

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	7
2 Topologische Grundbegriffe	9
3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen	13
4 Konvergente und absolut konvergente Reihen	17
5 Stetige Funktionen	21
6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in \mathbb{C}	25
7 Komplexe Differentialrechnung	31
8 Holomorphe Funktionen	35
9 Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie	39
10 Potenzreihen	41
10.1 Konvergenzkriterien	41
10.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen	44
10.3 Holomorphie von Potenzreihen	45
11 Elementar-transzendente Funktionen	49
11.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	49
11.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln	51
11.3 Logarithmusfunktion	53
12 Komplexe Integralrechnung	55
12.1 Wegintegrale in \mathbb{C}	55
12.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale	55
12.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen	55
13 Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung	59
13.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	59
13.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	62
13.3 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen	64

14 Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen	69
14.1 Identitätssatz	69
14.2 Existenz singulärer Punkte	71
14.3 Konvergenzsätze von Weierstraß	73
14.4 Offenheitssatz und Maximumprinzip	75
14.5 Allgemeine Version von Cauchys Satz	79
15 Isolierte Singularitäten	83
15.1 Hebbare Singularitäten, Pole	83
15.2 Entwicklung von Funktionen um Polstellen	86
15.3 Wesentliche Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstrass	87
16 Laurentreihen und Fourierreihen	89
16.1 Laurentdarstellung in Kreisringen	90

16

Laurentreihen und Fourierreihen

$$A = A_{r,s}(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r < |z - c| < s \leq \infty\}$$

ist ein **Kreisring** um c mit innerem Radius r und äusserem Radius s . $A = A^+ \cap A^-$ mit $A^+ := B_s(c)$, $A^- := \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(c)$.

Satz 16.0.1

Es sei $f \in \mathcal{O}(A_{r,s}(c))$. Dann gilt:

$$\int_{S_\rho} f d\zeta = \int_{S_\sigma} f d\zeta \forall \rho, \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } r < \rho \leq \sigma < s, S_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$$

Beweis: Sei $\gamma := S_\sigma - I - S_\rho + I$. Dann ist $\gamma \sim 0$, d.h. $B_\sigma(c) \setminus (\overline{B_\rho(c)} \cup I)$ ist einfach zusammenhängend. Also:

$$\int_\gamma f d\zeta = 0$$

und

$$\int_{S_\rho} f d\zeta - \int_I f d\zeta - \int_{S_\rho} f d\zeta + \int_I f d\zeta = 0$$

□

Satz 16.0.2 Cauchscher Integralsatz für Kreisringe

$f \in \mathcal{O}(D)$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um $c \in D$ so dass $\bar{A} \subset D$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \forall z \in A$$

Beweis: Folgt direkt aus der allgemeinen Version des Cauchyschen Satzes. □

16.1 Laurentdarstellung in Kreisingen

Definition 16.1.1

Ist h eine komplexe Funktion in einem unbeschränkten Bereich W , so schreiben wir $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = b$, wenn es zu jeder Umgebung V von $b \in \mathbb{C}$ ein $R > 0$ gibt, so dass $h(z) \in V \forall z \in W$ mit $|z| \leq R$

Satz 16.1.2

Es sei $f \in \mathcal{O}(\bar{A})$, $A = A^+ \cap A^-$ ein Kreisring um c mit Radien r, s . Dann existieren $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ und $f^- \in \mathcal{O}(A^-)$ so dass gilt: $f = f^+ + f^-$ in A und $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$. Die Funktionen f^+ und f^- sind hierdurch eindeutig bestimmt. Für jedes $\rho \in [r, s]$ gilt:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B_\rho(c)$$

$$f^-(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(c)}$$

Beweis:

Existenz: Die Funktion

$$f_\rho^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in B_\rho(c)$$

ist holomorph in $B_\rho(c)$. Für $\sigma \in (\rho, s)$ gilt: $f_\rho^+ = f_\sigma^+|_{B_\rho(c)}$ nach dem Integralsatz. Es gibt also eine Funktion $f^+ \in \mathcal{O}(A^+)$ die in $B_\rho(c)$ mit f_ρ^+ übereinstimmt. Ebenso ist

$$f^-(z) := f_\sigma^-(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{S_\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in A^-, r < \sigma < \min\{s, |z - c|\}$$

holomorph in A^- . Die Integralformel, angewendet auf alle Kreisinge A' um c mit $\bar{A}' \subset A$, liefert in A die Darstellung $f = f^+ + f^-$. Die Standardabschätzung für Integrale gilt für $z \in A^-$:

$$|f^-(z)| \leq \sigma \max_{\zeta \in S_\sigma} |f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}| \leq \frac{\sigma}{|z - c| - \sigma} |f|_{S_\sigma}$$

also $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$.

Eindeutigkeit: Es seien $g^+ \in \mathcal{O}(A^+)$, $g^- \in \mathcal{O}(A^-)$ weitere Funktionen mit $f = g^+ + g^-$ in A und $\lim_{z \rightarrow \infty} g^-(z) = 0$. Dann gilt:

$$f^+ - g^+ = g^- - f^-$$

auf A . Daher wird durch $h := f^+ - g^+$ auf A^+ und $h := g^- - f^-$ auf A^- eine ganze Funktion $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$ definiert. h ist beschränkt auf \mathbb{C} und mit Liouville ist $h(z) \equiv \text{const.}$ Wegen dem Limes ist $h(z) \equiv 0$, also $g^+ \equiv f^+$ und $g^- \equiv f^-$.

□