Sebastian Kopf

Sommersemester 2016

Einführung in die Funktionentheorie

Beweis ist relativ einfach. Haben kein Platz, also machen wir Platz.
Prof. Dr. N. V. Shcherbina

Bergische Universität Wuppertal
2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Hier kommt noch das Vorwort hin, wenn mir was einfällt. Solang müsst ihr hier mit 'ner zu 90% leeren Seite auskommen.

1
Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

$\mathbb{R}$ - der Körper der reellen Zahlen

Im 2−dimensionalen $\mathbb{R}$−Vektorraum $\mathbb{R}^2$ der geordneten reellen Zahlenpaare $z := (x, y)$ wird eine Multiplikation eingeführt vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1, x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Dadurch wird $\mathbb{R}^2$, zusammen mit der Vektorraumaddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

zu einem (kommutativen) Körper mit dem Element $(1, 0)$ als Einselement; das Inverse von $z = (x, y) \neq 0$ ist

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

Dieser Körper heißt der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
Man definiert weiter $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$. Offensichtlich gilt $i^2 = -1$, man nennt i die imaginäre Einheit von $\mathbb{C}$. Für jede Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ besteht die eindeutige Darstellung $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, d.h. $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, (wir identifizieren die reellen Zahlen x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$). Man setzt

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y$$

wobei $z = x + iy$ und nennt x bzw. y Realteil bzw. Imaginärteil von z. Die Zahl z heißt reell bzw. rein imaginär, wenn $\operatorname{Im} z = 0$ bzw. $\operatorname{Re} z = 0$, letzteres bedeutet $z = y$.

Skalarpodukt und absoluter Betrag

Für $z = x + iy$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$ ist

$$\langle z, w\rangle := \operatorname{Re}(w, \bar{z}) = xu + yv$$

(für $z = x + iy$ ist $\bar{z} := x - iy$) das euklidische Skalarprodukt im reellen Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist die euklidische Länge von z, sie heißt der absolute Betrag von z. Es gilt:

i) $|\bar{z}| = |z|$

ii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

iii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$

iv) $\langle aw, az \rangle = |a|^2 \langle w, z \rangle$, $\langle \bar{w}, \bar{z} \rangle = \langle w, z \rangle \forall w, z, a \in \mathbb{C}$

v) $|\langle w, z \rangle| \leq |w||z| \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

vi) $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w, z \rangle \forall w, z \in \mathbb{C}$ (Cosinussatz)

Zwei Vektoren z, w heißen orthogonal, wenn $\langle z, w \rangle = 0$.
Fundamental für das Rechnen mit dem Absolutbetrag sind folgende Regeln:

i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ii) $|zw| = |z||w|$ (Produktregel)

iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$-1 \leq \frac{\langle w, z \rangle}{|w||z|} \leq 1 \forall w, z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Es folgt:

$$\exists! \varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi \leq \pi : \cos\varphi = \frac{\langle w, z \rangle}{|z||w|}$$

Man nennt φ den Winkel zwischen $w, z \in \mathbb{C}$, in Zeichen $\measuredangle(w, z) = \varphi$.

2
Topologische Grundbegriffe

Definition 2.1
Ist X irgendeine Menge, so heißt eine Funktion $d: X \times X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto d(x,y)$, eine Metrik auf X, wenn $\forall x,y,z \in X$ gilt:

i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

(X,d) heißt metrischer Raum.

Im Fall $X = \mathbb{C}$ nennt man $d(w,z) := |w-z| = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}$ (die euklidische Entfernung der Punkte w,z in der Zahlebene) die euklidische Metrik von $\mathbb{C}$.
In einem metrischen Raum X mit Metrik d heißt die Menge

$$B_r(c) := \{x \in X \mid d(x,c) < r\}$$

die offene Kugel vom Radius $r > 0$ mit Mittelpunkt $c \in X$.
Im Fall der euklidischen Metrik auf $\mathbb{C}$ heißen die Kugeln

$$B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$$

$r > 0$, offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. Wir schreiben durchweg

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in C \mid |z| < 1\}$$

Definition 2.2
Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes X heißt offen (in X)$\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0$ so dass $B_r(x) \subset U$ ($\emptyset$ ist offene Menge per definitionem).

i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ offen

ii) $U_1, U_2, \ldots, U_m$ offen$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i$ offen

Definition 2.3
Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen (in X)$\Leftrightarrow X \setminus A$ offen.

i) $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ abgeschlossene Mengen$\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha$ abgeschlossen

ii) $A_1, A_2, \dots, A_m$ abgeschlossen$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i$ abgeschlossen

Definition 2.4
$A \subset X$ beliebig. Die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ von A ist $\bar{A} := \bigcap B$, so dass $B \supset A$, B abgeschlossen.

Eine Menge $W \subset X$ heißt Umgebung der Menge $M \subset X$, wenn $\exists V$ offen mit $M \subset V \subset W$.
Sei $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$. Eine Abbildung $\{k, k+1, k+2, \dots\} \to X$, $n \mapsto c_n$, heißt Folge in X. Man schreibt kurz (c_n), im Allgemeinen ist $k = 0$.

Definition 2.5
Eine Folge (c_n) heißt konvergent in X, wenn es einen Punkt $c \in X$ gibt, so dass in jeder Umgebung von c fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder c_n liegen. Der Punkt c heißt ein Limes der Folge. In Zeichen:

$$c = \lim_{n \to \infty} c_n$$

Nicht konvergente Folgen heißen divergent.

Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn der Limes jeder konvergenten Folge (c_n), $c_n \in M$, stets zu M gehört.

Definition 2.6
Ein Punkt $p \in X$ heißt Häufungspunkt einer Menge $M \subset X$:$\Leftrightarrow$ $\forall$Umgebung U von p gilt:

$$U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

In jeder Umgebung eines Häufungspunktes p von M liegen unendlich viele Punkte von M; es gibt stets eine Folge (c_n) in $M \setminus \{p\}$ mit $\lim c_n = p$.

Beispiel

i) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$. Die Menge U aller Häufungspunkte? $U = \mathbb{R}$.

ii) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Z}$. $U = \emptyset$.

iii) $X = \mathbb{R}$, $M = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $U = \{0\}$.

//

Definition 2.7
Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt dicht, in X $:\Leftrightarrow$ $\forall$offene $U \subset X : U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$.

Beispiel
$X = C[a,b]$, $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$, $f,g \in X$, $A = \mathscr{P} =$ alle Polynome auf $[a,b]$. //

Satz 2.8 **Äquivalenzsatz**
Folgende Aussagen über einen metrischen Raum X sind äquivalent:

i) Jede offene Überdeckung $U = \{U_j\}_{j\in J}$ von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (Heine-Borel-Eigenschaft)

ii) Jede Folge (x_n) in X besitzt eine konvergente Teilfolge. (Weierstraß-Bolzano-Eigenschaft)

Definition 2.9
Man nennt X kompakt, wenn die Bedingungen i) und ii) aus Satz 2.8 erfüllt sind. Eine Teilmenge K von X heißt kompakt, oder auch ein Kompaktum (in X), wenn K mit der induzierten Metrik ein kompakter Raum ist.

($*$) Jedes Kompaktum in X ist abgeschlossen in X. In einem kompakten Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.

($**$) Jede offene Menge D in $\mathbb{C}$ ist die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen von D.

3

Konvergente Folgen komplexer Zahlen

Rechenregeln

Konvergiert die Folge c_n gegen $c \in \mathbb{C}$, so liegen in jeder Kreisscheibe $B_\varepsilon(c)$, $\varepsilon > 0$, um c fast alle Folgenglieder c_n.
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Potenzfolge z^n konvergent: $\lim z^n = 0$; für alle $|z| > 1$ ist die Folge z^n divergent.

Definition 3.1
Eine Folge c_n heißt beschränkt:$\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$, so dass $|c_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Wie im Reellen folgt: Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt. Sind c_n, d_n konvergente Folgen, so gelten die Limesregeln:

i) $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ist $ac_n + bd_n$ konvergent:

$$\lim(ac_n + bd_n) = a \lim c_n + b \lim d_n$$

($\mathbb{C}-$Linearität)

ii) Die Produktfolge $c_n d_n$ ist konvergent:

$$\lim(c_n d_n) = (\lim c_n)(\lim d_n)$$

iii) Ist $\lim d_n \neq 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $d_n \neq 0 \forall n \geq k$; die Quotientenfolge $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n \geq k}$ konvergiert gegen $\frac{\lim c_n}{\lim d_n}$.

iv) Die Betragsfolge $|c_n|$ reeller Zahlen ist konvergent:

$$\lim |c_n| = |\lim c_n|$$

v) Die Folge $\bar{c}_n$ konvergiert gegen $\bar{c}$.

Satz 3.2
Folgende Aussagen über eine Folge c_n sind äquivalent:

i) c_n ist konvergent.

ii) Die beiden reellen Folgen $\operatorname{Re} c_n$, $\operatorname{Im} c_n$ sind konvergent. Im Fall der Konvergenz gilt:
$$\lim c_n = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

Beweis:

i)⇒ii) Limesregeln i) und v) und $\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2}(c_n + \bar{c}_n)$, $\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2i}(c_n - \bar{c}_n)$.

ii)⇒i)
$$\lim c_n = \lim(\operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n) = \lim \operatorname{Re} c_n + i \lim \operatorname{Im} c_n$$

□

Definition 3.3
Eine Folge c_n heißt Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, so dass $|c_n - c_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k$.

Satz 3.4 **Konvergenzkriterium von Cauchy**
Folgende Aussagen über eine Folge (c_n sind äquivalent:

i) (c_n) ist konvergent.

ii) (c_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis:

i)⇒ii) Da (c_n) konvergent ist, $\exists c$, so dass $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists k \in \mathbb{N} : |c_n - c| < \varepsilon \forall n \geq k$. Mit der Dreiecksungleichung folgt:
$$|c_n - c_m| \leq |c_n - c| + |c - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m \geq k$$

ii)⇒i) (c_n) ist eine Cauchyfolge. Es gilt:
$$|\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c_m| \leq |c_n - c_m|, \quad |\operatorname{Im} c_n - \operatorname{Im} c_m| \leq |c_n - c_m|$$

Also sind $(\operatorname{Re} c_n)$ und $(\operatorname{Im} c_n)$ reelle Cauchy-Folgen, also nach Analysis 1 konvergent. Somit ist auch $c_n = \operatorname{Re} c_n + i \operatorname{Im} c_n$ konvergent.

□

Satz 3.5
Für $K \subset \mathbb{C}$ ist K kompakt $\Leftrightarrow K$ beschränkt und abgeschlossen.

Satz 3.6 **Bolzano-Weierstraß**
Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

4

Konvergente und absolut konvergente Reihen

Definition 4.1
Ist $(a_\nu)_{\nu\geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge $(s_n)_{n\geq k}$, $s_n := \sum_{\nu=k}^{n} a_\nu$, der Partialsummen eine (unendliche) Reihe mit den Gliedern a_ν. Man schreibt $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$, $\sum_{k}^{\infty} a_\nu$, $\sum_{\nu\geq k}$ oder einfach $\sum a_\nu$.
Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt konvergent, wenn die Partialsummenfolge (s_n) konvergiert, andernfalls heißt sie divergent. Im Konvergenzfall schreibt man suggestiv:

$$\sum a_\nu := \lim s_n$$

Wegen $a_n = s_n - s_{n-1}$ gilt $\lim a_n = 0$ für jede konvergente Reihe.
Die Limesregeln i) und v) übertragen sich sofort auf Reihen:

$$\sum_{\nu\geq k} (a a_\nu + b b_\nu) = a \sum_{\nu\geq k} a_\nu + b \sum_{\nu\geq k} b_\nu$$

$$\overline{\sum_{\nu\geq k} a_\nu} = \sum_{\nu\geq k} \bar{a}_\nu$$

Speziell folgt: Die komplexe Reihe $\sum_{\nu\geq k} a_\nu$ ist genau dann konvergent wenn die beiden reellen Reihen $\sum_{\nu\geq k} \operatorname{Re} a_\nu$ und $\sum_{\nu\geq k} \operatorname{Im} a_\nu$ konvergieren; also dann gilt:

$$\sum_{\nu\geq k} a_\nu = \sum_{\nu\geq k} \operatorname{Re} a_\nu + \sum_{\nu\geq k} \operatorname{Im} a_\nu$$

Satz 4.2 **Konvergenzkriterium von Cauchy**
Eine Reihe $\sum a_\nu$ konvergiert genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left| \sum_{m+1}^{n} a_\nu \right| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$$

Definition 4.3
Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum |a_\nu|$ nichtnegativer reeller Zahlen konvergiert.

Satz 4.4 **Majorantenkriterium**
Es sei $\sum_{\nu \geq k} t_\nu$ eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern $t_\nu \geq 0$; es sei $(a_\nu)_{\nu \geq k}$ eine komplexe Zahlenfolge, so dass $\forall \nu : |a_\nu| \leq t_\nu$. Dann ist $\sum_{\nu \geq k} a_\nu$ absolut konvergent.

Beweis:

$$\sum_{m+1}^{n} |a_\nu| \leq \sum_{m+1}^{n} t_\nu <^{1} \varepsilon$$

Also ist $\sum |a_\nu|$ konvergent. □

Wegen $\max(|\mathrm{Re}\, a|, |\mathrm{Im}\, a|) \leq |a| \leq |\mathrm{Re}\, a| + |\mathrm{Im}\, a|$ gilt (nach dem Majorantenkriterium): $\sum a_\nu$ ist absolut konvergent$\Leftrightarrow \sum \mathrm{Re}\, a_\nu$, $\sum \mathrm{Im}\, a_\nu$ sind absolut konvergent.

Satz 4.5 **Umordnungssatz**
$\sum_{\nu \geq 0} a_\nu$ konvergiere absolut. Dann konvergiert jede 'Umordnung'[2] dieser Reihe.

Beweis: $\sum_{\nu \geq 0}$ absolut konvergent$\Rightarrow \sum_{\nu \geq 0} \mathrm{Re}\, a_\nu$, $\sum_{\nu \geq 0} \mathrm{Im}\, a_\nu$ absolut konvergent, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\sum_{m+1}^{n} |\mathrm{Re}\, a_\nu| < \varepsilon$, $\sum_{m+1}^{n} |\mathrm{Im}\, a_\nu| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$. $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion$\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\tau(n) \geq n_0 \forall n \geq N_0$. Also:

$$\sum_{N_0+1}^{N} |\mathrm{Re}\, a_{\tau(\nu)}| < \varepsilon, \qquad \sum_{N_0+1}^{N} |\mathrm{Im}\, a_{\tau(\nu)}| < \varepsilon$$

Diese Reihen sind konvergent nach Cauchy, somit auch absolut konvergent und die Behauptung folgt. □

Sind $\sum_0^\infty a_\mu$, $\sum_0^\infty a_\nu$ zwei Reihen, so heißt jede Reihe $\sum_0^\infty c_\lambda$, wobei $c_0, c_1, c_2, \ldots$ genau einmal alle Produkte $a_\mu b_\nu$ durchläuft, eine Produktreihe von $\sum a_\mu$ und $\sum b_\nu$. Die wichtigste Produktreihe

1 Cauchy-Kriterium
2 $\sum a_{\tau(\nu)}$, $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion

ist das Cauchyprodukt $\sum p_\lambda$ mit $p_\lambda := \sum_{\mu+\nu=\lambda} a_\mu b_\nu$. Diese Bildung wird nahegelegt, wenn man Potenzreihen formal ausmultipliziert:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu x^\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu x^\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda x^\lambda$$

Satz 4.6 **Reihenproduktsatz**
Es seien $\sum_0^\infty a_\mu$, $\sum_0^\infty b_\nu$ absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert jede Produktreihe $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut. Es gilt stets:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

Beweis: $\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$, so dass $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_l$ unter den Produkten $a_\mu b_\nu$, $0 \geq \mu, \nu \geq m$, vorkommen. Dann:

$$\sum_0^l |c_\lambda| \leq \left(\sum_0^m |a_\mu|\right)\left(\sum_0^m |b_\nu|\right) \leq \left(\sum_0^\infty |a_\mu|\right)\left(\sum_0^\infty |b_\nu|\right) < +\infty$$

Also ist $\sum_0^\infty |c_\lambda|$ konvergent, also $\sum_0^\infty c_\lambda$ absolut konvergent und somit unabhängig von Umordnungen. Insbesondere:

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_m)(b_0 + b_1 + \ldots + b_m) = (c_0 + c_1 + \ldots + c_{(m+1)^2-1})$$

Es folgt:

$$\left(\sum_0^\infty a_\mu\right)\left(\sum_0^\infty b_\nu\right) = \sum_0^\infty p_\lambda$$

□

5 Stetige Funktionen

$f: X \to Y$, f heißt Funktion oder Abbildung, X heißt Argumentbereich und Y Wertebereich. Man schreibt auch $X \ni x \to f(x) \in Y$.

Definition 5.1
Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig im Punkt $a \in X$, wenn das f−Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ einer jeden Umgebung V von $f(a)$ in Y eine Umgebung von a in X ist.

Definition 5.2
Die Funktion $f: X \to Y$ konvergiert bei Annäherung an $a \in X$ gegen $b \in Y$, in Zeichen $\lim_{x \to a} f(x) = b$ oder $f(x) \to b$ wenn $x \to a$, wenn es zu jeder Umgebung V von b in Y eine Umgebung U von a in X gibt mit $f(U \setminus \{a\}) \subset V$.

Bemerkung
f ist stetig in $a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Satz 5.3 Folgenkriterium
Genau dann ist $f: X \to Y$ stetig in a, wenn $\forall$Folge (x_n) von Punkten $x_n \in X$ mit $\lim x_n = a$ gilt: $\lim f(x_n) = f(a)$.

Zwei Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ werden zusammengesetzt zu $g \circ f: X \to Z$, $z \to (g \circ f)(x) := g(f(x))$. Bei dieser Komposition von Abbildungen vererbt sich die Stetigkeit: Ist $f : X \to Y$ stetig in $a \in X$ und ist $g : Y \to Z$ stetig in $f(a) \in Y$, so ist $g \circ f : X \to Z$ stetig in a.