Inhaltsverzeichnis

15

Isolierte Singularitäten

Definition 15.0.1
Ist f holomorph in einem Bereich D mit Ausnahme eines Punktes $c \in D$, so heißt der Punkt c eine isolierte Singularität voin f.

15.1 Hebbare Singularitäten, Pole

Definition 15.1.1
Eine isolierte Singularität c einer holomorphen Funktion $f \in \mathscr{O}(D \setminus \{c\})$ heißt hebbar, wenn f holomorph nach c fortsetzbar ist.

Beispiel
$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ für $z \neq 0$.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right) =: g(z)$$

$g(z) = \frac{\sin z}{z}$, d.h. $g(z)$ ist eine holomorphe Fortsetzung von $\frac{\sin z}{z}$ auf ganz $\mathbb{C}$. Also ist 0 eine hebbare Singularität von $\frac{\sin z}{z}$. //

Satz 15.1.2 **Hebbarkeitssatz**
Der Punkt c ist genau dann eine hebbare Singularität von $f \in \mathscr{O}(D \setminus \{0\})$, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von c gibt, so dass f in $U \setminus \{c\}$ beschränkt ist.

Beweis: Folgt direkt aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz, □

Definition 15.1.3
Sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{c\})$. Ist $(z-c)^n f(z)$ beschränkt für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ in einer Umgebung von c und für $n \neq 0$ nicht beschränkt, so heißt c ein Pol von f. Dann heißt die Zahl

$$m := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (z-c)^k f(z) \text{ beschräkt um } c\} \geq 1$$

die Ordnung des Pols c von f.

Beispiel
$D = \Delta \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \Rightarrow 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots = z^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots\right)}_{=:g(z)\in\mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

Also $f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{g(z)}$. Die Ordnung des Pols 0 von $f(z)$ ist also $= 2$. //

Satz 15.1.4
Folgende Aussagen über $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, sind äquivalent:

i) f hat in c einen Pol der Ordnung m.

ii) Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $g(z) \neq 0$ so dass gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m} \forall z \in D \setminus c$$

iii) Es gibt eine Umgebung $U \subset D$ von c und ein $h \in \mathcal{O}(U)$, $h(z) \neq 0 \forall z \in U$, $h(z)$ hat eine Nullstelle der Ordnung m in c, so dass $f = \frac{1}{h}$ in $U \setminus c$.

iv) $\exists U \subset D$ Umgebung von c, $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$, so dass $\forall z \in U \setminus c$ gilt:

$$M|z-c|^{-m} \leq |f(z)| \leq \tilde{M}|z-c|^{-m}$$

Beweis:

i)⇒ii): $(z-c)^m f(z)$ ist in $U \setminus c$ beschränkt für eine Umgebung U von c. Dann $\exists g \in \mathcal{O}(U)$ so dass $(z-c)^m f(z) = g(z) \forall z \in U \setminus c$. Wir haben $g(c) \neq 0$, weil m die Ordnung von f ist. Also gilt $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$.

ii)⇒iii): $g(c) \neq 0 : \exists U \subset D$ Umgebung von c, so dass $g(z) \neq 0 \forall z \in U$. Dann ist $\tilde{h}(z) := \frac{1}{g(z)} \in \mathcal{O}(U)$ und $h(z) := (z-c)^m \tilde{h}(z) \in \mathcal{O}(U)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$ und

$$f = \frac{g(z)}{(z-c)^m} = \frac{1}{(z-c)^m \frac{1}{g(z)}} = \frac{1}{h(z)}$$

h hat eine Nullstelle der Ordnung in c.

iii)⇒iv): $f = \frac{1}{h}$, wobei $h(z) = (z-c)^m \tilde{h}(z)$, $\tilde{h}(c) \neq 0$. Da $\tilde{h} \in \mathcal{O}(U)$, folgt $\tilde{h} \in C(U)$ und $\exists U' \subset U$ eine Umgebung von c, $\exists M > 0, \tilde{M} > 0$ so dass

$$M \leq |\tilde{h}(z)| \leq \tilde{M} \forall z \in U'$$

Dann ist

$$\frac{1}{\tilde{M}} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} \right| \leq \frac{1}{M}$$

Und somit:

$$\frac{1}{\tilde{M}} |z-c|^{-m} \leq \left| \frac{1}{\tilde{h}(z)} |z-c|^{-m} \right| = |f(z)| \leq \frac{1}{M} |z-c|^{-m}$$

iv)⇒i): Aus iv) folgt $|f(z)(z-c)^m| \leq \tilde{M} \forall z \in U \setminus c$. $z = c$ ist ein Pol von f. Sei $k < m$.

$$|f(z)(z-c)^m| \geq M|z-c|^{-m}|z-c|^k = M|z-c|^{k-m} \to \infty$$

D.h. m ist die Ordnung von f in c.

□

Korollar 15.1.5
Die Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ hat genau dann einen Pol in c, wenn gilt:

$$\lim_{z \to c} f(z) = \infty$$

Beweis: Trivial. 'Hinrichtung' folgt aus iv), 'Rückrichtung' folgt aus iii) mit $h = \frac{1}{f}$. □

15.2 Entwicklung von Funktionen um Polstellen

Satz 15.2.1
Es sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ und es sei c ein Pol $m-$ter Ordnung von f. Dann gibt es $b_1, ..., b_m \in \mathbb{C}$ mit $b_m \neq 0$ und $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ so dass:

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-c)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-c)^{m-1}} + ... + \frac{b_1}{z-c} + \tilde{f}(z), z \in D \setminus c \qquad (*)$$

Die Zahlen $b_1, ..., b_m$ und die Funktion $\tilde{f}$ sind eindeutig durch f bestimmt.
Umgekehrt, hat jede Funktion $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$, für die $(*)$ gilt, in c einen Pol der Ordnung m.

Beweis: f hat einen Pol in c $m-$ter Ordnung, also $f(z) = \frac{1}{(z-c)^m} g(z)$ mit $g(z) \in \mathcal{O}(D)$, $g(c) \neq 0$.
Es gilt:

$$g(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + ...$$

Also:

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-c)^m} + \frac{a_1}{(z-c)^{m-1}} + ... + \frac{a_{m-1}}{z-c} + \underbrace{a_m + a_{m+1}(z-c) + ...}_{=:\tilde{f}(z)}$$

Die umgekehrte Richtung ist trivial. □