Inhaltsverzeichnis

Vorwort 5

1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen 7

2 Topologische Grundbegriffe 9

3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen 13

4 Konvergente und absolut konvergente Reihen 17

5 Stetige Funktionen 21

6 Zusammenhängende Räume, Gebiete in $\mathbb{C}$ 25

7 Komplexe Differentialrechnung 31

8 Holomorphe Funktionen 35

9 Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie 39

10 Potenzreihen 41
10.1 Konvergenzkriterien 41
10.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen 44
10.3 Holomorphie von Potenzreihen 45

11 Elementar-transzendente Funktionen 49
11.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen 49
11.2 Polarkoordinaten und Einheitswurzeln 51
11.3 Logarithmusfunktion 53

12 Komplexe Integralrechnung 55
12.1 Wegintegrale in $\mathbb{C}$ 55
12.2 Eigenschaften komplexer Wegintegrale 55
12.3 Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen 55

13 Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung 59
13.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete 59
13.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben 62

13

Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung

13.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

Lemma 13.1.1 **Integrallemma von Goursat**
Es sei f holomorph im Bereich D. Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subset D$:

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Beweis: Sei $\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta \neq 0$ und sei

$$\alpha(\Delta) := \left| \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta \right| \neq 0$$

Wir teilen Δ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Dann

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f \, \mathrm{d}\zeta$$

Damit existiert ein k_1, so dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f \, \mathrm{d}\zeta \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4}$$

Wir teilen $\Delta_1^{k_1}$ in vier gleiche Dreiecke $\Delta_2^{k_1,1}, \Delta_2^{k_1,2}, \Delta_2^{k_1,3}, \Delta_2^{k_1,4}$ und bekommen

$$\int_{\partial\Delta_1^{k_1}} f \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_2^{k_1,k}} f \, \mathrm{d}\zeta$$

Damit existiert ein k_2, so dass

$$\left|\int_{\partial\Delta_2^{k_1,k_2}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_1^{k}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^2}\alpha(\Delta)$$

Wir machen genau das gleiche für $\Delta_2^{k_!,k_2}$ und bekommen $\Delta_3^{k_1,k_2,k_3},\ldots,\Delta_m^{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, so dass

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^m}\alpha(\Delta)$$

Es existiert genau ein

$$p = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_m^{k_1,..,k_m} \subset D$$

$f \in \mathcal{O}(D)$, also:

$$f(\zeta) = f(p) + f'(p)(\zeta - p) + g(\zeta)(\zeta - p), \quad g \in C(D), g(p) = 0$$

Dann:

$$\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} f(p)\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} f'(p)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} g(\zeta)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta$$

Für $f(p)$ ist $f(p)\zeta$ eine Stammfunktion, für $f'(p)(\zeta - p)$ ist $\frac{1}{2}f'(p)(\zeta - p)^2$ eine Stammfunktion, also folgt:

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} g(\zeta)(\zeta - p)\mathrm{d}\zeta\right| \leq \sup_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} |g(\zeta)(\zeta-p)| \cdot \frac{l(\Delta)}{2^m} \leq \sup_{\zeta\in\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

Auf der anderen Seite:

$$\left|\int_{\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} f\,\mathrm{d}\zeta\right| \geq \frac{1}{4^m}\alpha(\Delta)$$

$$\frac{1}{4^m}\alpha(\Delta) \geq \sup_{\zeta\in\partial\Delta_m^{k_1,\ldots,k_m}} |g(\zeta)| \frac{l(\Delta)^2}{4^m} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \lightning$$

□

Satz 13.1.2 **Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete**
Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum c, es sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph in G. Dann ist f integrabel in G, die Funktion

$$F(z) := \int_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in G$$

ist eine Stammfunktion von f in G. Speziell gilt:

$$\int_{\gamma} f \,\mathrm{d}\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Beweis: Wegen $f \in \mathcal{O}(G)$ folgt mit Goursat:

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta = 0, \quad \Delta \subset G$$

Mit dem Integrabilitätskriterium für Sterngebiete folgt dann, dass

$$F(z) = \int_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\zeta$$

eine Stammfunktion von f ist. $\square$

Reeller Beweis des Integrallemmas von Goursat: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\Sigma \subset D$ mit glattem Rand $\partial\Sigma$ und $f \in \mathcal{O}(D)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} f \,\mathrm{d}\zeta &= \int_{\partial\Sigma} (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\partial\Sigma} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i \int_{\partial\Sigma} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \\
&= \iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + i \iint_{\Sigma} -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

13.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

Lemma 13.2.1 **Zentrierungslemma**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\bar{B} \subset D$ eine Kreisscheibe, $B_r(z) := \{\eta \mid |z-\zeta| = r\}$ und $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z\})$. Dann ist

$$\int_{\partial B} f \, \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B_r(z)} f \, \mathrm{d}\zeta$$

Beweis: Sei l eine Gerade, so dass $z \in l$. Wir nehmen Ω_1, Ω_2 wie auf dem Bild (:|). Dann sind $\omega_1 \subset \tilde{\Omega}_1$ und $\Omega_2 \subset \tilde{\Omega}_2$ Sterngebiete. Dann:

$$\int_{\partial\Omega_1} f \, \mathrm{d}\zeta = 0, \quad \int_{\partial\Omega_2} f \, \mathrm{d}\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Es folgt:

$$\int_{\partial B} f \, \mathrm{d}\zeta - \int_{\partial B_r(z)} f \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Die Aussage folgt. $\square$