Inhaltsverzeichnis

13

Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung

13.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

Lemma 13.1.1 **Integrallemma von Goursat**
Es sei f holomorph im Bereich D. Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset D$:

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Beweis: Sei $\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta \neq 0$ und sei

$$\alpha(\Delta) := \left| \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta \right| \neq 0$$

Wir teilen Δ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Dann

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f \, \mathrm{d}\zeta$$

Damit existiert ein k_1, so dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f \, \mathrm{d}\zeta \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4}$$

Wir teilen $\Delta_1^{k_1}$ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_2^{k_1,1}, \Delta_2^{k_1,2}, \Delta_2^{k_1,3}, \Delta_2^{k_1,4}$ und bekommen

$$\int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_2^{k_1,k}} f \, \mathrm{d}\zeta$$

Damit existiert ein k_2, so dass

$$\left|\int_{\partial\Delta_2^{k_1,k_2}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_1^{k}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^2}\alpha(\Delta)$$

Wir machen genau das gleiche für $\Delta_2^{k_!,k_2}$ und bekommen $\Delta_3^{k_1,k_2,k_3},\dots,\Delta_m^{k_1,k_2,\dots,k_m}$, so dass

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^m}\alpha(\Delta)$$

Es existiert genau ein

$$p = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_m^{k_1,..,k_m} \subset D$$

$f \in \mathscr{O}(D)$, also:

$$f(\zeta) = f(p) + f'(p)(\zeta - p) + g(\zeta)(\zeta - p), \quad g \in C(D), g(p) = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f(p)\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f'(p)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} g(\zeta)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta$$

Für $f(p)$ ist $f(p)\zeta$ eine Stammfunktion, für $f'(p)(\zeta - p)$ ist $\frac{1}{2}f'(p)(\zeta - p)^2$ eine Stammfunktion, also folgt:

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} g(\zeta)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta\right| \leq \sup_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} |g(\zeta)(\zeta - p)| \cdot \frac{l(\Delta)}{2^m} \leq \sup_{\zeta\in\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

Auf der anderen Seite:

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^m}\alpha(\Delta)$$

$$\frac{1}{4^m}\alpha(\Delta) \geq \sup_{\zeta\in\partial\Delta_m^{k_1,\dots,k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \lightning$$

□

Satz 13.1.2 **Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete**
Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum c, es sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph in G. Dann ist f integrabel in G, die Funktion

$$F(z) := \int_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion von f in G. Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Beweis: Wegen $f \in \mathscr{O}(G)$ folgt mit Goursat:

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta = 0, \quad \Delta \subset G$$

Mit dem Integrabilitätskriterium für Sterngebiete folgt dann, dass

$$F(z) = \int_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\zeta$$

eine Stammfunktion von f ist. □

Reeller Beweis des Integrallemmas von Goursat: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\Sigma \subset D$ mit glattem Rand $\partial\Sigma$ und $f \in \mathscr{O}(D)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} f \,\mathrm{d}\zeta &= \int_{\partial\Sigma} (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\partial\Sigma} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int_{\partial\Sigma} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \\
&= \iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

13.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

Lemma 13.2.1 **Zentrierungslemma**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\bar{B} \subset D$ eine Kreisscheibe, $B_r(z) := \{\eta \mid |z-\zeta| = r\}$ und $f \in \mathscr{O}(D \setminus \{z\})$. Dann ist

$$\int_{\partial B} f \,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B_r(z)} f \,\mathrm{d}\zeta$$

Beweis: Sei l eine Gerade, so dass $z \in l$. Wir nehmen Ω_1, Ω_2 wie auf dem Bild (:|). Dann sind $\omega_1 \subset \tilde{\Omega}_1$ und $\Omega_2 \subset \tilde{\Omega}_2$ Sterngebiete. Dann:

$$\int_{\partial\Omega_1} f \,\mathrm{d}\zeta = 0, \quad \int_{\partial\Omega_2} f \,\mathrm{d}\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Es folgt:

$$\int_{\partial B} f \,\mathrm{d}\zeta - \int_{\partial B_r(z)} f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Die Aussage folgt. □

Korollar 13.2.2
Ist g beschränkt um z, so gilt:

$$\int_{\partial B} g \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Beweis: $\exists M > 0, \varepsilon > 0$, so dass $\forall$Kreis $S \subset B$ um z mit Radius $t < s$ gilt: $|g|_S \leq M$. Mit dem Zentrierungslemma und der Standardabschätzung haben wir:

$$\left|\int_{\partial B} g \,\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{S} g \,\mathrm{d}\zeta\right| \leq |g|_S 2\pi t \leq M 2\pi t \forall t > 0$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 13.2.3 **Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben**
Es sei f holomorph im Bereich D, es sei $B := B_r(c)$, $r > 0$, eine Kreisscheibe, die nebst Rand ∂B in D liegt. Dann gilt $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Beweis: Sei $z \in B$ fixiert. Die Funktion $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ für $\zeta \in D \setminus \{z\}$, $g(z) := f'(z)$, ist holomorph in $D \setminus \{z\}$ und stetig in D. Dann folgt:

$$0 = \int_{\partial B} g \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - 2\pi i f(z)$$

Die Behauptung folgt. □

Korollar 13.2.4 **Mittelwertgleichung**
Unter den Voraussetzungen von obigem Satz gilt:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Beweis:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \mathrm{d}(c + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \in_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta}) rie^{i\theta} re^{i\theta}}{\mathrm{d}} \theta$$

Durch Kürzen erhält man die obige Formel. □

Korollar 13.2.5 **Mittelwertungleichung**

$$|f(c)| \leq |f|_{\partial B_r(c)}$$

13.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

Definition 13.3.1
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt im Kreis $B = B_r(c) \subset D$ in eine Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ um c entwickelbar, wenn die Potenzreihe in B gegen $f|_B$ konvergiert.

Aus der Vertauschbarkeit von Differentation und Summation für Potenzreihen folgt sofort:

Satz 13.3.2
Ist f in B um c in eine Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ entwickelbar, so ist f in B beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt:

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!} \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Eine Potenzreihenentwicklung einer Funktion f um c ist also, unabhängig vom Radius r des Kreises B, eindeutig durch die Ableitungen von f in c bestimmt und hat immer die Form

$$f(z) = \sum \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu}(z-c)^\nu$$

Diese Reihe heißt (wie im Reellen) die Taylorreihe von f um c. Sie konvergiert in B normal.

Ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$, so ordnen wir jeder stetigen Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

zu. Wir behaupten:

Lemma 13.3.3 **Entwicklungslemma**
Die Funktion F ist in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ holomorph. Ist $c \notin |\gamma|$ irgendein Punkt, so konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty a_\nu (z-c)^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\nu+1}} \mathrm{d}\zeta$$

in jeder Kreisscheibe um c, die $|\gamma|$ nicht trifft, gegen F. Die Funktion F ist beliebig oft differenzierbar in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Es gilt:

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \forall k \in \mathbb{N}$$

Beweis: Sei $B = B_r(c)$ mit $B \cap |\gamma| = \emptyset$. Die in $\mathbb{E}$ konvergente Reihe

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} w^{\nu-k}$$

liefert (mit $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} &= \sum_{\nu \geq k} \frac{1}{(\zeta-c)^{\nu+1}} (\zeta-c)^{\nu-k} \forall z \in B, \zeta \in |\gamma|, k \in \mathbb{N} \\
&= \frac{1}{((\zeta-c)-(z-c))^{k+1}} \\
&= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \frac{1}{\left(1-\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)\right)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{(\zeta-c)^{k+1}} \sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^{\nu-k}
\end{aligned}$$

Mit $g_\nu(\zeta)$, $\zeta \in |\gamma|$, folgt daher:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{\nu \geq k} k! \binom{\nu}{k} g_\nu(\zeta)(z-c)^{\nu-k} \mathrm{d}\zeta$$

Da $|\zeta - c| \geq r \forall \zeta \in |\gamma|$, folgt $|g_\nu|_{|\gamma|} \leq r^{-(\nu+1)} |f|_{|\gamma|}$ und also

$$\max_{\zeta \in |\gamma|} |g_\nu(\zeta)(z-c)^{\nu-k}| \leq \frac{1}{r^{k+1}} |f|_{|\gamma|} q^{\nu-k} \quad \text{mit} \quad q := \frac{|z-c|}{r}$$

Da $0 \leq q < 1 \forall z \in B$ und da

$$\sum_{\nu \geq k} \binom{\nu}{k} q^{\nu-k} = \frac{1}{(1-q)^{\nu+1}}$$

konvergiert oben die rechts unter dem Integral stehende Reihe für feste $z \in B$ in ζ normal auf γ. Daher gilt nach dem Vertauschungssatz für Reihen:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta = \sum_{\nu \geq k} k! \binom{\nu}{k} a_\nu (z-c)^{\nu-k} \quad \text{mit} \quad a_\nu := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} \mathrm{d}\zeta$$

Damit ist gezeigt, dass die durch oben definierte Funktion F in der Kreisscheibe B durch die Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ dargestellt wird ($k = 0$), wegen Eigenschafteen von Potenzreihen folgt weiter, dass F in B komplex differenzierbar ist und dass gilt:

$$F^{(k)}(z) = \sum_{\nu \geq k} k! \binom{\nu}{k} a_\nu (z-c)^{\nu-k}, \quad z \in B, k \in \mathbb{N}$$

Da B irgendeine Kreisscheibe in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, so folgt (2) und insbesondere $F \in \mathcal{O}(\setminus |\gamma|)$. □