgemeinen ist $k = 0$.

Definition 2.5

Eine Folge (c_n) heißt **konvergent** in X , wenn es einen Punkt $c \in X$ gibt, so dass in jeder Umgebung von c fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder c_n liegen. Der Punkt c heißt ein **Limes der Folge**. In Zeichen:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen in X , wenn der Limes jeder konvergenten Folge (c_n) , $c_n \in M$, stets zu M gehört.

Definition 2.6

Ein Punkt $p \in X$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge $M \subset X$ $\Leftrightarrow \forall$ Umgebung U von p gilt:

$$U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

In jeder Umgebung eines Häufungspunktes p von M liegen unendlich viele Punkte von M ; es gibt stets eine Folge (c_n) in $M \setminus \{p\}$ mit $\lim c_n = p$.

Beispiel

- i) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$. Die Menge U aller Häufungspunkte? $U = \mathbb{R}$.
 - ii) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Z}$. $U = \emptyset$.
 - iii) $X = \mathbb{R}$, $M = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $U = \{0\}$.
- //

Definition 2.7

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt **dicht**, in $X : \Leftrightarrow \forall$ offene $U \subset X : U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$.

Beispiel

$X = C[a, b]$, $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$, $f, g \in X$, $A = \mathcal{P}$ = alle Polynome auf $[a, b]$. //

Satz 2.8 Äquivalenzsatz

Folgende Aussagen über einen metrischen Raum X sind äquivalent:

- i) Jede offene Überdeckung $U = \{U_j\}_{j \in J}$ von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (Heine-Borel-Eigenschaft)
- ii) Jede Folge (x_n) in X besitzt eine konvergente Teilfolge. (Weierstraß-Bolzano-Eigenschaft)

Definition 2.9

Man nennt X **kompakt**, wenn die Bedingungen i) und ii) aus Satz 2.8 erfüllt sind. Eine Teilmenge K von X heißt **kompakt**, oder auch ein **Kompaktum** (in X), wenn K mit der induzierten Metrik ein kompakter Raum ist.

- (*) Jedes Kompaktum in X ist abgeschlossen in X . In einem kompakten Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.
- (**) Jede offene Menge D in \mathbb{C} ist die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen von D .

3

Konvergente Folgen komplexer Zahlen

Rechenregeln

Konvergiert die Folge c_n gegen $c \in \mathbb{C}$, so liegen in jeder Kreisscheibe $B_\varepsilon(c)$, $\varepsilon > 0$, um c fast alle Folgenglieder c_n .

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die **Potenzfolge** z^n konvergent: $\lim z^n = 0$; für alle $|z| > 1$ ist die Folge z^n divergent.

Definition 3.1

Eine Folge c_n heißt **beschränkt**: $\Leftrightarrow \exists M > 0$, so dass $|c_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Wie im Reellen folgt: Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt. Sind c_n, d_n konvergente Folgen, so gelten die Limesregeln:

i) $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ist $ac_n + bd_n$ konvergent:

$$\lim(ac_n + bd_n) = a \lim c_n + b \lim d_n$$

(\mathbb{C} -Linearität)

ii) Die Produktfolge $c_n d_n$ ist konvergent:

$$\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$$

iii) Ist $\lim d_n \neq 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $d_n \neq 0 \forall n \geq k$; die Quotientenfolge $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n \geq k}$ konvergiert gegen $\frac{\lim c_n}{\lim d_n}$.

iv) Die Betragsfolge $|c_n|$ reeller Zahlen ist konvergent:

$$\lim |c_n| = |\lim c_n|$$

v) Die Folge \bar{c}_n konvergiert gegen \bar{c} .

Satz 3.2

Folgende Aussagen über eine Folge c_n sind äquivalent:

- i) c_n ist konvergent.
- ii) Die beiden reellen Folgen $\operatorname{Re} c_n$, $\operatorname{Im} c_n$ sind konvergent. Im Fall der Konvergenz gilt:

$$\lim c_n = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$ Limesregeln i) und v) und $\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2}(c_n + \bar{c}_n)$, $\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2i}(c_n - \bar{c}_n)$.

$ii) \Rightarrow i)$

$$\lim c_n = \lim(\operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n) = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

□

Definition 3.3

Eine Folge c_n heißt **Cauchy-Folge**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, so dass $|c_n - c_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k$.

Satz 3.4 Konvergenzkriterium von Cauchy

Folgende Aussagen über eine Folge (c_n) sind äquivalent:

- i) (c_n) ist konvergent.
- ii) (c_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis:

$i) \Rightarrow ii)$ Da (c_n) konvergent ist, $\exists c$, so dass $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists k \in \mathbb{N} : |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq k$. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$|c_n - c_m| \leq |c_n - c| + |c - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m \geq k$$

$ii) \Rightarrow i)$ (c_n) ist eine Cauchyfolge. Es gilt:

$$|\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c_m| \leq |c_n - c_m|, \quad |\operatorname{Im} c_n - \operatorname{Im} c_m| \leq |c_n - c_m|$$

Also sind $(\operatorname{Re} c_n)$ und $(\operatorname{Im} c_n)$ reelle Cauchy-Folgen, also nach Analysis 1 konvergent. Somit ist auch $c_n = \operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n$ konvergent.

□

Satz 3.5

Für $K \subset \mathbb{C}$ ist K kompakt $\Leftrightarrow K$ beschränkt und abgeschlossen.

Satz 3.6 Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

4

Konvergente und absolut konvergente Reihen

Definition 4.1

Ist $(a_v)_{v \geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge $(s_n)_{n \geq k}$, $s_n := \sum_{v=k}^n a_v$, der Partialsummen eine **(unendliche) Reihe** mit den **Gliedern** a_v . Man schreibt $\sum_{v=k}^{\infty} a_v$, $\sum_k^{\infty} a_v$, $\sum_{v \geq k}$ oder einfach $\sum a_v$.

Eine Reihe $\sum a_v$ heißt **konvergent**, wenn die Partialsummenfolge (s_n) konvergiert, andernfalls heißt sie **divergent**. Im Konvergenzfall schreibt man suggestiv:

$$\sum a_v := \lim s_n$$

Wegen $a_n = s_n - s_{n-1}$ gilt $\lim a_n = 0$ für jede konvergente Reihe.

Die Limesregeln i) und v) übertragen sich sofort auf Reihen:

$$\sum_{v \geq k} (a a_v + b b_v) = a \sum_{v \geq k} a_v + b \sum_{v \geq k} b_v$$

$$\overline{\sum_{v \geq k} a_v} = \sum_{v \geq k} \bar{a}_v$$

Speziell folgt: Die komplexe Reihe $\sum_{v \geq k} a_v$ ist genau dann konvergent wenn die beiden reellen Reihen $\sum_{v \geq k} \operatorname{Re} a_v$ und $\sum_{v \geq k} \operatorname{Im} a_v$ konvergieren; also dann gilt:

$$\sum_{v \geq k} a_v = \sum_{v \geq k} \operatorname{Re} a_v + i \sum_{v \geq k} \operatorname{Im} a_v$$

Satz 4.2 Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine Reihe $\sum a_v$ konvergiert genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left| \sum_{m+1}^n a_v \right| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$

Definition 4.3

Eine Reihe $\sum a_v$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum |a_v|$ nichtnegativer reeller Zahlen konvergiert.

Satz 4.4 Majorantenkriterium

Es sei $\sum_{v \geq k} t_v$ eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern $t_v \geq 0$; es sei $(a_v)_{v \geq k}$ eine komplexe Zahlenfolge, so dass $\forall v : |a_v| \leq t_v$. Dann ist $\sum_{v \geq k} a_v$ absolut konvergent.

Beweis:

$$\sum_{m+1}^n |a_v| \leq \sum_{m+1}^n t_v < {}^1\varepsilon$$

Also ist $\sum |a_v|$ konvergent. □

Wegen $\max(|\operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} a|) \leq |a| \leq |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|$ gilt (nach dem Majorantenkriterium): $\sum a_v$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} a_v, \sum \operatorname{Im} a_v$ sind absolut konvergent.

Satz 4.5 Umordnungssatz

$\sum_{v \geq 0} a_v$ konvergiere absolut. Dann konvergiert jede 'Umordnung'² dieser Reihe.

Beweis: $\sum_{v \geq 0} a_v$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{v \geq 0} \operatorname{Re} a_v, \sum_{v \geq 0} \operatorname{Im} a_v$ absolut konvergent, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\sum_{m+1}^n |\operatorname{Re} a_v| < \varepsilon, \sum_{m+1}^n |\operatorname{Im} a_v| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$. $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Bijektion $\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\tau(n) \geq n_0 \forall n \geq N_0$. Also:

$$\sum_{N_0+1}^N |\operatorname{Re} a_{\tau(v)}| < \varepsilon, \quad \sum_{N_0+1}^N |\operatorname{Im} a_{\tau(v)}| < \varepsilon$$

Diese Reihen sind konvergent nach Cauchy, somit auch absolut konvergent und die Behauptung folgt. □

Sind $\sum_0^\infty a_\mu, \sum_0^\infty a_v$ zwei Reihen, so heißt jede Reihe $\sum_0^\infty c_\lambda$, wobei c_0, c_1, c_2, \dots genau einmal alle Produkte $a_\mu b_v$ durchläuft, eine **Produktreihe** von $\sum a_\mu$ und $\sum b_v$. Die wichtigste Produktreihe

¹ Cauchy-Kriterium

² $\sum a_{\tau(v)}, \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Bijektion

ist das **Cauchyprodukt** $\sum p_\lambda$ mit $p_\lambda := \sum_{\mu+\nu=\lambda} a_\mu b_\nu$. Diese Bildung wird nahegelegt, wenn man Potenzreihen formal ausmultipliziert:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu x^\mu \right) \left(\sum_0^\infty b_\nu x^\nu \right) = \sum_0^\infty p_\lambda x^\lambda$$

Satz 4.6 Reihenproduktsatz

Es seien $\sum_0^\infty a_\mu$, $\sum_0^\infty b_\nu$ absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert jede Produktreihe $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut. Es gilt stets:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu \right) \left(\sum_0^\infty b_\nu \right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

Beweis: $\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$, so dass $c_0, c_1, c_2, \dots, c_l$ unter den Produkten $a_\mu b_\nu$, $0 \leq \mu, \nu \leq m$, vorkommen. Dann:

$$\sum_0^l |c_\lambda| \leq \left(\sum_0^m |a_\mu| \right) \left(\sum_0^m |b_\nu| \right) \leq \left(\sum_0^\infty |a_\mu| \right) \left(\sum_0^\infty |b_\nu| \right) < +\infty$$

Also ist $\sum_0^\infty |c_\lambda|$ konvergent, also $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut konvergent und somit unabhängig von Umordnungen. Insbesondere:

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_m)(b_0 + b_1 + \dots + b_m) = (c_0 + c_1 + \dots + c_{(m+1)^2-1})$$

Es folgt:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu \right) \left(\sum_0^\infty b_\nu \right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

□

5

Stetige Funktionen

$f: X \rightarrow Y$, f heißt **Funktion** oder **Abbildung**, X heißt **Argumentbereich** und Y **Wertebereich**. Man schreibt auch $X \ni x \rightarrow f(x) \in Y$.

Definition 5.1

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **stetig im Punkt** $a \in X$, wenn das f -Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ einer jeden Umgebung V von $f(a)$ in Y eine Umgebung von a in X ist.

Definition 5.2

Die Funktion $f: X \rightarrow Y$ konvergiert bei Annäherung an $a \in X$ gegen $b \in Y$, in Zeichen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ oder $f(x) \rightarrow b$ wenn $x \rightarrow a$, wenn es zu jeder Umgebung V von b in Y eine Umgebung U von a in X gibt mit $f(U \setminus \{a\}) \subset V$.

Bemerkung

f ist stetig in $a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Satz 5.3 Folgenkriterium

Genau dann ist $f: X \rightarrow Y$ stetig in a , wenn \forall Folgen (x_n) von Punkten $x_n \in X$ mit $\lim x_n = a$ gilt: $\lim f(x_n) = f(a)$.

Zwei Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ werden zusammengesetzt zu $g \circ f: X \rightarrow Z$, $z \rightarrow (g \circ f)(x) := g(f(x))$. Bei dieser Komposition von Abbildungen vererbt sich die Stetigkeit: Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig in $a \in X$ und ist $g: Y \rightarrow Z$ stetig in $f(a) \in Y$, so ist $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig

in a .

Definition 5.4

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Satz 5.5 Stetigkeitskriterium

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) f ist stetig.
- ii) Das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder in Y offenen Menge V ist offen in X .
- iii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder in Y abgeschlossenen Menge A ist abgeschlossen in X .

Satz 5.6

Es sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und $K \subset X$ ein Kompaktum. Dann ist auch $f(K) \subset Y$ ein Kompaktum.

Beweis: Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Sei $W_\alpha := f^{-1}(U_\alpha) \forall \alpha \in A$. f ist stetig, also ist für alle $\alpha \in A$ W_α offen. Also ist $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existieren endlich viele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^m W_{\alpha_i}$. Dann ist $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ eine endliche Überdeckung von $f(K)$. Somit ist $f(K)$ nach Definition ein Kompaktum. \square

In Satz 5.6 ist enthalten, dass reellwertige stetige Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Kompaktum K in X Maxima und Minima annehmen.

Komplexwertige Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ lassen sich addieren und multiplizieren: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $x \in X$. Die zu f konjugierte Funktion \bar{f} wird durch $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$, $x \in X$, definiert.

Rechenregeln: $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$, $\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$, $\overline{\bar{f}} = f$. Realteil und Imaginärteil von f werden durch $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ und $(\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, $x \in X$, erklärt. Für $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$ (reellwertige Funktionen) gilt: $f = u + iv$, $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$, $f\bar{f} = u^2 + v^2$.

Man hat:

- i) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $a \in X \Rightarrow f+g, fg, \bar{f}$ stetig in a .
- ii) $f = u + iv$ stetig in $a \Leftrightarrow u, v$ stetig in a .

- iii) g nullstellenfrei in X (d.h. $g(x) \neq 0 \forall x \in X$), dann heißt die Funktion $x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ die **Quotientenfunktion** von f und g . Sind f und g stetig in $a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in a .

6

Zusammenhängende Räume, Gebiete in \mathbb{C}

Zusammenhang und Wege

Definition 6.1

Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Menge. A ist **zusammenhängend** $\Leftrightarrow \nexists U_1, U_2$ offen in X , so dass:

- i) $U_1 \cup U_2 \supset A$
- ii) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- iii) $U_1 \cap A \neq \emptyset, U_2 \cap A \neq \emptyset$

Beispiel

i) $\mathbb{R} = X, d_x(x, y) = |x - y|, A = \mathbb{Q}: U_1 = (-\infty, \sqrt{2}), U_2 = (\sqrt{2}, +\infty)$

ii) $\mathbb{R} = X, d_x(x, y) = |x - y|, A = [0, 1]$.

Seien U_1, U_2 offene Mengen mit i)-iii), $0 \in U_1, 1 \in U_2, \frac{1}{2} \in U_1 \Rightarrow I_1 = [\frac{1}{2}, 1], \frac{3}{4} \in U_2 \Rightarrow I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$
 $\Rightarrow \exists! x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ (Intervallschachtelungsprinzip). x_0 liegt also in U_1 oder U_2 . U_1 ist offen, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U_1$, aber $I_n \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ für n genügend groß. Also ist A zusammenhängend.

//

Bemerkung

Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $A, B \subset X$ zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.

Definition 6.2

Sei (X, d_x) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. $\forall x_0 \in A$ definieren wir

$$K(x) := \left\{ \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \mid x_0 \in A_{\alpha}, A_{\alpha} \subset A \text{ zusammenhängend} \right\}$$

$K(x)$ heißt **Zusammenhangskomponente des Punktes x von A** .

Bemerkung

$K(x_0)$ ist zusammenhängend.

Definition 6.3

(X, d_x) metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. A ist **wegzusammenhängend** $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in A \exists$ stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ so dass $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.

Bemerkung

$A \subset X$ wegzusammenhängend $\nLeftrightarrow A$ zusammenhängend.

Beispiel

$\mathbb{R}^2: y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1, A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}$ //

Proposition 6.4

$A \subset \mathbb{R}^2$ offen, $d_{\mathbb{R}^2}(x, y) = \|x - y\|$. A zusammenhängend $\Rightarrow A$ wegzusammenhängend.

Beweis: Sei $x_0 \in A$ beliebig, aber fixiert. $A(x_0) := \{y \in A \mid \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y\}$.

- i) $A(x_0)$ ist wegzusammenhängend.
- ii) $A(x_0)$ ist offen, weil $\forall y \in A(x_0) \subset A \exists \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(y) \subset A$. Also ist die Kurve γ von x_0 zu y + der Radius von y zu beliebigem Punkt von $B_\varepsilon(y)$ auch eine stetige Kurve. Also ist auch $B_\varepsilon(y) \subset A(x_0)$ und somit ist $A(x_0)$ offen.
- iii) $A(x_0)$ ist abgeschlossen in A . Sei $y^* \in A$ und $\exists y_n \in A(x_0), y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y^*$. Da A offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(y^*) \subset A$. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $y_n \in B_\varepsilon(y^*)$. Also existiert ein $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$, so dass $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y^*$. Dann ist diese Kurve + der Radius $[y_n, y^*]$ eine Kurve die x_0 mit y^* verbindet. Also $y^* \in A(x_0)$. Somit ist $A(x_0)$ in A abgeschlossen.

Also sind $A(x_0)$ und $A \setminus A(x_0)$ offen $\nmid A \setminus A(x_0) = \emptyset \Rightarrow A(x_0) = A$. Da $A(x_0)$ wegzusammenhängend ist, ist somit auch A wegzusammenhängend. \square

Definition 6.5

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal-konstant** genau dann wenn $\forall x \in X \exists$ offene Umgebung $U \subset X, x \in U$, so dass $f|_U = \text{konstant}$.

Ist f lokal-konstant, dann ist f stetig.

Satz 6.6

X metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- i) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ lokal-konstant $\Rightarrow f$ konstant
- ii) $A \subset X$ nicht leer, offen und abgeschlossen $\Rightarrow A = X$
- iii) X zusammenhängend

Beweis:

- $i) \Rightarrow ii)$ Sei $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, offen und abgeschlossen. $B := X \setminus A$ offen und abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in B \end{cases}.$$
 Es folgt direkt dass f lokal-konstant, also insbesondere stetig ist. Also ist f konstant, nämlich $f = 1$, denn $A \neq \emptyset$. Da $A = f^{-1}(1) = X$, ist $A = X$.
- $ii) \Rightarrow i)$ Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ lokal-konstant. Fixiere $c \in X$. $A := f^{-1}(f(c))$. Da f lokal-konstant, ist A offen, $c \in A \neq \emptyset$. Da f stetig, ist A abgeschlossen. Also ist $A = X$. Insbesondere ist $f(x) = f(c) \forall x \in X$. Also ist f konstant.

□

Satz 6.7

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall $\Rightarrow I$ zusammenhängend.

Gebiete in \mathbb{C} **Definition 6.8**

- i) $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $t \in [0, 1]$. γ heißt **Strecke** von z_0 nach z_1 , $\gamma = [z_0, z_1]$.
- ii) $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$, dann ist $[z_0, z_1] = \text{Intervall}$.
- iii) Seien $\gamma_1: [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Der **Summenweg** $\gamma_1 + \gamma_2$ von γ_1 und γ_2 ist $\gamma: [a_1, b_2 - a_2 + b_1]$, $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1] \end{cases}$.
- iv) γ heißt **Polygon** oder **Streckenweg**, falls $\gamma = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \dots + [z_{n-1}, z_n]$.
- v) Polygon γ heißt **achsenparallel**, falls $[z_j, z_{j+1}]$ parallel zur x -Achse oder y -Achse ist, $j = 0, \dots, n-1$, d.h. $\operatorname{Re} z_j = \operatorname{Re} z_{j+1}$ oder $\operatorname{Im} z_j = \operatorname{Im} z_{j+1}$.
- vi) $D \subset \mathbb{C}$ heißt **Bereich**, falls D offen und nicht leer ist.

Satz 6.9

Sei $B \subset \mathbb{C}$ Bereich. Dann sind äquivalent:

- i) B ist zusammenhängend.
- ii) $\forall p, q \in B \exists \text{ Polygon in } B$, das p und q verbindet.
- iii) B ist wegzusammenhängend.

Beweis:

ii) \Rightarrow iii) Jedes Polygon ist ein Weg.

iii) \Rightarrow i) Folgt aus Bemerkung oben.

i) \Rightarrow ii) Sei $p \in B$ fest, $z \in B$.

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \exists \text{ Polygon von } p \text{ nach } z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige: f lokal konstant. Sei $w \in B$. Da B offen, gibt es eine Kreisscheibe $\Delta \subset B$, $w \in \Delta$. Ist $z \in \Delta$, so existiert ein Polygon von z nach w in Δ . D.h. $f(w) = 1 \Rightarrow f(z) = 1$ und $f(w) = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \forall z \in \Delta$. Also ist f lokal-konstant auf B und f somit konstant. Da $f(p) = 1$ folgt $f = 1$.

□

Definition 6.10

$G \subset \mathbb{C}$ Bereich. Ist G (weg-)zusammenhängend, so heißt G Gebiet.

G ab jetzt immer ein Gebiet, und D immer ein Bereich.

Definition 6.11

$p, q \in D$ $p \sim_D q \Leftrightarrow \exists$ Weg in D der p und q verbindet. Die Äquivalenzklasse $[p]_D$ heißt Zusammenhangskomponente die p enthält.

$z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $d(z_0, z_1) = |z_0 - z_1|$ Abstand zwischen z_0 und z_1 .

$z_0 \in \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, $d(z_0, A) = \inf\{d(z_0, w) \mid w \in A\}$

$D \subset \mathbb{C}$ Bereich, $c \in D$, $\partial D = \bar{D} \setminus D$. Randabstand $d_c(D) = d(c, \partial D)$.

Sonderfall: $D = \mathbb{C}$, $d_c(D) = +\infty$.

$d = d_c(D)$ ist der maximale Radius, so dass $B_d(c) \subset D$ enthalten ist.

Beispiel

$D = B_r(a)$. $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$. //