Inhaltsverzeichnis

12 Komplexe Integralrechnung

12.1 Wegintegrale in $\mathbb{C}$

Eine Kurve: $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2_{x,y}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, stetig differenzierbar.
$\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt, $\gamma(b)$ Endpunkt.

12.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale

Satz 12.2.1 **Vertauschungssatz für Reihen**
Sei γ ein Weg und $\sum f_\nu$, $f_\nu \in C(|\gamma|)$, eine Funktionsreihe, die in $|\gamma|$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

$$\sum \int_\gamma f_\nu \mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\sum f_\nu\right) \mathrm{d}z = \int_\gamma f \,\mathrm{d}z$$

12.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen

Satz 12.3.1
Ist f stetig in D, so sind folgende Aussagen über eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ äquivalent:

i) F ist holomorph in D und es gilt $F' = f$.

ii) Für jeden Weg γ in D mit Anfangspunkt w und Endpunkt z gilt:

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = F(z) - F(w)$$

Beweis:

i)⇒ii): Ist $\gamma\colon [a,b]\to D$, $t\mapsto \zeta(t)$, stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\zeta(t))\zeta'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\zeta(t))\zeta'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(\zeta(t)))\mathrm{d}t = F(\zeta(b)) - F(\zeta(a)) = F(z) - F(w)$$

Ist nun $\gamma = \gamma_1 + .. + \gamma_m$ irgendein Weg, dann ist

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{\mu=1}^{m}\int_{\gamma_\mu} f\,\mathrm{d}z = \sum_{\mu=1}^{m} F(b_\mu) - F(a_\mu) = F(b_m) - F(a_i) = F(z) - F(w)$$

ii)⇒i): Wir zeigen, dass für jeden Punkt $c\in D$ gilt: $F'(c) = f(c)$. Es sei $\bar{B}\subset D$ eine Kreisscheibe um c. Nach Voraussetzung gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f\,\mathrm{d}z \,\forall z\in B$$

Setzt man

$$F_1(z) = \frac{1}{z-c}\int_{[c,z]} f\,\mathrm{d}\zeta$$

für $z\in B\setminus\{c\}$ und $F_1(c) := f(c)$, so folgt:

$$F(z) = F(c) + (z-c)F_1(z), \quad z\in B$$

Zeigen wir noch, dass F_1 stetig in c ist, so folgt $F'(c) = F_1(c) = f(c)$. Für $z\in B\setminus\{c\}$ gilt:

$$F_1(z) - F_1(c) = \frac{1}{z-c}\int_{[c,z]} (f(\zeta) - f(c))\mathrm{d}\zeta$$

Es folgt:

$$|F_1(z) - F_1(c)| \le \frac{1}{|z-c|}|f - f(c)|_{[z,c]}|z-c| \le |f - f(c)|_B \,\forall z\in B$$

f ist stetig, also folgt, dass F_1 stetig in c ist.

□

Eine Funktion $f\in C(D)$ heißt integrabel, wenn eine Stammfunktion von f existiert.

Satz 12.3.2 **Integrabilitätskriterium**
Folgende Aussagen über eine in D stetige Funktion f sind äquivalent:

i) f ist integrabel in D.

ii) Für jeden in D geschlossenen Weg γ gilt:

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = 0$$

Bemerkung

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

ist eine Stammfunktion wenn i) gilt. Weil

$$0 = \int_{\gamma_z - \gamma_z'} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_z'} f\,\mathrm{d}\zeta$$

also

$$\int_{\gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_z'} f\,\mathrm{d}\zeta \forall \gamma_z, \gamma_z'$$

mit Anfangspunkt z und Endpunkt z, d.h. $F(z)$ ist von der Wahl von γ_z unabhängig, d.h. $F(z)$ ist korrekt definiert und man kann zeigen, dass $F'(z) = f(z) \forall z \in D$.

Beweis:

ii)⇒i): Da Wege stets in Zusammenhangskomponenten von D verlaufen, darf man annehmen, dass D ein Gebiet ist. Sei γ irgendein Weg in D von w nach z, Wege γ_z, γ_w in D von z_1 nach w bzw. z. Dann ist $\gamma_w + \gamma - \gamma_z$ ein geschlossener Weg, daher gilt

$$0 = \int_{\gamma_w + \gamma - \gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_w} f\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_z} f\,\mathrm{d}\zeta = F(w) + \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}\zeta - F(z)$$

Also erfüllt F die Eigenschaft vom letzten Satz.

i)⇒ii): Trivial, weil

$$\int_{\gamma} f\,\mathrm{d}\zeta = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt}) = 0$$

□

Definition 12.3.3
$G \subset \mathbb{C}$ heißt Sterngebiet mit Zentrum $c \in G$ genau dann, wenn $\forall z \in G$ gilt: $[c, z] \subset G$.

Definition 12.3.4
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei Punkte. Die kompakte Menge

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1), s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\}$$

heißt das (kompakte) Dreieck mit Eckpunkten z_1, z_2, z_3.
Der geschlossene Streckenzug

$$\partial\Delta := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$$

heißt der Rand von Δ.

Satz 12.3.5
Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum z_1. Es sei $f \in C(G)$, für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset G$, das z als Endpunkt hat, gelte:

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Dann ist f integrabel in G, die Funktion

$$F(z) := \int_{[z_1, z]} f \, \mathrm{d}\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion zu f in G. Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Beweis: Sei G ein Sterngebiet. Dann ist $[z_1, z] \subset G \forall z \in G$ und F wohldefiniert. Sei $c \in G$ fixiert. Ist z nahe genug bei c gewählt, so liegt das Dreieck Δ mit den Eckpunkten z_1, c, z in G. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral von f längs $\partial\Delta = [z_1, c] + [c, z] + [z, z_1]$, so gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f \, \mathrm{d}\zeta$$

$z \in G$ nahe bei c. hieraus folgt wie im Beweis der Implikation ii)$\Rightarrow$i) des Satzes 1, dass F in c komplex differenzierbar ist und dass gilt: $F'(c) = f(c)$. $\square$