Inhaltsverzeichnis

16 Laurentreihen und Fourierreihen

$$A = A_{r,s}(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le r < |z-c| < s \le \infty\}$$

ist ein Kreisring um c mit innerem Radius r und äusserem Radius s. $A = A^+ \cap A^-$ mit $A^+ := B_s(c)$, $A^- := \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(c)$.

Satz 16.0.1
Es sei $f \in \mathscr{O}(A_{r,s}(c))$. Dann gilt:

$$\int_{S_\rho} f \, \mathrm{d}\zeta = \int_{S_\sigma} f \, \mathrm{d}\zeta \forall \rho, \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } r < \rho \le \sigma < s, S_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$$

Beweis: Sei $\gamma := S_\sigma - I - S_\rho + I$. Dann ist $\gamma \sim 0$, d.h. $B_\sigma(c) \setminus (\overline{B_\rho(c)} \cup I)$ ist einfach zusammenhängend. Also:

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

und

$$\int_{S_\rho} f \, \mathrm{d}\zeta - \int_I f \, \mathrm{d}\zeta - \int_{S_\rho} f \, \mathrm{d}\zeta + \int_I f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

□

Satz 16.0.2 **Cauchscher Integralsatz für Kreisringe**
$f \in \mathscr{O}(D)$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um $c \in D$ so dass $\bar{A} \subset D$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \forall z \in A$$

Beweis: Folgt direkt aus der allgemeinen Version des Cauchyschen Satzes. □

16.1 Laurentdarstellung in Kreisringen

Definition 16.1.1
Ist h eine komplexe Funktion in einem unbeschränkten Bereich W, so schreiben wir $\lim_{z\to\infty} h(z) = b$, wenn es zu jeder Umgebung V von $b \in \mathbb{C}$ ein $R > 0$ gibt, so dass $h(z) \in V \, \forall z \in W$ mit $|z| \leq R$

Satz 16.1.2
Es sei $f \in \mathscr{O}(\bar{A})$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um c mit Radien r, s. Dann existieren $f^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ und $f^- \in \mathscr{O}(A^-)$ so dass gilt: $f = f^+ + f^-$ in A und $\lim_{z\to\infty} f^-(z) = 0$. Die Funktionen f^+ und f^- sind hierdurch eindeutig bestimmt. Für jedes $\rho \in [r, s]$ gilt:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, z \in B_\rho(c)$$

$$f^-(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(c)}$$

Beweis:

Existenz: Die Funktion

$$f_\rho^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, z \in B\rho(c)$$

ist holomorph in $B_\rho(c)$. Für $\sigma \in (\rho, s)$ gilt: $f_\rho^+ = f_\sigma^+|_{B_\rho(c)}$ nach dem Integralsatz. Es gibt also eine Funktion $f^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ die in $B_\rho(c)$ mit f^+ übereinstimmt. Ebenso ist

$$f^-(z) := f_\sigma^-(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, z \in A^-, r < \sigma < \min\{s, |z - c|\}$$

holomorph in A^-. Die Integralformel, angewendet auf alle Kreisringe A' um c mit $\bar{A}' \subset A$, liefert in A die Darstellung $f = f^+ + f^-$. Die Standardabschätzung für Integrale gilt für $z \in A^-$:

$$|f^-(z)| \leq \sigma \max_{\zeta \in S_\sigma} |f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}| \leq \frac{\sigma}{|z - c| - \sigma} |f|_{S_\sigma}$$

also $\lim_{z\to\infty} f^-(z) = 0$.

Eindeutigkeit: Es seien $g^+ \in \mathcal{O}(A^+)$, $g^- \in \mathcal{O}(A^-)$ weitere Funktionen mit $f = g^+ + g^-$ in A und $\lim_{z\to\infty} g^-(z) = 0$. Dann gilt:

$$f^+ - g^+ = g^- - f^-$$

auf A. Daher wird durch $h := f^+ - g^+$ auf A^+ und $h := g^- - f^-$ auf A^- eine ganze Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ definiert. h ist beschränkt auf $\mathbb{C}$ und mit Liouville ist $h(z) \equiv$const. Wegen dem Limes ist $h(z) \equiv 0$, also $g^+ \equiv f^+$ und $g^- \equiv f^-$.

□